

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Histórico do Problema

Neste trabalho estudamos representações de grupos triangulares no grupo  $PU(2,1)$  de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo de dimensão 2. O grupo triangular de reflexão  $(p, q, r)$ , denotado por  $\Gamma(p, q, r)$ , é definido como o grupo  $\Gamma$  de isometrias do plano hiperbólico, gerado pelas reflexões nos lados de um triângulo geodésico com ângulos  $\pi/p, \pi/q$  e  $\pi/r$  (é claro que  $1/p + 1/r + 1/q < 1$ ). É admitida a possibilidade de que alguns destes números sejam  $\infty$ .

Mais precisamente, estamos interessados em estudar representações

$$\rho : \Gamma \rightarrow G$$

onde  $\Gamma$  é um dos grupos  $\Gamma(4, 4, \infty)$  ou  $\Gamma(4, \infty, \infty)$ . Além disto, requeremos que  $\rho$  preserve o tipo da aplicação, isto é,  $\rho(ij)$  é uma aplicação parabólica se  $ij$  for parabólica. Aqui  $i$  e  $j$  são quaisquer dois dos geradores de  $\Gamma$  apresentados no parágrafo anterior.

O trabalho pioneiro nesta área é [1]. Goldman e Parker estudaram o problema para  $\Gamma(\infty, \infty, \infty)$ . Eles mostraram que existe uma família a um parâmetro real de representações não-conjugadas  $\{\rho_t, t \in (-\infty, \infty)\}$ . O resultado principal deste trabalho pode ser enunciado como

**Teorema:** *Existem vizinhanças simétricas  $I \subset J$  de 0 tais que  $\rho_t$  é discreto e fiel se  $t \in I$  e não é simultaneamente discreto e fiel se  $t \notin J$ .*

Os autores conjecturaram que  $\rho_t$  seria discreta e fiel se e somente se  $t \in J$ . Esta conjectura foi provada verdadeira por Schwartz em [2]. Na verdade, Schwartz provou um pouco mais:

**Teorema:**  *$\rho_t$  é discreto e fiel se e somente se  $t \in J$ . Além disto,  $\rho_t$  não é discreto se  $t \notin J$ .*

Em sua tese de doutorado [3], Wyss-Galyfent trabalhou com o grupo  $\Gamma(4, 4, \infty)$ . Com respeito a este grupo, ele construiu uma família de representações  $\rho_t$  e provou

**Teorema :** *Seja  $S$  o conjunto de parâmetros  $t$  para os quais a representação  $\rho_t$  é discreta (mas não necessariamente injetiva). Então  $S$  contém pontos isolados e, em particular, não é um intervalo.*

O autor conjecturou a existência de um intervalo  $J$  tal que  $\rho_t$  seria discreta e fiel para  $t \in J$  e a existência de uma seqüência de pontos  $\{t_j \notin J\}$  para os quais a representação  $\rho_t$  seria discreta, mas não fiel. Esta seqüência acumular-se-ia nos pontos extremos de  $J$ .

Em sua tese de doutorado [4], Dutenhefner estudou, entre outros tópicos, representações do grupo  $\Gamma(n, n, n)$ ,  $n \geq 4$ . Para cada  $n$ , ele mostrou a existência de uma família de parametrizações  $\rho_\eta$  com  $\eta$  em um intervalo  $[0, c(\eta))$ . Tal família contém todas as representações de  $\Gamma(n, n, n)$  em  $\text{PU}(2,1)$ , a menos de isometrias. Além disto, os grupos  $\rho_\eta(\Gamma)$  não são conjugados em  $\text{PU}(2,1)$  para valores distintos de  $\eta$ .

No caso específico do grupo  $\Gamma(4, 4, 4)$ , Dutenhefner mostrou

**Teorema:** *Para valores pequenos de  $\eta$ , a representação  $\rho_\eta$  é discreta e fiel.*

Também na mesma área, encontramos os trabalhos [5],[6] e [7]. Nestes trabalhos, Schwartz investiga a conexão entre variedades hiperbólicas tridimensionais e representações de grupos triangulares de reflexão em  $\text{PU}(2,1)$ .

Outros trabalhos nesta área são [8], [9] e [10]. Para outras referências, bem como para uma introdução ao assunto, veja [11].

## 1.2

### Estrutura da Tese e Resultados Principais

Esta tese é dividida em três capítulos. No Capítulo 1 temos o histórico do problema e as definições básicas sobre o espaço hiperbólico complexo  $H_{\mathbb{C}}^2$ .

No Capítulo 2 estudamos as representações do grupo triangular de reflexão  $(4, 4, \infty)$ . Apresentamos dois teoremas de congruências de triângulos  $1/3$ -ideais em  $H_{\mathbb{C}}^2$ . A partir destes teoremas de congruências, construímos um família a 1-parâmetro real de representações  $\rho_t$  do grupo  $\Gamma(4, 4, \infty)$  em  $\text{PU}(2,1)$ . Para estudar estas representações, construímos domínios fundamentais para  $\rho_t(\Gamma_8)$ , onde  $\Gamma_8$  é um subgrupo de índice 8 de  $\Gamma(4, 4, \infty)$ . Além disto, desenvolvemos alguns teoremas sobre casos particulares de interseções de bissetores em  $H_{\mathbb{C}}^2$ . O resultado principal deste capítulo é

**Teorema 2.22:** *Existe um intervalo fechado  $J$  tal que  $\rho_t$  é discreto e fiel se e somente se  $t \in J$ .*

No Capítulo 3 estudamos representações do grupo triangular de reflexão  $(n, \infty, \infty)$ . Desenvolvemos teoremas de congruências de triângulos 2/3-ideais em  $H_{\mathbb{C}}^2$  e construímos uma família a 1-parâmetro real de representações de  $\rho_\eta$  do grupo  $\Gamma(n, \infty, \infty)$  em  $\text{PU}(2,1)$ . Mostramos o seguinte resultado

**Teorema 3.8:** *Para valores suficientemente pequenos de  $\eta$ , as representações  $\rho_\eta$  são discretas e fiéis.*

No caso particular do grupo  $\Gamma(4, \infty, \infty)$  mostramos

**Teorema 3.13:** *Existe um intervalo fechado  $J$  tal que  $\rho_\eta$  é discreto e fiel se e somente se  $\eta \in J$ .*

O Teorema 3.13 e seu análogo para o grupo  $\Gamma(4, 4, \infty)$  foram apresentados no *XIII Encontro Brasileiro de Topologia*, realizado em julho de 2002, na Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG.

## 1.3

### Preliminares

Apresentamos as principais definições para o espaço hiperbólico complexo. A principal referência para esta parte é [12]. Outras referências são [13] e [14].

#### 1.3.1

#### O Espaço Hiperbólico $H_{\mathbb{C}}^2$ e o Modelo da Bola

Seja  $\mathbb{C}^{2,1}$  o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^3$  munido da forma hermitiana dada por

$$\langle Z, W \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$$

onde

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Consideremos os seguintes conjuntos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ :

$$\begin{aligned} V_- &= \{Z : \langle Z, Z \rangle < 0\} \\ V_0 &= \{Z : \langle Z, Z \rangle = 0\} \\ V_+ &= \{Z : \langle Z, Z \rangle > 0\} \end{aligned}$$

Consideremos também a projeção natural  $P : \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  sobre o espaço projetivo complexo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

**Definição 1.1** O espaço hiperbólico complexo de dimensão dois  $H_{\mathbb{C}}^2$  é definido como  $P\{V_-\}$ , munido da métrica Riemanniana induzida pela forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e pela projeção  $P$ . Esta métrica  $\rho$  é denominada métrica de Bergman.

A distância entre dois pontos  $z$  e  $w$  em  $H_{\mathbb{C}}^2$  é dada por

$$\cosh^2 \left( \frac{\rho(z, w)}{2} \right) = \frac{\langle Z, W \rangle \langle W, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle}.$$

A *fronteira* de  $H_{\mathbb{C}}^2$  é definida por  $\partial H_{\mathbb{C}}^2 = P(V_0)$ .

Seja  $\mathbb{B}^2$  a bola unitária aberta de raio 1 em  $\mathbb{C}^2$ . A aplicação

$$(z_1, z_2) \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dá origem a um homeomorfismo  $A : \mathbb{B}^2 \rightarrow H_{\mathbb{C}}^2$ . Então  $\mathbb{B}^2$  pode ser vista como um modelo de  $H_{\mathbb{C}}^2$ , denominado *modelo da bola*. Por meio deste modelo é fácil perceber que  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$  é homeomorfa a  $S^3$ .

### 1.3.2 Coordenadas Horoesféricas

Consideremos o conjunto  $\mathcal{S} = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , onde  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . A aplicação  $B : \mathcal{S} \rightarrow V_- \subset \mathbb{C}^{2,1}$  dada por

$$B(\zeta, v, u) = \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{1 - \zeta\bar{\zeta} - u + iv}{2} \\ \frac{1 + \zeta\bar{\zeta} + u - iv}{2} \end{bmatrix}$$

dá origem a uma parametrização de  $H_{\mathbb{C}}^2$ . O terno  $(\zeta, v, u)$  é denominado *coordenada horoesférica* do ponto  $B(\zeta, v, u)$  em  $H_{\mathbb{C}}^2$ .

Estendendo a aplicação acima para  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ , obtemos uma parametrização de  $\partial H_{\mathbb{C}}^2 - \{q_{\infty}\}$ , onde

$$q_{\infty} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por comodidade, representamos os pontos da fronteira por  $(\zeta, v)$  ao invés de  $(\zeta, v, 0)$ . É comum referirmos a este sistema de coordenadas como *coordenadas de Heisenberg*.

**Definição 1.2** A horoesfera de nível  $u_0 > 0$  centrada em  $q_{\infty}$  é o conjunto

$$\mathcal{S}_{u_0} = \{(\zeta, v, u) \in \mathcal{S} : u = u_0\}.$$

### 1.3.3

#### Isometrias de $H_{\mathbb{C}}^2$

O grupo de transformações unitárias  $U(2,1)$  age em  $\mathbb{C}^{2,1}$  preservando a forma hermitiana. O grupo  $PU(2,1)$  de isometrias holomorfas de  $H_{\mathbb{C}}^2$  é obtido pela projetivização de  $U(2,1)$ . Já as isometrias anti-holomorfas são obtidas como  $g \circ J$ , onde  $g$  é um elemento de  $U(2,1)$  e  $J$  age em  $\mathbb{C}^{2,1}$  como

$$J \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix}.$$

Todo elemento de  $PU(2,1)$  possui um ponto fixo em  $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}^2 = H_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial H_{\mathbb{C}}^2$ . Os elementos de  $PU(2,1)$  são divididos de acordo com o número e a localização de seus pontos fixos.

**Definição 1.3** Dizemos que  $g \in PU(2,1)$  é

- elíptico se  $g$  possui um ponto fixo em  $H_{\mathbb{C}}^2$ ;
- parabólico se  $g$  possui um único ponto fixo em  $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}^2$ , e este encontra-se em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ ;
- loxodrômico se  $g$  possui exatamente dois pontos fixos em  $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}^2$ , e estes encontram-se em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ .

Esta classificação pode ser refinada. Consideremos um elemento elíptico  $g$  e seu levantamento  $\tilde{g}$  em  $U(2,1)$ . Dizemos que  $g$  é *elíptico-regular*

se todos os autovalores de  $\tilde{g}$  são distintos; caso contrário, dizemos que  $g$  é *elíptico-especial*.

Um elemento parabólico  $g$  é dito *unipotente* se ele pode ser representado por um elemento unipotente em  $U(2,1)$ , isto é, uma transformação linear tendo 1 como seu único autovalor. Caso contrário,  $g$  é dito *elíptico-parabólico*.

Em [12, p.204], Goldman definiu uma *função discriminante*  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(z) = |z|^4 - 8 \Re(z^3) + 18|z|^2 - 27.$$

Esta função pode ser usada para se determinar a classe de conjugação de elementos em  $SU(2,1)$ , o conjunto das matrizes em  $U(2,1)$  com determinante igual a 1. De fato, se  $C_3$  denota o conjunto das raízes cúbicas de 1 em  $\mathbb{C}$ , podemos enunciar

**Teorema 1.4** *Seja  $\tau : SU(2,1) \rightarrow \mathbb{C}$  a função que associa a cada matriz o seu traço. Se  $A \in SU(2,1)$  então*

1.  *$A$  é elíptico-regular se, e somente se,  $f(\tau(A)) < 0$ ;*
2.  *$A$  é loxodrômico se, e somente se,  $f(\tau(A)) > 0$ ;*
3.  *$A$  é elíptico-parabólico se, e somente se,  $A$  não é elíptico e  $\tau(A) \in f^{-1}(0) - 3C_3$ ;*
4.  *$A$  é uma reflexão complexa, se, e somente se,  $A$  é elíptico e  $\tau(A) \in f^{-1}(0) - 3C_3$ ;*
5.  *$A$  é parabólico unipotente se, e somente se,  $\tau(A) \in 3C_3$ .*

Em [12, p.120] encontramos alguns exemplos de isometrias holomorfas que utilizaremos posteriormente. Dado um ponto  $(\zeta_0, v_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , a *translação de Heisenberg* por  $(\zeta_0, v_0)$  é a aplicação  $T_{(\zeta_0, v)}$  representada por

$$T_{(\zeta_0, v_0)} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_0 & \zeta_0 \\ -\bar{\zeta}_0 & 1 - \frac{1}{2}(\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - i v_0) & -\frac{1}{2}(\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - i v_0) \\ \zeta_0 & \frac{1}{2}(\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - i v_0) & 1 + \frac{1}{2}(\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - i v_0) \end{bmatrix}.$$

Em coordenadas horoesféricas, esta transformação age como

$$T_{(\zeta_0, v_0)}(\zeta, v, u) = (\zeta_0 + \zeta, v_0 + v + 2\Im(\zeta_0 \bar{\zeta}), u).$$

Esta transformação é parabólica, com ponto fixo  $q_\infty$ . Ela deixa cada horoesfera invariante.

A *dilatação de Heisenberg* de fator  $k > 0$  é representada pela matriz

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+k^2}{2k} & \frac{1-k^2}{2k} \\ 0 & \frac{1-k^2}{2k} & \frac{1+k^2}{2k} \end{bmatrix}.$$

Em coordenadas horoesféricas,  $D_k$  age como

$$D_k(\zeta, v, u) = (k\zeta, k^2v, k^2u).$$

Esta aplicação é loxodrômica com pontos fixos  $(0, 0)$  e  $q_\infty$ . Esta transformação permuta as diversas horoesferas.

A *rotação de Heisenberg*, de ângulo  $\theta$ , ao redor da cadeia<sup>1</sup> vertical é representada pela matriz

$$R_\theta = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em coordenadas horoesféricas, ela age como

$$R_\theta(\zeta, v, u) = (e^{i\theta}\zeta, v, u).$$

Esta aplicação é elíptica-especial e fixa a geodésica complexa  $\{0\} \times H_{\mathbb{C}}^1$ , bem como a cadeia por ela determinada.

### 1.3.4 Subvariedades Totalmente Geodésicas

Consideremos o conjunto

$$H_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\} = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : |z| < 1 \right\}.$$

**Definição 1.5** *Uma geodésica complexa é um subvariedade  $PU(2,1)$ -equivalente a  $H_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\}$ , isto é, uma geodésica complexa é qualquer conjunto da forma  $g(H_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\})$ , onde  $g \in PU(2,1)$ .*

Uma forma de se determinar uma geodésica complexa é através de um *vetor polar*: dado um vetor  $\lambda \in V_+$  tomamos o subespaço  $C_\lambda$  de  $\mathbb{C}^{2,1}$  dos

---

<sup>1</sup>Ver próxima seção

vetores  $Z$  tais que  $\langle Z, \lambda \rangle = 0$ . A geodésica complexa determinada por  $\lambda$  é, então, a projetivização de  $C_\lambda \cap V_-$ .

Outra forma de se determinar uma geodésica complexa é fornecendo-se dois pontos  $x$  e  $y$  em  $\widetilde{H}_\mathbb{C}^2$ : tomamos os levantamentos  $X$  e  $Y$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$  e consideramos o subespaço  $C$  gerado por  $X$  e  $Y$ . A geodésica complexa determinada por  $x$  e  $y$  é, então, a projetivização de  $C \cap V_-$ .

A relação entre estas duas formas é dada pelo produto vetorial hermitiano.

**Definição 1.6** *Definimos o produto vetorial hermitiano como a aplicação  $\boxtimes : \mathbb{C}^{2,1} \times \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$  dada por*

$$v \boxtimes w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_3 \bar{w}_2 - \bar{v}_2 \bar{w}_3 \\ \bar{v}_1 \bar{w}_3 - \bar{v}_3 \bar{w}_1 \\ \bar{v}_1 \bar{w}_2 - \bar{v}_2 \bar{w}_1 \end{bmatrix}.$$

O produto vetorial hermitiano desempenha o mesmo papel em  $\mathbb{C}^{2,1}$  que o produto vetorial usual no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Isto é, o produto vetorial de dois vetores é um vetor perpendicular aos vetores originais. Assim, a geodésica complexa determinada pelos pontos  $x$  e  $y$  possui vetor polar dado por  $X \boxtimes Y$ .

Duas geodésicas complexas distintas podem possuir, no máximo, um único ponto comum. Este fato dá origem a uma classificação de pares de geodésicas complexas, de acordo com suas posições relativas.

**Definição 1.7** *Duas geodésicas complexas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são ditas:*

- concorrentes se elas possuem um único ponto comum em  $H_\mathbb{C}^2$ ;
- assintóticas se suas cadeias possuem um único ponto comum em  $\partial H_\mathbb{C}^2$ ;
- ultraparalelas se nem elas nem suas cadeias possuem pontos comuns em  $\widetilde{H}_\mathbb{C}^2$ .

**Definição 1.8** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas geodésicas complexas concorrentes em um ponto  $z \in H_\mathbb{C}^2$ . O ângulo  $\varphi = \angle(\Sigma_1, \Sigma_2)$  entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  é definido como o menor ângulo riemanniano entre duas geodésicas  $\gamma_1 \subset \Sigma_1$  e  $\gamma_2 \subset \Sigma_2$  que passam por  $z$ .*

**Definição 1.9** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas geodésicas complexas ultraparalelas. Existe uma única geodésica complexa  $\Sigma$  ortogonal a ambas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . A distância entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  é definida como a distância entre os pontos  $\Sigma \cap \Sigma_1$  e  $\Sigma \cap \Sigma_2$ .*

Em [12, p.100] encontramos uma relação entre o ângulo (ou a distância) entre duas geodésicas complexas e seus respectivos vetores polares.

**Teorema 1.10** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas geodésicas complexas, com respectivos vetores polares  $P_1$  e  $P_2$ , normalizados de modo que  $\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = 1$ .*

1. *Se  $|\langle P_1, P_2 \rangle| < 1$ , então  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são concorrentes e  $|\langle P_1, P_2 \rangle| = \cos(\varphi)$ , onde  $\varphi$  é o ângulo entre estas linhas complexas. Neste caso,  $P_1 \boxtimes P_2$  é um vetor negativo que representa o ponto de interseção entre as geodésicas complexas.*
2. *Se  $|\langle P_1, P_2 \rangle| = 1$ , então  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são assintóticas. Neste caso,  $P_1 \boxtimes P_2$  é um vetor nulo que representa o ponto de interseção entre os fechos das geodésicas complexas na fronteira de  $H_{\mathbb{C}}^2$ .*
3. *Se  $|\langle P_1, P_2 \rangle| > 1$ , então  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são ultraparalelas e  $|\langle P_1, P_2 \rangle| = \cosh(\rho/2)$ , onde  $\rho$  é a distância entre estas linhas complexas. Neste caso,  $P_1 \boxtimes P_2$  é um vetor positivo, polar à única geodésica complexa ortogonal a  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ .*

Se  $C_P$  é uma geodésica complexa com vetor polar  $P$ , definimos a projeção ortogonal  $\Pi : H_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow C_P$  sobre  $C_P$ , como a aplicação dada por

$$\Pi(Z) = Z - \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P.$$

Definimos também a inversão  $i : H_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow H_{\mathbb{C}}^2$  dada por

$$i(Z) = -Z + 2 \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P.$$

Esta última aplicação está em  $PU(2,1)$ , possui ordem 2 e seu conjunto de pontos fixos é a geodésica complexa  $C_P$ .

Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas geodésicas complexas com inversões  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente. Temos as seguintes possibilidades para a composição  $h = i_1 \circ i_2$ :

1. As geodésicas complexas são concorrentes. Neste caso,  $h$  é elíptica com ponto fixo o ponto comum das geodésicas complexas.
2. As geodésicas complexas são assintóticas. Neste caso,  $h$  é parabólica com ponto fixo o ponto comum dos fechos das geodésicas complexas na fronteira de  $H_{\mathbb{C}}^2$ .

3. As geodésicas complexas são ultraparalelas. Neste caso,  $h$  é loxodrômica. Os pontos fixos de  $h$  são obtidos da seguinte maneira: tomamos os dois pontos que definem a distância entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  e tomamos a geodésica (real)  $\gamma$  que os une. Os pontos fixos são a interseção do fecho de  $\gamma$  em  $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ .

Outro tipo de subvariedade totalmente geodésica de  $H_{\mathbb{C}}^2$  são as subvariedades totalmente reais. Consideremos os conjuntos

$$H_{\mathbb{R}}^1 \times \{0\} = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in H_{\mathbb{C}}^2 : r \in \mathbb{R}, r^2 < 1 \right\} \text{ e}$$

$$H_{\mathbb{R}}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ s \\ 1 \end{bmatrix} \in H_{\mathbb{C}}^2 : r, s \in \mathbb{R}, r^2 + s^2 < 1 \right\}.$$

**Definição 1.11** *Uma subvariedade totalmente real é uma subvariedade de  $H_{\mathbb{C}}^2$  PU(2,1)-equivalente a uma das subvariedades  $H_{\mathbb{R}}^1 \times \{0\}$  ou  $H_{\mathbb{R}}^2$ . As subvariedades do primeiro tipo são as geodésicas (reais) de  $H_{\mathbb{C}}^2$ . Já as subvariedades do segundo tipo são denominadas  $\mathbb{R}^2$ -planos.*

Associada a um  $\mathbb{R}^2$ -plano  $R$  está a inversão em  $R$ . Esta inversão é uma isometria anti-holomorfa de ordem 2, cujo conjunto de pontos fixos é  $R$ . A inversão  $J$  em  $H_{\mathbb{R}}^2$  é dada por

$$J \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix}.$$

Esta aplicação atua, em coordenadas horoesféricas, como

$$J(\zeta, v, u) = (\bar{\zeta}, -v, u).$$

A interseção do fecho de uma geodésica complexa em  $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$  é denominada uma *cadeia*. Em coordenadas de Heisenberg, uma cadeia ou é uma reta vertical ou é uma elipse que se projeta no plano complexo  $\mathbb{C} \times \{0\}$  em uma circunferência [12, seção 4.3]. Já a interseção do fecho de um  $\mathbb{R}^2$ -plano em  $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$  é denominada um  $\mathbb{R}$ -círculo. Em coordenadas de Heisenberg, um  $\mathbb{R}$ -círculo é ou uma reta euclidiana ou se projeta em no plano complexo  $\mathbb{C} \times \{0\}$  em uma lemniscata [12, seção 4.4].

### 1.3.5

#### Bissetores e Esferas Espinais

**Definição 1.12** *Sejam  $x$  e  $y$  dois pontos distintos de  $H_{\mathbb{C}}^2$ . O bissetor equidistante de  $x$  e  $y$  é definido por*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}\{x, y\} = \{z \in H_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, x) = \rho(z, y)\}.$$

A geodésica complexa  $\Sigma$  que contém os pontos  $x$  e  $y$  é denominada *espinha complexa de  $\mathcal{B}$*  e a geodésica real  $\sigma \subset \Sigma$  que contém os pontos de  $\Sigma$  equidistantes de  $x$  e  $y$  é denominada *espinha real de  $\mathcal{B}$* .

Um bissetor não é uma subvariedade totalmente geodésica de  $H_{\mathbb{C}}^2$ , porém ele possui duas decomposições em variedades totalmente geodésicas: uma em geodésicas complexas e outra em  $\mathbb{R}^2$ -planos.

**Teorema 1.13** *Seja  $\mathcal{B}$  um bissetor com espinha complexa  $\Sigma$  e espinha real  $\sigma$ . Se  $\Pi : H_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$  denota a projeção ortogonal sobre  $\Sigma$ , então*

$$\mathcal{B} = \Pi^{-1}(\sigma) = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi^{-1}(s).$$

Para cada  $s$ ,  $\Pi^{-1}(s)$  é uma geodésica complexa ortogonal à  $\Sigma$  em  $s$ . Cada uma destas geodésicas complexas é denominada *fatia*.

**Teorema 1.14** *Seja  $\mathcal{B}$  um bissetor com espinha real  $\sigma$ . Então,  $\mathcal{B}$  é a união de todos os  $\mathbb{R}^2$ -planos que contêm  $\sigma$ .*

Os  $\mathbb{R}^2$ -planos acima são denominados *meridianos*.

Os pontos finais  $v_1$  e  $v_2$  da espinha real em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$  são denominados *vértices* do bissetor. Como há uma bijeção entre bissetores e espinhas reais, os vértices de um bissetor o determinam completamente.

A interseção do fecho de um bissetor  $\mathcal{B}$  em  $\widetilde{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$  é denominada *esfera espinal*. Esta também se decompõe em fatias e meridianos, que são as fronteiras das fatias e meridianos do bissetor que a define.

Vejamos alguns exemplos de esferas espinais:

1) A *esfera de Heisenberg unitária* é definida como a esfera espinal  $\mathcal{S}$  dada por

$$\mathcal{S} = \{(\zeta, v) \in \partial H_{\mathbb{C}}^2 : |\zeta|^4 + v^2 = 1\}.$$

Esta esfera espinal possui vértices dados por  $(0, \pm 1) \in \partial H_{\mathbb{C}}^2$ . Uma *esfera de Heisenberg* é uma esfera espinal obtida desta por meio de translações e dilatações de Heisenberg (veja Figura (1.1)).

2) O *plano horizontal* é uma esfera espinal dada por

$$\mathcal{S} = \{(\zeta, v) : v = 0\}.$$

Esta esfera espinal possui vértices  $p_\infty$  e  $(0, 0)$ . Um *plano de contato* é a esfera espinal obtida desta por meio de uma translação de Heisenberg.

3) Uma *esfera espinal infinita* é uma esfera espinal que passa por  $p_\infty$ , mas não tem este ponto como vértice. O exemplo mais simples deste tipo de esfera espinal é a esfera espinal com vértices  $(\pm 1, 0)$ . Em coordenadas de Heisenberg, ela é dada por

$$\mathcal{S} = \left\{ (\zeta, v) : v = -\frac{y}{x} (1 + |\zeta|^2) \right\}.$$

Todas as demais esferas espinais infinitas são obtidas desta por meio de translações, dilatações e rotações de Heisenberg (veja Figura (1.1)).

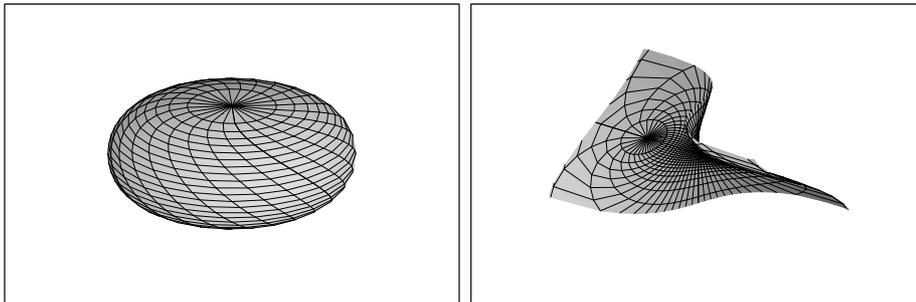


Figura 1.1: À esquerda temos a esfera de Heisenberg unitária e à direita temos uma parte de uma esfera espinal infinita.

**Definição 1.15** *Dados três pontos distintos  $x_1, x_2$  e  $x_3$  em  $\partial H_{\mathbb{C}}^2$ , o invariante angular de Cartan  $\mathbb{A}$  destes pontos é definido como*

$$\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3) = \arg(-\langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_3 \rangle \langle X_3, X_1 \rangle)$$

onde  $X_j$  é um levantamento de  $x_j$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$ .

Em [12, Corolário 7.1.5, p.214] encontramos o seguinte resultado que relaciona o invariante angular de Cartan com esferas espinais:

**Teorema 1.16** *Sejam  $x, y \in \partial H_{\mathbb{C}}^2$ . Então, a esfera espinal com vértices  $x$  e  $y$  é o conjunto*

$$\{u \in \partial H_{\mathbb{C}}^2 : \mathbb{A}(x, y, u) = 0\}.$$

### 1.3.6

#### O Teorema do Poliedro de Poincaré em $H_{\mathbb{C}}^2$

**Definição 1.17** Um poliedro  $P$  em  $H_{\mathbb{C}}^2$  é a interseção de um número finito de semi-espacos em  $H_{\mathbb{C}}^2$ . Um semi-espaco é um componente conexo do complemento de um bissetor. O fecho de  $P$  possui uma decomposição natural em células dada pela interseção dos bissetores que o definem. As  $k$ -células nesta decomposição são denominadas as  $k$ -faces de  $P$ . Em particular, os lados de  $P$  são as faces de codimensão 1 e as arestas de  $P$  são as faces de codimensão 2.

Seja  $P$  um poliedro tal que, para cada lado  $s$  de  $P$ , exista um lado  $s'$ , não necessariamente distinto de  $s$ , e um elemento  $g_s \in \text{PU}(2,1)$  satisfazendo as condições:

$$(1) \quad g_s(s) = s';$$

$$(2) \quad g_{s'} = g_s^{-1}.$$

As isometrias  $g_s$  são denominadas *transformações identificadoras de lados*. Seja  $\bar{P}$  o fecho de  $P$  em  $H_{\mathbb{C}}^2$ . Supomos também que:

$$(3) \quad g_s(P) \cap P = \emptyset;$$

$$(4) \quad g_s(\bar{P}) \cap \bar{P} = s.$$

Dizemos que  $P$  satisfaz as *condições de lados* se todas as condições (1)–(4) são satisfeitas.

Seja  $G$  o grupo gerado pelas transformações identificadoras de lados. Observemos que se existe um lado  $s$  com  $s' = s$  então a condição (2) implica que  $g_s^2 = 1$ . Se isto acontece, a relação  $g_s^2 = 1$  é denominada *relação de reflexão*.

As próximas condições dizem respeito às arestas. Em geral, a interseção de dois bissetores é complicada, podendo, inclusive não ser conexa [12, Capítulo 9]. Portanto, exigimos:

(5) Cada aresta de  $P$  é uma subvariedade completa de  $H_{\mathbb{C}}^2$ , homeomorfa a uma bola aberta de dimensão real 2.

A identificação dos lados induz uma relação de equivalência no fecho de  $P$ , isto é,  $x \sim y$  se existe uma transformação identificadora de lados  $g$  com  $g(x) = y$ , e cada ponto de  $P$  é equivalente somente a si mesmo. Esta relação de equivalência também define uma relação de equivalência nas arestas de  $P$ . Cada classe de equivalência de arestas pode ser ordenada da seguinte forma: Começamos com uma aresta  $e_1$ . Ela se encontra na fronteira de dois lados; denominamos um deles  $s_1$ . Então existem um lado  $s'_1$  e uma transformação identificadora de lados  $g_1$ , com  $g_1(s_1) = s'_1$ . Definimos  $e_2 = g_1(e_1)$ . Da mesma forma que  $e_1$ , a aresta  $e_2$  encontra-se na fronteira

de exatamente dois lados, um dos quais é  $s'_1$ . Denominamos o outro lado  $s_2$ . Novamente, há um lado  $s'_2$  e uma transformação identificadora de lados  $g_2$ , com  $g_2(s_2) = s'_2$ . Prosseguindo deste modo, geramos uma seqüência  $e_j$  de arestas, uma seqüência  $g_j$  de transformações identificadoras de lados e uma seqüência  $(s_j, s'_j)$  de pares de lados. Como  $P$  possui um número finito de lados a seqüência de arestas é periódica, e, portanto, todas as três seqüências o são. Seja  $k$  o menor período comum a todas estas seqüências. A seqüência de arestas é ciclicamente ordenada e recebe o nome *ciclo de arestas*;  $k$  é o período deste ciclo. Observemos que:

$$g_k \circ \cdots \circ g_1(e_1) = e_1.$$

O elemento  $h = g_k \circ \cdots \circ g_1$  é denominado *transformação de ciclo* em  $e_1$ .

Dada uma transformação de ciclo  $h$  como acima e um inteiro positivo  $m$ , definimos uma seqüência de  $mk$  elementos  $h_1, \dots, h_{mk}$  de  $G$  por:

$$h_1 = g_1, \quad h_2 = g_2 \circ g_1, \quad \dots, \quad h_k = h,$$

$$h_{k+1} = g_1 \circ h, \quad \dots, \quad h_{mk-1} = g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1 \circ h^{m-1}, \quad h_{mk} = 1.$$

Seja  $F(h)$  a seguinte família de poliedros:

$$F(h) = \{P, h_1^{-1}(P), \dots, h_{mk-1}^{-1}(P)\}.$$

(6) Para cada aresta  $e$ , a restrição a  $e$  do elemento de ciclo  $h = h_e$  em  $e$  é a identidade, e existe um inteiro positivo  $m$  tal que  $h^m = 1$ , ou seja,  $h$  possui ordem  $m$ . Além disto, os poliedros da família  $F(h)$  encaixam-se sem interseções e seus fechos cobrem uma vizinhança fechada da aresta  $e$ .

As condições (5) e (6) são denominadas *condições de aresta*. As relações em  $G$  da forma  $h^m = 1$  são denominadas *relações de ciclo*.

Suponhamos que dois lados sejam tangentes em algum ponto  $p = p_1$  na fronteira de  $H_{\mathbb{C}}^n$ ; chamemos um destes lados de  $s_1$ . Seja  $g_1$  a transformação identificadora de lados com  $g_1(s_1) = s'_1$ , e seja  $p_2 = g_1(p_1)$ . Se  $p_2$  não é um ponto de tangência de  $s'_1$  e algum outro lado não há nada a fazer; caso contrário, denominamos o outro lado  $s_2$ , encontramos a transformação identificadora de lados  $g_2$  com  $g_2(s_2) = s'_2$  e fazemos  $p_3 = g_2(p_2)$ , e assim por diante. Como  $P$  possui um número finito de lados, retornamos a  $p = p_1$  após um número finito de passos. Ou seja, encontramos transformações identificadoras de lados  $g_1, \dots, g_k$  tais que  $g(p) = g_k \circ \cdots \circ g_1(p) = p$ . Denominamos  $g$  o *elemento de ciclo* em  $p$ .

(7) Cada elemento de ciclo em cada ponto de tangência de lados de  $P$  é parabólico.

O teorema seguinte pode ser encontrado em [15, Seção 3]:

**Teorema 1.18 (Teorema de Poliedro de Poincaré)** *Seja  $P \subset H_{\mathbb{C}}^n$  um poliedro com um conjunto de transformações identificadoras de lados que satisfazem as condições (1)–(7) acima. Então o grupo  $G$  gerado pelas transformações identificadoras de lados é discreto,  $P$  é um domínio fundamental para  $G$  e as relações de reflexão e de ciclo formam um sistema completo de relações para  $G$ .*