

Luís Fernando Crocco Afonso

**Representações de Grupos
Triangulares em Geometria
Hiperbólica Complexa**

TESE DE DOUTORADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em
Matemática

Rio de Janeiro
Agosto de 2003

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Luís Fernando Crocco Afonso

**Representações de Grupos Triangulares em
Geometria Hiperbólica Complexa**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Paul Alexander Schweitzer, S.J.
Co-Orientador: Prof. Nikolai Alexandrovitch Goussevski

Rio de Janeiro
Agosto de 2003



Luís Fernando Crocco Afonso

**Representações de Grupos Triangulares em
Geometria Hiperbólica Complexa**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Alexander Schweitzer, S.J.

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Nikolai Alexandrovitch Goussevski

Co-Orientador

Departamento de Matemática — UFMG

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Ricardo de Sá Earp

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Cláudio Gorodski

IME/USP

Prof. Detang Zhou

Instituto de Matemática — UFF

Prof. Marcos Martins Alexandrino da Silva

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Ney Augusto da Silva

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de Agosto de 2003

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luís Fernando Crocco Afonso

Gradou-se em Matemática na UFJF (Universidade Federal de Juiz de Fora) em 1993. Concluiu o Mestrado em Matemática na UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais) em 1998. É professor do Departamento de Matemática da UFJF desde 1995.

Ficha Catalográfica

Afonso, Luís Fernando Crocco

Representações de Grupos Triangulares em Geometria Hiperbólica Complexa/ Luís Fernando Crocco Afonso; orientador: Paul Alexander Schweitzer, S.J.; co-orientador: Nikolai Alexandrovitch Goussevski. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2003.

v., 92 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Grupos discretos (Matemática). 3. Geometria hiperbólica I. Schweitzer, Paul. II. Goussevskii, Nikolai. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Paul Alexander Schweitzer, que tornou este trabalho possível.

Ao Professor Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii pela orientação, apoio e paciência.

À Francisco Dutenhefner pelas inúmeras conversas e idéias que me auxiliaram neste trabalho, sem mencionar o pacote H2c de geometria hiperbólica complexa para o Maple.

À Seme Gebara Neto pelo incentivo e ajuda nos passos iniciais.

Aos professores e funcionários dos Departamentos de Matemática da PUC-Rio e da UFMG que auxiliaram neste trabalho. Em particular, agradeço à Creuza Nascimento por sua inestimável colaboração.

À CAPES, pela bolsa PICDT.

Aos funcionários da Coordenação de Pós-Graduação e Formação Continuada da UFJF pelo suporte junto à CAPES.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF pela concessão do afastamento que possibilitou este trabalho.

Aos meus familiares pelo apoio e compreensão neste período.

À Eliana pelo amor, apoio, compreensão, incentivo e tudo o mais.

Resumo

Afonso, Luís Fernando Crocco; Schweitzer, Paul; Goussevskii, Nikolai. **Representações de Grupos Triangulares em Geometria Hiperbólica Complexa**. Rio de Janeiro, 2003. 92p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O principal objetivo deste trabalho é o estudo de representações que preservam tipo

$$\rho : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$$

de grupos triangulares Γ no grupo de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo de dimensão dois $H_{\mathbb{C}}^2$. O grupo triangular $\Gamma(p, q, r)$ é o grupo gerado por reflexões nos lados de um triângulo geodésico, com ângulos π/p , π/q e π/r , no plano hiperbólico. Neste trabalho, nossas atenções são voltadas para os grupos $\Gamma(4, 4, \infty)$ e $\Gamma(4, \infty, \infty)$.

Demonstramos, dentre outros resultados:

1. Para cada caso, existe um caminho contínuo de representações ρ_t que contém todas as representações que preservam tipo de Γ em $\text{PU}(2,1)$, a menos de conjugações por isometrias. Portanto, isto nos dá, em cada caso, uma descrição completa do espaço de representações de Γ em $\text{PU}(2,1)$.
2. Para cada caso, existe um intervalo fechado J tal que ρ_t é uma representação discreta e fiel se, e somente se, $t \in J$.
3. Em cada caso, existe, na fronteira do espaço de representações, uma representação com elementos parabólicos acidentais.

Para demonstrar estes resultados, construímos parametrizações especiais de triângulos em $H_{\mathbb{C}}^2$. Construímos poliedros fundamentais para os grupos e utilizamos uma variante do Teorema do Poliedro de Poincaré.

Palavras-chave

Geometria Hiperbólica Complexa; Grupos Discretos

Abstract

Afonso, Luís Fernando Crocco; Schweitzer, Paul; Goussevskii, Nikolai. **Representations of Triangle Groups in Complex Hyperbolic Space**. Rio de Janeiro, 2003. 92p. PhD. Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main aim of this work is to study type-preserving representations

$$\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$$

of triangle groups Γ in the group of holomorphic isometries of the two-dimensional complex hyperbolic space $H_{\mathbb{C}}^2$. The triangle group $\Gamma(p, q, r)$ is the group generated by reflections in the sides of a geodesic triangle having angles π/p , π/q and π/r . We focus our attention on the groups $\Gamma(4, 4, \infty)$ and $\Gamma(4, \infty, \infty)$.

Among other results, we prove that for each case:

1. There is a continuous path of representations ρ_t which contains all type-preserving representations of Γ in $\mathrm{PU}(2,1)$ up to conjugation by isometries. This gives us a complete description of the representation space of Γ in $\mathrm{PU}(2,1)$.
2. There is a closed interval J such that ρ_t is a discrete and faithful representation if and only if $t \in J$.
3. On the boundary of the representation space there is a representation with accidental parabolic elements.

To prove these results we give special parametrizations of triangles in $H_{\mathbb{C}}^2$. We also build fundamental polyhedra for the groups and use a kind of Poincaré's Polyhedron Theorem.

Keywords

Complex Hyperbolic Geometry; Discrete Groups

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Histórico do Problema	9
1.2	Estrutura da Tese e Resultados Principais	10
1.3	Preliminares	11
1.3.1	O Espaço Hiperbólico $H_{\mathbb{C}}^2$ e o Modelo da Bola	11
1.3.2	Coordenadas Horoesféricas	12
1.3.3	Isometrias de $H_{\mathbb{C}}^2$	13
1.3.4	Subvariedades Totalmente Geodésicas	15
1.3.5	Bissetores e Esferas Espinais	19
1.3.6	O Teorema do Poliedro de Poincaré em $H_{\mathbb{C}}^2$	21
2	O Grupo Triangular de Reflexão $(4, 4, \infty)$	24
2.1	Congruência de Triângulos 1/3-Ideais	24
2.2	Os Grupos Γ e G	30
2.3	Os Subgrupos Γ_8 e G_8	34
2.4	A Representação ρ_t para t Pequeno	40
2.5	Interseções dos Bissetores	42
2.5.1	Alguns Teoremas sobre Interseção de Bissetores	42
2.5.2	Cálculo das Interseções	48
2.6	As Representações Discretas e Fiéis	64
3	O Grupo Triangular de Reflexão $(4, \infty, \infty)$	68
3.1	Congruência de Triângulos 2/3-Ideais	68
3.2	O Grupo Triangular de Reflexão (n, ∞, ∞)	72
3.2.1	Os Grupos Γ e G	72
3.2.2	Os Subgrupos Γ_{2n} e G_{2n}	75
3.2.3	As Representações para t Pequeno	78
3.3	O Grupo Triangular de Reflexão $(4, \infty, \infty)$	79
3.3.1	Uma Nova Parametrização	79
3.3.2	Interseção dos Bissetores	82
3.3.3	As Representações Discretas e Fiéis	89
	Bibliografia	92

Marco Polo descreve uma ponte, pedra por pedra.

— Mas qual é a pedra que sustenta a ponte? — pergunta Kublai Khan.

— A ponte não é sustentada por esta ou aquela pedra — responde Marco —, mas pela curva do arco que estas formam.

Kublai Khan permanece em silêncio, refletindo. Depois acrescenta:

— Por que falar das pedras? Só o arco me interessa.

Polo responde:

— Sem pedras o arco não existe.

Italo Calvino, *As Cidades Invisíveis*.