

## 2

### O Grupo Triangular de Reflexão $(4, 4, \infty)$

Neste capítulo estudamos representações que preservam tipo do grupo triangular de reflexão  $\Gamma(4, 4, \infty)$  no grupo  $\text{PU}(2,1)$  de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo  $H_{\mathbb{C}}^2$ . O grupo  $\Gamma(4, 4, \infty)$  é o grupo gerado por reflexões nos lados de um triângulo geodésico no plano hiperbólico, com ângulos  $\pi/4$ ,  $\pi/4$  e  $0$ .

Na seção 2.1 apresentamos alguns teoremas de congruência de triângulos 1/3-ideais (isto é, triângulos com 2 vértices em  $H_{\mathbb{C}}^2$  e 1 vértice em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ ). Na seção 2.2 mostramos a relação existente entre as representações acima e triângulos 1/3-ideais. Construímos uma família de representações que preservam tipo  $\rho_t$  de  $\Gamma$  em  $\text{PU}(2,1)$ . Esta família de representações contém todas as representações de  $\Gamma$  em  $\text{PU}(2,1)$ , a menos de conjugações por isometrias.

A fim de estudar esta família de representações construímos, na seção 2.3, subgrupos  $\Gamma_8$  e  $G_8(t)$  de  $\Gamma$  e  $G(t) = \rho_t(\Gamma)$ , respectivamente. Construímos também poliedros  $D(t)$ . Utilizando uma variante do Teorema de Poliedro de Poincaré mostramos que, para valores de  $t$  suficientemente pequenos, estes poliedros são domínios fundamentais para os grupos  $G_8(t)$  e que  $\rho_t$  é uma representação discreta e fiel.

Na seção 2.5 apresentamos alguns teoremas sobre interseções de bissetores e os utilizamos para estudar os lados dos poliedros  $D(t)$ . Finalmente, na seção 2.6, determinamos os valores de  $t$  para os quais as representações  $\rho_t$  são discretas e fiéis.

#### 2.1

##### Congruência de Triângulos 1/3-Ideais

**Definição 2.1** *Um triângulo 1/3-ideal em  $H_{\mathbb{C}}^2$  consiste em uma tripla de pontos  $(x_0, x_1, x_2)$  em que  $x_0 \in \partial H_{\mathbb{C}}^2$  e  $x_1, x_2 \in H_{\mathbb{C}}^2$ .*

Utilizando o invariante  $\eta$  dado por

$$\eta(x, y, z) = \frac{\langle X, Z \rangle \langle Y, Z \rangle}{\langle X, Y \rangle \langle Z, Z \rangle},$$

em que  $x, y$  são pontos de  $\tilde{H}_{\mathbb{C}}^2$ ,  $z \in H_{\mathbb{C}}^2$  e  $X, Y, Z$  são levantamentos destes pontos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ , os autores de [16] demonstram o seguinte teorema <sup>1</sup>,

**Teorema 2.2** *Seja  $(x_0, x_1, x_2)$  um triângulo 1/3-ideal com  $\rho$  a distância entre  $x_1$  e  $x_2$  e  $\eta = \eta(x_0, x_1, x_2)$ . Então  $\cosh^2(\rho/2) > |\eta|^2 / (2\Re(\eta) - 1)$ . Reciprocamente, dados  $\rho$  e  $\eta \in \mathbb{C}$  tais que  $\cosh^2(\rho/2) > |\eta|^2 / (2\Re(\eta) - 1)$ , existe um único triângulo 1/3-ideal  $(x_0, x_1, x_2)$ , a menos de isometrias holomorfas, em que  $\rho$  é a distância entre  $x_1$  e  $x_2$ , e  $\eta = \eta(x_0, x_1, x_2)$ .*

Provaremos outros teoremas de congruências de triângulos e veremos como relacionar estes resultados. Por meio de isometrias podemos sempre colocar um triângulo 1/3-ideal em uma forma padrão que denominamos *Primeira Forma Normal*. Esta forma padrão é tal que os pontos  $x_i$  possuem os seguintes levantamentos  $X_i \in \mathbb{C}^{2,1}$ :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} r \\ x + iy \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que  $r, y \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $x^2 + y^2 + r^2 < 1$ . Observamos que o triângulo está em um  $\mathbb{R}^2$ -plano se, e somente se,  $y = 0$  e em um  $\mathbb{C}$ -plano se, e somente se,  $r = 0$ .

Consideremos as geodésicas complexas  $C_0$  (passando por  $x_1$  e  $x_2$ ),  $C_1$  (passando por  $x_0$  e  $x_2$ ) e  $C_2$  (passando por  $x_0$  e  $x_1$ ). Seus vetores polares unitários  $\lambda_i$  são, respectivamente:

$$\lambda_0 = X_1 \boxtimes X_2 = \begin{bmatrix} \frac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2+r^2}} \\ \frac{-r}{\sqrt{x^2+y^2+r^2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = X_2 \boxtimes X_0 = \begin{bmatrix} \frac{-(1+x)+iy}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \\ \frac{r}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \\ \frac{-r}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = X_0 \boxtimes X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>Proposição 3, parafraseada.

As geodésicas complexas  $C_0$  e  $C_2$  interceptam-se no ponto  $x_1$  de acordo com um ângulo  $\varphi_1$  que satisfaz:

$$\cos(\varphi_1) = |\langle \lambda_0, \lambda_2 \rangle| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + r^2}}, \quad (2.1)$$

enquanto  $C_0$  e  $C_1$  interceptam-se em  $x_2$  de acordo com um ângulo  $\varphi_2$  que satisfaz:

$$\cos(\varphi_2) = |\langle \lambda_0, \lambda_1 \rangle| = \frac{\sqrt{(x + x^2 + y^2 + r^2)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + r^2} \sqrt{(1 + x)^2 + y^2}}. \quad (2.2)$$

As geodésicas reais  $\alpha$  e  $\beta$  que passam por  $x_1$  nas direções de  $x_0$  e  $x_2$ , respectivamente, possuem vetores tangentes em  $x_1$  dados por

$$\alpha' = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \beta' = \begin{bmatrix} \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2 + r^2}} \\ \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2 + r^2}} \end{bmatrix}$$

e se interceptam de acordo com um ângulo  $\theta_1$  que satisfaz:

$$\cos(\theta_1) = \Re \langle \alpha', \beta' \rangle = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + r^2}}, \quad (2.3)$$

onde  $\langle \langle, \rangle \rangle$  é o produto interno usual em  $\mathbb{C}^2$ .

Os pontos  $x_1$  e  $x_2$  encontram-se a uma distância  $\rho$  dada por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{\langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_1 \rangle}{\langle X_1, X_1 \rangle \langle X_2, X_2 \rangle} = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2 + r^2)},$$

o que, junto com  $1 - \tanh^2(x) = 1/\cosh^2(x)$ , implica:

$$\tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = x^2 + y^2 + r^2. \quad (2.4)$$

Estamos em condições de demonstrar o

**Teorema 2.3** *Um triângulo 1/3-ideal é determinado, a menos de isometrias, quando são dados quaisquer um dos seguintes ternos de invariantes.*

- 1)  $\varphi_1, \theta_1$  e  $\rho, \quad \varphi_1 \leq \theta_1 \leq \pi - \varphi_1$  ;
- 2)  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\rho, \quad \frac{|\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)|}{1 - \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)} \leq \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \leq \frac{\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)}{1 + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)},$   
 $0 < \varphi_i \leq \pi/2$  e  $\rho > 0$ .

*Prova.* 1) De (2.3) e (2.4) obtemos

$$x = -\cos(\theta_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right), \quad (2.5)$$

e de (2.1) vem  $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 + r^2) \cos^2(\varphi_1)$ . O que, junto com as equações (2.4) e (2.5), fornece

$$y = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \sqrt{\cos^2(\varphi_1) - \cos^2(\theta_1)} \quad (2.6)$$

já que  $y \geq 0$ . Por fim, substituindo as equações (2.5) e (2.6) em (2.4), e levando em conta que  $r \geq 0$  e  $0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$ , obtemos

$$r = \operatorname{sen}(\varphi_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right). \quad (2.7)$$

As três últimas equações nos mostram que a única condição a ser imposta sobre os três invariantes é que  $\cos^2(\varphi_1) - \cos^2(\theta_1) \geq 0$ , o que equivale a  $\varphi_1 \leq \theta_1 \leq \pi - \varphi_1$ . Esta condição não é uma novidade, pois ela também resulta da definição de ângulo entre geodésicas complexas.

2) Substituindo as equações (2.4), (2.5) e (2.6) em (2.2) obtemos

$$\cos^2(\varphi_2) = \frac{\tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) - 2 \cos(\theta_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos^2(\varphi_1)}{1 - 2 \cos(\theta_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos^2(\varphi_1) \tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right)} \quad (2.8)$$

Resolvendo esta equação para  $\cos(\theta_1)$  obtemos:

$$\cos(\theta_1) = \frac{\cos^2(\varphi_1) - \cos^2(\varphi_2) + [1 - \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2)] \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}^2(\varphi_2) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)} \quad (2.9)$$

o que determina o triângulo.

A equação (2.8) nos mostra que  $\cos^2(\varphi_2)$  é uma função decrescente de  $\cos(\theta_1)$ . Como  $-\cos(\varphi_1) \leq \cos(\theta_1) \leq \cos(\varphi_1)$  segue

$$\frac{[\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos(\varphi_1)]^2}{[1 - \cos(\varphi_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)]^2} \leq \cos^2(\varphi_2) \leq \frac{[\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos(\varphi_1)]^2}{[1 + \cos(\varphi_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)]^2}. \quad (2.10)$$

Resolvendo estas inequações para  $\tanh(\rho/2)$  obtemos:

$$\frac{|\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)|}{1 - \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)} \leq \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \leq \frac{\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)}{1 + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)}.$$

Pela equação (2.9) podemos ver que  $\varphi_2 \neq 0$ . Pelas inequações (2.10) temos  $\varphi_1 \neq 0$ , pois caso contrário teríamos  $\varphi_2 = 0$ .  $\square$

Vejamos o que podemos afirmar com respeito à posição do triângulo em cada um destes casos:

1) O triângulo está em um  $\mathbb{C}$ -plano se, e somente se,  $\varphi_1 = 0$ . Ele está em um  $\mathbb{R}^2$ -plano se, e somente se,  $\cos^2(\varphi_1) = \cos^2(\theta_1)$ , ou seja se, e somente se,  $\theta_1$  está em um dos extremos.

2) Este triângulo não está em um  $\mathbb{C}$ -plano pois  $\varphi_1 \neq 0$ . Ele está em um  $\mathbb{R}^2$ -plano se, e somente se,  $\cos(\theta_1) = \pm \cos(\varphi_1)$ , o que, pela equação (2.8), é equivalente a

$$\cos(\varphi_2) = \frac{\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos(\varphi_1)}{1 + \cos(\varphi_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)} \quad \text{ou} \quad \cos(\varphi_2) = \frac{|\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos(\varphi_1)|}{1 - \cos(\varphi_1) \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)}.$$

Destas igualdades segue que o triângulo está em um  $\mathbb{R}^2$ -plano se, e somente se,

$$\frac{\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)}{1 - \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)} = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)}{1 + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)}.$$

Devemos entender como estes invariantes relacionam-se com o invariante  $\eta$  do Teorema 2.2. Calculando  $\eta$  com o triângulo na primeira forma normal obtemos:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1 + x - iy}{1 - (x^2 + y^2 + z^2)} \\ &= \cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \left[ 1 - \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \left( \cos(\theta_1) + i\sqrt{\cos^2(\varphi_1) - \cos^2(\theta_1)} \right) \right]. \end{aligned}$$

No caso em que a cadeia  $\partial C_0$  é uma cadeia finita, podemos introduzir uma *Segunda Forma Normal* do triângulo 1/3-ideal em  $H_{\mathbb{C}}^2$ . Como a cadeia  $\partial C_0$  é uma cadeia finita, podemos, através de uma translação e de uma dilatação de Heisenberg (se necessário for), admitir que  $C_0 = H_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\}$ , isto é,  $\partial C_0$  é a cadeia de centro na origem (em coordenadas de Heisenberg) e raio 1. As cadeias  $\partial C_1$  e  $\partial C_2$  são cadeias infinitas que passam pelos pontos  $(z_1, 0)$  e  $(z_2, 0)$  em coordenadas de Heisenberg. Como as geodésicas complexas  $C_0$  e  $C_1$  (respectivamente,  $C_0$  e  $C_2$ ) interceptam-se em  $H_{\mathbb{C}}^2$ , segue  $|z_1| < 1$  (respectivamente,  $|z_2| < 1$ ). Suponhamos que  $|z_1| \leq |z_2|$  (se não for este o caso, basta renomear os pontos). Por meio de uma rotação de Heisenberg podemos assumir que  $z_1 = s \geq 0$ . O ponto  $z_2$  fica, então, na forma  $re^{i\tau}$ ,  $r \geq s$ . Utilizando uma reflexão no  $\mathbb{R}$ -círculo  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ , se necessário, podemos admitir que  $0 \leq \tau \leq \pi$ .

Deste modo as geodésicas complexas  $C_j$  possuem os vetores polares  $\lambda_j$  dados por:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -s \\ s \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -re^{-i\tau} \\ re^{-i\tau} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

<sup>2</sup>Esta forma aparece implicitamente em [3], porém neste trabalho não é fornecida a interpretação geométrica do invariante  $\tau$ .

Os vértices  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  do triângulo possuem levantamentos:

$$X_0 = \lambda_1 \boxtimes \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \lambda_0 \boxtimes \lambda_2 = \begin{bmatrix} re^{i\tau} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \lambda_0 \boxtimes \lambda_1 = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

É claro que as coordenadas  $s$ ,  $r$  e  $\tau$  determinam o triângulo. Mostraremos os significados geométricos destas coordenadas, obtendo, assim, outro teorema de congruência. Primeiramente, temos que  $|\langle \lambda_0, \lambda_2 \rangle| = r$ , o que implica  $\cos(\varphi_1) = r$ . Da forma análoga obtemos  $\cos(\varphi_2) = s$ .

Agora projetamos o ponto  $x_0$  ortogonalmente em  $C_0$ , obtendo o ponto  $\Pi(x_0)$  que possui levantamento  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Consideremos o ângulo  $\alpha$  entre as geodésicas reais que passam por  $\Pi(x_0)$  em direção a  $x_1$  e  $x_2$ . Então  $\cos(\alpha) = \cos(\tau)$ . Como ambos  $\alpha$  e  $\tau$  estão no intervalo  $[0, \pi]$ , concluímos  $\tau = \alpha$ .

Mostramos, então o seguinte teorema:

**Teorema 2.4** *Os ângulos complexos  $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 < \pi/2$  e o invariante  $\tau$  com  $0 \leq \tau \leq \pi$  determinam um único triângulo 1/3-ideal, a menos de isometrias.*

Pelos levantamentos dos pontos  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  é fácil ver que o triângulo nunca está em uma geodésica complexa. Por outro lado, ele está em um  $\mathbb{R}^2$ -plano se, e somente se  $\tau = 0$  ou  $\tau = \pi$ .

Já vimos que os ângulos complexos e a distância entre os dois pontos finitos também determinam um triângulo 1/3-ideal. Cabe, então, perguntar qual é a relação entre  $\tau$  e  $\rho$ . Tomando o triângulo na segunda forma normal temos:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{\langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_1 \rangle}{\langle X_1, X_1 \rangle \langle X_2, X_2 \rangle} = \frac{1 + r^2 s^2 - 2rs \cos(\tau)}{(1 - s^2)(1 - r^2)}$$

onde  $r = \cos(\varphi_1)$  e  $s = \cos(\varphi_2)$ . Assim:

$$\rho = 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{(1 + \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2) - 2 \cos(\tau) \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2))^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(\varphi_1) \operatorname{sen}(\varphi_2)} \right].$$

(Ver figura (2.1).)

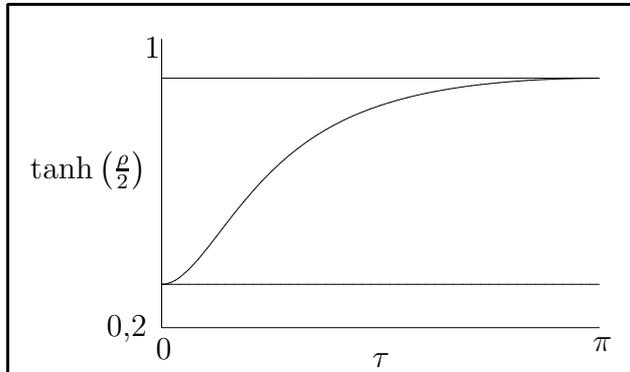


Figura 2.1:  $\tanh(\rho/2)$  como função de  $\tau$  para  $\varphi_1 = \pi/4$  e  $\varphi_2 = \pi/3$ . A reta inferior é a cota mínima  $(\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))/(1 - \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2))$ , enquanto a reta superior é a cota máxima  $(\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2))/(1 + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2))$ .

## 2.2 Os Grupos $\Gamma$ e $G$

Consideremos o grupo triangular de reflexão  $(4, 4, \infty)$ . Este grupo  $\Gamma$  pode ser obtido através de três inversões em geodésicas  $a$ ,  $b$  e  $c$  do plano hiperbólico  $\mathbb{D}$  tais que:

- $a$  e  $b$  se interceptam em um ponto  $x$  de acordo com um ângulo de medida  $\pi/4$ ;
- $b$  e  $c$  se interceptam em um ponto  $y$ , distinto de  $x$ , de acordo com um ângulo de mesma medida;
- $a$  e  $c$  são paralelas.

Sejam  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  as inversões em  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente. Então, o grupo  $\Gamma$  é o grupo gerado por estas inversões.

Utilizando o Teorema de Poliedro de Poincaré [17, p.79] obtemos que o grupo  $\Gamma$  é discreto e possui o seguinte sistema completo de geradores e relações:

$$\Gamma = \langle i_a, i_b, i_c : i_a^2 = i_b^2 = i_c^2 = (i_a i_b)^4 = (i_b i_c)^4 = 1 \rangle.$$

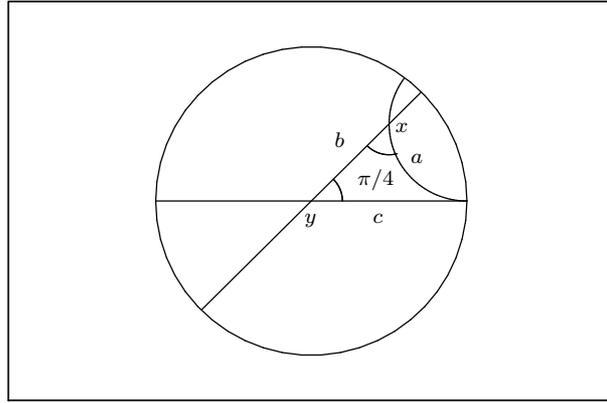


Figura 2.2: As inversões nestas geodésicas geram o grupo  $\Gamma$ .

Além disto, a região  $\Delta$  delimitada pelas três geodésicas é um domínio fundamental para  $\Gamma$ .

Estudaremos representações  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2,1)$  de  $\Gamma$  no grupo de isometrias holomorfas de  $H_{\mathbb{C}}^2$ . Exigiremos que estas representações *preservem tipo*, isto é,  $\rho(i_a i_c)$  seja um elemento parabólico em  $\text{PU}(2,1)$ . Vejamos como são estas representações.

**Teorema 2.5** *Seja  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2,1)$  uma representação que preserva tipo de  $\Gamma$ . Se  $\rho$  é fiel, então  $\rho(i_a)$ ,  $\rho(i_b)$  e  $\rho(i_c)$  são inversões em geodésicas complexas distintas  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_b$  e  $\Sigma_c$ , respectivamente. Além disto,  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_c$  são assintóticas;  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$  são concorrentes e se encontram em um ângulo  $\pi/4$ , bem como  $\Sigma_b$  e  $\Sigma_c$ .*

*Prova.* Como  $i_k$  possui ordem 2,  $\rho(i_k)$  ou é uma inversão em um ponto ou é uma inversão em uma geodésica complexa. O fato de  $\rho(i_a)\rho(i_c)$  ser uma aplicação parabólica implica em  $\rho(i_a)$  e  $\rho(i_c)$  serem inversões em geodésicas complexas, pois a composição de duas inversões em pontos é ou a identidade (pontos iguais) ou uma aplicação loxodrômica (pontos distintos) e a composição de uma inversão em um ponto com uma inversão em uma geodésica complexa é ou uma aplicação elíptica (ponto pertencente à geodésica complexa) ou uma aplicação loxodrômica (ponto não pertencente à geodésica complexa). Mais além, as geodésicas complexas  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_c$  têm que ser assintóticas.

A aplicação  $\rho(i_b)$  não pode ser uma inversão em um ponto  $x$  pois  $x$  não pertenceria a pelo menos uma das geodésicas complexas  $\Sigma_a$  ou  $\Sigma_c$ , digamos  $x \notin \Sigma_a$ . Então  $\rho(i_a)\rho(i_b)$  seria loxodrômica, contrariando o fato de este elemento possuir ordem 4.  $\rho(i_b)$  é, então, uma inversão em uma geodésica

complexa  $\Sigma_b$ . O fato de  $\rho(i_a)\rho(i_b)$  possuir ordem 4 implica em  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$  serem concorrentes e se interceptarem em um ângulo  $\pi/4$ . O mesmo se aplica ao par  $\Sigma_b$  e  $\Sigma_c$ .  $\square$

Visto isto tomamos três geodésicas complexas  $\Sigma_a, \Sigma_b$  e  $\Sigma_c$  tais que:

- $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$  se interceptam em um ponto  $x$  de acordo com um ângulo complexo  $\pi/4$ ;
- $\Sigma_b$  e  $\Sigma_c$  se interceptam em um ponto  $y$ , distinto de  $x$ , de acordo com um ângulo complexo de mesma medida;
- $\Sigma_a$  e  $\Sigma_c$  são assintóticas.

Sejam as inversões  $i_1, j$  e  $k$  nas geodésicas complexas  $\Sigma_a, \Sigma_b$  e  $\Sigma_c$ , respectivamente. Consideramos o grupo  $G$  gerado por estas inversões. Fazendo

$$\rho(i_a) = i_1, \quad \rho(i_b) = j, \quad \rho(i_c) = k,$$

obtemos uma representação que preserva tipo. É claro que em  $G$  são satisfeitas as relações:

$$i_1^2 = j^2 = k^2 = (i_1j)^4 = (jk)^4 = 1,$$

porém não podemos afirmar que tais relações constituem um sistema completo, ou seja, não podemos afirmar que  $\rho$  é uma representação fiel. Tampouco podemos afirmar que o grupo  $G$  é discreto.

Pelo Teorema 2.4, cada terno de geodésicas complexas  $(\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c)$  como acima é determinado, a menos de isometrias, pelo parâmetro real  $\tau$ , com  $0 \leq \tau \leq \pi$ . Fazendo  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4$  na parametrização (2.11), obtemos:

$$\iota = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\tau} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\tau} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Aqui  $\lambda_1, \iota$  e  $\kappa$  são vetores polares a  $\Sigma_a, \Sigma_b$  e  $\Sigma_c$ , respectivamente.

Aplicamos, a estes vetores polares, uma rotação de Heisenberg  $R$  em torno da cadeia vertical pela origem de um ângulo  $\theta = (\pi - \tau)/2$ . Esta aplicação é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Após a rotação os vetores polares tornam-se:

$$\iota = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\text{sen}(\frac{\tau}{2}) + i \cos(\frac{\tau}{2})) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} (\text{sen}(\frac{\tau}{2}) + i \cos(\frac{\tau}{2})) \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (-\text{sen}(\frac{\tau}{2}) + i \cos(\frac{\tau}{2})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\text{sen}(\frac{\tau}{2}) - i \cos(\frac{\tau}{2})) \end{bmatrix}.$$

Mudando a parametrização para  $\theta$ , obtemos:

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + it) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + it) \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (-\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\theta) - i \text{sen}(\theta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + it) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - it) \end{bmatrix},$$

onde  $t = \tan(\theta)$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

Desta forma, obtemos uma família a um parâmetro real de representações

$$\rho_t : \Gamma \rightarrow G(t) \subset \text{PU}(2,1).$$

Pelo Teorema 2.4, esta família contém, a menos de conjugações, todas as representações que preservam tipo de  $\Gamma$  em  $\text{PU}(2,1)$ . Além disto, se  $t_1$  e  $t_2$  são distintos, então  $G(t_1)$  e  $G(t_2)$  não são conjugados em  $\text{PU}(2,1)$ .

Esta família de representações foi utilizada por Wyss-Gallifent em seu trabalho de tese [3]. Neste trabalho, encontramos os seguintes resultados:

**Teorema** *As representações  $\rho_t$  com  $t^2 \in \{3, 7, 15\}$  são discretas.*

**Teorema** *A representação  $\rho_t$  não é discreta para  $t^2 > 7$  e  $t^2 \neq 15$ .*

Também encontramos:

**Conjectura** *As representações  $\rho_t$  são discretas para  $t^2 < 3$  e para infinitos valores de  $t$  com  $3 \leq t^2 \leq 7$ .*

Cabe ressaltar que Wyss-Gallifent não abordou sobre a fidelidade das representações.

Mostraremos que a primeira parte da conjectura acima é verdadeira. Mais além, mostraremos que as representações  $\rho_t$  são discretas e fiéis se, e somente se,  $t^2 \leq 3$ .

Com o intuito de facilitar os cálculos, aplicamos a transformação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}(-1+it)}{2\sqrt{t^2+1}} & -\frac{\sqrt{2}(-1+it)}{2\sqrt{t^2+1}} \\ -\frac{(1+it)}{\sqrt{t^2+1}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(1+it)}{\sqrt{t^2+1}} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \in \text{PU}(2, 1).$$

às geodésicas complexas, obtendo vetores polares:

$$\iota = \begin{bmatrix} 1 - it \\ \sqrt{t^2 + 1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 1} \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que o ponto  $y$  na interseção de  $\Sigma_b$  e  $\Sigma_c$  possui levantamento

$$O = \kappa \boxtimes \iota = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

As inversões nas geodésicas complexas são dadas por:

$$i_1 = i_{\Sigma_a} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{\sqrt{t^2+1}} & -\frac{4}{\sqrt{t^2+1}} \\ -\frac{4}{\sqrt{t^2+1}} & -\frac{t^2+7}{t^2+1} & \frac{8}{t^2+1} \\ \frac{4}{\sqrt{t^2+1}} & -\frac{8}{t^2+1} & -\frac{t^2+9}{t^2+1} \end{bmatrix},$$

$$j = i_{\Sigma_b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-it}{\sqrt{t^2+1}} & 0 \\ \frac{1+it}{\sqrt{t^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad k = i_{\Sigma_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

### 2.3

#### Os Subgrupos $\Gamma_8$ e $G_8$

Ao invés de trabalharmos diretamente com os grupos  $\Gamma$  e  $G(t)$ , trabalharemos com subgrupos  $\Gamma_8$  e  $G_8(t)$  de índice 8 em  $\Gamma$  e  $G(t)$ , respectivamente. Obtemos, assim, uma família de representações  $\rho_{8,t} : \Gamma_8 \rightarrow G_8(t)$ . O fato importante é que, para cada  $t$ , a representação  $\rho_{8,t} : \Gamma_8 \rightarrow G_8(t)$  é discreta e fiel, se, e somente se, a representação  $\rho_t : \Gamma \rightarrow G(t)$  também o é.

Fixado  $t$ , a construção do grupo  $G_8$  — por comodidade, paramos de indicar a dependência do parâmetro  $t$  — é feita da seguinte forma:

1. Primeiramente renomeamos as geodésicas complexas:  $\Sigma_a$  para  $L_1$ ,  $\Sigma_b$  para  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_c$  para  $\Sigma_1$ .
2. Definimos uma nova geodésica complexa  $\Sigma_3 = j(\Sigma_1)$ . Lembremo-nos que  $j$  é a inversão na geodésica complexa  $\Sigma_2$ . A inversão em  $\Sigma_3$  é dada por:

$$i_{\Sigma_3} = i_{\Sigma_2} i_{\Sigma_1} i_{\Sigma_2} = jkj.$$

Observemos que  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_3$  se interceptam no ponto  $x$  de acordo com um ângulo  $\pi/2$ , pois a composição das inversões nestas geodésicas complexas é  $(jkj)k = (jk)^2$  que possui ordem 2.

3. Definimos a seguir outra geodésica complexa  $\Sigma_4 = i_{\Sigma_3}(\Sigma_2)$ . A inversão em  $\Sigma_4$  é dada por:

$$i_{\Sigma_4} = i_{\Sigma_3} i_{\Sigma_2} i_{\Sigma_3} = (jkj)j(jkj) = (jk)^2 j = kjk.$$

Se prosseguissemos com o processo obteríamos  $\Sigma_5 = i_{\Sigma_4}(\Sigma_3)$ , mas, então:

$$\Sigma_5 = (jk)^2 j(j(\Sigma_1)) = (jk)^2(\Sigma_1) = \Sigma_1$$

pois  $(jk)^2$  é uma inversão no ponto  $O \in \Sigma_1$ , logo preserva esta geodésica complexa.

4. Definimos outra geodésica complexa por  $L_2 = i_{\Sigma_2}(L_1) = j(L_1)$ . Observemos que  $L_2$  e  $\Sigma_3$  são assintóticas pois  $L_1$  e  $\Sigma_1$  o são. Além disto,  $L_1$  e  $L_2$  se interceptam no ponto  $x = \Sigma_2 \cap L_1$ . O vetor polar de  $L_2$  é:

$$\lambda_2 = j\lambda_1 = \begin{bmatrix} 2(-1 + it) \\ (1 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ -2\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

Logo, se denominamos  $\varphi$  o ângulo entre  $L_1$  e  $L_2$  temos:

$$\cos(\varphi) = \left| \left\langle \frac{\lambda_1}{\sqrt{\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle}}, \frac{\lambda_2}{\sqrt{\langle \lambda_2, \lambda_2 \rangle}} \right\rangle \right| = 0.$$

Portanto,  $L_1$  e  $L_2$  se interceptam de acordo com um ângulo  $\pi/2$ .

5. Finalmente, definimos as demais geodésicas complexas como:

$$L_3 = i_{\Sigma_3}(L_2), \quad L_4 = i_{\Sigma_4}(L_3), \quad L_5 = i_{\Sigma_1}(L_4),$$

$$L_6 = i_{\Sigma_2}(L_5), \quad L_7 = i_{\Sigma_3}(L_6), \quad L_8 = i_{\Sigma_4}(L_7).$$

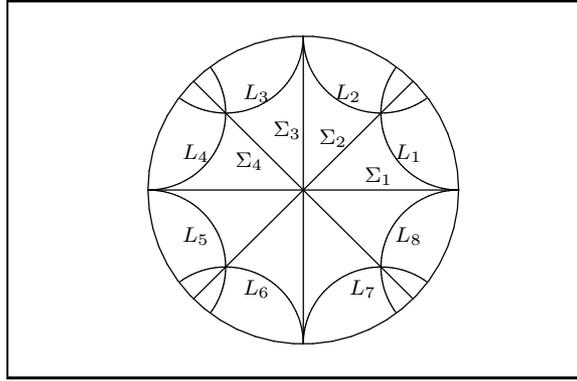


Figura 2.3: Construção do grupo  $G_8$ .

Para qualquer valor de  $t$ , temos:

- $L_r$  e  $L_{r+1}$ ,  $r = 1, 3, 5, 7$ , são ortogonais;
- $L_s$  e  $L_{s+1}$ ,  $s = 2, 4, 6, 8$ , são assintóticas (índices tomados módulo 8).

Se a inversão na geodésica complexa  $L_r$  é denotada por  $i_r$ , temos:

$$i_2 = j i_1 j, \quad i_3 = j k i_1 k j, \quad i_4 = j k j i_1 j k j, \quad i_5 = (j k)^2 i_1 (k j)^2,$$

$$i_6 = k j k i_1 k j k, \quad i_7 = k j i_1 j k, \quad i_8 = k i_1 k.$$

O grupo  $G_8$  é definido por:

$$G_8 = \langle i_r : r = 1, \dots, 8 \rangle.$$

É claro que as seguintes relações são satisfeitas:

$$\begin{cases} i_r^2 = 1 & , \quad r = 1, \dots, 8 \\ (i_r i_{r+1})^2 = 1 & , \quad r = 1, 3, 5, 7 \end{cases} \quad (2.12)$$

Estas relações não são, necessariamente, um sistema completo de relações para o grupo  $G_8(t)$ .

A mesma construção pode ser feita para o grupo  $\Gamma$ , ou seja, se utilizarmos o mesmo processo descrito acima para o grupo  $\Gamma$  obteremos um octógono com 4 vértices em  $\mathbb{D}$  e 4 vértices ideais. Se denotarmos, de forma conveniente, as inversões nos lados deste octógono por  $f_1, \dots, f_8$  obtemos um grupo

$$\Gamma_8 = \langle f_1, \dots, f_8 \rangle$$

com um sistema completo de relações dado por:

$$\begin{cases} f_r^2 = 1 & , \quad r = 1, \dots, 8 \\ (f_r f_{r+1})^2 = 1 & , \quad r = 1, 3, 5, 7 \end{cases} .$$

A região  $\Delta_8$  delimitada pelo octógono é um domínio fundamental para  $\Gamma_8$ .

**Grupo diedral de ordem 2** Na seqüência do trabalho, necessitaremos de uma descrição de um domínio fundamental para o grupo diedral de ordem 2 em  $H_{\mathbb{C}}^2$ <sup>3</sup>. Este grupo é gerado pelas inversões em duas geodésicas complexas ortogonais  $L_1$  e  $L_2$ . Chamemos estas inversões  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente. O grupo é então dado por:

$$G = \langle i_1, i_2 \rangle = \{1, i_1, i_2, i_1 i_2\} .$$

Consideremos um ponto  $x \in H_{\mathbb{C}}^2$  que não seja fixado por  $i_1$  nem por  $i_2$  e definamos os seguintes semi-espacos de  $H_{\mathbb{C}}^2$ :

$$H_j = \{z \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, x) = \rho(z, i_j x)\} , \quad j = 1, 2,$$

$$H_{1,2} = \{z \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, x) = \rho(z, i_1 i_2 x)\} ,$$

bem como as respectivas fronteiras (bissetores)  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{B}_{1,2}$ .

O domínio de Dirichlet de  $G$  centrado no ponto  $x$  é dado pela interseção dos três semi-espacos acima, isto é

$$D = H_1 \cap H_2 \cap H_{1,2} .$$

Ele possui quatro lados e seis arestas que são mostrados esquematicamente na Figura 2.4.

A identificação de lados dada por

$$i_1(s_1) = s_1, \quad i_2(s_2) = s_2, \quad i_1 i_2(s_3) = s_4, \quad i_1 i_2(s_4) = s_3,$$

gera os ciclos de arestas  $e_1, e_2, e_3$  e  $e_4, e_5, e_6$ .

Este poliedro, juntamente com a identificação de lados, satisfaz as condições (1)–(6) do Teorema do Poliedro de Poincaré (Teorema 1.18), e fornece a seguinte representação para o grupo  $G$ :

$$G = \langle i_1, i_2 : i_1^2 = i_2^2 = (i_1 i_2)^2 = 1 \rangle .$$

<sup>3</sup>Para maiores detalhes veja [4]

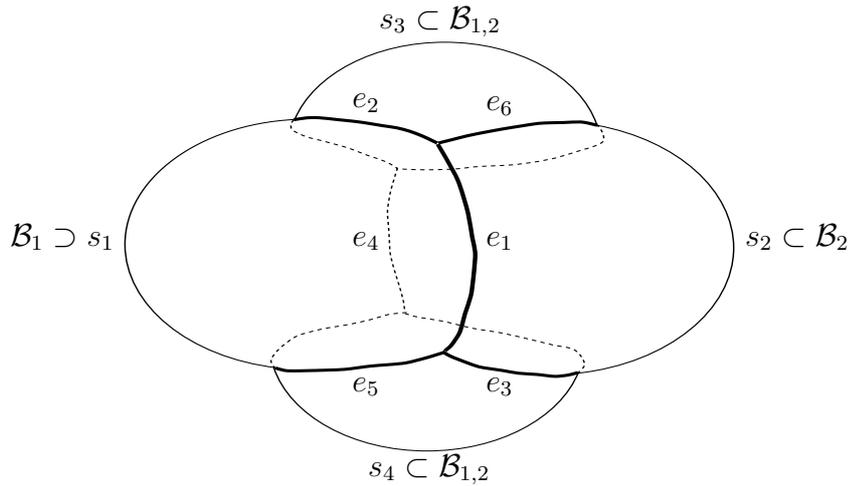


Figura 2.4: Acima vemos os lados  $s_1, \dots, s_4$  e as arestas  $e_1, \dots, e_6$ .

Munidos do poliedro fundamental para o grupo diedral de ordem 2, partimos para a construção de um domínio fundamental para a ação do grupo  $G_8$ . Definimos os subgrupos

$$G_{8,j}(t) = \langle i_j, i_{j+1} \rangle = \{1, i_j, i_{j+1}, i_j i_{j+1}\}, j = 1, 3, 5, 7.$$

Todos estes subgrupos são grupos diedrais de ordem 2 e possuem domínios fundamentais de Dirichlet

$$D_j(t) = H_j(t) \cap H_{j+1}(t) \cap H_{j,j+1}(t)$$

onde

$$H_j(t) = \{z \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, O) < \rho(z, i_j(t)O)\}, j = 1, \dots, 8,$$

$$H_{j,j+1}(t) = \{z \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, O) < \rho(z, i_j(t)i_{j+1}(t)O)\}, j = 1, 3, 5, 7.$$

Para cada  $t$ , definimos o poliedro

$$D(t) = \bigcap_{j \in J} D_j(t), J = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Este poliedro, para qualquer  $t$ , possui 16 lados e 24 arestas provenientes dos poliedros  $D_j(t)$ . Denominamos estas arestas de *arestas necessárias*.

É importante observar que, para cada  $t$ , os semi-espacos  $H_1(t)$  e  $H_8(t)$  são disjuntos e seus fechos são tangentes em um ponto  $v_1$  na fronteira de  $H_{\mathbb{C}}^2$  devido à construção do grupo  $G_8(t)$  e pelo Teorema 2.10. O mesmo podemos dizer com respeito aos semi-espacos  $H_2(t)$  e  $H_3(t)$ ,  $H_4(t)$  e  $H_5(t)$ , e  $H_6(t)$

e  $H_7(t)$ . Portanto, para cada  $t$ , o poliedro  $D(t)$  possui quatro pontos de tangências de lados no infinito. Denominamos estes pares de lados de *pares necessários de lados tangentes*.

**Definição 2.6** Dizemos que o poliedro  $D(t)$  é um poliedro simples se todas suas arestas forem arestas necessárias e todos seus pares de lados tangentes no infinito forem pares necessários de lados tangentes.

**Teorema 2.7** Se  $t$  é tal que o poliedro  $D(t)$  é um poliedro simples, então  $D(t)$  é um domínio fundamental para  $G_8(t)$  e a representação  $\rho_{8,t} : \Gamma_8 \rightarrow G_8(t)$  é discreta e fiel.

*Prova.* Seja  $t$  tal que

$$D(t) = \bigcap_{j=1,3,5,7} D_j(t) = \bigcap_{j=1}^8 H_j(t) \cap \bigcap_{j=1,3,5,7} H_{j,j+1}(t)$$

seja um poliedro simples e tomemos como identificadores de lados as aplicações  $i_1, \dots, i_8, i_1i_2, i_3i_4, i_5i_6, i_7i_8$ .

Sejam  $s$  um lado de  $D(t)$  e  $g_s$  a aplicação identificadora de lados com ele relacionado. Como  $s$  é lado de algum dos poliedros  $D_j(t)$ , as condições de lado (1)–(4) do Teorema de Poliedro de Poincaré são satisfeitas. O mesmo raciocínio pode ser feito para as arestas de  $D(t)$ . Assim  $D(t)$  também satisfaz as condições de arestas (5) e (6).

Tomemos agora um dos pontos de tangência dos fechos de lados no infinito, digamos o ponto  $v_1 = \partial\mathcal{S}_1 \cap \partial\mathcal{S}_8$ . Por construção  $v_1 \in \partial L_1 \cap \partial L_8$ . Logo  $i_1$  e  $i_8$  fixam  $v_1$ , e, portanto, o elemento de ciclo em  $v_1$  é  $i_1i_8$  e este é parabólico. Assim a condição (7) do Teorema de Poliedro de Poincaré é satisfeita.

Deste modo, para os valores de  $t$  para os quais o poliedro  $D(t)$  é um poliedro simples, este poliedro é um domínio fundamental para a ação do grupo  $G_8(t)$ , que é gerado pelos identificadores de lados  $i_1, \dots, i_8$  e possui o seguinte sistema completo de relações

$$i_1^2 = \dots = i_8^2 = 1,$$

$$(i_1i_2)^2 = (i_3i_4)^2 = (i_5i_6)^2 = (i_7i_8)^2 = 1.$$

Finalmente, isto fornece que as representações  $\rho_{8,t}$  são discretas e fiéis para tais valores de  $t$ .  $\square$

## 2.4

### A Representação $\rho_t$ para $t$ Pequeno

Na seção anterior, provamos que a representação  $\rho_{8,t}$  é discreta e fiel para os valores de  $t$  para os quais o poliedro  $D(t)$  é um poliedro simples, porém não mostramos que existe algum valor de  $t$  com esta propriedade. O próximo teorema remedia esta situação. Poderíamos atacar o teorema principal do capítulo imediatamente, mas o esforço para a obtenção deste resultado é pequeno e é independente do resultado principal. Portanto, consideramos oportuno exibí-lo.

No que segue utilizaremos o seguinte teorema [12, Teorema 9.3.2, p.297, adaptado]

**Teorema 2.8** *Consideremos três pontos  $x_0, x_1, x_2 \in H_{\mathbb{R}}^2$  e sejam*

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(x_i, x_0) = \{z \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, x_i) = \rho(z, x_0)\}$$

*$i = 1, 2$ . Os bissetores  $\mathcal{B}_i$  são disjuntos se, e somente se, as interseções  $H_i \cap H_{\mathbb{R}}^2$  são disjuntas.*

Sejam os pontos

$$\begin{aligned} x_r(t) &= i_r(t)(O), \quad r = 1, \dots, 8 \\ x_{r,r+1}(t) &= i_r(t)i_{r+1}(t)(O), \quad r = 1, 3, 5, 7. \end{aligned}$$

Suprimindo a dependência do parâmetro  $t$ , estes pontos possuem levantamentos

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4\sqrt{t^2 + 1} \\ -8 \\ t^2 + 9 \end{bmatrix}, \quad X_2 = j(X_1), \quad X_r = jk(X_{r-2}), \quad r \geq 3,$$

$$X_{1,2} = \begin{bmatrix} 4(3 + t^2 - 2it) \\ -4(3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ (t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}, \quad X_{r,r+1} = jk(X_{r-2,r-1}), \quad r = 3, 5, 7.$$

**Teorema 2.9** *Existe  $\epsilon > 0$  tal que para  $t \in [0, \epsilon)$  a representação  $\rho_{8,t} : \Gamma_8 \rightarrow G_8(t)$  é discreta e fiel.*

*Prova.* Para  $t = 0$  temos

$$X_1(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad X_{1,2}(0) = \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad j(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

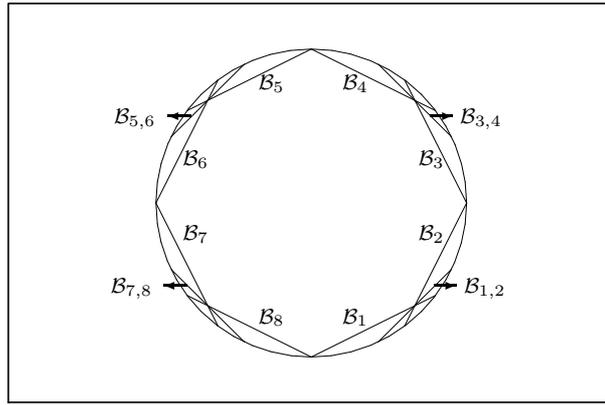


Figura 2.5: As interseções dos diversos bissetores com  $H_{\mathbb{R}}^2$

ou seja,  $O, x_1(0), x_{1,2}(0)$  estão todos em  $H_{\mathbb{R}}^2$  e, além disto,  $j(0)$  preserva  $H_{\mathbb{R}}^2$ . Como  $k(t)$  preserva  $H_{\mathbb{R}}^2$  para todo  $t$ , segue que todos os pontos  $x_r(0)$  e  $x_{s,s+1}(0)$  estão em  $H_{\mathbb{R}}^2$ . Portanto, pelo Teorema 2.8, para verificar as interseções entre os bissetores, necessitamos somente verificar as interseções em  $H_{\mathbb{R}}^2$ .

Lembre-mos que  $H_{\mathbb{R}}^2$  possui a estrutura da modelo de Klein para o plano hiperbólico. Portanto as interseções destes bissetores com  $H_{\mathbb{R}}^2$  são segmentos de retas euclidianas. Mais precisamente, a interseção do bissetor  $\mathcal{B}_r(0)$  com  $H_{\mathbb{R}}^2$  é o segmento de reta perpendicular ao raio que une  $O$  a  $x_r(0)$  e que passa pelo ponto médio (distância hiperbólica) destes dois pontos. O mesmo se aplica aos bissetores  $\mathcal{B}_{r,r+1}(0)$ .

Em vista disto, podemos concluir que  $\mathcal{B}_1(0) \cap H_{\mathbb{R}}^2$  é o segmento de reta que une os pontos  $(0, -1)$  e  $(4/5, -3/5)$  e que  $\mathcal{B}_{1,2} \cap H_{\mathbb{R}}^2$  é o segmento de reta que une os pontos  $((4 - \sqrt{2})/6, -(4 + \sqrt{2})/6)$  e  $((4 + \sqrt{2})/6, (\sqrt{2} - 4)/6)$  (onde passamos a utilizar coordenadas cartesianas do plano).

Como  $j(0) (\mathcal{B}_1(0) \cap H_{\mathbb{R}}^2) = \mathcal{B}_2(0) \cap H_{\mathbb{R}}^2$  segue que esta interseção é o segmento de reta que une os pontos  $(1, 0)$  e  $(3/5, -4/5)$ .

Observemos que todas estas interseções estão contidas no quarto quadrante, ou seja, estão contidas em uma região limitada por duas geodésicas por  $O$  que se encontram em um ângulo  $\pi/2$ . Além disto, a aplicação  $jk(0)$  restrita a  $H_{\mathbb{R}}^2$  é uma rotação de ângulo  $\pi/2$  centrada em  $O$ . Como todas as outras interseções de bissetores com  $H_{\mathbb{R}}^2$  podem ser obtidas das três já exibidas através de sucessivas aplicações de  $jk(0)$ , segue que estas interseções estão agrupadas três a três em setores centrais de ângulo  $\pi/2$ , como mostra a Figura (2.5).

Logo, o poliedro  $D(0)$  é um poliedro simples. Mais além, podemos ver que para valores de  $t$  suficientemente pequenos, o poliedro  $D(t)$  é

um poliedro simples. Assim, para estes valores de  $t$ , as representações  $\rho_{8,t} : \Gamma_8 \rightarrow G_8(t)$  são discretas e fiéis.  $\square$

## 2.5

### Interseções dos Bissetores

Para provarmos nosso resultado precisamos calcular os valores de  $t$  para os quais os poliedros  $D(t)$  são simples. Para tal, precisamos estudar as diversas interseções entre os bissetores que contém os lados de  $D(t)$ .

#### 2.5.1

#### Alguns Teoremas sobre Interseção de Bissetores

Dados dois bissetores  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ , nem sempre é fácil determinar se eles se interceptam. Vejamos algumas proposições, concernentes a este assunto, que nos serão úteis posteriormente.

**Teorema 2.10** *Sejam  $L$  e  $L_1$  dois hiperplanos complexos assintóticos e  $i$  e  $i_1$  inversões nestes hiperplanos, respectivamente. Seja  $L_2 = i(L_1)$  outro hiperplano com inversão dada por  $i_2 = ii_1i$ . Seja  $x \in L$ . Consideremos os bissetores  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(x, i_1x)$  e  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(x, i_2x)$ . Então temos  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$  e, além disso,  $\partial\mathcal{B}_1$  e  $\partial\mathcal{B}_2$  são tangentes em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ .*

*Prova.* Por meio de isometrias, podemos tomar  $x = (0, 0, 1)$  em coordenadas horoesféricas e  $\partial L \cap \partial L_1 = \{\infty\}$ . Assim  $\partial L = \{(0, v, 0) : v \in \mathbb{R}\}$  e  $\partial L_1$  e  $\partial L_2$  também são cadeias verticais. Por meio de rotações e dilatações de Heisenberg (que fixam  $L$ ) podemos assumir que  $\partial L_1$  é a cadeia vertical que passa por 1. Como  $i(\zeta, v, u) = (-\zeta, v, u)$  segue que  $\partial L_2$  é a cadeia vertical que passa por -1.

De [18, Lema 7.3] segue que

$$(x + iy, v, u) \in \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow -yv = 2y^2 - (x - 1)[(x - 1)^2 + y^2 + u + 2]$$

$$(x + iy, v, u) \in \mathcal{B}_2 \Leftrightarrow yv = 2y^2 + (x + 1)[(x + 1)^2 + y^2 + u + 2]$$

(basta fazer  $x_0 = 0, y_0 = 0, u_0 = 1$  e fazer  $n = 1$  para  $\mathcal{B}_1$  e  $n = -1$  para  $\mathcal{B}_2$ ).

Para que  $(x + iy, v, u) \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$  devemos ter, então:

$$2y^2 + (x + 1)[(x + 1)^2 + y^2 + u + 2] = -2y^2 + (x - 1)[(x - 1)^2 + y^2 + u + 2]$$

ou seja

$$6(x^2 + y^2 + 1) + 2u = 0,$$

e, portanto,  $u < 0$ . Mas  $u \geq 0$ , por definição. Logo  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ . Mais ainda, segue que  $\partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_2 = \{\infty\}$ .  $\square$

**Teorema 2.11** *Sejam  $\mathcal{B}_1$  um bissetor e  $C$  uma geodésica complexa. Seja  $i$  a inversão em  $C$ . Seja  $i(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$  um outro bissetor. Então  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são disjuntos se, e somente se,  $\mathcal{B}_1$  e  $C$  são disjuntos.*

*Prova.* É claro que se  $\mathcal{B}_1$  e  $C$  não são disjuntos  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  também não o são.

Suponhamos que  $\mathcal{B}_1 \cap C = \emptyset$ . Então  $\mathcal{S}_1 \cap \partial C$  possui no máximo um ponto, onde  $\mathcal{S}_1$  é a esfera espinal determinada por  $\mathcal{B}_1$  e  $\partial C$  é a cadeia determinada por  $C$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que um dos vértices de  $\mathcal{S}_1$  é o ponto ideal na fronteira de  $H_{\mathbb{C}}^2$ . Logo  $\partial C$  é uma cadeia finita, pois caso contrário  $C$  interceptaria  $\mathcal{B}_1$ .

Podemos supor, também sem perda de generalidade, que  $\partial C$  é a cadeia de centro na origem e raio 1, isto é,

$$\partial C = \{(z, 0) : |z| = 1\}.$$

Como  $\partial\Sigma_1$  é uma cadeia vertical, onde  $\Sigma_1$  é a espinha complexa de  $\mathcal{B}_1$ , ela passa por um ponto  $(z_0, 0)$ . Aplicando uma rotação de Heisenberg, se necessário, podemos supor que  $\partial\Sigma_1$  passa por um ponto  $(x_0, 0)$  com  $x_0 \geq 0$ . Como o outro vértice de  $\mathcal{B}_1$  está em  $\partial\Sigma_1$ , ele é da forma  $(x_0, t_0)$ , para algum  $t_0$ . Aplicando uma inversão na cadeia  $\Im(z) = 0$ , se necessário, podemos supor que  $t_0 > 0$ . ( $t_0$  não pode ser nulo pois teríamos  $C \cap \mathcal{B}_1 \neq \emptyset$ .)

Em [12, página 159] vemos que a esfera espinal  $\mathcal{S}_1$  é então dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{(\zeta, v) \in \mathcal{H} : v = t_0 - 2\Im(\zeta\bar{x}_0)\} \\ &= \{(x + iy, v) \in \mathcal{H} : v = t_0 - 2x_0y\}. \end{aligned}$$

Na mesma referência, página 126, vemos que a transformação  $i_C$  na fronteira do espaço hiperbólico é dada por

$$i_C(\zeta, v) = \left( \frac{\zeta}{|\zeta|^2 - iv}, -\frac{v}{|\zeta|^4 + v^2} \right)$$

em coordenadas de Heisenberg.

Analisemos, agora, dois casos:

(i) Se  $x_0 = 0$  temos  $\mathcal{S}_1 = \{(\zeta, v) : v = t_0\}$  e, para qualquer  $(\zeta, t_0) \in \mathcal{S}_1$ , temos

$$i_C(\zeta, t_0) = (u, s) \text{ com } s = -\frac{t_0}{|\zeta|^4 + t_0^2} < 0.$$

Logo  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ , o que implica  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  serem disjuntos.

(ii) Se  $x_0 > 0$  a interseção de  $\mathcal{S}_1$  com o plano  $v = 0$  é dada por

$$\mathcal{S}_1 \cap \{(\zeta, 0)\} = \{(x + iy, 0) : y = \frac{t_0}{2x_0}\}.$$

Mas para que essa interseção contenha no máximo um ponto em comum com  $\partial C$  devemos ter  $|y| \geq 1$ , ou seja,

$$t_0 \geq 2x_0.$$

Os vértices de  $\mathcal{B}_1$  possuem levantamentos

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} x_0 \\ \frac{1}{2}(1 - x_0^2 + it_0) \\ \frac{1}{2}(1 + x_0^2 - it_0) \end{bmatrix}.$$

A inversão  $i_C$  é dada pela matriz

$$i_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, os vértices de  $\mathcal{S}_2$  possuem levantamentos

$$O = i_C(P) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = i_C(V) = \begin{bmatrix} x_0 \\ \frac{1}{2}(-1 + x_0^2 - it_0) \\ \frac{1}{2}(1 + x_0^2 - it_0) \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que exista um ponto  $z \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ , com levantamento

$$Z = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então, pelo Teorema 1.16, temos

$$\mathbb{A}(Z, P, V) = \mathbb{A}(Z, O, U) = 0$$

o que equivale a

$$\mathfrak{S}\langle Z, P, V \rangle = \mathfrak{S}\langle Z, O, U \rangle = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\langle Z, P, V \rangle &= x_0x_1y_2 - x_0x_2y_1 + t_0x_2 + \frac{t_0}{2} - x_0y_1 + \frac{1}{2}t_0x_2^2 + \frac{1}{2}t_0y_2^2 - y^2, \\ \mathfrak{S}\langle Z, O, U \rangle &= -x_0x_1y_2 + x_0x_2y_1 - t_0x_2 + \frac{t_0}{2} - x_0y_1 + \frac{1}{2}t_0x_2^2 + \frac{1}{2}t_0y_2^2 + y_2.\end{aligned}$$

Igualando estas expressões a zero e somando as equações ordenadamente obtemos

$$\begin{aligned}t_0 - 2x_0y_1 + t_0x_2^2 + t_0y_2^2 &= 0 \\ y_1 &= \frac{t_0(1 + x_2^2 + y_2^2)}{2x_0}.\end{aligned}$$

Como  $t_0 \geq 2x_0$  segue

$$y_1 \geq 1 + x_2^2 + y_2^2.$$

Como  $z \in \partial H_{\mathbb{C}}^2$  temos

$$\begin{aligned}1 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\ &\geq x_1^2 + (1 + x_2^2 + y_2^2)^2 + x_2^2 + y_2^2 \\ &\geq x_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 1 + 2(x_2^2 + y_2^2) + (x_2^2 + y_2^2)^2\end{aligned}$$

ou seja,

$$x_1^2 + 3(x_2^2 + y_2^2) + (x_2^2 + y_2^2)^2 \leq 0$$

o que implica  $x_1 = x_2 = y_2 = 0$ . Isto obriga a  $y_1 = 1$ . Assim  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  só podem ter um único ponto em comum, o que implica que  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são disjuntos.  $\square$

O teorema anterior nos diz que quando um bissetor é imagem de outro por uma inversão em uma geodésica complexa só necessitamos averiguar a interseção desta geodésica complexa com um dos bissetores para verificar se os bissetores são disjuntos, ou não. O próximo teorema nos diz que, em um caso particular, só precisamos verificar a interseção da geodésica complexa com determinada fatia do bissetor.

**Teorema 2.12** *Seja  $C_1$  uma geodésica complexa com inversão  $i_1$ . Sejam  $x \notin C_1$  um ponto de  $H_{\mathbb{C}}^2$ ,  $x_1 = i_1(x)$  e  $\mathcal{B}_1$  o bissetor  $\mathcal{B}(x, x_1)$  com espinha complexa  $\Sigma_1$ . Seja  $L$  uma geodésica complexa, com inversão  $j$ , tal que  $L \cap \Sigma_1 = \{x\}$ . Sejam  $C_2 = j(C_1)$  uma geodésica complexa com inversão  $i_2$  e  $x_2 = i_2(x)$ . Seja também  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(x, x_2) = j(\mathcal{B}_1)$ . Então  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$  se, e somente se,  $L \cap C_1 = \emptyset$  (ou equivalentemente,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ).*

*Prova.* Primeiramente veremos a equivalência  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  se, e somente se,  $L \cap C_1 = \emptyset$ . Se  $z \in L \cap C_1$  segue  $z = j(z) \in L \cap C_2$ . Logo  $z \in C_1 \cap C_2$ .

Por outro lado, se  $z \in C_1 \cap C_2$  segue  $j(z) \in C_1 \cap C_2$ . Como  $C_1$  e  $C_2$  são geodésicas complexas distintas segue que  $z = j(z)$  e, portanto,  $z \in L$ .

Vejamos a parte principal do teorema. Podemos supor que os pontos  $x$  e  $x_1$  possuem levantamentos

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com  $0 < r < 1$ . A espinha complexa  $\Sigma_1$  de  $\mathcal{B}_1$  possui vetor polar

$$X \boxtimes X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O ponto médio  $z$  de  $x$  e  $i_1(x)$  possui levantamento

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{r}{1+\sqrt{1-r^2}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $z \in C_1$  e  $C_1$  é uma fatia de  $\mathcal{B}_1$  segue que

$$C_1 = \Pi^{-1}(z)$$

onde  $\Pi$  é a projeção ortogonal sobre  $\Sigma_1$ .

A espinha real  $\sigma_1$  de  $\mathcal{B}_1$  é a interseção de  $\mathcal{B}_1$  com  $\Sigma_1$ . Identificando  $\Sigma_1$  com o disco unitário no plano complexo obtemos  $\sigma_1$  como um arco de circunferência euclidiana ortogonal a  $S^1$ , cujo ponto mais próximo a origem é o ponto  $r / (1 + \sqrt{1 - r^2})$ .

Em [12, p.101] vemos que a projeção de  $L$  em  $\Sigma_1$  é um disco geométrico aberto centrado em  $x$ , origem de  $\Sigma_1$  (ver Figura (2.6)).

Como  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$  se, e somente se,  $L \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$  segue que  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$  se, e somente se,  $\Pi(L) \cap \sigma_1 = \emptyset$ . Mas pelo visto acima, esta última condição é equivalente a  $z \notin \Pi(L)$ , ou seja,  $\Pi^{-1}(z) \cap L = \emptyset$ , o que é o mesmo que  $C_1 \cap L = \emptyset$ .  $\square$

Devido a este teorema é útil conhecer alguma propriedade que nos fale a respeito da existência, ou não, de uma geodésica complexa em relação a qual dois bissetores sejam simétricos. Vejamos um resultado nesta direção:

**Teorema 2.13** *Sejam  $x$ ,  $x_1$  e  $x_2$  como no teorema anterior. Estes três pontos estão em uma subvariedade totalmente real.*

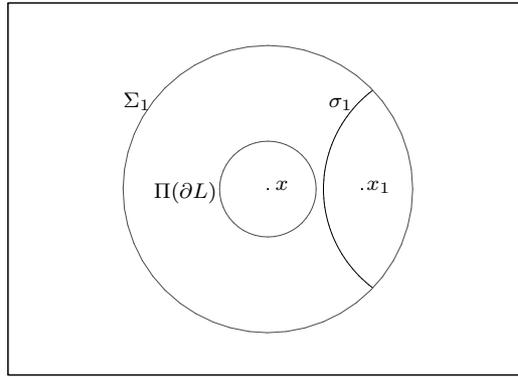


Figura 2.6: A espinha real  $\sigma_1$  e a projeção de  $\partial L$  em  $\Sigma_1$ .

*Prova.* Sejam  $j$  e  $L$  são como no teorema anterior. Temos

$$x_2 = i_2(x) = ji_1j(x) = ji_1(x) = j(x_1).$$

Também

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com  $0 < r < 1$ . Seja  $\lambda$  o vetor polar à geodésica complexa  $L$ . Como  $\langle x, \lambda \rangle = 0$  e  $j(x_1) \neq x_1$ , podemos tomar  $\lambda$  na forma

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} X_2 &= j(X_1) = X_1 - 2 \frac{\langle X_1, \lambda \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \lambda \\ &= \begin{bmatrix} r - \frac{2r}{1+|z|^2} \\ -\frac{2rz}{1+|z|^2} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim

$$\langle X_1, X_2 \rangle = r \left( r - \frac{2r}{1+|z|^2} \right) - 1 \in \mathbb{R}$$

e como  $\langle X, X_k \rangle = -1$ ,  $k = 1, 2$ , segue que os três pontos estão em uma subvariedade totalmente real.  $\square$

## 2.5.2 Cálculo das Interseções

Fixado  $t$ , devido à simetria do poliedro  $D(t)$  com relação à aplicação  $jk$  (composição das inversões nas geodésicas complexas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ ), percebemos que só necessitamos considerar as interseções dos diversos bissetores com os bissetores  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{B}_{1,2}$ . Porém  $j(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$  e  $j(\mathcal{B}_{1,2}) = \mathcal{B}_{1,2}$  (ver adiante). Logo, só precisamos verificar as interseções com os bissetores  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_{1,2}$ .

Vamos reduzir um pouco mais o número de interseções a serem analisadas. Observemos que  $j$  e  $k$  fixam  $O$ . Assim:

(1)

$$\begin{aligned} j(X_{1,2}) &= ji_1i_2(O) = j(i_1)(ji_1j)(O) \\ &= (ji_1j)i_1(O) = i_2i_1(O) = i_1i_2(O) \\ &= X_{1,2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} j(X_{3,4}) &= ji_3i_4(O) = j(jki_1kj)(jkji_1jkj)(O) \\ &= (ki_1k)(kji_1jk)(O) = i_8i_7(O) = i_7i_8(O) \\ &= X_{7,8}. \end{aligned}$$

O que implica  $j(\mathcal{B}_{1,2}) = \mathcal{B}_{1,2}$  e  $j(\mathcal{B}_{3,4}) = \mathcal{B}_{7,8}$ . Logo,  $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_{3,4} = \emptyset$  se, e somente se,  $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_{7,8} = \emptyset$ .

(2)  $jk(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_3$  e  $jk(\mathcal{B}_7) = \mathcal{B}_1$ . Assim,  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3 = \emptyset$  se, e somente se,  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_7 = \emptyset$ .

(3)

$$\begin{aligned} j(X_{5,6}) &= ji_5i_6(O) = j[(jk)^2i_1(kj)^2][kjk i_1 kjk](O) \\ &= j(jkjk i_1 kjkj)(kjk i_1 kjk)j(O) \\ &= (kjk i_1 kjk)[(jk)^2i_1(kj)^2](O) = i_5i_6(O) = i_5i_6(O) \\ &= X_{5,6}. \end{aligned}$$

Logo  $j(\mathcal{B}_{5,6}) = \mathcal{B}_{5,6}$ . Isto, juntamente com (1), nos mostra que dado  $s \in J = \{1, 3, 5, 7\}$ , existe  $r \in J$  tal que  $j(\mathcal{B}_{s,s+1}) = \mathcal{B}_{r,r+1}$ .

Consideremos a interseção  $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_r$ , com  $r \geq 3$ . Para alguma potência  $n$  temos  $(kj)^n(\mathcal{B}_r) = \mathcal{B}_1$  ou  $(kj)^n(\mathcal{B}_r) = \mathcal{B}_2$ . Façamos  $m = 0$  no primeiro caso, e  $m = 1$  no outro. Então

$$j^m(kj)^n(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_1 \quad \text{e} \quad j^m(kj)^n(\mathcal{B}_{1,2}) = \mathcal{B}_{s,s+1} \quad \text{para algum } s \in J.$$

Logo  $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_r = \emptyset$  se, e somente se,  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{s,s+1} = \emptyset$ .

Assim só necessitamos verificar as seguintes interseções:

- $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_6$  e  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_8$ ;
- $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{3,4}, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{5,6}$  e  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{7,8}$ ;
- $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_{3,4}$  e  $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_{5,6}$ .

Vamos separar, por comodidade, os casos acima de acordo com o método utilizado no estudo das interseções.

**Lema 2.14** *As interseções  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_8$  e  $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_{5,6}$  são vazias para todo  $t$ .*

*Prova.* Temos que  $\mathcal{B}_5 = (jk)^2(\mathcal{B}_1)$ . Como  $(jk)^2$  é a inversão no ponto  $O$ , os pontos  $O, x_1$  e  $x_5$  estão em um mesmo hiperplano complexo, qualquer que seja  $t$ . Além disto  $O \notin \sigma_1$  (onde  $\sigma_r$  é a espinha real de  $\mathcal{B}_r$ ). Logo  $\sigma_1 \cap \sigma_5 = \emptyset$ , e portanto  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_5 = \emptyset$  para todo  $t$ . A mesma análise funciona para  $\mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_{5,6}$ .

Por construção, o Teorema 2.10 se aplica à interseção  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_8$ . Logo  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_8 = \emptyset$  para todo  $t$ . □

**Lema 2.15** *Os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_4(t)$  são disjuntos para  $t^2 \leq 3$ . Para  $t^2 = 3$  suas esferas espinais  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_4$  intersectam-se em um único ponto em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ .*

*Prova.* Sabemos que

$$\begin{aligned} L_4 &= i_{\Sigma_4}(L_3) = i_{\Sigma_4}i_{\Sigma_3}(L_2) \\ &= i_{\Sigma_4}i_{\Sigma_3}i_{\Sigma_2}(L_1) = i_{\Sigma_3}(L_1). \end{aligned}$$

Então, pela construção dos bissetores  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_4$  e pelo Teorema 2.12, segue que estes bissetores e seus fechos não se intersectam se, e somente se, as geodésicas complexas  $L_1$  e  $L_4$  são ultraparalelas. Esta última condição é equivalente a

$$f(t) = \frac{\langle \lambda_1, \lambda_4 \rangle \langle \lambda_4, \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle \langle \lambda_4, \lambda_4 \rangle} > 1$$

onde

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 1} \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_4 = i_{\Sigma_3}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 1} \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

são os vetores polares a  $L_1$  e a  $L_4$ , respectivamente. Como

$$f(t) = \frac{((t^2 + 1) - 8)^2}{(t^2 + 1)^2}$$

segue que estes bissetores, e seus fechos, não se intersectam se, e somente se,  $t^2 < 3$ .

Além disto temos  $f(\sqrt{3}) = 1$ , o que implica que  $L_1(\sqrt{3})$  e  $L_4(\sqrt{3})$  são assintóticas, ou seja, os fechos de  $\mathcal{B}_1(\sqrt{3})$  e  $\mathcal{B}_4(\sqrt{3})$  são tangentes em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ .  
□

**Lema 2.16** *Os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_6(t)$ , e suas respectivas esferas espinais, são disjuntos para  $t^2 < 7$ .*

*Prova.* Como na prova do lema anterior temos

$$\begin{aligned} L_6 &= i_{\Sigma_2}(L_5) = i_{\Sigma_2}i_{\Sigma_1}(L_4) \\ &= i_{\Sigma_2}i_{\Sigma_1}i_{\Sigma_3}(L_1) = i_{\Sigma_4}(L_1). \end{aligned}$$

Tomando

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 1} \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = i_{\Sigma_4}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 2(-1 + it) \\ (1 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ 2\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}$$

segue que os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_6(t)$ , e seus fechos, são disjuntos quando

$$f(t) = \frac{\langle \lambda_1, \lambda_6 \rangle \langle \lambda_6, \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle \langle \lambda_6, \lambda_6 \rangle} > 1,$$

ou seja,

$$\frac{64}{(t^2 + 1)^2} > 1,$$

o que equivale a  $t^2 < 7$ . □

A demonstração do próximo lema segue a mesma idéia, porém antes é preciso encontrar as fatias dos bissetores que serão utilizadas.

**Lema 2.17** *Os bissetores  $\mathcal{B}_{1,2}(t)$  e  $\mathcal{B}_{3,4}(t)$ , e suas respectivas esferas espinais, são disjuntos para  $t^2 < 7$ .*

*Prova.* Temos

$$X_{1,2} = i_1i_2(O) = \begin{bmatrix} 4(3 + t^2 - 2it) \\ -4(3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ (t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$X_{3,4} = i_3i_4(O) = \begin{bmatrix} 4(3 + t^2 - 2it) \\ 4(3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ (t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

Os pontos médios de  $O$  e  $X_{1,2}$  e de  $O$  e  $X_{3,4}$  são, respectivamente,

$$M_{1,2} = \begin{bmatrix} 2(3 + t^2 - 2it) \\ -2(3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ (t^2 + 9)\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$M_{3,4} = i_3 i_4(O) = \begin{bmatrix} 2(3 + t^2 - 2it) \\ 2(3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ (t^2 + 9)\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

Os vetores polares às geodésicas complexas determinadas por  $O$  e  $X_{1,2}$  e por  $O$  e  $X_{3,4}$  são, respectivamente

$$\lambda_{1,2} = \begin{bmatrix} (3 - it)\sqrt{t^2 + 1} \\ t^2 + 3 + 2it \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \lambda_{3,4} = \begin{bmatrix} (3 - it)\sqrt{t^2 + 1} \\ -(t^2 + 3 + 2it) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seja  $\tau_{1,2}$  o vetor polar à geodésica complexa que passa por  $M_{1,2}$  e é ortogonal à geodésica complexa determinada por  $\lambda_{1,2}$ , e seja  $\tau_{3,4}$  definido de forma análoga. Então:

$$\tau_{1,2} = \lambda_{1,2} \boxtimes M_{1,2} = \begin{bmatrix} t^2 + 3 - 2it \\ -(3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ 4\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\tau_{3,4} = \lambda_{3,4} \boxtimes M_{3,4} = \begin{bmatrix} t^2 + 3 - 2it \\ (3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ 4\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

As inversões nas geodésicas complexas determinadas por  $\tau_{1,2}$  e  $\tau_{3,4}$  são dadas por

$$i_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{8}{t^2+1} & \frac{(-3+it)(t^2+3-2it)}{(t^2+1)^{(3/2)}} & -4\frac{t^2+3-2it}{(t^2+1)^{(3/2)}} \\ -\frac{(3+it)(t^2+3+2it)}{(t^2+1)^{(3/2)}} & \frac{8}{t^2+1} & 4\frac{3+it}{t^2+1} \\ 4\frac{t^2+3+2it}{(t^2+1)^{(3/2)}} & 4\frac{-3+it}{t^2+1} & -\frac{t^2+17}{t^2+1} \end{bmatrix}$$

e

$$i_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{8}{t^2+1} & -\frac{(-3+it)(t^2+3-2it)}{(t^2+1)^{(3/2)}} & -4\frac{t^2+3-2it}{(t^2+1)^{(3/2)}} \\ \frac{(3+it)(t^2+3+2it)}{(t^2+1)^{(3/2)}} & \frac{8}{t^2+1} & -4\frac{3+it}{t^2+1} \\ 4\frac{t^2+3+2it}{(t^2+1)^{(3/2)}} & -4\frac{-3+it}{t^2+1} & -\frac{t^2+17}{t^2+1} \end{bmatrix}.$$

Assim obtemos

$$X_{1,2} = i_{1,2}(O) \text{ e } X_{3,4} = i_{3,4}(O).$$

Observemos que  $\tau_{3,4}$  é a imagem de  $\tau_{1,2}$  pela inversão em  $H_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\}$ . Isto nos possibilita utilizar o Teorema 2.12 e garantir que  $\mathcal{B}_{1,2}(t)$  e  $\mathcal{B}_{3,4}(t)$  (e suas respectivas esferas espinais) são disjuntos para  $t$  tais que  $f(t) > 1$  onde

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\langle \tau_{1,2}, \tau_{3,4} \rangle \langle \tau_{3,4}, \tau_{1,2} \rangle}{\langle \tau_{1,2}, \tau_{1,2} \rangle \langle \tau_{3,4}, \tau_{3,4} \rangle} \\ &= \frac{64}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

ou seja, para  $t^2 < 7$ . □

No próximo caso, a estratégia acima não pode ser utilizada, pois as distâncias dos pontos  $x_1$  e  $x_{5,6}$  ao ponto  $O$  são diferentes.

**Lema 2.18** *Os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_{5,6}(t)$ , e suas respectivas esferas espinais, são disjuntos para  $t^2 < 15 + 16\sqrt{2}$ .*

*Prova.* Tomemos os pontos

$$O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 4\sqrt{t^2 + 1} \\ -8 \\ t^2 + 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } X_{5,6} = i_5 i_6(O) = \begin{bmatrix} -4(3 + t^2 - 2it) \\ 4(3 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ (t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

Tomemos também a transformação  $N \in PU(2, 1)$  dada por

$$N = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+5}} & -\frac{2}{\sqrt{t^2+5}} & 0 \\ 2\frac{(t^2+1)\sqrt{t^2+9}}{(t^2-3+it(t^2+5))\sqrt{t^2+5}} & \frac{(t^2+1)^{(3/2)}\sqrt{t^2+9}}{(t^2-3+it(t^2+5))\sqrt{t^2+5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então  $O = N(O)$ ,

$$Y_1 = N(X_1) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{t^2 + 5} \\ 0 \\ t^2 + 9 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$Y_{5,6} = N(X_{5,6}) = \begin{bmatrix} -4(t^2 + 9) \\ 4\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)} \\ (t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 5} \end{bmatrix}.$$

Portanto estes pontos estão em  $H_{\mathbb{R}}^2$ .

Tomemos os bissetores  $\mathcal{B}'_1(t) = \mathcal{B}(O, Y_1)$  e  $\mathcal{B}'_{5,6}(t) = \mathcal{B}(O, Y_{5,6})$ . A interseção  $\mathcal{B}'_1(t) \cap H_{\mathbb{R}}^2$  é dada pela geodésica

$$\gamma_1(s) = \left( \frac{2}{\sqrt{t^2 + 5}}, 4s \frac{\sqrt{t^2 + 5}}{t^2 + 9} \right) \text{ com } |s| < \frac{(t^2 + 9)\sqrt{t^2 + 1}}{4(t^2 + 5)}.$$

A interseção  $\mathcal{B}'_{5,6}(t) \cap H_{\mathbb{R}}^2$  é dada pela geodésica

$$\begin{aligned} \gamma_2(s) = & \left( -\frac{2}{\sqrt{t^2 + 5}} - 4s \frac{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}}{(t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 5}}, \right. \\ & \left. 2 \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{(t^2 + 5)(t^2 + 9)}} - 4s \frac{t^2 + 9}{(t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 5}} \right) \\ & \text{com } |s| < \frac{(t^2 + 17)\sqrt{2(t^2 + 1)}}{8(t^2 + 9)}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.8, as duas geodésicas acima devem se intersectar para que os dois bissetores se intersectem. Isto acontece quando

$$-\frac{2}{\sqrt{t^2 + 5}} - 4s \frac{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}}{(t^2 + 17)\sqrt{t^2 + 5}} = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 5}}$$

ou seja, quando

$$s = -\frac{t^2 + 17}{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}}.$$

Mas este  $s$  é o parâmetro de  $\gamma_{5,6}$ . Logo devemos ter

$$\frac{t^2 + 17}{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}} < \frac{(t^2 + 17)\sqrt{2(t^2 + 1)}}{8(t^2 + 9)}$$

o que equivale a

$$0 < t^4 - 30t^2 - 287.$$

Isto acontece se, e somente se,  $t^2 > 15 + 16\sqrt{2}$ .

Como os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_{5,6}(t)$  são disjuntos se, e somente se,  $\mathcal{B}'_1(t)$  e  $\mathcal{B}'_{5,6}(t)$  também o são, nosso resultado fica provado.  $\square$

Restam três interseções a serem analisadas:  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3$ ,  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{3,4}$  e  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{7,8}$ . Em virtude do Teorema 2.13, nenhuma destas interseções pode ser analisada com as ferramentas utilizadas nos lemas anteriores.

**Lema 2.19** *Os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_3(t)$ , e suas esferas espinais, são disjuntos para  $t^2 \leq 3$ .*

*Prova.* Tomemos os pontos

$$O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_1 = i_1(O) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{t^2 + 1} \\ -8 \\ t^2 + 9 \end{bmatrix}$$

e as seguintes transformações em  $PU(2,1)$ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{t^2+5}} & -\frac{2}{\sqrt{t^2+5}} \\ \frac{2}{\sqrt{t^2+5}} & \frac{t^2-3}{t^2+5} & -\frac{2}{t^2+5} \\ -\frac{2}{\sqrt{t^2+5}} & \frac{2}{t^2+5} & \frac{t^2+7}{t^2+5} \end{bmatrix} \quad e$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^2+3}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+5)}} & \frac{2}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+5)}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+5)}} & \frac{t^2+3}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+5)}} \end{bmatrix}.$$

Consideremos os pontos

$$Y_0 = MN(O) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \sqrt{t^2 + 5} \end{bmatrix}$$

e

$$Y_1 = MN(X_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{t^2 + 5} \end{bmatrix}$$

e denominemos  $\mathcal{B}'_1(t)$  o bissetor equidistante destes pontos. Sua espinha complexa  $\Sigma'_1$  é  $H^1_{\mathbb{C}} \times \{0\}$  e sua espinha real  $\sigma'_1$  é a geodésica que os pontos

$$\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tomemos agora o ponto

$$X_3 = i_3(O) = \begin{bmatrix} 8(-1 + it) \\ -4(1 + it)\sqrt{t^2 + 1} \\ -(t^2 + 9)\sqrt{t^2 + 1} \end{bmatrix}$$

e façamos

$$Y_3 = MN(X_3) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{t^2 + 5}(t^2 + 9 + 8it) \\ 4[t^2 + 5 + it(t^2 - 3)] \\ (t^2 + 5)(t^2 + 9) + 32it \end{bmatrix}$$

e  $\mathcal{B}'_3(t) = \mathcal{B}(Y_0, Y_3)$ .

Os vértices de  $\mathcal{B}'_3(t)$  são dados por

$$V_1 = \begin{bmatrix} 16(t^2 + 5) - 2i [(t^2 + 5)(t^2 + 9) + 2t(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 5}] \\ \left\{ (t^2 + 1)(t^2 + 5) - 4t\sqrt{t^2 + 5}(t^2 - 3) + \right. \\ \left. + i \left[ 4(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + t(t^2 - 3)(t^2 + 1) \right] \right\} \\ -32t\sqrt{t^2 + 5} + i [(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}}(t^2 + 9) + 8t(t^2 + 1)] \end{bmatrix}$$

e

$$V_2 = \begin{bmatrix} 8(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}} - 2i [(t^2 + 5)(t^2 + 1) - 2t(t^2 + 9)\sqrt{t^2 + 5}] \\ -(t^2 + 9)[t^2 + 5 + it(t^2 - 3)] \\ -4(t^2 + 5)^2 + i [(t^2 + 1)(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}} - 8t(t^2 + 9)] \end{bmatrix}.$$

É claro que, para cada  $t$ ,  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_3(t)$  são disjuntos se, e somente se,  $\mathcal{B}'_1(t)$  e  $\mathcal{B}'_3(t)$  também o são. Mas para verificar se estes últimos são disjuntos basta verificar se a projeção de  $\mathcal{B}'_3(t)$  em  $H_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\}$  intercepta a espinha real  $\sigma'_1$  de  $\mathcal{B}'_1(t)$ .

Para obter a curva que limita esta projeção tomamos o vetor

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x - iy \end{bmatrix}.$$

Este vetor é polar a  $\Sigma'_1$  e passa pelo ponto

$$\begin{bmatrix} x + iy \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos, então, o invariante  $\eta$  destes três pontos

$$\begin{aligned} \eta(V_1, V_2, V) &= \frac{\langle V_1, V \rangle \langle V, V_2 \rangle}{\langle V_1, V_2 \rangle \langle V, V \rangle} \\ &= \frac{\alpha + i\beta}{2(t^2 + 1)(t^2 + 5)^2(x^2 + y^2 - 1)} \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = (x^2 + y^2)(125 + 11t^2 + 15t^4 + t^6) + 100 - 40t^2 - 12t^4 + \sqrt{t^2 + 5}4x(t^4 - 6t^2 + 25)$$

e

$$\beta = -(2000x + 360yt + 480xt^2 + 112yt^3 + 16xt^4 + 8yt^5) - \sqrt{t^2 + 5} [(x^2 + y^2)(500 + 56t^2 + 4t^4) + 400 + 80t^2].$$

Os pontos que definem a curva que limitam a projeção são aqueles que satisfazem

$$\Im^2(\eta) + 2\Re(\eta) = 1.$$

Isto é, são os pontos  $x+iy$ , de norma menor que 1, que satisfazem a equação:

$$h_4(y, t) x^4 + h_3(y, t) x^3 + h_2(y, t) x^2 + h_1(y, t) x + h_0(y, t) = 0$$

onde

$$\begin{aligned} h_4(y, t) &= 8t^8 + 112t^6 + 1760t^4 + 14480t^2 + 63000; \\ h_3(y, t) &= 4\sqrt{t^2 + 5}(t^8 + 8t^6 + 306t^4 + 3920t^2 + 25125); \\ h_2(y, t) &= (16t^8 + 224t^6 + 3520t^4 + 28960t^2 + 126000)y^2 \\ &\quad + 16t\sqrt{t^2 + 5}(t^2 + 9)(t^4 + 14t^2 + 125)y \\ &\quad + (t^2 + 5)(t^8 - 4t^6 + 238t^4 + 5484t^2 + 60025); \\ h_1(y, t) &= 4\sqrt{t^2 + 5}(t^8 + 8t^6 + 306t^4 + 3920t^2 + 25125)y^2 \\ &\quad + 64(t^2 + 5)(t^2 + 9)(t^2 + 25)y \\ &\quad - 4(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}}(t^6 - 5t^4 - 141t^2 - 3975); \\ h_0(y, t) &= (8t^8 + 112t^6 + 1760t^4 + 14480t^2 + 63000)y^4 \\ &\quad + 16t\sqrt{t^2 + 5}(t^2 + 9)(t^4 + 14t^2 + 125)y^3 \\ &\quad + (t^2 + 5)(t^8 + 12t^6 + 462t^4 + 3580t^2 + 20025)y^2 \\ &\quad + 320t(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}}(t^2 + 9)y \\ &\quad - (t^2 + 5)^2(t^6 - 5t^4 + 19t^2 - 1575). \end{aligned}$$

Como a espinha real de  $\mathcal{B}'_1(t)$  é o eixo imaginário entre  $i$  e  $-i$ , basta mostrar que a curva acima não intercepta tal eixo (veja Figura (2.7)). Vamos supor que fosse este o caso. Então poderíamos fazer  $x = 0$  na equação

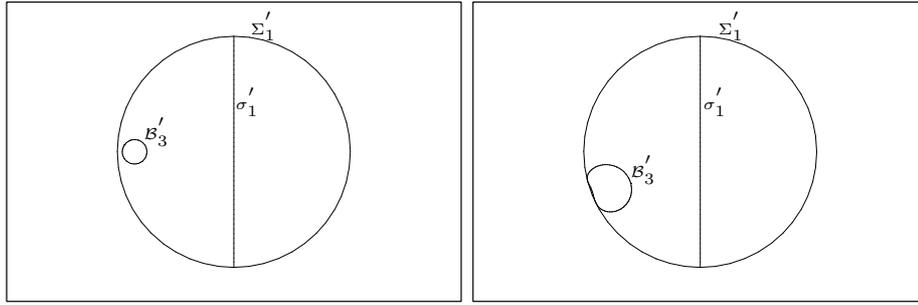


Figura 2.7: As curvas que limitam as projeções dos bissetores  $\mathcal{B}'_3(0)$  (à esquerda) e  $\mathcal{B}'_3(\sqrt{3})$  (à direita).

acima e encontrar valores de  $y \in (-1, 1)$  e de  $t \in [0, \sqrt{3}]$  satisfazendo

$$h_0(y, t) = f_4(t)y^4 + f_3(t)y^3 + f_2(t)y^2 + f_1(t)y + f_0(t) = 0.$$

É fácil ver que as funções  $f_4, f_3, f_2$  e  $f_1$  são crescentes e positivas. O mesmo acontece com  $f_0$  no intervalo  $[0, \sqrt{3}]$ , pois

$$f'_0(t) = -2t(t^2 + 5)(5t^6 - 5t^4 + 7t^2 - 3055)$$

e a função  $g(t) = 5t^6 - 5t^4 + 7t^2 - 3055$  é convexa com  $g(0)$  e  $g(\sqrt{3})$  menores que 0, logo  $f'_0(t) \geq 0$  neste intervalo.

Do exposto acima segue imediatamente que

$$h_0(y, t) > 0 \quad \text{para todo par } (y, t) \text{ com } y \geq 0 \text{ e } t \in [0, \sqrt{3}].$$

Vamos analisar a função  $h_0$  para  $y < 0$  dividindo seu domínio  $(-1, 0) \times [0, \sqrt{3}]$  em dois retângulos

$$D_1 = (-1, 0) \times [0, 12/10]$$

$$D_2 = (-1, 0) \times [12/10, \sqrt{3}].$$

Tendo em vista os comportamentos das funções  $f_k$ , a função  $h_0$  restrita a  $D_1$  possui cota inferior dada pela função

$$\begin{aligned} g_1(y) &= f_4(0)y^4 + f_3\left(\frac{12}{10}\right)y^3 + f_2(0)y^2 + f_1\left(\frac{12}{10}\right)y + f_0(0) \\ &= 63000y^4 + \frac{2305678176}{390625}\sqrt{161}y^3 + 100125y^2 \\ &\quad + \frac{16136064}{3125}\sqrt{161}y + 39375 \end{aligned}$$

que é convexa e possui um ponto de mínimo global em  $y_0 \approx -0,43623$  e

valor mínimo  $g_1(y_0) \approx 25911,6969$ . Logo  $h_0(y, t) > 0$  em  $D_1$ .

Da mesma forma, a função  $h_0$  em  $D_2$  é limitada inferiormente pela função

$$\begin{aligned} g_2(y) &= f_4 \left( \frac{12}{10} \right) y^4 + f_3 \left( \sqrt{3} \right) y^3 + f_2 \left( \frac{12}{10} \right) y^2 + f_1 \left( \sqrt{3} \right) y + f_0 \left( \frac{12}{10} \right) \\ &= \frac{34324048728}{390625} y^4 + 33792\sqrt{24}y^3 + \frac{1646371838601}{9765625} y^2 \\ &\quad + 30720\sqrt{24}y + \frac{6298082213699}{9765625} \end{aligned}$$

que é convexa e possui um ponto de mínimo global em  $y_0 \approx -0,87588$  e valor mínimo  $g_2(y_0) \approx 2487,6655$ . Logo  $h_0(y, t) > 0$  em  $D_2$ .

Portanto  $h_0(y, t) > 0$  para todo  $y < 0, t \in [0, \sqrt{3}]$ . □

**Lema 2.20** *Os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_{34}(t)$ , e suas esferas espinais, são disjuntos para  $t^2 \leq 3$ .*

*Prova.* Para cada  $t$ , tomemos as transformações  $M$  e  $N$ , o ponto  $Y_0(t)$  e o bissetor  $\mathcal{B}'_1(t)$  encontrados na demonstração do lema anterior. Tomemos os pontos

$$X_{34} = i_{34}(O) = \begin{bmatrix} 4(t+i)(t-3i) \\ 4(3+ti)\sqrt{t^2+1} \\ (t^2+17)\sqrt{t^2+1} \end{bmatrix}$$

e

$$Y_{34} = MN(X_{34}) = \begin{bmatrix} -2(23-t^2+8ti)\sqrt{t^2+5} \\ 4i(t+i)(-t+3i)^2 \\ t^4+14t^2+109+32ti \end{bmatrix}$$

e denominemos  $\mathcal{B}'_{34}(t)$  o bissetor equidistante dos pontos  $Y_0(t)$  e  $Y_{34}(t)$ .

Os vértices de  $\mathcal{B}'_{34}(t)$  são dados por

$$V_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{t^2+5} [(t^2-3)(t^2+1) + 16t\sqrt{2t^2+18} \\ \quad + 2i(\sqrt{2t^2+18}(t^2-23) - 2t(t^2+1))] \\ \{4t\sqrt{2t^2+18}(t^2-3) - 5t^4 - 14t^2 - 9 \\ \quad - i[\sqrt{2t^2+18}(20t^2+36) + t(t^2-3)(t^2+1)]\} \\ \{2(t^2-3)(t^2+1) + 32t\sqrt{2t^2+18} \\ \quad - i[\sqrt{2t^2+18}(t^4+14t^2+109) + 8t(t^2+1)]\} \end{bmatrix}$$

e

$$V_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2+5}[t^4 - 2t^2 - 195 + 2i(\sqrt{2t^2+18}(t^2+1) - 2t(t^2+17))] \\ i(t+i)(t^2+1)(t-3i)^2 \\ 6(t^4+14t^2+77) - i[\sqrt{2t^2+18}(t^2+1)(t^2+5) - 8t(t^2+17)] \end{bmatrix}.$$

Procedemos de forma análoga à demonstração do lema anterior e calculamos

$$\begin{aligned}\eta(V_1, V_2, V) &= \frac{\langle V_1, V \rangle \langle V, V_2 \rangle}{\langle V_1, V_2 \rangle \langle V, V \rangle} \\ &= \frac{\alpha (t^2 + 1) (t^2 + 9) - 2i \sqrt{2t^2 + 18} \beta}{4 (t^2 + 5) (t^2 + 9) (t^2 + 1)^2 (-1 + x^2 + y^2)}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha &= [2(x^2 + y^2) - 1] t^4 + [16(x^2 + y^2) + 4x\sqrt{t^2 + 5} + 2] t^2 \\ &\quad + 46(x^2 + y^2) + 36x\sqrt{t^2 + 5} + 35\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta &= [2(x^2 + y^2) - x\sqrt{t^2 + 5}] t^6 + 4y\sqrt{t^2 + 5} t^5 \\ &\quad + [46(x^2 + y^2) + x\sqrt{t^2 + 5} + 8] t^4 + 72zy\sqrt{t^2 + 5} t^3 \\ &\quad + [502(x^2 + y^2) + 229x\sqrt{t^2 + 5} + 304] t^2 \\ &\quad + 68y\sqrt{t^2 + 5} t + 1482(x^2 + y^2) + 1251x\sqrt{t^2 + 5} + 1320\end{aligned}$$

e a projeção do bissetor  $\mathcal{B}'_{34}(t)$  na espinha complexa de  $\mathcal{B}'_1(t)$  tem sua fronteira dada pela curva dada por:

$$h_4(y, t)x^4 + h_3(y, t)x^3 + h_2(y, t)x^2 + h_1(y, t)x + h_0(y, t) = 0$$

onde

$$\begin{aligned}h_4(y, t) &= 8t^{12} + 288t^{10} + 5096t^8 + 56064t^6 + 395352t^4 + 1493472t^2 \\ &\quad + 2197944; \\ h_3(y, t) &= 16\sqrt{t^2 + 5} (t^2 + 9) (t^8 + 52t^6 + 1286t^4 + 10612t^2 + 25761); \\ h_2(y, t) &= (16t^{12} + 576t^{10} + 10192t^8 + 112128t^6 + 790704t^4 + 2986944t^2 \\ &\quad + 4395888) y^2 \\ &\quad + 16\sqrt{t^2 + 5} t (t^2 + 1) (t^2 + 17) (t^6 + 23t^4 + 251t^2 + 741) y \\ &\quad + 2(t^2 + 5) (t^{12} + 10t^{10} - 133t^8 + 92t^6 + 43911t^4 + 431034t^2 \\ &\quad + 1173789); \\ h_1(y, t) &= 16\sqrt{t^2 + 5} (t^2 + 9) (t^8 + 52t^6 + 1286t^4 + 10612t^2 + 25761) y^2 \\ &\quad - 8t (t^2 + 1) (t^2 + 5) (t^2 + 9) (t^2 + 17) (t^4 - 10t^2 - 139) y \\ &\quad - 4(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}} (t^2 + 9) (t^8 + 16t^6 + 122t^4 - 1848t^2 - 18339); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_0(y, t) = & (8t^{12} + 288t^{10} + 5096t^8 + 56064t^6 + 395352t^4 + 1493472t^2 \\
 & + 2197944)y^4 \\
 & + 16t\sqrt{t^2 + 5}(t^2 + 1)(t^2 + 17)(t^6 + 23t^4 + 251t^2 + 741)y^3 \\
 & + (t^2 + 5)(t^{12} + 38t^{10} + 767t^8 + 7956t^6 + 42671t^4 + 293734t^2 \\
 & + 782577)y^2 \\
 & + 64t(t^2 + 1)(t^2 + 5)^{\frac{3}{2}}(t^2 + 17)(t^2 + 33)y \\
 & - (t^2 + 5)^2(t^{10} + 21t^8 + 138t^6 + 234t^4 - 3963t^2 - 69615).
 \end{aligned}$$

(Veja Figura (2.8).)

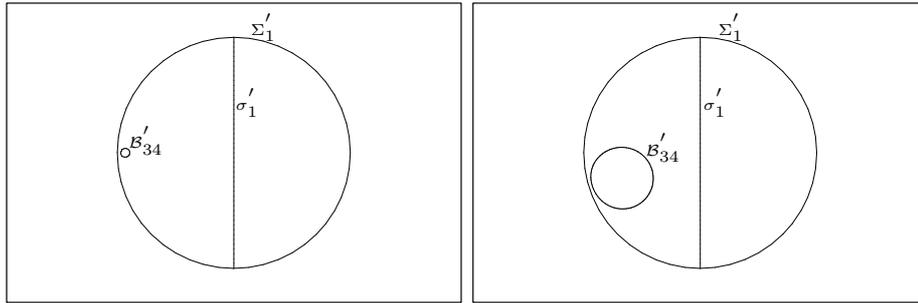


Figura 2.8: As curvas que limitam as projeções dos bissetores  $\mathcal{B}'_{34}(0)$  (à esquerda) e  $\mathcal{B}'_{34}(\sqrt{3})$  (à direita).

Para mostrar que esta curva não intercepta o eixo imaginário entre  $i$  e  $-i$ , basta mostrar que não existem  $y \in (-1, 1)$  e  $t \in [0, \sqrt{3}]$  satisfazendo

$$h_0(y, t) = f_4(t)y^4 + f_3(t)y^3 + f_2(t)y^2 + f_1(t)y + f_0(t) = 0.$$

Novamente é fácil ver que as funções  $f_4, f_3, f_2$  e  $f_1$  são crescentes e positivas. O mesmo acontece com  $f_0$ , pois

$$f'_0(t) = -2t(t^2 + 5)(7t^{10} + 151t^8 + 1110t^6 + 3006t^4 - 9549t^2 - 159045)$$

e  $g(t) = 7t^{10} + 151t^8 + 1110t^6 + 3006t^4 - 9549t^2 - 159045 \leq h(t) = 7t^{10} + 151t^8 + 1110t^6 + 3006t^4 - 159045$ , que é crescente para  $t \geq 0$  e satisfaz  $h(\sqrt{3}) = -88089$ . Logo  $g(t) < 0$ .

Do exposto acima segue, imediatamente, que  $h_0(y, t) > 0$  para todo par  $(y, t)$  com  $y \geq 0$  e  $t \in [0, \sqrt{3}]$ .

Vamos analisar a função  $h_0$  para  $y < 0$  dividindo seu domínio

$(-1, 0) \times [0, \sqrt{3}]$  em duas faixas

$$D_1 = (-1, 0) \times [0, 13/10]$$

$$D_2 = (-1, 0) \times [13/10, \sqrt{3}].$$

Tendo em vista os comportamentos das funções  $f_k$ , a função  $h_0$  restrita a  $D_1$  é limitada inferiormente pela função

$$\begin{aligned} g_1(y) &= f_4(0)y^4 + f_3\left(\frac{13}{10}\right)y^3 + f_2(0)y^2 + f_1\left(\frac{13}{10}\right)y + f_0(0) \\ &= 2197944y^4 + \frac{8076449443763337}{62500000000}\sqrt{669}y^3 + 3912885y^2 \\ &\quad + \frac{15168245574573}{156250000}\sqrt{669}y + 1740375 \end{aligned}$$

que é convexa com ponto de mínimo global em  $y_0 \approx -0,50132$  e com valor mínimo global  $g_1(y_0) \approx 1182721,613$ . Logo  $h_0(y, t) > 0$  em  $D_1$ .

Da mesma forma, a função  $h_0$  em  $D_2$  é limitada inferiormente pela função

$$\begin{aligned} g_2(y) &= f_4\left(\frac{13}{10}\right)y^4 + f_3(\sqrt{3})y^3 + f_2\left(\frac{13}{10}\right)y^2 + f_1(\sqrt{3})y + f_0\left(\frac{13}{10}\right) \\ &= \frac{770926636720548881}{125000000000}y^4 + 4423680\sqrt{6}y^3 \\ &\quad + \frac{967418161016618297589}{10000000000000}y^2 + 2949120\sqrt{6}y \\ &\quad + \frac{334744091318618839611}{10000000000000} \end{aligned}$$

que também é convexa com ponto de mínimo global em  $y_0 \approx -0,79444$  e valor mínimo global  $g_2(y_0) \approx 737884,75$ . Logo  $h_0(y, t) > 0$  em  $D_2$ .

Portanto  $h_0(y, t) > 0$  para todo  $y < 0, t \in [0, \sqrt{3}]$ . □

**Lema 2.21** *Os bissetores  $\mathcal{B}_1(t)$  e  $\mathcal{B}_{78}(t)$ , e suas esferas espinais, são disjuntos para  $t^2 \leq 3$ .*

*Prova.* Para cada  $t$ , tomemos as transformações  $M$  e  $N$ , o ponto  $Y_0(t)$  e o bissetor  $\mathcal{B}'_1(t)$  encontrados nas demonstrações dos lemas anteriores. Tomemos os pontos

$$X_{78} = i_{78}(O) = \begin{bmatrix} 4(t+i)(-t+3i) \\ -4(3+ti)\sqrt{t^2+1} \\ (t^2+17)\sqrt{t^2+1} \end{bmatrix}$$

e

$$Y_{78} = MN(X_{78}) = \begin{bmatrix} -2(3t^2 + 11 - 8it)\sqrt{t^2 + 5} \\ -4i(t+i)(t-3i)^2 \\ (t+i)[t^3 + 29t - i(t^2 - 61)] \end{bmatrix}$$

e denominemos  $\mathcal{B}'_{78}(t)$  o bissetor equidistante dos pontos  $Y_0(t)$  e  $Y_{78}(t)$ .

Os vértices de  $\mathcal{B}'_{78}(t)$  são dados por

$$V_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 5} [(t^2 - 3)(t^2 + 1) + 16t\sqrt{2t^2 + 18} \\ + 2i(\sqrt{2t^2 + 18}(3t^2 + 11) - 2t(t^2 + 1))] \\ (5t^2)(t^2 + 1) - 4t\sqrt{2t^2 + 18}(t^2 - 3) \\ + i[\sqrt{2t^2 + 18}(20t^2 + 36) + t(t^2 - 1)(t^2 + 1)] \\ -2(t^2 - 3)(t^2 + 1) - 32t\sqrt{2t^2 + 18} \\ - i[\sqrt{2t^2 + 18}(t^4 + 30t^2 + 61) - 8t(t^2 + 1)] \end{bmatrix}$$

e

$$V_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2 + 5} [t^4 + 30t^2 + 93 - 2i(\sqrt{2t^2 + 18}(t^2 + 1) + 2t(t^2 + 17))] \\ i(t+i)(t^2 + 17)(t-3i)^2 \\ -10t^4 - 140t^2 - 258 + i(\sqrt{2t^2 + 18}(t^4 + 6t^2 + 5) + 8t(t^2 + 136)) \end{bmatrix}.$$

Como nos lemas anteriores calculamos

$$\begin{aligned} \eta(V_1, V_2, V) &= \frac{\langle V_1, V \rangle \langle V, V_2 \rangle}{\langle V_1, V_2 \rangle \langle V, V \rangle} \\ &= \frac{(t^2 + 9)\alpha - i2\sqrt{2t^2 + 18}\beta}{4(t^2 + 1)(t^2 + 5)(t^2 + 9)(-1 + x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= [2(x^2 + y^2) - 1]t^4 + [16(x^2 + y^2) + 4x\sqrt{t^2 + 5} + 2]t^2 \\ &\quad + 46(x^2 + y^2) + 36x\sqrt{t^2 + 5} + 35 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta &= [6(x^2 + y^2) + x\sqrt{t^2 + 5} + 4]t^4 - 4y\sqrt{t^2 + 5}t^3 \\ &\quad + [116(x^2 + y^2) + 46x\sqrt{t^2 + 5} + 80]t^2 \\ &\quad - 68\sqrt{t^2 + 5}t + 462(x^2 + y^2) + 333x\sqrt{t^2 + 5} + 300 \end{aligned}$$

A curva que limita a projeção de  $\mathcal{B}'_{78}(t)$  na espinha complexa de  $\mathcal{B}'_1(t)$  é dada por:

$$h_4(y, t)x^4 + h_3(y, t)x^3 + h_2(y, t)x^2 + h_1(y, t)x + h_0(y, t) = 0$$

onde

$$\begin{aligned}
 h_4(y, t) &= 40 t^8 + 1488 t^6 + 19776 t^4 + 109488 t^2 + 215064; \\
 h_3(y, t) &= 16\sqrt{t^2 + 5} (t^2 + 9) (t^6 + 46 t^4 + 609 t^2 + 2148); \\
 h_2(y, t) &= (80 t^8 + 2976 t^6 + 39522 t^4 + 218976 t^2 + 430128) y^2 \\
 &\quad - 16\sqrt{t^2 + 5} t (t^2 + 17) (3 t^4 + 58 t^2 + 231) y \\
 &\quad + 2 (t^2 + 5) (t^8 + 80 t^6 + 2274 t^4 + 24216 t^2 + 83205); \\
 h_1(y, t) &= 16\sqrt{t^2 + 5} (t^2 + 9) (t^6 + 46 t^4 + 609 t^2 + 2148) y^2 \\
 &\quad - 8 t (t^2 + 5) (t^2 + 9) (t^2 + 17) (t^2 + 37) y \\
 &\quad + 4 (t^2 + 5)^{(3/2)} (t^2 + 9) (t^4 + 94 t^2 + 1101); \\
 h_0(y, t) &= (40 t^8 + 1488 t^6 + 19776 t^4 + 109488 t^2 + 215064) y^4 \\
 &\quad - 16\sqrt{t^2 + 5} t (t^2 + 17) (3 t^4 + 58 t^2 + 231) y^3 \\
 &\quad + (t^2 + 5) (t^8 + 84 t^6 + 2310 t^4 + 22420 t^2 + 55521) y^2 \\
 &\quad - 32 t (t^2 + 5)^{(3/2)} (t^2 + 15) (t^2 + 17) y \\
 &\quad - (t^2 + 5)^2 (t^6 + 3 t^4 - 381 t^2 - 3519)
 \end{aligned}$$

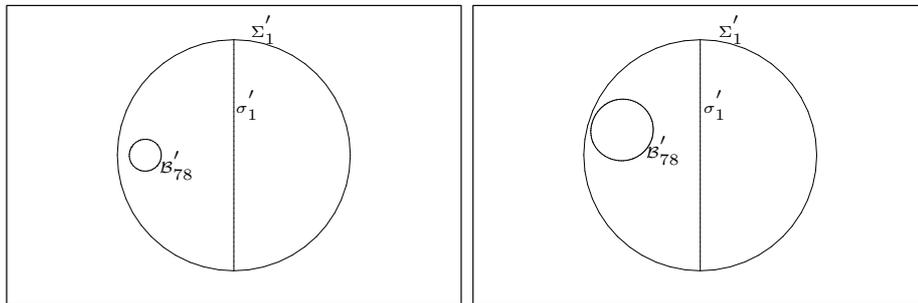


Figura 2.9: As curvas que limitam as projeções dos bissetores  $\mathcal{B}'_{78}(0)$  (à esquerda) e  $\mathcal{B}'_{78}(\sqrt{3})$  (à direita).

Para mostrar que esta curva não intercepta a espinha real de  $\mathcal{B}'_1(t)$  basta mostrar que não existem  $y \in (-1, 1)$  e  $t \in [0, \sqrt{3}]$  satisfazendo

$$h_0(y, t) = f_4(t) y^4 + f_3(t) y^3 + f_2(t) y^2 + f_1(t) y + f_0(t) = 0.$$

(Veja Figura (2.9).)

É fácil ver que as funções  $f_3$  e  $f_1$  são decrescentes e negativas, enquanto  $f_4$  e  $f_2$  são crescentes e positivas. A função  $f_0$  apresenta estas últimas propriedades, pois

$$f'_0(t) = -2t (t^2 + 5) (5 t^6 + 27 t^4 - 1113 t^2 - 8943)$$

e  $g(t) = 5t^6 + 27t^4 - 1113t^2 - 8943 \leq g(0) = -8943$  para  $t \in [0, \sqrt{3}]$  (pois  $g'(t) = 6t(5t^2 + 53)(t^2 - 7)$ ). Do exposto acima segue imediatamente que  $h_0(y, t) > 0$  para todo par  $(y, t)$  com  $y \leq 0$  e  $t \in [0, \sqrt{3}]$ .

Vamos analisar a função  $h_0$  para  $y > 0$  dividindo seu domínio  $(0, 1) \times [0, \sqrt{3}]$  em dois retângulos

$$\begin{aligned} D_1 &= (0, 1) \times [0, 12/10] \\ D_2 &= (0, 1) \times [12/10, \sqrt{3}]. \end{aligned}$$

Tendo em vista os comportamentos das funções  $f_k$ , a função  $h_0$  restrita a  $D_1$  possui cota inferior dada pela função

$$\begin{aligned} g_1(y) &= f_4(0)y^4 + f_3\left(\frac{12}{10}\right)y^3 + f_2(0)y^2 + f_1\left(\frac{12}{10}\right)y + f_0(0) \\ &= 215064y^4 + \frac{8871690528}{390625}\sqrt{161}y^3 + 277605y^2 \\ &\quad + \frac{5856927552}{390625}\sqrt{161}y + 87975 \end{aligned}$$

que é convexa com ponto de mínimo global em  $y_0 \approx -0,55841$  e valor mínimo global  $g_1(y_0) \approx 39033,87$ . Logo  $h_0(y, t) > 0$  em  $D_1$ .

Da mesma forma, a função  $h_0$  em  $D_2$  é limitada inferiormente pela função

$$\begin{aligned} g_2(y) &= f_4\left(\frac{12}{10}\right)y^4 + f_3(\sqrt{3})y^3 + f_2\left(\frac{12}{10}\right)y^2 + f_1(\sqrt{3})y + f_0\left(\frac{12}{10}\right) \\ &= \frac{32683544568}{78125}y^4 - 276480\sqrt{6}y^3 + \frac{5839453552401}{9765625}y^2 \\ &\quad - 184320\sqrt{6}y + \frac{1643728865499}{9765625} \end{aligned}$$

que é convexa com ponto de mínimo global em  $y_0 \approx 0,74103$  e valor mínimo global  $g_2(y_0) \approx 12674,4994$ . Logo  $h_0(y, t) > 0$  em  $D_2$ .

Portanto  $h_0(y, t) > 0$  para todo  $y > 0, t \in [0, \sqrt{3}]$ . □

## 2.6

### As Representações Discretas e Fielis

De posse destes resultados podemos provar:

**Teorema 2.22** *A representação  $\rho_t$  é discreta e fiel se, e somente se,  $t^2 \leq 3$ .*

*Prova.*

Pelos Lemas 2.15 a 2.21 vemos que o poliedro  $D(t)$ , para  $t^2 < 3$ , é um poliedro simples. Logo, pelo Teorema 2.7, a representação  $\rho_{8,t}$  é discreta e fiel para estes valores de  $t$ .

Pelos mesmos lemas, a única diferença nas interseções dos bissetores para  $t^2 < 3$  e para  $t^2 = 3$  é que, neste último caso, as esferas espinais  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_4$  são tangentes e as geodésicas complexas  $L_1$  e  $L_4$  são assintóticas. Pela simetria da construção (ver página 48), as seguintes interseções de bissetores apresentam o mesmo comportamento acima:  $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_7$ ,  $\mathcal{B}_3 \cap \mathcal{B}_6$ ,  $\mathcal{B}_5 \cap \mathcal{B}_8$ .

Assim, as arestas do poliedro  $D(\sqrt{3})$  são as arestas necessárias e os pontos de tangência de lados no infinito são os pontos de tangência entre os pares necessários de lados tangentes, além dos 4 pontos indicados no parágrafo anterior. Mas observemos que, para cada um destes pontos, o elemento de ciclo é parabólico, pois este é a composição de duas inversões em geodésicas complexas assintóticas. Logo, as condições do Teorema do Poliedro de Poincaré são satisfeitas (página 23) e a representação  $\rho_{8,\sqrt{3}}$  é discreta e fiel.

Para  $t^2 > 3$ , as geodésicas complexas  $L_1$  e  $L_4$  são concorrentes. Portanto, o elemento  $g = i_1 i_4$  é elíptico. Se  $g$  possui ordem finita, a representação  $\rho_{8,t}$  não é fiel. Por outro lado, se  $g$  não possui ordem finita, a representação  $\rho_{8,t}$  não é discreta.

Como, para cada  $t$ ,  $\rho_t : \Gamma \rightarrow G(t)$  é discreta e fiel se e somente se  $\rho_{8,t}$  também o for, provamos nosso resultado.  $\square$

Pelo Teorema 2.12 e pelas construções dos grupos  $G_8(t)$ , percebemos que as geodésicas complexas  $L_1$  e  $\Sigma_3$  são ultraparalelas, para  $t^2 < 3$ ; assintóticas, para  $t^2 = 3$ ; e concorrentes, para  $t^2 > 3$ . Logo, a representação  $\rho : \Gamma \rightarrow G(t)$  é discreta e fiel se, e somente se, o elemento  $i_1 i_{\Sigma_3} = i_1 k j k$  não for elíptico.

Observemos também que, para  $t^2 = 3$ , o elemento  $i_1 k j k$  é *parabólico acidental*, isto é, ele é parabólico e é imagem de um elemento loxodrômico de  $\Gamma$ .

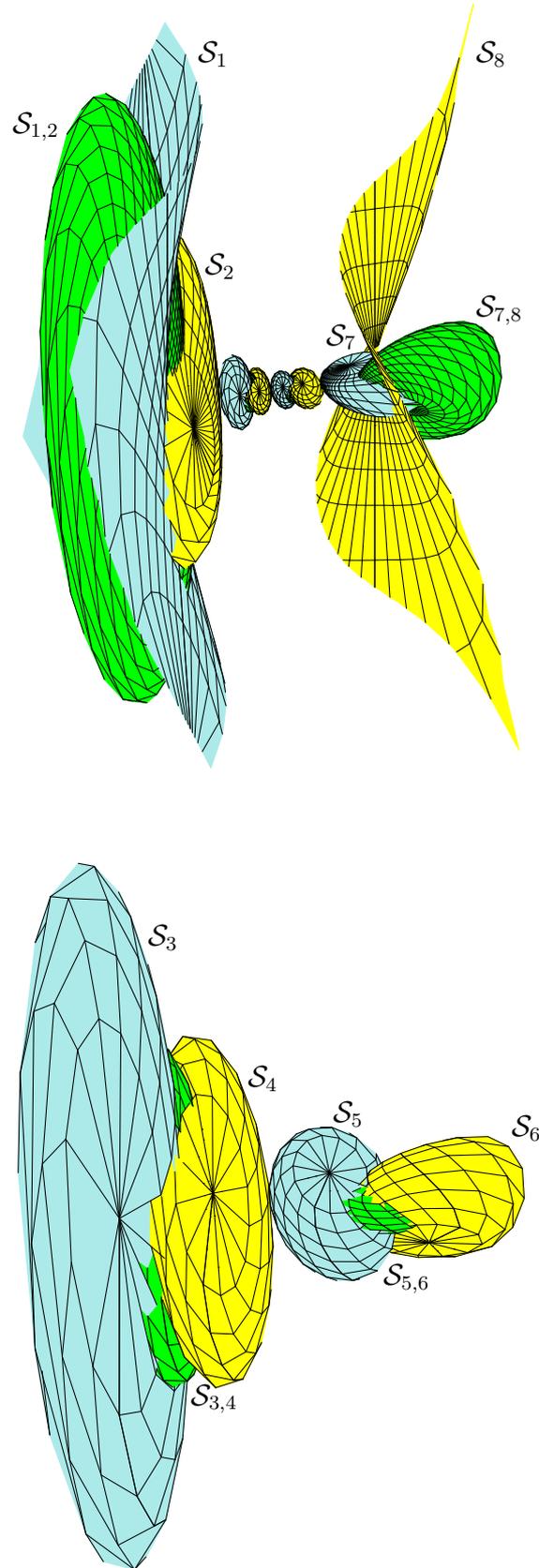


Figura 2.10: Na primeira figura, vemos o domínio fundamental para o grupo  $G(0)$  em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ . Na segunda figura, vemos um detalhe deste domínio.

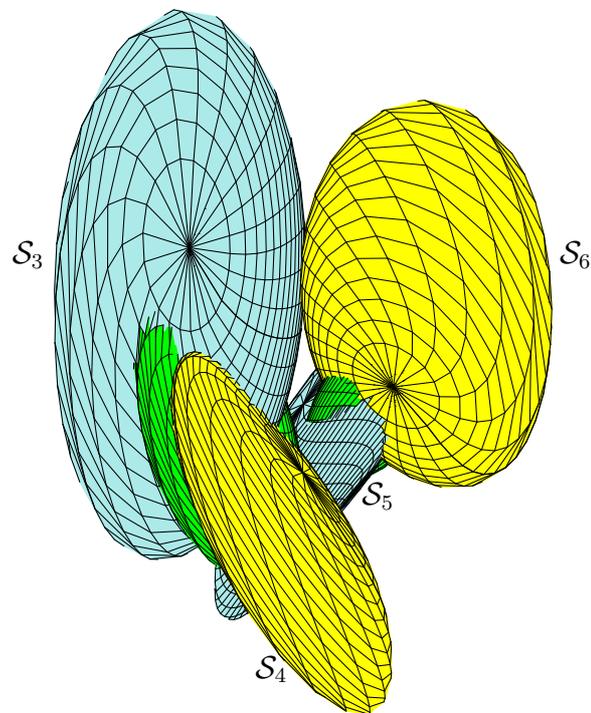
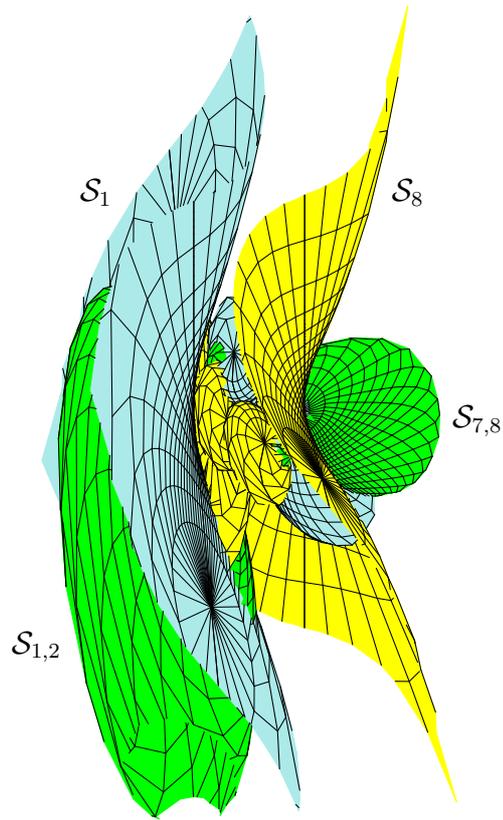


Figura 2.11: Na primeira figura, vemos o domínio fundamental para o grupo  $G(\sqrt{3})$  em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ . Na segunda figura, vemos um detalhe deste domínio (rotacionado).