1
Apresentação

1.1.
Introdução

Há muito se propala que a engenharia vem a ser física aplicada. No que concerne à engenharia civil, baseada na mecânica newtoniana, tal assertiva é bastante acertada. No entanto, parece ao autor deste trabalho que o desenvolvimento de novos conceitos relacionados à física do estado sólido e à mecânica estatística - quais sejam, os de *geometria fractal*, *teoria do caos*, *grupo de renormalização*, *teoria dos fenômenos críticos*, *universalidade*, dentre outros -, ainda não estão sendo suficientemente avaliados e aplicados pela comunidade de engenheiros aos inúmeros problemas práticos com que se defrontam.

As situações que justificam a abordagem padrão da metodologia da engenharia são, na maioria das vezes, aquelas em que os sistemas físicos analisados comportam-se como uma simples superposição dos efeitos de suas partes constituintes. Assim, a diferença estabelecida entre os comportamentos da micro-escala e da macro-escala são, unicamente, de ordem *quantitativa*, não havendo possibilidade para o surgimento do novo, do casual e imprevisto.

Mesmo nos casos em que o sistema como um todo se desenvolva de forma *ligeiramente* diferente da ditada pela soma de suas partes, é possível, ainda, uma saída honrosa, nos marcos da mecânica clássica. Recorre-se, via de regra, à chamada *teoria da perturbação*, em que se presume ser a solução verdadeira do problema o limite para o qual tende a zero um certo parâmetro de controle da solução perturbada.

Um exemplo clássico do que se acabou de observar é o fenômeno da *turbulência fraca (weak turbulence)*, ou seja, as primeiras etapas de desenvolvimento do processo perturbativo do fluxo hidrodinâmico.

Este *modus operandi* é igualmente utilizado nos processo de *homogeneização* e *upscaling* de propriedades daqueles sistemas físicos descritos anteriormente, caracterizados sempre por um tipo de simetria *específico* e *preponderante* no processo de sua evolução temporal – a simetria por *invariância translacional*.

No entanto, para situações em que a diferença entre o comportamento do sistema na micro e na macro-escala seja de ordem *qualitativa* – tal como ocorre, por exemplo, na chamada *turbulência bem desenvolvida (well developed turbulence)* –, ou que a simetria adotada pelo sistema físico, ao longo de seu desenvolvimento, seja a da *invariância por escala*, a estratégia perturbativa perde completamente a sua serventia, tornando a busca por soluções analíticas freqüentemente um processo sujeito a dificuldades matemáticas insuperáveis.

Por outro lado, é justo mencionar que os físicos da matéria condensada, embora mais familiarizados no trato com estes últimos sistemas, utilizam, em suas simulações, modelos numéricos muito simplificados, freqüentemente referidos como *modelos de brinquedo (toy models)*. Contudo, é verdade que modelos do tipo *Ising*, por exemplo, têm proporcionado resultados estupendos na investigação de certos sistemas físicos.

A razão de ser da utilização destes modelos excessivamente simplificados parece residir na mecânica estatística dos sistemas de transição de fase *em equilíbrio*, em que a semelhança (universalidade) dos valores numéricos dos chamados *expoentes críticos* é compartilhada por diferentes sistemas físicos, quando próximos do ponto de transição.

Esta tese de doutorado visa a preencher exatamente esta lacuna, colocando-se a meio caminho entre a engenharia e a física. É natural que o estudo de tais sistemas singulares recaia fortemente naqueles conceitos acima mencionados, não se tratando, portanto, de excentricidade matemática ou demonstração de erudição, a utilização de aparato matemático específico, sendo esta a maneira mais apropriada de se lidar com tais fenômenos.

O autor reconhece a dificuldade daqueles que, porventura, queiram atuar nesta área francamente multidisciplinar, uma vez que, ele mesmo, enfrentou – e continua enfrentando – estes mesmos empecilhos. Porém, aqui se trata de honestidade intelectual, da firme convicção de que a verdade possa aí residir, justificando, por conseguinte, todos os esforços que conduzam a este fim.

Esta tese lida com 3 (três) conceitos físicos fundamentais - *energia*, *entropia* e *simetria* – e sua aplicação à engenharia civil geotécnica.

O primeiro conceito, como se sabe, depende do sistema físico em estudo, e pode ser caracterizado, segundo a mecânica analítica, por sua função hamiltoniana ou lagrangeana. O segundo reflete a quantidade de informação que percorre o sistema, ao passo que o terceiro está relacionado à conservação de algumas grandezas físicas ao longo de sua evolução temporal.

Trata esta pesquisa da aplicação destes conceitos à análise da deformabilidade e resistência de sistemas físicos constituídos por materiais geológicos – solos e rochas -, quando submetidos a carregamentos externos. Esta situação, comum a vários ramos da ciência e da técnica, é habitualmente encontrada na engenharia civil e, em especial, em problemas geotécnicos relacionados, por exemplo, à estabilidade de taludes e escavações subterrâneas.

Mais pormenorizadamente, propõe-se investigar a evolução temporal destes sistemas com o auxílio de um programa bidimensional de elementos finitos, capaz de simular adequadamente o comportamento dos aludidos materiais com base na *teoria da plasticidade de Mohr-Coulomb*. Para tanto, tal processo é estudado sob a ótica da teoria dos chamados *sistemas complexos auto-organizativos*, os quais, como se sabe, evoluem espontaneamente ao longo do tempo para um estado muito peculiar, caracterizado por extrema susceptibilidade a perturbações de toda a ordem.

Uma vez que a evolução de sistemas dinâmicos, em geral, pode ser interpretada como um intercâmbio de informações entre seus elementos constituintes, tais sistemas podem ser também analisados pela entropia por eles produzida.

Até recentemente imaginava-se que a determinação da entropia far-se-ía sempre de uma única e mesma forma, universal, e independente das características do sistema físico considerado. Entretanto, atualmente já é um fato teórico bem estabelecido que, de forma similar à energia, a avaliação da quantidade de informação produzida também deverá depender das características do próprio sistema físico que a produz.

Neste sentido, cabe assinalar que sistemas com as características dos estudados nesta pesquisa – auto-organizativos com *dinâmica de limiar (threshold dynamics)* – têm sido investigados exitosamente, utilizando-se a chamada *entropia não-extensiva*, proposta pelo físico brasileiro Constantino Tsallis, do

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Tenciona-se, portanto, investigar tal sistema à luz desta nova e pioneira proposição.

Além disso, ocorre que, ao longo de sua evolução, sistemas com dinâmica de limiar têm, via de regra, sua simetria espaço-temporal inicial substituída por outra(s) forma(s) de simetria. Assim, mostrar-se-á que, à sua *invariância translacional* inicial, o aludido sistema elasto-plástico adota, ao longo do tempo, a *invariância discreta de escala (auto-semelhança)*, forma mais restritiva da *invariância contínua de escala*, sendo este um procedimento corriqueiro em tais sistemas.

Finalmente, tais ferramentas da física teórica serão utilizadas na previsão e caracterização da ruptura progressiva daqueles materiais geológicos. Em particular, mostrar-se-á que, próximos à ruptura, sistemas com dinâmica de limiar apresentam padrões de comportamento muito peculiares, razão pela qual torna-se possível, graças à mencionada invariância discreta, a previsão de eventos de importância qualitativa (*bifurcações)* ou mesmo a ruína destes materiais.

Por conseguinte, este trabalho de doutorado apresenta duas contribuições bastante originais e pioneiras: a aplicação da termodinâmica não-extensiva e a determinação do índice entrópico de Tsallis em um modelo elasto-plástico da mecânica dos solos e das rochas; e a utilização da invariância discreta de escala na previsão de eventos singulares/rupturas neste mesmo modelo, e em ensaios de laboratório em rochas sedimentares.

Este trabalho está assim constituído: os chamados *sistemas complexos* são descritos no capítulo 2, ocasião em que se menciona a ausência de uma delimitação formal que abarque toda a riqueza decorrente do comportamento destes sistemas. Assim, na falta, ainda que temporária, de uma definição, procurou-se encaminhar a discussão no sentido da catalogação de suas propriedades mais relevantes.

Assinalam-se, ainda, os diferentes campos da ciência que foram beneficiados pela utilização deste novo paradigma.

A nova entropia não-extensiva é investigada no capítulo 3. Apresenta-se o embasamento teórico desta formulação pioneira de Tsallis, bem como descrevem-se as áreas da física em que tem sido aplicada e proporcionado resultados reveladores.

O capítulo 4 debruça-se sobre a invariância discreta de escala, assinalando suas principais características e importância, no que concerne à previsão de eventos catastróficos. Discorre, ainda, sobre suas afinidades com a formulação de Tsallis.

O capítulo 5 versa sobre a formulação numérica do referido modelo elasto-plástico e as condições nas quais foi utilizado.

Por seu turno, o capítulo 6 investiga a possível presença de auto-organização crítica no sistema geomecânico descrito no capítulo 5. Especialmente, analisa-se o comportamento temporal dos expoentes característicos de Lyapunov, bem como o desenvolvimento de correlações espaciais de longo alcance, caracterizadas por eventuais padrões de deformação plástica (multi)fractais.

Às relações envolvendo a elasto-plasticidade de Mohr-Coulomb e a forma entrópica não-extensiva dedica-se o capítulo 7. Na oportunidade, investiga-se a sensibilidade do sistema geomecânico às condições iniciais, indicando, efetivamente, tratar-se de um sistema que evolui entre ordem e caos.

Determina-se, também, o valor do parâmetro entrópico q, detalhando-se, ainda, a metodologia utilizada para a sua avaliação.

Por sua vez, o capítulo 8 identifica e analisa a existência da invariância discreta de escala na evolução do sistema elasto-plástico. Em especial, assinala-se ser possível, com base nas restrições impostas por aquela forma de simetria, a previsão de eventos catastróficos, quando estes ainda se encontram em fase preparatória.

Finalmente, o capítulo 9 apresenta as conclusões e sugestões para futuras pesquisas, e o capítulo 10, a bibliografia referenciada no texto.

Este trabalho utiliza extensivamente as noções de fractal, dimensão fractal, caos e multifractalidade, razão pela qual achou-se por bem, ainda que resumidamente, abordar estes assuntos.

1.2.
Caos e fractais: conceitos fundamentais

O autor tem plena consciência de que a abordagem dos referidos conceitos físicos, com o grau de detalhe necessário, é tarefa bastante árdua, e impossível de ser cumprida num espaço tão reduzido. Sugere-se, pois, ao leitor menos afeito a estes conceitos, a consulta às referências [1,2,3].

A investigação de sistemas auto-organizativos com dinâmica de limiar envolve, necessária e obrigatoriamente, as noções de caos, fractais, dimensão fractal e multifractalidade.

Na verdade, muitas das idéias presentes nos conceitos de geometria fractal e dinâmica caótica existem já há muito tempo. Entretanto, somente com o advento dos computadores, e sua capacidade de realizar cálculos repetitivos cada vez mais rapidamente, é que se pode contar com uma ferramenta adequada para investigações mais aprofundadas sobre estes temas.

Nos anos recentes, o fenomenal interesse despertado por estes assuntos veio acompanhado de avanços realizados no campo do desenvolvimento de novos computadores.

O conceito de geometria fractal tem penetrado em diferentes áreas do conhecimento, e diz respeito aos objetos fractais, ou simplesmente, fractais. O termo “fractal”, cunhado pelo matemático franco-polonês Benoit Mandelbrot, deriva da palavra latina *fractus*, mesma raiz etimológica de fratura, significando fracionado, quebrado.

A idéia por trás deste conceito é que possibilita lidar com objetos de geometria irregular, tão comuns na natureza. Além disso, observou-se que estes mesmos objetos apresentavam a propriedade de se reproduzirem em diferentes escalas de observação, característica conhecida como *auto-semelhança* ou *similaridade de escala*.

As figuras 1.1 e 1.2 ilustram dois objetos fractais bastante conhecidos, podendo-se notar a presença, em cada qual, de um *elemento iniciador*, a partir do que, por um processo iterativo, a auto-semelhança geométrica é construída.

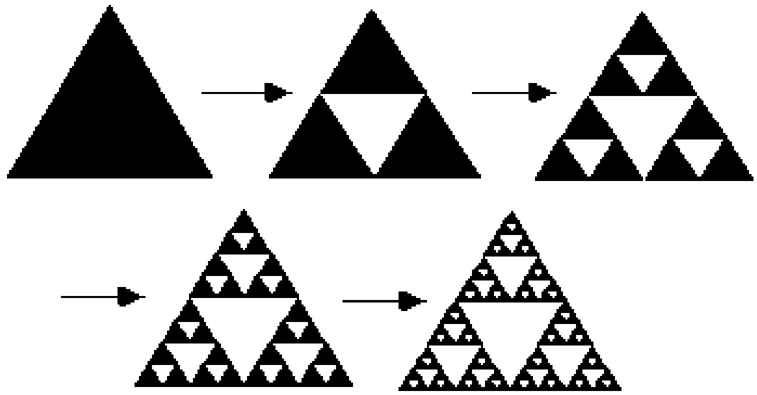

Figura 1.1 - Triângulo de Sierpinski.

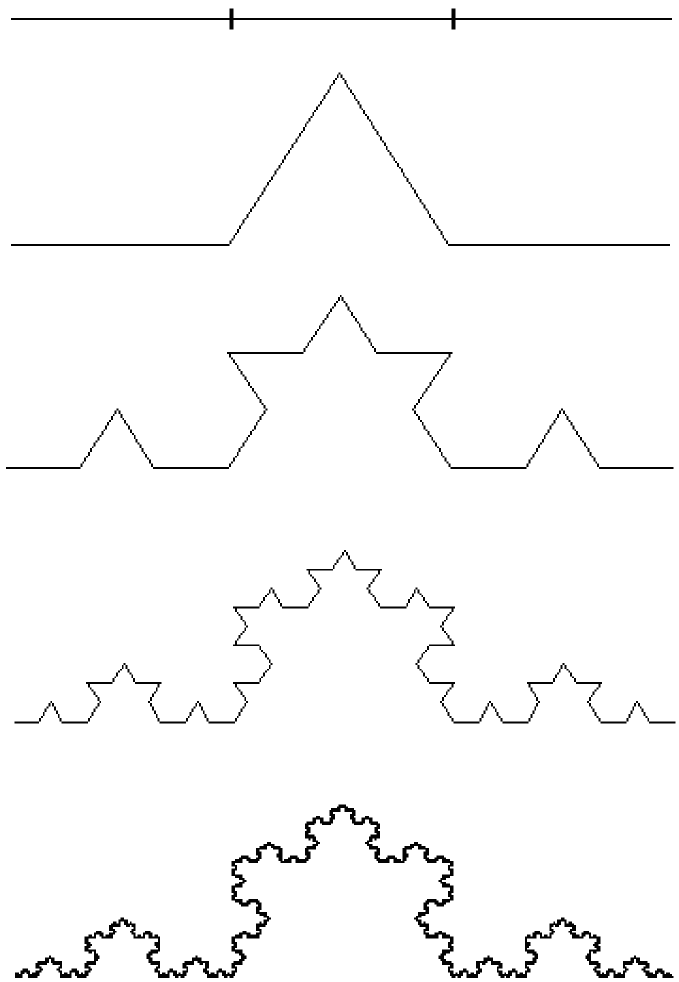

Figura 1.2 - Curva de von Koch.

Assim, fractal é um objeto em que cada parte é uma pequena cópia, em escala menor, do objeto todo. Vários fenômenos naturais compartilham destas mesmas características: descontinuidades em maciços rochosos, fronteiras de países, o sistema linfático, o pulmão, o sistema radicular das plantas, etc.

Ocorre que, sendo um conceito eminentemente matemático, a sua aplicação à natureza exige algumas modificações. *Fractais naturais* diferenciam-se dos *matemáticos* em que aqueles primeiros desenvolvem o mecanismo homotético de repetição restrito a limites inferiores e superiores *(cut-offs)*, além dos quais o objeto deixa de ser catalogado como auto-semelhante, tornando-se meramente euclideano. Além disso, esta auto-semelhança é, na maioria das vezes, não-exata, quer dizer, estatística.

A figura 1.3 apresenta um fractal natural, muito embora também possa ser gerado matematicamente.

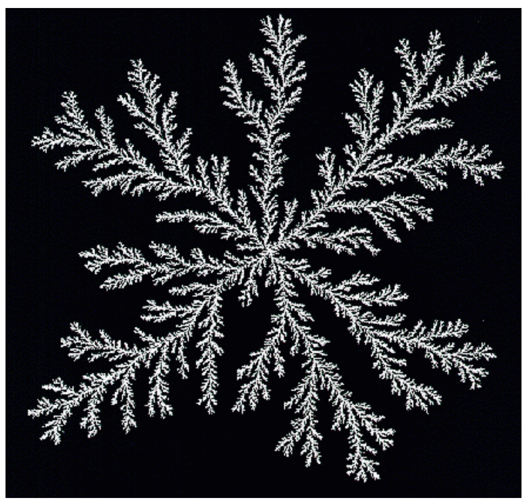

Figura 1.3 - Agregado fractal limitado por difusão.

Trata-se do chamado *agregado fractal limitado por difusão (diffusion limited agregation – DLA)*, resultante, por exemplo, da injeção de óleo num meio argiloso homogêneo, a partir do seu centro.

A figura 1.3 é bastante familiar ao geólogos, que costumam denominá-la *interdigitações*, de ocorrência comum em rochas metamórficas de baixo grau (ardósias, etc).

De forma semelhante ao que ocorre com os objetos da geometria euclideana, os fractais possuem sua própria dimensão, usualmente fracionária (mas nem sempre), e referida como *dimensão fractal*. Assim, é comum a quantificação da irregularidade de um objeto, dizendo-se do mesmo possuir uma dimensão de 1.32 ou 2.86.

A dimensão fractal propriamente dita D_0 é definida como

$$D_0 = \lim_{l \to 0} \frac{\log N(l)}{\log(1/l)} \tag{1.1}$$

onde N é o número de hipercubos (quadrados, cubos, etc, doravante referidos como caixas) de lado l necessários para recobrir todo o objeto. Note que, na definição acima, é irrelevante a base utilizada para se calcular os logaritmos, dado que a expressão 1.1 envolve o seu quociente.

A idéia subjacente à expressão 1.1 é bastante simples. A dimensão D_0 informa o número de caixas necessário para recobrir todo o objeto, à medida que o tamanho das caixas decresce. Observe-se, ainda, que (1.1) sugere que D_0 possa ser calculada a partir do coeficiente angular da reta, num gráfico bi-logarítmico, em que se tem por ordenadas e abscissas o número de caixas e o inverso do comprimento do lado, respectivamente.

Portanto, número de caixas e o comprimento de cada qual relacionam-se, para objetos fractais, em uma *lei de potência*.

O motivo pelo qual leis de potência e auto-semelhança estão tão intimamente vinculadas prende-se ao fato de que aquelas relações algébricas são invariantes por escala.

Assim, se uma dada função *f(x)* é invariante por escala, i.é., $f(x) \sim f(\lambda x), \forall x$, então deverá satisfazer à seguinte relação

$$f(x) = \mu(\lambda) f(\lambda x) \tag{1.2}$$

onde λ e μ são constantes. Ou seja, uma transformação linear do argumento deverá levar, necessariamente, à multiplicação da própria função, de modo a mantê-la invariável.

Derivando ambos os membros da expressão anterior, vem

$$f'(x) = \mu(\lambda)\lambda f'(\lambda x) \tag{1.3}$$

ou, ainda

$$\mu(\lambda) = \frac{f'(x)}{f'(\lambda x)} \frac{1}{\lambda} \tag{1.4}$$

Entretanto, segundo (1.2), o fator multiplicativo também vem a ser igual a

$$\mu(\lambda) = \frac{f(x)}{f(\lambda x)} \tag{1.5}$$

Logo, de (1.4) e (1.5) conclui-se que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda \frac{f'(\lambda x)}{f(\lambda x)} \tag{1.6}$$

cuja solução é

$$f(x) \sim x^{\alpha} \tag{1.7}$$

Portanto, a lei de potência é, efetivamente, a única relação matemática independente de escala.

Ocorre que a utilização prática da expressão (1.1) na análise de diferentes objetos levou à necessidade de sua generalização, especialmente no estudo de determinados objetos fractais, ditos *heterogêneos*. Assim, as chamadas *dimensões generalizadas* podem ser postas sob a forma

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{l \to 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(l)} p_i^q}{\log l} \quad (q \in R,\ q \neq 1) \tag{1.8}$$

A probabilidade p_i é definida como

$$p_i = p_i(l) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} \tag{1.9}$$

onde N é, como já se assinalou, o número total de pontos (caixas) e N_i é o número de pontos na i-ésima caixa.

Especificamente, as dimensões D_1 e D_2 , por serem bastante empregadas, adquiriram denominação especial - *dimensão de informação* e *dimensão de correlação* -, sendo definidas do seguinte modo:

$$D_1 = \lim_{l\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(l)} p_i \log p_i}{\log\left(\frac{1}{l}\right)} \tag{1.10}$$

$$D_2 = \lim_{l\to 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(l)} p_i^2}{\log l} \tag{1.11}$$

Cabe observar que esta última pode ser expressa, ainda, de uma outra forma, qual seja, com o auxílio da *função de correlação C(l)*. Portanto, (1.11) pode ser escrita, *de maneira aproximada*, da seguinte forma [1]

$$D_2 \cong \lim_{l\to 0} \frac{\log C(l)}{\log l} \tag{1.12}$$

onde $C(l)$ é definida como

$$C(l) = \frac{1}{N^2} \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} \theta\left[l - \left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right|\right] \tag{1.13}$$

sendo θ a função unidade de Heaviside (função degrau), e $\vec{x}_i$ é o vetor associado ao i-ésimo ponto do atrator (ver adiante).

Objetos fractais heterogêneos, como se observou, têm sua descrição vinculada a um *espectro* infinito de dimensões generalizadas, razão pela qual são comumente referidos como *multifractais*.

A informação relativa à multifractalidade de fenômenos é dada, habitualmente, num gráfico q vs D_q, ilustrado na figura 1.4.

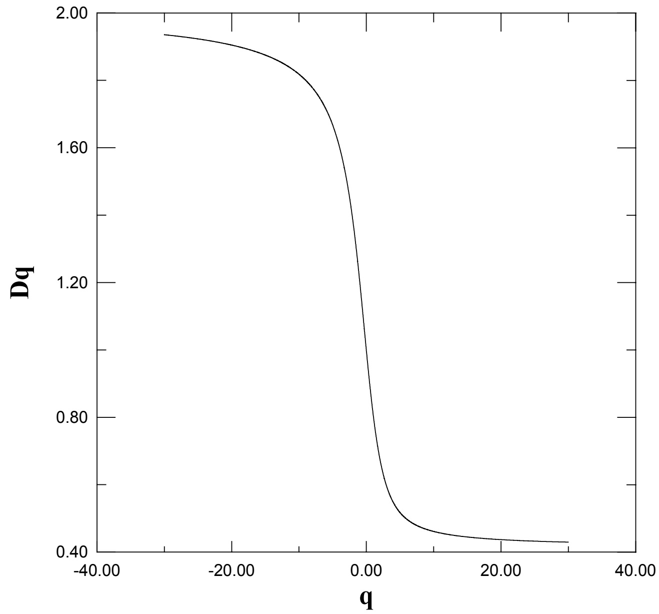

Figura 1.4 - Espectro de dimensões generalizadas.

Os pontos extremos inferior direito e superior esquerdo desta curva em S invertido são referidos como $D_{+\infty}$ e $D_{-\infty}$, respectivamente.

Freqüentemente, no entanto, acontece da informação acima ser apresentada de outra maneira, qual seja, por intermédio da *transformada de Legendre* das dimensões generalizadas, o assim chamado *espectro de singularidades* α vs $f(\alpha)$, cuja forma é dada na figura 1.5.

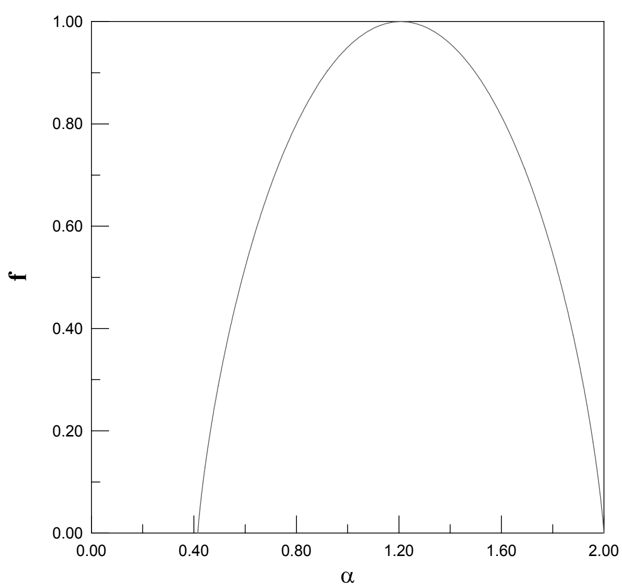

Figura 1.5 - Espectro de singularidades.

Trata-se, portanto, de uma curva convexa, em que o ponto máximo é identificado com a dimensão D_0, e cujos pontos extremos esquerdo e direito são normalmente denominados $\alpha_{\min}$ e $\alpha_{\max}$, respectivamente.

Por outro lado, a evolução, ao longo do tempo, de certos sistemas dinâmicos parece se fazer de forma totalmente desordenada, randômica. Entretanto, sabe-se atualmente que a resposta evolutiva de certos sistemas iterativos não-lineares, embora à primeira vista randômica e imprevisível, pode derivar de leis determinísticas bastante simples.

Um exemplo deste tipo de comportamento, freqüentemente referido como *caos*, é encontrado no *mapa logístico unidimensional*, fornecido no capítulo 3, ocasião em que se estudará a não-extensividade entrópica.

O atrator de tais sistemas, ou seja, a região do chamado *espaço de fase*, para o qual tende a sua dinâmica num tempo de evolução muito longo, costuma apresentar intrincada estrutura fractal, sendo denominado *atrator estranho (strange attractor)*.

A figura 1.6 mostra o aspecto de um atrator estranho, denominado *atrator de Lorenz*.

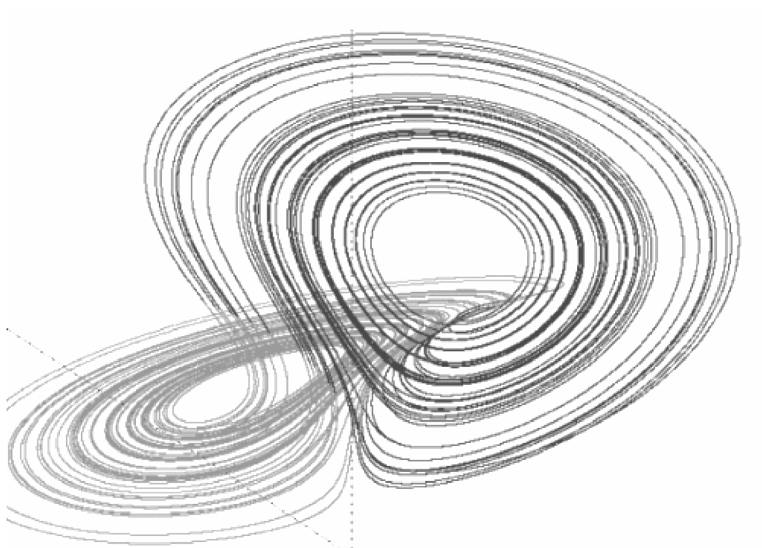

Figura 1.6 - Atrator de Lorenz.

Portanto, sistemas determinísticos, cuja evolução temporal conduza assintoticamente a atratores estranhos, apresentam dinâmica caótica.

O *caos determinístico* está relacionado, como se verá mais pormenorizadamente no capítulo 3, com a *sensibilidade às condições iniciais* *(mixing)*. Esta dependência decorre das não-linearidades existentes no sistema, que terminam por *amplificar exponencialmente* pequenas diferenças nas condições iniciais, tornando imprevisível a evolução do fenômeno.

Assinale-se que a referida amplificação pode se dar de outras formas, sendo a lei exponencial apenas uma delas.

O estudo de sistemas dinâmicos não-lineares, que apresentam dinâmica caótica, é uma área de pesquisa em franco desenvolvimento.

O leitor verá, no momento oportuno, que o modelo numérico investigado nesta pesquisa caracteriza-se por ser caótico, embora admita um certo grau de previsibilidade, tal como será discutido no capítulo 8.