2
Descrição do Problema

Neste capítulo, faz-se descrições do PAG em sua forma clássica, do PCC e da Extensão do PAG para a solução do PCC.

2.1
O Problema de Alocação Generalizado (PAG)

Em termos gerais, pode-se entender o PAG como o problema de alocar, a custo mínimo, um conjunto de tarefas a um conjunto de agentes (executores de tarefa).

Portanto, os elementos básicos do problema são:

– Um conjunto I de agentes $(i = 1, 2, ..., m)$;
– Um conjunto J de tarefas $(j = 1, 2, ..., n)$.

Cada tarefa $T_j \in T$ consome uma quantidade de recursos a_{ij} do agente $i \in I$, ou seja, consome uma parte da capacidade do agente, a um diferente custo c_{ij}.

A alocação, além de buscar o custo mínimo, deve também atender a três restrições básicas:

1. Cada agente tem uma capacidade limitada;
2. Cada tarefa só pode ser alocada a um único agente;
3. Todas as tarefas devem ser alocadas;

A solução para o PAG é um vetor de n elementos, onde a $k-$ésima posição do vetor guarda o agente ao qual a $k-$ésima tarefa foi associada.

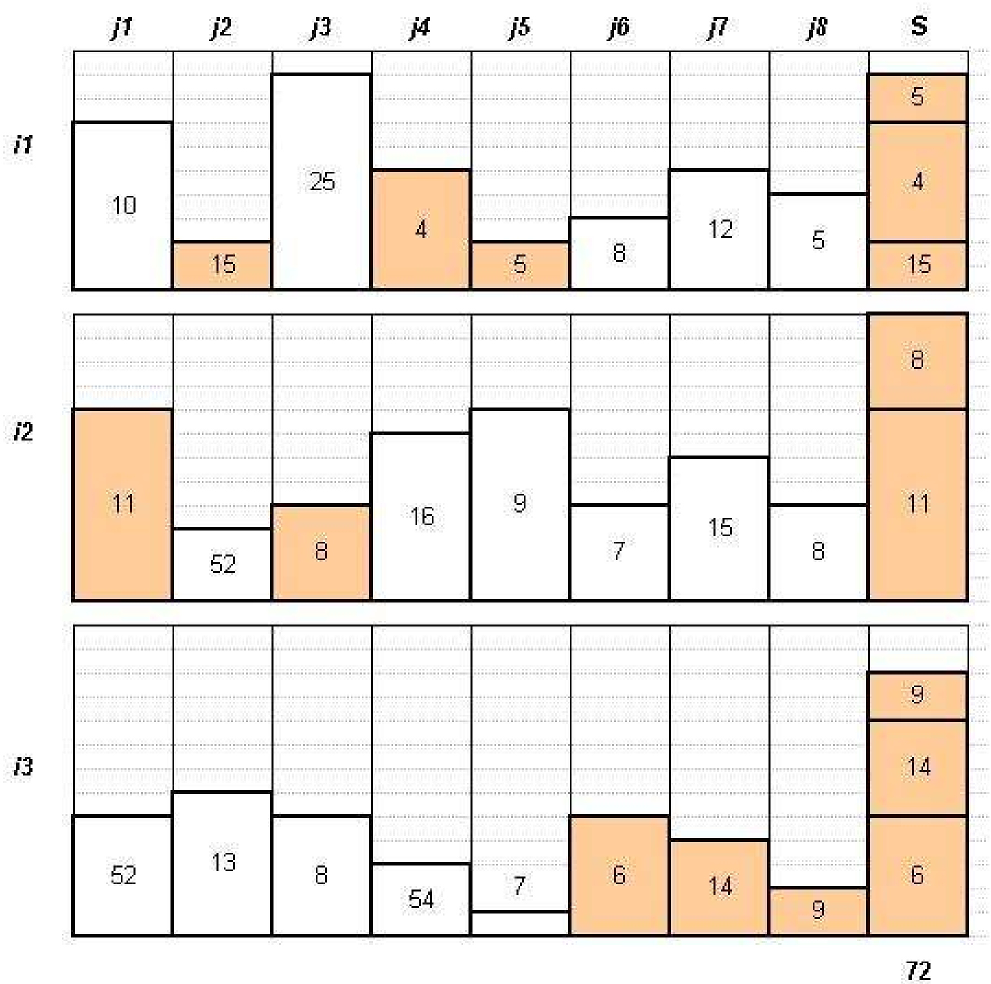

Figura 2.1: Resolução Instância PAG.

2.1.1 Exemplo PAG

Para facilitar o entendimento do problema será mostrado um exemplo de uma instância do PAG. Esta instância será constituída de 3 agentes e 8 tarefas.

Os agentes i_1, i_2, e i_3 tem as respectivas capacidades 10,12 e 13.

Os custos de alocar as tarefas j_1 a j_8 ao agente i_1 são: 10, 15, 25, 4, 5, 8, 12, 5. E as capacidades consumidas são: 7, 2, 9, 5, 2, 3, 5, 4.

Os custos de alocar as tarefas j_1 a j_8 ao agente i_2 são: 11, 52, 8, 16, 9, 7, 15, 8. E as capacidades consumidas são: 8, 3, 4, 7, 8, 4, 6, 4.

E, finalmente, os custo de alocar as tarefas j_1 a j_8 ao agente i_3 são: 52, 13, 8, 54, 7, 6, 14, 9. E as capacidades consumidas são: 5, 6, 5, 3, 1, 5, 4, 2.

A solução ótima para esta instância do PAG é a seguinte alocação de agentes para as tarefas de j_1 a j_8: i_2, i_1, i_2, i_1, i_1, i_3, i_3, i_3. Esta solução produz um custo total de 72. Este valor pode ser verificado somando-se os custos de alocar a tarefa ao agente a que ela ficou associada, o que resulta em:

$11 + 15 + 8 + 4 + 5 + 6 + 14 + 9 = 72$. Deve-se observar também que as restrições relativas as capacidades dos agentes não foram violadas. Para o agente i_1 foram alocadas as tarefas: j_2, j_4 e j_5, que consumiram de sua capacidade: $2 + 5 + 2 = 9$, respeitando, assim, sua capacidade máxima que é de 10. Para o agente i_2 foram alocadas as tarefas: j_1 e j_3, que consumiram: $8+4 = 12$, usando toda a capacidade do agente. Para o agente i_3 foram alocadas as tarefas: j_6, j_7 e j_8, que consumiram $5 + 4 + 2 = 11$, ficando abaixo da capacidade máxima do agente que é de 13. A figura 2.1 é uma visualização gráfica desta instância resolvida.

2.1.2
Complexidade do Problema

Teorema
O PAG é NP-difícil.

Prova: O PAG pertence a classe de problemas NP, já que é possível verificar, em tempo polinomial, que uma solução (certificado) atende aos seguintes requisitos:

1. cada tarefa deve estar associada a um agente; a verificação pode ser feita em $O(n)$;
2. a capacidade de cada um dos agentes deve ser respeitada; a verificação também pode ser feita em $O(n)$;
3. o custo da solução deve ser menor ou igual a um valor v; novamente em $O(n)$;

Para provar que o PAG é NP-dificil deve-se reduzir um problema NP-completo a ele. Foi escolhido o problema da partição, que é definido como: dada uma lista de números, deseja-se saber se é possível dividir a lista em 2 subconjuntos que tenham a mesma soma. Uma demonstração de que o problema da partição é NP-Completo é apresentada em [11]. Deve-se transformar uma instância arbitrária do Problema da Partição em uma instância do PAG, tal que a resposta do Problema da Partição seja positiva se e somente se a resposta do correspondente problema PAG for positiva.

Seja $L = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lista de elementos do Problema da Partição. Usa-se um PAG com 2 agentes de capacidade $\frac{\sum_{e_k \in L} e_k}{2}$ cada um e com um número de tarefas n igual a $|L|$. Cada tarefa do PAG consome em qualquer um dos 2 agentes a mesma quantidade de recurso e_k e tem custo unitário em qualquer um deles.

A questão é se existe uma alocação de custo menor ou igual a $|L|$ no PAG. A resposta será positiva se e somente se for possível alocar todas as tarefas. Para conseguir tal objetivo deve-se dividir as tarefas em 2 agentes de igual capacidade. Como a soma destas é igual ao somatório dos elementos de L, isso só é possível quando toda a capacidade dos dois agentes é utilizada. Desse modo o Problema da Partição foi reduzido ao PAG. Essa redução pode ser feita facilmente em tempo polinomial.

2.1.3 Aplicações

Alocação de Pacientes em Vôos Médicos [25]

Esta aplicação foi desenvolvida pelo setor de assistência médica do departamento de defesa dos Estados Unidos visando minimizar o custo de transporte e satisfação de seus dependentes. A aplicação associa pacientes que precisam ser transportados a rotas de vôos pré determinadas.

Pacientes urgentes são os de mais alta prioridade e devem ser atendidos imediatamente. As requisições de atendimento neste caso não chegam com tempo suficiente para serem otimizadas e, por este motivo, não são consideradas neste modelo.

Um paciente pode ter o seu atendimento atrasado de duas maneiras: um paciente pode ter o seu embarque atrasado com relação a sua data de partida desejada, ou pode passar por um atraso de roteamento se ele precisar mudar de vôo para chegar ao seu destino final. Para efetuar uma troca de vôo é necessário que o paciente passe a noite no destino intermediário. Atrasos de roteamento são piores do que os com relação a data de requerimento, pois no segundo caso o paciente pode esperar em sua casa ou no seu hospital de origem. Portanto, os atrasos de roteamento é que devem ser evitados.

As rotas dos vôos são feitas para atingir dois objetivos distintos e conflitantes. O objetivo primário é transportar todos os pacientes minimizando o número de noites passadas em destinos intermediários, o que mede a satisfação do paciente. O objetivo secundário é reduzir o tempo de vôo, ou equivalentemente, o tamanho da rota. Esses dois objetivos são conflitantes porque objetivando minimizar o número de transferências de vôo, cada rota deve ser longa o suficiente para levar o paciente até o seu destino final. Entretanto, rotas de vôo pequenas forçariam cada vôo a atender pequenas regiões, e cada paciente viajando entre duas regiões teria que ser transferido de vôo. O sistema descrito visa a satisfação do paciente e, por isso, atende ao objetivo de minimizar as transferências de vôos.

O problema de associar pacientes a rotas de vôos pode ser modelado como um PAG da seguinte maneira: o custo de alocar um paciente a uma rota é o número de trocas de vôo que o paciente terá que efetuar se for alocado nesta rota. Logo a função objetivo é minimizar o somatório das trocas de vôo feitas por todos os pacientes. Cada paciente deve ser associado a uma única rota. E cada rota tem uma capacidade de atendimento.

Programação do telescópio espacial ROSAT [26]

O ROSAT é um projeto espacial conjunto entre Estados Unidos, Inglaterra e Alemanha. O objetivo da aplicação é determinar um roteiro de observações que maximize o uso do ROSAT. O planejamento de uma missão do ROSAT é fortemente afetado por uma série de restrições operacionais. Existem intervalos de tempo em que o ROSAT não pode trabalhar porque o satélite está na zona de partículas da Terra ou na chamada Anomalia do Atlântico Sul. Quando o satélite está sobre estas zonas sua atividade deve parar para prevenir a obstrução da atividade de observação por partículas carregadas com alta quantidade de energia. Também há intervalos de tempo em que um determinado objeto não pode ser observado.

Os dados de entrada para esta aplicação são: um conjunto de objetos a serem observados $\{O_0, O_1, ..., O_m\}$ juntamente com as suas coordenadas e seus tempos de duração de observação $\{t_0, t_1, ..., t_m\}$. Um conjunto $\{S_0, S_1, ..., S_n\}$ com $S_s = [b_s, e_s]$ e $b_o \leq e_0 \leq b_1 \leq e_1 ... b_n \leq e_n$ de intervalos de tempo. Esses intervalos são os períodos de tempo em que o satélite não está em uma zona de partículas e, portanto, pode operar. Um conjunto $\{V_{s,i} | 0 \leq s \leq n, 0 \leq i \leq m\}$ onde $V_{s,i}$ é o tempo no qual o objeto O_i pode ser visualizado no intervalo de tempo S_s. Um conjunto de tempos $\{c_{s,i} | 0 \leq s \leq n, 0 \leq i \leq m\}$ onde $c_{s,i}$ é o tempo gasto para ajustar o telescópio para observar o objeto O_i no intervalo de tempo S_s.

A formulação do PAG para esta aplicaçao é a seguinte:

$$Maximizar \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} (V_{s,i} - c_{s,i}) \, x_{s,i}$$

$$s.a$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{s,i} = 1; s = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{s=1}^{n} (V_{s,i} - c_{s,i}) \, x_{s,i} \leq t_i; i = 1, 2, \ldots m$$

$$x_{s,i} \in \{0, 1\}$$

2.2
O Problema de Carregamento de Caminhões (PCC)

Atualmente as empresas de transportes rodoviários encontram-se num cenário extremamente competitivo e, por isso, têm buscado soluções informatizadas para seus processos, como uma maneira de melhorar sua operação e conseqüentemente oferecer serviços de melhor qualidade e de menor custo a seus clientes. O PCC é um dos problemas mais difíceis e importantes na operação de uma empresa de transportes rodoviários: a montagem do carregamento de um caminhão, dada uma lista de ítens que estão aguardando no armazém para serem carregados.

A tarefa de montar o carregamento de um caminhão é bastante complexa, pois várias regras devem ser seguidas. Restrições de capacidade de peso e valor total de mercadorias de cada caminhão devem ser respeitadas. Além disso, um caminhão não pode ser carregado apenas com produtos eletrônicos ou somente com produtos médicos. Isso se deve a restrições impostas por companhias seguradoras que determinam o quanto cada carregamento pode ter de valor máximo de mercadorias de cada tipo. Outro tipo de restrição, obrigatória por lei, é a de que não pode haver no mesmo carregamento produtos alimentícios e químicos.

Resolver o PCC consiste em determinar um carregamento que maximize o valor total do frete (receita obtida pelo transporte), respeitando todas as restrições descritas anteriormente. A solução propicia uma operação muito mais eficiente, na medida em que há um melhor aproveitamento de cada caminhão e, também, porque o funcionário responsável pelo carregamento já sai para o armazém com a lista das cargas a serem carregadas.

Sem a ajuda de um mecanismo computacional, é muito comum que a operação tenha um número considerável de caminhões que saem da transportadora com grande parte da sua capacidade de peso ainda disponível. Isso ocorre, pois é comum que algum limite de valor de seguro seja atingido e não haja no armazém cargas que sejam compatíveis com aquelas já carregadas. A solução computacional, por outro lado, é balanceada e otimizada.

O PCC consiste em, dada uma lista de items que estão no armazém, montar o carregamento de cada caminhão. Cada item contem os atributos: tipo de produto, valor de mercado, tipo relativo a ser químico, alimentício ou genérico, peso e frete. O carregamento de cada caminhão não pode ultrapassar a capacidade de peso do caminhão, não pode ultrapassar o limite de seguro para o valor de mercado de cada tipo de produto, não pode conter simultaneamente produtos químicos e alimentícios, e não pode ultrapassar o limite de valor total

Carga	Tipo	Valor	Peso	Frete	Tipo Q, A, -
C1	Eletrônico	25000	1500	2000	-
C2	Eletrônico	15550	700	650	-
C3	Eletrônico	8750	300	700	-
C4	Eletrônico	20700	2000	1350	-
C5	Eletrônico	29300	1200	1300	-
C6	Eletrônico	12750	630	700	-
C7	Eletrônico	14720	320	350	-
C8	Eletrônico	10550	2000	2100	-
C9	Eletrônico	39650	2750	3150	-
C10	Eletrônico	12429	250	300	-
C11	Eletrônico	13420	310	400	-
C12	Eletrônico	4432	170	200	-
C13	Medicamento	23500	2000	3500	Químico
C14	Medicamento	35000	3000	3200	Químico
C15	Medicamento	6500	100	180	Químico
C16	Medicamento	42000	2700	5400	Químico
C17	Medicamento	13640	250	500	Químico
C18	Medicamento	9360	2300	4000	Químico
C19	Medicamento	7200	440	900	Alimentício
C20	Medicamento	41655	3250	7000	Alimentício
C21	Medicamento	6245	450	910	Alimentício
C22	Medicamento	2730	225	500	Alimentício
C23	Medicamento	3450	490	1000	Alimentício
C24	Medicamento	3720	820	1700	Alimentício
C25	Tecido	1230	450	125	-
C26	Tecido	1200	320	95	-
C27	Tecido	3125	1200	330	-
C28	Tecido	27850	3400	1150	-
C29	Tecido	12650	550	200	-
C30	Tecido	9500	1650	700	-
C31	Tecido	24725	1320	550	-
C32	Tecido	12340	325	100	-
C33	Tecido	12935	1700	700	-
C34	Tecido	28000	2300	850	-
C35	Tecido	17700	400	150	-
C36	Tecido	4200	200	80	-

Tabela 2.1: 36 cargas no armazém. Peso em Kg, Valor e Frete em R$.

Caminhão	Capacidade	Custo
A1	12500	3500
A2	15000	3700
A3	12500	3500

Tabela 2.2: 3 caminhões disponíveis para serem carregados. Capacidade em Kg, Custo em R$.

de mercadorias carregadas.

Um exemplo de items que devem ser carregados é mostrado na Tabela 2.1.

Os items da tabela 2.1 devem ser carregados em 3 caminhões com as características descritas na tabela 2.2 e respeitando os valores limites de seguro descritos na tabela 2.3 .

Os carregamentos otimizados para cada caminhão são mostrados nas tabelas 2.4, 2.5 e 2.6. O que sobra no armazém é mostrado na tabela 2.7. Nota-se que as restrições de valor limite de seguro por tipo de produto bem como as capacidades de cada caminhão e a restrição de não haver produto químico e alimentício no mesmo carregamento são respeitadas.

Tipo	Limite
Eletrônicos	70000
Medicamentos	65000
Tecidos	50000

Tabela 2.3: Tipos de produto. Limite em R$.

Carga	Eletrônicos	Medicamentos	Tecidos	Tipo	Peso	Frete
C1	25000			-	1500	2000
C13		23500		Q	2000	3500
C2	15550			-	700	650
C28			28000	-	2300	850
C14		35000		Q	3000	3200
C29			17700	-	400	150
C3	8750			-	300	700
C30			4200	-	200	80
C15		6500		Q	100	180
C4	20700				2000	1350
Total	70000	65000	49900		12500	12660

Tabela 2.4: Carregamento para o Caminhão A1.

Carga	Eletrônicos	Medicamentos	Tecidos	Tipo	Peso	Frete
C31			27850	-	3400	1150
C16		42000		Q	2700	5400
C5	29300			-	1200	1300
C32			12650	-	550	200
C6	12750			-	630	700
C17		13640		Q	250	500
C7	14720			-	320	350
C8	10550			-	2000	2100
C33			9500	-	1650	700
C18		9360		Q	2300	4000
Total	67320	65000	50000		15000	16400

Tabela 2.5: Carregamento para o Caminhão A2.

Carga	Eletrônicos	Medicamentos	Tecidos	Tipo	Peso	Frete
C9	39650			-	2750	3150
C34			24725	-	1320	550
C19		7200		A	440	900
C20		41655		A	3250	7000
C10	12429			-	250	300
C35			12340	-	325	100
C21		6245		A	450	910
C22		2730		A	225	500
C23		3450		A	490	1000
C11	13420			-	310	400
C24		3720		A	820	1700
C36			12935	-	1700	700
C12	4432			-	170	200
Total	69931	65000	50000		12500	17410

Tabela 2.6: Carregamento para o Caminhão A3.

Carga	Eletrônicos	Medicamentos	Tecidos	Tipo	Peso	Frete
C25			1230		450	125
C26			1200		320	95
C27			3125		1200	330
Total			5555		1970	550

Tabela 2.7: Cargas que sobraram no armazém.

2.3
O PCC como Extensão do PAG

O PCC pode ser modelado como um PAG tratando cada caminhão como um agente, o armazém como outro agente e cada carga como uma tarefa.

O agente caminhão tem como capacidade a quantidade de peso que ele pode transportar. O agente armazém tem capacidade infinita. Cada tarefa carga ocupa o seu valor de peso no agente caminhão ao qual é associada.

Seja $FreteMax$ o maior frete dentre todas as cargas da lista de cargas. Alocar uma tarefa carga t_i a qualquer um dos agentes caminhão acarreta um custo de $FreteMax - Frete_i$. Alocar uma tarefa carga ao agente armazém acarreta um custo de $FreteMax + Frete_i$.

É preciso, ainda, adicionar duas restrições:

– o valor carregado por categoria de produto não pode ultrapassar o limite coberto pelo seguro; e

– produtos químicos e produtos alimentícios não podem viajar juntos em um mesmo caminhão.

A forma como estas restrições devem ser adicionadas ao modelo original é mostrada na seção 3.2.