

3

O Grupo Triangular de Reflexão $(4, \infty, \infty)$

Neste capítulo estudamos representações que preservam tipo do grupo triangular de reflexão $\Gamma(4, \infty, \infty)$ no grupo $\text{PU}(2,1)$ de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo $H_{\mathbb{C}}^2$. O grupo $\Gamma(4, \infty, \infty)$ é o grupo gerado por reflexões nos lados de um triângulo geodésico no plano hiperbólico, com ângulos $\pi/4$, 0 e 0.

Na seção 3.1 apresentamos alguns teoremas de congruência de triângulos 2/3-ideais (isto é, triângulos com 2 vértices em $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ e 1 vértice em $H_{\mathbb{C}}^2$). Na seção 3.2 estudamos representações que preservam tipo de $\Gamma(n, \infty, \infty)$ em $\text{PU}(2,1)$; mostramos a relação existente entre estas representações e triângulos 2/3-ideais; construímos uma família de representações que preservam tipo ρ_t de $\Gamma(n, \infty, \infty)$ em $\text{PU}(2,1)$ e mostramos que para valores suficientemente pequenos de t estas representações são discretas e fiéis.

Na seção 3.3 focamos nossa atenção no caso particular $\Gamma(4, \infty, \infty)$. Utilizando uma variante do Teorema do Poliedro de Poincaré determinamos os valores para os quais as representações ρ_t são discretas e fiéis.

3.1

Congruência de Triângulos 2/3-Ideais

Definição 3.1 *Um triângulo 2/3-ideal em $H_{\mathbb{C}}^2$ consiste em uma tripla de pontos (x_0, x_1, x_2) em que $x_0 \in H_{\mathbb{C}}^2$ e $x_1, x_2 \in \partial H_{\mathbb{C}}^2$.*

Em [16] os autores demonstram o seguinte teorema ¹:

Teorema 3.2 *Se (x, y, z) é um triângulo 2/3-ideal, então $\Re(\eta(y, z, x)) > 0$. Dado um número complexo s com $\Re(s) > 0$, existe um triângulo 2/3-ideal (x, y, z) com $s = \Re(\eta(y, z, x))$. Este triângulo é único, a menos de isometrias holomorfas.*

Provaremos outros teoremas de congruências e veremos como relacionar estes resultados. Dado um triângulo 2/3-ideal (x_0, x_1, x_2) podemos, por

¹Proposição 2, parafraseado.

meio de isometrias, colocá-lo em uma forma padrão, denominada *Primeira Forma Normal*, em que os pontos possuem os seguintes levantamentos em $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} r \\ x + iy \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde r, x e y são reais com $r, y \geq 0$ e $x^2 + y^2 + r^2 = 1$.

É fácil ver que o triângulo está em uma geodésica complexa se, e somente se, $r = 0$, e que o triângulo está em um \mathbb{R}^2 -plano se, e somente se, $y = 0$.

Sejam α e β geodésicas passando por x_0 em direção de x_1 e x_2 , respectivamente. Seus vetores tangentes unitários no ponto x_0 são, respectivamente,

$$\alpha' = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \beta' = \begin{bmatrix} r \\ x + iy \end{bmatrix}.$$

O ângulo riemanniano θ entre α' e β' satisfaz

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \Re(\langle\langle \alpha', \beta' \rangle\rangle) \\ \cos(\theta) &= -x \end{aligned} \tag{3.1}$$

e o ângulo complexo φ entre α' e β' satisfaz:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= |\langle\langle \alpha', \beta' \rangle\rangle| \\ \cos(\varphi) &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Em [12, p.38], encontramos o invariante ξ^2 . que satisfaz $0 \leq \xi \leq \pi$ e

$$\cos(\theta) = \cos(\varphi) \cos(\xi). \tag{3.3}$$

Teorema 3.3 *Um triângulo 2/3-ideal é determinado unicamente, a menos de isometrias, quando são dados os seguintes invariantes:*

- 1) θ e φ , $\varphi \leq \theta \leq \pi - \varphi$;
- 2) θ e ξ , $\xi \neq \pi/2$;
- 3) φ e ξ .

Prova. Para provar o teorema, basta mostrar que os invariantes determinam um triângulo na primeira forma normal.

²Na referência este invariante é indicado por η . Mudamos a indicação para evitar confusão com o invariante η do Teorema 3.2

1) Das equações (3.1) e (3.2) e de $y \geq 0$ obtemos

$$y = \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \theta}.$$

Assim, de $x^2 + y^2 + r^2 = 1$ e $r \geq 0$, obtemos

$$r = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \text{sen}(\varphi).$$

2) Como $\cos(\varphi) = \cos(\theta)/\cos(\xi)$, basta aplicarmos o ítem 1).

3) Como $\cos(\theta) = \cos(\varphi)\cos(\xi)$, basta utilizarmos o ítem 1). \square

Obs.: Com respeito ao posicionamento do triângulo podemos afirmar, em cada caso:

1) O triângulo está em uma geodésica complexa se, e somente se, $\varphi = 0$. Por outro lado, o triângulo está em um \mathbb{R}^2 -plano se, e somente se, $\theta = \varphi$ ou $\theta = \pi - \varphi$.

2) O triângulo está em uma geodésica complexa se, e somente se, $\varphi = 0$, o que equivale a $\theta = \xi$. O triângulo está em um \mathbb{R}^2 -plano se, e somente se, $\cos^2(\theta) = \cos^2(\varphi)$, o que equivale a $\xi = 0$ ou $\xi = \pi$.

3) O triângulo está em uma geodésica complexa se, e somente se, $\varphi = 0$. O triângulo está em um \mathbb{R}^2 -plano se, e somente se, $\xi = 0$ ou $\xi = \pi$.

Para entender como estes invariantes relacionam-se com o invariante $\Re(\eta)$ do Teorema 3.2, basta calcular

$$\begin{aligned} \Re(\eta(x_1, x_2, x_0)) &= \frac{1+x}{(-1-x)^2 + y^2} \\ &= \frac{1 - \cos(\theta)}{1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\varphi)} \end{aligned}$$

Os três pontos x_0 , x_1 e x_2 determinam três geodésicas complexas C_i que passam pelos pontos x_{i+1} e x_{i+2} (sub-índices tomados módulo 3). Se ∂C_1 for uma cadeia finita, isto é, se $r \neq 0$, podemos fornecer uma *Segunda Forma Normal do Triângulo*.

Por meio de uma translação e de uma dilatação de Heisenberg apropriadas podemos levar ∂C_1 à cadeia centrada na origem e de raio 1, em coordenadas de Heisenberg (por comodidade manteremos as denominações das cadeias). Através de uma rotação de Heisenberg em torno da cadeia vertical $\{(0, v)\}$, levamos a cadeia ∂C_0 na cadeia vertical $\{(1, v)\}$. A cadeia ∂C_2 é, então, uma cadeia vertical por um ponto $(z, 0)$. Façamos $z = se^{i\tau}$. Por meio de inversão no \mathbb{R} -círculo $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, caso necessário, fazemos

com que $0 \leq \tau \leq \pi$. Os vetores polares destas cadeias são:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -se^{-i\tau} \\ se^{-i\tau} \end{bmatrix}.$$

Vejam os significados de s e τ . Os pontos que definem o triângulo possuem levantamentos:

$$X_0 = \lambda_1 \boxtimes \lambda_2 = \begin{bmatrix} se^{i\tau} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \lambda_0 \boxtimes \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } X_2 = \lambda_0 \boxtimes \lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A projeção ortogonal de x_1 em C_1 é o ponto $\Pi(x_1)$ com levantamento $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Daí podemos observar que se $\Pi(x_1) \neq x_0$ então τ é o ângulo riemanniano, em $\Pi(x_1)$, entre vetores tangentes à geodésicas reais por este ponto nas direções de x_0 e x_2 .

Quanto a s temos $|\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle| = s < 1$. Logo, $s = \cos(\varphi)$ onde φ é o ângulo complexo entre C_1 e C_2 . Além disto, se ρ é a distância entre $\Pi(x_1)$ e x_0 , temos:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{\langle \Pi(X_1), X_0 \rangle \langle X_0, \Pi(X_1) \rangle}{\langle X_0, X_0 \rangle \langle \Pi(X_1), \Pi(X_1) \rangle} = \frac{1}{1 - s^2},$$

logo $s = \tanh(\rho/2)$.

A demonstração do próximo teorema é óbvia.

Teorema 3.4 *Dados $0 \leq s < 1$ e $\tau \in [0, \pi]$ existe um único triângulo $2/3$ -ideal, a menos de isometrias, que realiza estes valores como acima.*

Este triângulo nunca está em uma geodésica complexa. O triângulo está em um \mathbb{R}^2 -plano se, e somente se, $\tau = 0$.

As interpretações geométricas de s e τ nos permitem apresentar uma construção geométrica do triângulo: tomemos um ponto $p \in H_C^2$ e um ponto $y_2 \in \partial H_C^2$. Estes dois pontos definem uma geodésica complexa C . Tomemos em C um ponto y_0 a uma distância $2 \tanh^{-1}(s)$ de forma que as geodésicas por p em direção a y_0 e y_2 se interceptem em um ângulo τ em p . Seja Π a projeção ortogonal em C . Tomemos $y_1 \in \partial H_C^2$ de forma que $\Pi(y_1) = p$. Os pontos y_0, y_1 e y_2 formam um triângulo com os invariantes desejados.

3.2

O Grupo Triangular de Reflexão (n, ∞, ∞)

3.2.1

Os Grupos Γ e G

Consideremos o grupo triangular de reflexão (n, ∞, ∞) . Este grupo Γ é obtido através de três inversões em geodésicas a , b e c do plano hiperbólico \mathbb{D} tais que:

- a e b são paralelas;
- a e c são paralelas;
- b e c se interceptam em um ponto x de acordo com um ângulo de medida π/n .

Sejam i_a , i_b e i_c as inversões em a , b e c , respectivamente. Então o grupo Γ é o grupo gerado por estas inversões (Figura (3.1)).

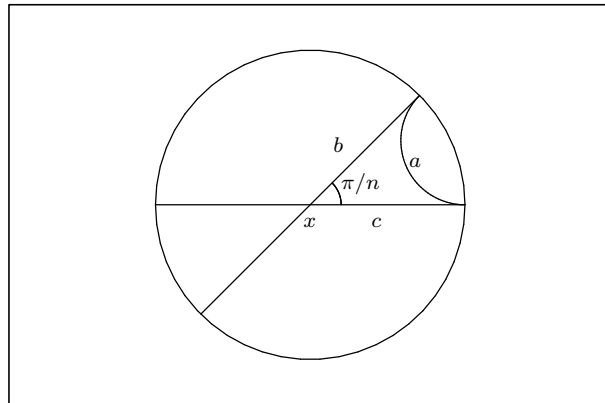


Figura 3.1: As inversões sobre estas geodésicas geram o grupo Γ .

Utilizando o Teorema de Poliedro de Poincaré [17, p.79] obtemos que o grupo Γ é discreto e possui o seguinte sistema completo de geradores e relações:

$$\Gamma = \langle i_a, i_b, i_c : i_a^2 = i_b^2 = i_c^2 = (i_b i_c)^n = 1 \rangle.$$

Além disto, a região Δ delimitada pelas três geodésicas é um domínio fundamental para Γ .

Estudaremos representações $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$ de Γ no grupo de isometrias holomorfas de $H_{\mathbb{C}}^2$. Exigiremos que estas representações sejam fiéis e preservem o tipo, isto é, $\rho(i_a i_b)$ e $\rho(i_a i_c)$ devem ser aplicações parabólicas. Vejamos como são estas representações.

Teorema 3.5 *Seja $\rho : \Gamma \rightarrow PU(2,1)$ uma representação fiel e que preserve o tipo. Então $\rho(i_k)$, $k = a, b, c$, é uma inversão em uma geodésica complexa Σ_k . Além disso, Σ_a e Σ_b são assintóticas, o mesmo acontecendo com Σ_a e Σ_c . Já Σ_b e Σ_c são concorrentes e se intersectam em um ângulo $p\pi/n$, com $\text{mdc}(p, n) = 1$ e $0 < p < n$.*

Prova. Como i_k possui ordem 2, $\rho(i_k)$ ou é uma inversão em um ponto ou é uma inversão em uma geodésica complexa. O fato de $\rho(i_a)\rho(i_b)$ ser uma aplicação parabólica implica em $\rho(i_a)$ e $\rho(i_b)$ serem inversões em geodésicas complexas, pois a composição de duas inversões em pontos é ou a identidade (pontos iguais) ou uma aplicação loxodrômica (pontos distintos) e a composição de uma inversão em um ponto com uma inversão em uma geodésica complexa é ou uma aplicação elíptica (ponto pertencente à geodésica complexa) ou uma aplicação loxodrômica (ponto não pertencente à geodésica complexa). Mais além, as geodésicas complexas Σ_a e Σ_b têm que ser assintóticas. O mesmo raciocínio se aplica às inversões $\rho(i_a)$ e $\rho(i_c)$.

Para que a composição $\rho(i_b)\rho(i_c)$ seja de ordem n , as geodésicas complexas Σ_b e Σ_c devem ser concorrentes em um ponto x de acordo com um ângulo $p\pi/n$, com p como no enunciado. \square

Visto isto, tomemos três geodésicas complexas Σ_a, Σ_b e Σ_c tais que:

- Σ_a e Σ_b são assintóticas;
- Σ_a e Σ_c são assintóticas;
- Σ_b e Σ_c se interceptam em um ponto x de acordo com um ângulo complexo de medida π/n .

Sejam as inversões i_1, j e k nas geodésicas complexas Σ_a, Σ_b e Σ_c , respectivamente. Consideramos o grupo G gerado por estas inversões. Fazendo

$$\rho(i_a) = i_1, \quad \rho(i_b) = j, \quad \rho(i_c) = k,$$

obtemos uma representação que preserva tipo. É claro que em G são satisfeitas as relações:

$$i_1^2 = j^2 = k^2 = (jk)^n = 1,$$

porém não podemos afirmar que tais relações constituem um sistema completo, ou seja, não podemos afirmar que ρ é uma representação fiel. Tampouco podemos afirmar que o grupo G é discreto.

Pelo Teorema 3.3, um terno de geodésicas complexas $(\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c)$ como acima é determinado, a menos de isometrias, pela fase ξ . Isto nos permite

construir uma família a um parâmetro real de representações

$$\rho_t : \Gamma \rightarrow G(t) \subset \text{PU}(2, 1).$$

em que t é uma função de ξ . Vejamos esta construção:

Começamos com a parametrização de um triângulo 2/3-ideal dada pelos pontos x , y e z cujos levantamentos são dados, respectivamente, por

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)e^{2i\tau} \\ \text{sen}(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\tau = (\pi - \xi)/2$ e $\varphi = \pi/n$.

Tomemos as seguintes aplicações de $\text{PU}(2,1)$:

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e \quad N = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) & -\text{sen}\left(-\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ \text{sen}\left(-\frac{\varphi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A transformação NM leva os três pontos acima para

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{-i\tau} \\ -\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{-i\tau} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\tau} \\ \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\tau} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denominamos Σ_1 a geodésica complexa determinada por x e y , Σ_2 a determinada por y e z e L_1 a determinada por y e z . Vejamos os respectivos vetores polares:

$$\kappa = X \boxtimes Y = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \iota = X \boxtimes Z = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 2 \cos(\tau) \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ i 2 \text{sen}(\tau) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \text{sen}(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Como $0 \leq \tau \leq \pi/2$ podemos substituir o parâmetro τ por $t = \tan(\tau)$. Obtemos, assim:

$$\lambda_1 := \begin{bmatrix} 2 \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ i 2 t \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \text{sen}(\varphi) \sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

A vantagem desta parametrização pode ser apreciada nas expressões para as inversões nas geodésicas complexas Σ_1 e Σ_2 que são

$$k = i_{\Sigma_1} = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) & \text{sen}(\varphi) & 0 \\ \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$j = i_{\Sigma_2} = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) & -\text{sen}(\varphi) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$jk = \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) & -\text{sen}(2\varphi) & 0 \\ \text{sen}(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Infelizmente a inversão em L_1 não possui um aspecto tão agradável:

$$i_1 = i_{L_1} = \begin{bmatrix} -\frac{-8+8\cos^2(\frac{\varphi}{2})+\alpha}{\alpha} & -\frac{4}{\alpha}i\text{sen}(\varphi)t & \frac{4}{\alpha}i\text{sen}(\varphi)t \\ \frac{4}{\alpha}i\text{sen}(\varphi)t & -\frac{\alpha-8\cos^2(\frac{\varphi}{2})t^2}{2\alpha}i\text{sen}(\varphi)t & -\frac{4}{\alpha}i\cos(\frac{\varphi}{2})\text{sen}(\varphi)t\sqrt{t^2+1} \\ \frac{4}{\alpha}\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\frac{\varphi}{2})\sqrt{t^2+1} & -\frac{4}{\alpha}i\cos(\frac{\varphi}{2})\text{sen}(\varphi)t\sqrt{t^2+1} & \frac{\alpha-8+8(1-t^2)\cos^2(\frac{\varphi}{2})}{\alpha} \end{bmatrix}$$

onde

$$\alpha = 3 + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)(t^2 - 1) - t^2 + \cos^2(\varphi)(1 + t^2).$$

A pergunta que se faz é: para quais valores de t as representações ρ_t são discretas e fiéis? Infelizmente, não temos a resposta para esta pergunta no caso geral, mas mostraremos, a seguir, que ρ_t é discreta e fiel se t for suficientemente pequeno.

3.2.2

Os Subgrupos Γ_{2n} e G_{2n}

Assim como no capítulo anterior, não trabalhamos diretamente com os grupos Γ e $G(t)$, mas sim com subgrupos Γ_{2n} e $G_{2n}(t)$ de índice $2n$ em Γ e $G(t)$, respectivamente. Obtemos, então, uma família de representações $\rho_{2n,t} : \Gamma_{2n} \rightarrow G_{2n}(t)$.

Fixado t , a construção do grupo G_{2n} — por comodidade, paramos de indicar a dependência do parâmetro t — é feita da seguinte forma:

1. Definimos novas geodésicas complexas

$$\Sigma_r = i_{\Sigma_{r-1}}(\Sigma_{r-2})$$

para $r = 3, \dots, 2n$. A inversão em Σ_r é dada por

$$i_{\Sigma_r} = i_{\Sigma_{r-1}} i_{\Sigma_{r-2}} i_{\Sigma_{r-1}} = (jk)^{r-2} j.$$

2. Definimos

$$L_r = i_{\Sigma_r} (L_{r-1})$$

$r = 2, \dots, 2n$. Denotamos por i_r a inversão em cada L_r . É importante observar que, por construção, L_s e L_{s+1} $s = 1, \dots, 2n$, são assintóticas em um ponto V_{s+1} (sub-índices tomados módulo $2n$).

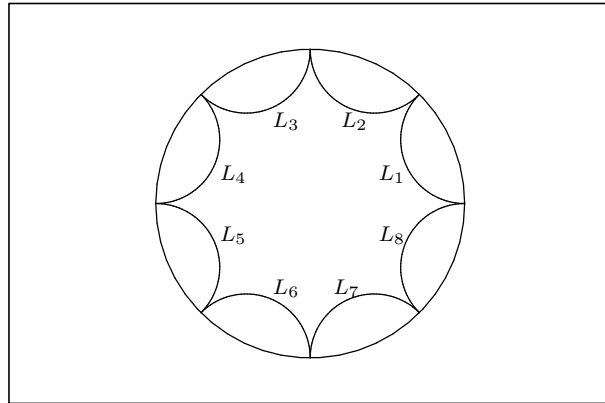


Figura 3.2: Esquema das geodésicas complexas que geram o grupo G_8 .

O grupo G_{2n} é definido por:

$$G_{2n} = \langle i_r : r = 1, \dots, 2n \rangle.$$

É claro que as relações $i_r^2 = 1$ são satisfeitas, porém estas podem não formar um sistema completo de relações para este grupo.

A mesma construção pode ser feita para o grupo Γ , ou seja, utilizando o mesmo processo descrito acima para o grupo Γ obtemos um $2n$ -ágono com vértices ideais. Denotando, de forma conveniente, as inversões nos lados deste octógono por f_1, \dots, f_{2n} obtemos um grupo

$$\Gamma_{2n} = \langle f_1, \dots, f_{2n} : f_r^2 = 1 \rangle$$

A região Δ_{2n} delimitada pelo $2n$ -ágono é um domínio fundamental para Γ_{2n} .

Vejam a construção de um domínio fundamental para o grupo G_{2n} . Para cada r definimos $y_r(t) = i_r(t)(x)$. Definimos também os semi-espacos

$$H_r(t) = \{z \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, x) < \rho(z, y_r(t))\}$$

$r = 1, \dots, 2n$.

Para cada t , definimos o poliedro

$$D(t) = \bigcap_{r=1}^{2n} H_r(t).$$

Os bissetores \mathcal{B}_r , determinados pelos H_r , definem os lados destes poliedros.

É importante observar que, devido à construção do grupo G_{2n} e pelo Teorema 2.10, os semi-espacos $H_r(t)$ e $H_{r+1}(t)$ são disjuntos e seus fechos são tangentes em um ponto V_r na fronteira de $H_{\mathbb{C}}^2$. Portanto, para qualquer t , $D(t)$ possui $2n$ pontos de tangências de lados no infinito. Denominamos estes pares de lados de *pares necessários de lados tangentes*.

Definição 3.6 Dizemos que o poliedro $D(t)$ é um poliedro simples se não possui arestas e seus pares de lados tangentes no infinito forem os pares necessários de lados tangentes.

Teorema 3.7 Se t é tal que o poliedro $D(t)$ é um poliedro simples, então $D(t)$ é um domínio fundamental para $G_{2n}(t)$ em $H_{\mathbb{C}}^2$ e a representação $\rho_{2n,t} : \Gamma_{2n} \rightarrow G_{2n}(t)$ é discreta e fiel.

Prova. Seja t tal que $D(t)$ seja um poliedro simples e tomemos como identificadores de lados as aplicações i_1, \dots, i_{2n} . É claro que as condições de lado (1)–(4) do Teorema de Poliedro de Poincaré são satisfeitas. Como não existem arestas em $D(t)$ as condições de aresta (5) e (6) são naturalmente satisfeitas.

Seja V_s um dos pontos de tangência dos fechos de lados no infinito. Este ponto está no fecho do lado \mathcal{B}_{s-1} . Mais ainda, ele está na cadeia ∂L_{s-1} . Aplicando o identificador de lado i_{s-1} o ponto V_s permanece fixo e o lado \mathcal{B}_{s-1} permanece invariante. Agora V_s também está no fecho do lado \mathcal{B}_s e em ∂L_s . Aplicamos o identificador de lados i_s que fixa V_s e deixa o lado \mathcal{B}_s invariante. Obtemos, assim, o elemento de ciclo $i_{s-1}i_s$ que é parabólico. Logo a condição (7) do Teorema de Poliedro de Poincaré é satisfeita.

Assim, para estes valores de t , o poliedro $D(t)$ é um domínio fundamental para o grupo $G_{2n}(t)$, que é gerado pelos identificadores de lados i_1, \dots, i_{2n} e as relações

$$i_1^2 = \dots = i_{2n}^2 = 1$$

formam um sistema completo de relações.

Finalmente, isto fornece que as representações $\rho_{2n,t}$ são discretas e fiéis para tais valores de t . \square

3.2.3 As Representações para t Pequeno

Da mesma forma que no capítulo anterior, mostramos que para valores pequenos de t as representações $\rho_{2n,t}$ são discretas e fiéis.

Teorema 3.8 *Existe $\epsilon > 0$ tal que para $t \in [0, \epsilon)$ a representação $\rho_{2n,t} : \Gamma_{2n} \rightarrow G_{2n}(t)$ é discreta e fiel.*

Prova. Para $t = 0$ temos

$$Y_1(0) = \begin{bmatrix} \frac{-4 \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{-5 + 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2(\varphi)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

no modelo da bola. Então x e y_1 estão em $H_{\mathbb{R}}^2$ e como as transformações j e k preservam $H_{\mathbb{R}}^2$ temos que

$$y_r \in H_{\mathbb{R}}^2$$

para todo r .

O ponto médio entre x e y_1 é o ponto z_1 cujo levantamento é dado por

$$Z_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a interseção entre o bissetor \mathcal{B}_1 e $H_{\mathbb{R}}^2$ é dada pelo segmento de reta euclidiano que une os pontos

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_2 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

A interseção $\mathcal{B}_2 \cap H_{\mathbb{R}}^2$ é dada por $j(\mathcal{B}_1 \cap H_{\mathbb{R}}^2)$, ou seja, é o segmento de reta euclidiano que une os pontos

$$U_3 = j(U_1) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad j(U_2) = U_2.$$

Observamos que os pontos U_1 , U_2 e U_3 estão contidos em um arco de circunferência de medida 2φ . As demais interseções de bissetores com $H_{\mathbb{R}}^2$ são obtidas destas por meio da transformação jk que, restrita a $H_{\mathbb{R}}^2$, é uma rotação de um ângulo 2φ em torno da origem. Logo

$$\mathcal{B}_r \cap \mathcal{B}_s \cap H_{\mathbb{R}}^2 = \emptyset$$

para quaisquer r e s distintos.

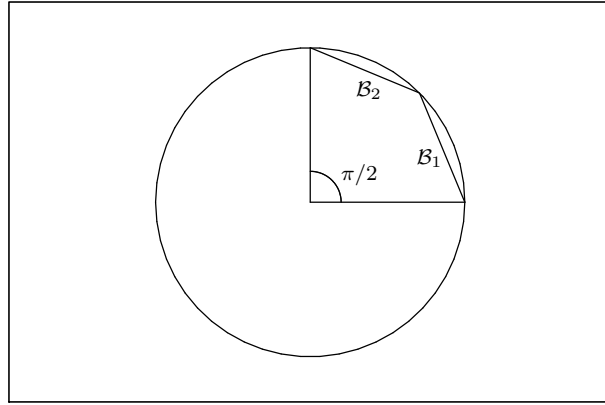


Figura 3.3: As interseções de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 com $H_{\mathbb{R}}^2$, para $\varphi = \pi/4$. A figura apresenta uma rotação de $\pi/8$ radianos no sentido anti-horário.

Assim, pelo Teorema 2.8, o poliedro $D(0)$ é um poliedro simples. Os lados de $D(0)$ que não são tangentes no infinito estão a uma distância positiva um dos outros. Logo, para valores suficientemente pequenos de t , o poliedro $D(t)$ é um poliedro simples e as representações $\rho_{2n,t}$ são discretas e fiéis. \square

3.3 O Grupo Triangular de Reflexão $(4, \infty, \infty)$

3.3.1 Uma Nova Parametrização

Começamos com um ponto $x \in H_{\mathbb{C}}^2$ e dois pontos y e z em $\partial H_{\mathbb{C}}^2$. Por meio de isometrias fazemos com que y e z possuam levantamentos

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Após estas transformações, o ponto x possui coordenadas horoesféricas (ζ, v, u) . O ponto Z possui coordenadas de Heisenberg $(0, 0)$. Por meio de uma translação de Heisenberg por $(0, -v)$, enviamos x para o ponto de coordenadas $(\zeta, 0, u)$ e o ponto z para $(0, -v)$. Seja $\zeta = re^{i\theta}$. Tomamos $s = 1/\sqrt{u + r^2}$ e aplicamos a dilatação de Heisenberg por s . Assim obtemos os pontos $z = (0, -s^2v)$ e $x = (rse^{i\theta}, 0, us^2)$. Observemos também que o ponto y é fixado pelas duas últimas isometrias.

Temos

$$X = \begin{bmatrix} rse^{i\theta} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\tau} \\ 1 \end{bmatrix}$$

para algum τ real. Aplicamos a transformação cuja matriz é dada por

$$\begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta transformação fixa os pontos y e z , enquanto manda x para

$$X = \begin{bmatrix} 1 - t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $t = 1 - rs$. Além disto, aplicando a inversão no \mathbb{R}^2 -plano puramente real, fazemos com que $\Im(e^{i\tau}) \geq 0$, o que equivale a fazer com que $0 \leq \tau \leq \pi$.

Seja ι um vetor polar à geodésica complexa Σ_1 determinada pelos pontos X e Z e seja κ um vetor polar à geodésica complexa Σ_2 determinada pelos pontos X e Y . Então:

$$\iota = X \boxtimes Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - t \\ -1 + t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \kappa = X \boxtimes Z = \begin{bmatrix} e^{-i\tau} \\ 1 - t \\ (1 - t)e^{-i\tau} \end{bmatrix}.$$

O ângulo complexo φ entre as geodésicas complexas Σ_1 e Σ_2 satisfaz

$$\cos^2(\varphi) = |\langle \iota, \kappa \rangle|^2 = A \cos(\tau) + A + 1$$

onde $A = 2t^4 - 8t^3 + 10t^2 - 4t$. Como queremos $\varphi = \pi/4$, segue

$$\cos(\tau) = -\frac{(1 - 4t + 2t^2)^2}{4t(t - 2)(t - 1)^2}$$

em que t está no intervalo $\left[1 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2, 1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2\right]$. Cabe observar que $\cos(\pi/8) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$ e $\sin(\pi/8) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$. Lembrando que τ está no primeiro ou segundo quadrante, obtemos

$$\sin(\tau) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4(t - 2)(t - 1)^2}$$

onde $\alpha = -4A - 1 = -8t^4 + 32t^3 - 40t^2 + 16t - 1$.

Resumindo: o ponto z possui levantamento

$$Z = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(1-4t+2t^2)^2+i\sqrt{\alpha}}{4(t-2)(t-1)^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

com $1 - \cos(\pi/8) \leq t \leq 1 - \sin(\pi/8)$. O vetor polar ι mantém sua aparência, enquanto o vetor polar κ passa a

$$\kappa = \begin{bmatrix} -B \\ 1-t \\ B \end{bmatrix}.$$

onde

$$B = \frac{(1-4t+2t^2)^2 - i\sqrt{\alpha}}{4(t-2)(t-1)^2}.$$

Denominando λ_1 o vetor polar à geodésica complexa L_1 determinada pelos ponto y e z , obtemos

$$\lambda_1 = Y \boxtimes Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As inversões k , j e i_1 nas geodésicas complexas Σ_1 , Σ_2 e L_1 , respectivamente, são dadas por

$$i_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t-2 & 2t-2 \\ 2t-2 & 2t^2-4t+1 & 2(t-1)^2 \\ -2t+2 & -2(t-1)^2 & -2t^2+4t-3 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } k(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2(t-1)B & 2t-2 \\ 2(t-1)\bar{B} & 2t^2-4t+1 & 2(t-1)^2\bar{B} \\ -2t+2 & 2(t-1)^2\bar{B} & -2t^2+4t-3 \end{bmatrix}.$$

Como na seção anterior, tomamos o grupo $G(t)$ de $\text{PU}(2,1)$, para cada $1 - \cos(\pi/8) \leq t \leq 1 - \sin(\pi/8)$, gerado pelas transformações i_1 , j e k e o grupo triangular Γ do tipo $(4, \infty, \infty)$ que age no plano hiperbólico real \mathbb{D} e obtemos uma representação $\rho_t : \Gamma \rightarrow G(t)$.

Tomamos, também, os subgrupos de índice 8 destes subgrupos, como na seção anterior, e obtemos as representações $\rho_{8,t} : \Gamma_8 \rightarrow G_8(t)$. Novamente, para um t fixo, a representação ρ_t é discreta e fiel se, e somente se, a representação $\rho_{8,t}$ também o for.

O grupo $G_8(t)$ possui geradores i_1, i_2, \dots, i_8 que satisfazem as relações $i_r^2 = 1$. Para mostrar que estas formam um sistema completo de relações, tomamos o poliedro cujos lados são dados pelas interseções dos bissetores

$$\mathcal{B}_r = \{w \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(x, w) = \rho(w, x_r)\}$$

onde $x_r = i_r(x)$.

É necessário analisar as diversas interseções dos bissetores. Pela simetria do poliedro, basta analisar as interseções dos diversos bissetores com \mathcal{B}_1 .

3.3.2 Interseção dos Bissetores

Temos os seguintes lemas:

Lema 3.9 *Os bissetores $\mathcal{B}_1(t)$ e $\mathcal{B}_2(t)$ são disjuntos para todo t . O mesmo acontece com os pares de bissetores $\mathcal{B}_1(t)$ e $\mathcal{B}_5(t)$ e com $\mathcal{B}_1(t)$ e $\mathcal{B}_8(t)$.*

Prova. Pela construção e pelo Teorema 2.10 os bissetores $\mathcal{B}_1(t)$ e $\mathcal{B}_2(t)$ são disjuntos para todo t . O mesmo argumento vale para o par $\mathcal{B}_1(t)$ e $\mathcal{B}_8(t)$, já que $L_8 = j(L_1)$.

Quanto ao par $\mathcal{B}_1(t)$ e $\mathcal{B}_5(t)$, observemos que $\mathcal{B}_5 = (jk)^2(\mathcal{B}_1)$. Como $(jk)^2$ é a inversão no ponto x , os pontos x, x_1 e x_5 estão em um mesmo hiperplano complexo, qualquer que seja t . Além disto $x \notin \sigma_1$ (onde σ_r é a espinha real de \mathcal{B}_r). Logo $\sigma_1 \cap \sigma_5 = \emptyset$, e portanto $\mathcal{B}_1(t) \cap \mathcal{B}_5(t) = \emptyset$ para todo t . □

Lema 3.10 *Os bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_4 , e suas respectivas esferas espinais, são disjuntos para $t < 1 - \sqrt{2}/2$. Para $t = 1 - \sqrt{2}/2$, as esferas espinais são tangentes em um ponto em $\partial H_{\mathbb{C}}^2$. O mesmo acontece com os bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_6 .*

Prova. Da mesma forma que no capítulo anterior, temos

$$L_4 = i_{\Sigma_3}(L_1) = jkj(L_1)$$

e pela construção dos bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_4 e pelo Teorema 2.12, estes bissetores e seus fechos não se intersectam se, e somente se, as geodésicas L_1 e L_4 são ultraparalelas. Esta última condição é equivalente a:

$$f(t) = \frac{\langle \lambda_1, \lambda_4 \rangle \langle \lambda_4, \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle \langle \lambda_4, \lambda_4 \rangle} > 1$$

onde

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = jkj(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 4(1-t)(3t^2 - 6t + 2) \\ \alpha - 1 - 2i\sqrt{\alpha} \\ 4(t-1)^4 \end{bmatrix}.$$

Como

$$f(t) = \frac{(3t^2 - 6t + 2)^2}{t^2(t^2 - 4t + 4)}$$

segue que estes bissetores, e suas respectivas esferas espinais, são disjuntas se e somente se $t < t_c = 1 - \sqrt{2}/2$.

Como $f(t_c) = 1$, segue que as esferas espinais $\mathcal{S}_1(t_0)$ e $\mathcal{S}_4(t_0)$ são tangentes em $\partial H_{\mathbb{C}}^2$.

Quanto aos bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_6 basta observar que

$$\mathcal{B}_6 = i_{\Sigma_4}(\mathcal{B}_1) = kjk(\mathcal{B}_1)$$

e

$$\lambda_6 = \begin{bmatrix} (1-t)(3t^2 - 6t + 2) \\ 2t(2-t)(t-1)^2 \\ 2(t-1)^4 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$g(t) = \frac{\langle \lambda_1, \lambda_6 \rangle \langle \lambda_6, \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle \langle \lambda_6, \lambda_6 \rangle} = f(t)$$

e o resultado segue. □

Lema 3.11 *Os bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_3 , e suas respectivas esferas espinais, são disjuntos para $t \leq 1 - \sqrt{2}/2$. O mesmo acontece com os bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_7 .*

Prova. Basta provar esta afirmação para os bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_3 já que $\mathcal{B}_1 = jk(\mathcal{B}_7)$ e $\mathcal{B}_3 = jk(\mathcal{B}_1)$.

O bissetor \mathcal{B}_1 é o conjunto dos pontos equidistantes dos pontos X e $x_1 = i_1(X)$, onde

$$X = \begin{bmatrix} 1-t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_1 = \begin{bmatrix} t-1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo os vértices de \mathcal{B}_1 são os pontos

$$V_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os vértices do bisetor \mathcal{B}_3 são dados por

$$W_1 = jk(V_1) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W_2 = jk(V_2) = \begin{bmatrix} -\bar{w}_1 \\ -\bar{w}_2 \\ -\bar{w}_3 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{(t-2)t} [t-1 - \sqrt{\alpha} + i(t-1)(t-1 + \sqrt{\alpha})], \\ w_2 &= \frac{2t^2 - 4t + 1}{2(t-2)(t-1)t} [t-1 - \sqrt{\alpha} + i(\sqrt{\alpha}t + 1 - \sqrt{\alpha})] \quad \text{e} \\ w_3 &= \frac{1}{(t-2)t} [\sqrt{\alpha}t - 1 - \sqrt{\alpha} - i(t-1)(\sqrt{\alpha}t + 1 - \sqrt{\alpha})]. \end{aligned}$$

Da mesma forma que no Lema 2.19, verificamos as interseções destes bisetores através da projeção de \mathcal{B}_3 na espinha complexa $H_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\}$ de \mathcal{B}_1 . Esta projeção é limitada pela curva dada pelos pontos $x + iy$, de norma menor que 1, que satisfazem a equação:

$$h_4(y, t)x^4 + h_3(y, t)x^3 + h_2(y, t)x^2 + h_1(y, t)x + h_0(y, t) = 0$$

onde

$$\begin{aligned} h_4 &= (t-1)^2 (64t^8 - 512t^7 + 1784t^6 - 3536t^5 + 4392t^4 - 3552t^3 \\ &\quad + 1854t^2 - 572t + 81) \\ h_3 &= 4(t-1) (64t^8 - 512t^7 + 1788t^6 - 3560t^5 + 4436t^4 - 3568t^3 \\ &\quad + 1823t^2 - 542t + 72) \\ h_2 &= 2(t-1)^2 (64t^8 - 512t^7 + 1784t^6 - 3536t^5 + 4392t^4 - 3552t^3 \\ &\quad + 1854t^2 - 572t + 81) y^2 \\ &\quad + 2\sqrt{\alpha}(t-1) (8t^4 - 32t^3 + 48t^2 - 32t + 9) (t^2 - 2t + 2) y \\ &\quad + 392t^8 - 3136t^7 + 10936t^6 - 21712t^5 + 26882t^4 - 21320t^3 \\ &\quad + 10614t^2 - 3036t + 382 \\ h_1 &= 4(t-1) (64t^8 - 512t^7 + 1788t^6 - 3560t^5 + 4436t^4 - 3568t^3 \\ &\quad + 1823t^2 - 542t + 72) y^2 + 32\sqrt{\alpha}(t^2 - 2t + 2) (t-1)^4 y \\ &\quad + 4(t-1) (68t^6 - 408t^5 + 1004t^4 - 1296t^3 + 929t^2 - 354t + 56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_0 = & (t - 1)^2 (64t^8 - 512t^7 + 1784t^6 - 3536t^5 + 4392t^4 - 3552t^3 \\
 & + 1854t^2 - 572t + 81) y^4 \\
 & + 2\sqrt{\alpha}(t - 1) (8t^4 - 32t^3 + 48t^2 - 32t + 9) (t^2 - 2t + 2) y^3 \\
 & + (128t^8 - 1024t^7 + 3536t^6 - 6880t^5 + 8289t^4 - 6404t^3 \\
 & + 3150t^2 - 916t + 122) y^2 \\
 & + 2\sqrt{\alpha}(t - 1) (8t^2 - 16t + 7) (t^2 - 2t + 2) y \\
 & + 72t^6 - 432t^5 + 1048t^4 - 1312t^3 + 899t^2 - 326t + 49.
 \end{aligned}$$

(Veja Figura (3.4).)

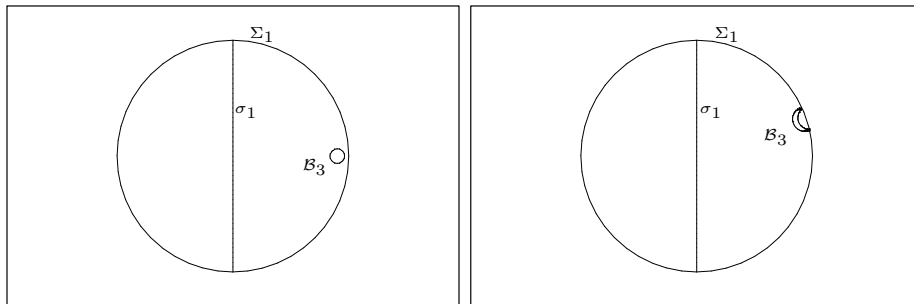


Figura 3.4: As curvas que limitam as projeções dos bissetores $\mathcal{B}_3(0)$ (à esquerda) e $\mathcal{B}_3(\sqrt{3})$ (à direita).

Como a espinha real de \mathcal{B}_1 é o eixo imaginário entre i e $-i$, basta mostrar que a curva acima não intercepta tal eixo. Se esta curva interceptasse este eixo, existiriam valores de $y \in (-1, 1)$ e de $t \in I = [t_0, t_c]$, onde $t_0 = 1 - \cos(\pi/8)$ e $t_c = 1 - \cos(\pi/4)$, satisfazendo

$$h_0(y, t) = f_4(t) y^4 + f_3(t) y^3 + f_2(t) y^2 + f_1(t) y + f_0(t) = 0.$$

Por meio de um exercício simples, porém trabalhoso, de cálculo, podemos provar que as funções f_4 , f_2 e f_0 são decrescentes e positivas no intervalo considerado para t , enquanto as funções f_3 e f_1 são negativas (ver o próximo lema).

Isto posto, podemos garantir que não existem valores não-positivos de y para os quais $h_0(y, t) = 0$. Vejamos o que acontece para valores positivos de y .

Primeiramente, observamos que $0 \leq \alpha \leq 1$ no intervalo considerado. Isto acontece pois $\alpha'(t) = -32(t - 1)(t - 1 - \sqrt{2}/2)(t - 1 + \sqrt{2}/2)$, logo α é crescente no intervalo considerado e $\alpha(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}/2) = 0$ e

$\alpha(1 - \sqrt{2}/2) = 1$. Logo

$$f_3(t) \geq r_3(t) = 2(t-1)(8t^4 - 32t^3 + 48t^2 - 32t + 9)(t^2 - 2t + 2)$$

e

$$f_1(t) \geq r_1(t) = +2(t-1)(8t^2 - 16t + 7)(t^2 - 2t + 2).$$

Assim temos que $h_0(y, t) \geq H_0(y, t)$ para todo $y > 0$ e $t \in I$. Além disto, as funções r_3 e r_1 são negativas e crescentes em I (ver o próximo lema).

Vamos analisar a função H_0 para $y > 0$ dividindo seu domínio $(0, 1) \times [t_0, t_c]$ em três retângulos

$$D_1 = (0, 1) \times [t_0, t_1]$$

$$D_2 = (0, 1) \times [t_1, t_2]$$

$$D_3 = (0, 1) \times [t_2, t_c]$$

em que $t_1 = t_0 + 1/10$ e $t_2 = t_0 + 1/7$.

Tendo em vista os comportamentos das funções f_k e r_k , a função H_0 restrita a D_1 é limitada inferiormente pela função

$$g_1(y) = f_4(t_1)y^4 + r_3(t_0)y^3 + f_2(t_1)y^2 + r_1(t_0)y + f_0(t_1)$$

em que, para $A = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$,

$$f_4(t_1) = -\left(\frac{36519591}{3125000} + \frac{505231}{62500}\sqrt{2}\right)A + \frac{25319139}{1250000}\sqrt{2} + \frac{9072491977}{312500000},$$

$$r_3(t_0) = -(7 + 4\sqrt{2})A,$$

$$f_2(t_1) = -\left(\frac{135437}{12500}\sqrt{2} + \frac{4974541}{312500}\right)A + \frac{3841487}{125000}\sqrt{2} + \frac{278572783}{6250000},$$

$$r_1(t_0) = -\left(\frac{11}{2} + \frac{15}{4}\sqrt{2}\right)A,$$

$$f_0(t_1) = -\left(\frac{78727}{12500} + \frac{199}{50}\sqrt{2}\right)A + \frac{12747}{1000}\sqrt{2} + \frac{2156359}{125000}.$$

A função g_1 é convexa e possui um ponto de mínimo global em $y_0 \approx 0,49191$ e valor mínimo global $g_1(y_0) \approx 8,84629$. Logo $H_0(y, t) > 0$ em D_1 .

Da mesma forma, a função H_0 em D_2 é limitada inferiormente pela função

$$g_2(y) = f_4(t_2) y^4 + r_3(t_1) y^3 + f_2(t_2) y^2 + r_1(t_1) y + f_0(t_2)$$

em que, para $A = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned} f_4(t_2) &= - \left(\frac{754621488}{40353607} + \frac{10642192}{823543} \sqrt{2} \right) A + \frac{157999554}{5764801} \sqrt{2} \\ &\quad + \frac{88654588849}{2259801992}, \\ r_3(t_1) &= - \left(\frac{1009757}{125000} + \frac{4627}{1000} \sqrt{2} \right) A + \frac{119521}{25000} \sqrt{2} + \frac{4558651}{625000}, \\ f_2(t_2) &= - \left(\frac{20261669}{823543} + \frac{80063}{4802} \sqrt{2} \right) A + \frac{2584387}{67228} \sqrt{2} + \frac{2575409027}{46118408}, \\ r_1(t_1) &= - \left(\frac{3057}{500} + \frac{79}{20} \sqrt{2} \right) A + \frac{309}{100} \sqrt{2} + \frac{62427}{12500}, \\ f_0(t_2) &= - \left(\frac{158780}{16807} + \frac{2042}{343} \sqrt{2} \right) A + \frac{72717}{4802} \sqrt{2} + \frac{2440370}{117649}. \end{aligned}$$

A função g_2 é convexa e possui um ponto de mínimo global em $y_0 \approx 0,368171$ e valor mínimo global $g_2(y_0) \approx 7,03503$. Logo $H_0(y, t) > 0$ em D_2 .

Da mesma forma, a função H_0 em D_3 é limitada inferiormente pela função

$$g_3(y) = f_4(t_c) y^4 + r_3(t_2) y^3 + f_2(t_c) y^2 + r_1(t_2) y + f_0(t_c)$$

em que, para $A = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned} f_4(t_c) &= \frac{9}{2}, \quad f_2(t_c) = \frac{45}{4}, \quad f_0(t_c) = \frac{9}{2} \\ r_3(t_2) &= - \left(\frac{155275}{16807} + \frac{1816}{343} \sqrt{2} \right) A + \frac{17050}{2401} \sqrt{2} + \frac{8945554}{823543}, \\ r_1(t_2) &= - \left(\frac{32469}{4802} + \frac{815}{196} \sqrt{2} \right) A + \frac{3069}{686} \sqrt{2} + \frac{122271}{16807}. \end{aligned}$$

A função g_3 é convexa com um ponto de mínimo global em $y_0 \approx 0,95195$ e com valor mínimo global $g_3(y_0) \approx 0,47389$. Logo $H_0(y, t) > 0$ em D_3 .

Portanto $H_0(y, t) > 0$ para todo $y > 0, t \in [t_0, t_c]$. Como $h_0(y, t) > H_0(y, t)$ nesta região, provamos nosso resultado. \square

Vejamos os comportamentos das funções f_k e r_k .

Lema 3.12 *As funções f_4 , f_2 e f_0 são decrescentes e positivas no intervalo $[t_0, t_c]$. As funções f_3 e f_1 são negativas neste intervalo. As funções r_3 e r_1 são negativas e crescentes neste intervalo.*

Prova. Começamos com a função f_4 . Sua derivada oitava é dada por

$$f_4^{(8)}(t) = 116121600 t^2 - 232243200 t + 115799040$$

cujas raízes $1 + \sqrt{10}/60$ e $1 - \sqrt{10}/60$ são ambas maiores que t_c . Logo $f_4^{(8)}(t) > 0$ no intervalo considerado. Isto implica que a derivada sétima de f_4 é crescente no intervalo, mas $f_4^{(7)}(t_c) = -9515520\sqrt{2}$, logo esta é negativa no intervalo. Portanto a derivada sexta é decrescente no intervalo, mas $f_4^{(6)}(t_c) = 2361600$, logo esta é positiva no intervalo. Continuando com este raciocínio e utilizando os valores $f_4^{(5)}(t_c) = -240000\sqrt{2}$, $f_4^{(4)}(t_c) = 42480$, $f_4'''(t_c) = -3384\sqrt{2}$, $f_4''(t_c) = 490$, $f_4'(t_c) = -33\sqrt{2}$ e $f_4(t_c) = 9/2$, obtemos o resultado desejado.

Da mesma forma, vemos que a derivada sétima da função f_2 é dada por

$$f_2^{(7)} = 5160960 t - 5160960$$

e esta é negativa no intervalo considerado. Utilizando os valores $f_2^{(6)}(t_c) = 1255680$, $f_2^{(5)}(t_c) = -199760\sqrt{2}$, $f_2^{(4)}(t_c) = 46296$, $f_2'''(t_c) = -4524\sqrt{2}$, $f_2''(t_c) = 814$, $f_2'(t_c) = -69\sqrt{2}$, $f_2(t_c) = 45/4$ e repetindo o raciocínio, obtemos o resultado desejado.

Para a função f_0 , temos que sua derivada quarta

$$f_0^{(4)}(t) = 25920 t^2 - 51840 t + 25152$$

possui raízes $1 + 2\sqrt{15}/45$ e $1 - 2\sqrt{15}/45$ que são ambas maiores que t_c . Logo esta derivada é positiva no intervalo considerado. Repetindo o raciocínio anterior com os valores $f_0'''(t_c) = -1776\sqrt{2}$, $f_0''(t_c) = 370$, $f_0'(t_c) = -33\sqrt{2}$ e $f_0(t_c) = 9/2$ obtemos o resultado desejado.

A função r_3 possui derivada quinta dada por

$$r_3^{(5)}(t) = 40320 t^2 - 80640 t + 42240$$

e esta é positiva para todo t . Repetindo o raciocínio anterior com os valores $r_3^{(4)}(t_c) = -4320\sqrt{2}$, $r_3'''(t_c) = 1332$, $r_3''(t_c) = -170\sqrt{2}$, $r_3'(t_c) = 39$ e $r_3(t_c) = -9\sqrt{2}/2$ obtemos o resultado desejado.

A função r_1 possui derivada terceira dada por

$$r_1'''(t) = 960t^2 - 1920 + 1044$$

e esta é positiva para todo t . Repetindo o raciocínio anterior com os valores $r_1''(t_c) = -122\sqrt{2}$, $r_1'(t_c) = 39$ e $r_1(t_c) = -9\sqrt{2}/2$ obtemos o resultado desejado.

Para provar as afirmações com respeito a f_1 e f_2 , basta perceber que $f_1 = \sqrt{\alpha}r_1$, $f_3 = \sqrt{\alpha}r_3$ e ambas r_1 e r_3 são negativas. \square

3.3.3

As Representações Discretas e Fíeis

De posse dos resultados da seção anterior podemos provar:

Teorema 3.13 *A representação ρ_t é discreta e fiel se e somente se $1 - \cos(\pi/8) \leq t \leq 1 - \cos(\pi/4)$.*

Prova. Pelos lemas da seção anterior, o poliedro $D(t)$ é um poliedro simples para $1 - \cos(\pi/8) \leq t < 1 - \cos(\pi/4)$. Logo, pelo Teorema 3.8, a representação $\rho_{8,t}$ é discreta e fiel para estes valores de t .

Já o poliedro $D(t_c)$, $t_c = 1 - \cos(\pi/4)$, não possui arestas e possui outros pontos de tangência de lados no infinito além dos provenientes das tangências dos pares de lados necessários. Estes novos pontos de tangência provêm das interseções $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_4$ e $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_6$. Vejamos o que acontece com o ponto $v_{1,4}$, na interseção de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_4 . Observemos, inicialmente, que $v_{1,4} \in \partial L_1 \cap \partial L_4$. Isto implica que o elemento de ciclo em $v_{1,4}$ é $i_4 i_1$ e este é parabólico. O mesmo argumento vale para o par \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_6 . Os demais pontos de tangência são obtidos destes por isometrias e as mesmas conclusões são válidas. Logo as condições (1) a (7) do Teorema 1.18 são verificadas, o que implica que a representação ρ_{8,t_c} é discreta e fiel.

Para $t > t_c$, as geodésicas complexas L_1 e L_4 são concorrentes. Portanto, o elemento $g = i_1 i_4$ é elíptico. Se g possui ordem finita, a representação ρ_t não é fiel. Por outro lado, se g não possui ordem finita, a representação $\rho_{8,t}$ não é discreta.

Utilizando o fato de ρ_t ser discreta e fiel se e somente se $\rho_{8,t}$ também o for, provamos o nosso resultado \square

Pelo Teorema 2.12 e pelas construções dos grupos $G_8(t)$, percebemos que as geodésicas complexas L_1 e Σ_3 são ultraparalelas, para $t < t_c$; assintóticas, para $t = t_c$; e concorrentes, para $t > t_c$. Logo, a representação

$\rho_t : \Gamma \rightarrow G(t)$ é discreta e fiel se, e somente se, o elemento $i_1 i_{\Sigma_3} = i_1 k j k$ não for elíptico.

Observemos também que o elemento $i_1 k j k$, para $t = t_c$ é um elemento *parabólico accidental*, isto é, ele é parabólico e é imagem de um elemento loxodrômico de Γ .