# 4
# Trajetórias ótimas

O problema de determinação da política monetária ótima pode ser abordado de duas formas alternativas. Na primeira, pergunta-se qual seria o melhor comportamento possível das variáveis endógenas do modelo (aqui, inflação, hiato do produto e taxa de juros nominal) em resposta a um choque exógeno que atinja a economia. Pode-se ainda pretender, nessa abordagem, especificar uma função de reação para o instrumento de política monetária que implemente esse equilíbrio ótimo – isto é, que faça dele o equilíbrio univocamente determinado do modelo. A segunda alternativa parte diretamente para a escolha entre diferentes funções de reação, embora nesse caso seja necessário que todas as candidatas pertençam a uma mesma família paramétrica. Conhecendo-se o equilíbrio ótimo obtido pela primeira abordagem (mesmo que não se conheça ainda a regra capaz de implementá-lo exata ou aproximadamente), pode-se usá-lo como padrão contra o qual julgar os melhores resultados obtidos pela segunda abordagem, entre regras de uma determinada família. Em qualquer caso, uma política monetária é considerada tão melhor quanto menor for o valor que resulte para a função de perda definida pela equação (3.19).

Este capítulo trata o problema de resposta ótima a choques seguindo a primeira abordagem, ou seja, *sem* a especificação de uma família de regras de política. Na primeira seção é apresentada a solução do problema, isto é, que condições devem ser respeitadas pela dinâmica da economia para que o ótimo irrestrito seja atingido. A segunda seção traz os resultados das simulações do modelo, isto é, as respostas ótimas das variáveis endógenas diante da ocorrência de um choque que afeta a taxa natural de juros. O objetivo é verificar como a restrição a suavizar taxação afeta a dinâmica da economia sob a política monetária ótima, sendo esta sempre obtida levando-se em conta o impacto dos juros sobre a taxação distorciva. A terceira seção procura separar os efeitos da restrição ao financiamento em dois componentes: o que se deve ao fato de que essa restrição mudaria a dinâmica da economia mesmo que a política monetária não mudasse, e o que se deve à mudança da política monetária propriamente dita.

## 4.1
## Solução do problema[18]

Formalmente, o problema tratado aqui é um caso de otimização dinâmica estocástica. A função objetivo é representada pela aproximação quadrática (3.19). As restrições ao problema são dadas pelas equações linearizadas do modelo, ou seja, (3.01), (3.03)'', (3.05)', (3.06)', (3.07) e (3.22), todas reproduzidas abaixo:

$$\hat{\pi}_t = \kappa \hat{x}_t + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \left(\frac{\mu.\kappa}{\sigma + \upsilon}\right)\hat{s}_t, \tag{3.01}$$

$$\hat{x}_t = \hat{h}_t + \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma(\rho - 1)(1 + \upsilon)}\right)\hat{r}_t^n, \tag{3.03''}$$

$$\sigma\left[E_t(\hat{x}_{t+1}) - \hat{x}_t\right] = \hat{R}_t - E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \hat{r}_t^n, \tag{3.05'}$$

$$\hat{w}_t = \upsilon \hat{h}_t + \sigma \hat{x}_t + \frac{1}{(\rho - 1)}\hat{r}_t^n \tag{3.06'}$$

$$\hat{r}_t^n = \rho \hat{r}_{t-1}^n + \xi_t, \tag{3.07}$$

$$\hat{s}_t = -\frac{\gamma\lambda}{\beta}\left(\hat{R}_{t-1} - \hat{\pi}_t\right). \tag{3.22}$$

Devido à existência nessas equações de termos envolvendo expectativas sobre as varáveis futuras, a solução do problema requer que se faça uma hipótese adicional sobre o comportamento da autoridade monetária. Uma possibilidade é supor que a autoridade não tem *comprometimento* com planos de ação escolhidos no passado, ou seja, a cada momento reavalia livremente o que fazer doravante, de forma a maximizar o bem-estar medido a partir dali. O resultado é que os agentes privados não devem acreditar em planos para o futuro caso esses não sejam dinamicamente consistentes – ou seja, caso sua continuação a partir de cada data no futuro não coincida com o plano que a autoridade monetária escolheria adotar a

[18] O tratamento deste problema segue a metodologia consagrada por Woodford (1999).

partir daquela data. Esta solução discricionária é sub-ótima quando comparada com o caso onde a autoridade se compromete a não se desviar de um determinado plano, escolhido otimamente num período inicial e tornado crível pelo comprometimento. O plano ótimo envolverá, a cada período futuro, ações que serão contingentes à realização dos choques até então. Aqui se adotará a hipótese de que a autoridade monetária implementa o plano ótimo com comprometimento[19].

O problema pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \min\left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left( \lambda_\pi \hat{\pi}_t^2 + \lambda_x \hat{x}_t^2 \right) \right\} \\ s.a. \begin{cases} (1+\phi)\hat{\pi}_t = \kappa \hat{x}_t + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1}) + \phi \hat{R}_{t-1} \\ \sigma\left[E_t(\hat{x}_{t+1}) - \hat{x}_t\right] = \hat{R}_t - E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \hat{r}_t^n \end{cases} \end{cases}$$

sendo $\phi \equiv \left( \frac{\mu\kappa}{\sigma + \upsilon} \right)\left( \frac{\gamma\lambda}{\beta} \right)$. Não foram incluídas as equações (3.03)'' e (3.06)' na lista de restrições ao problema, pois essas equações não representam restrições adicionais à dinâmica das variáveis de interesse, quais sejam, a inflação, o hiato do produto e a taxa de juros nominal.

As condições de primeira ordem para o problema são extraídas do seguinte Lagrangeano, sendo $\theta_{1,t}$ e $\theta_{2,t}$ os multiplicadores de Lagrange:

$$\Im = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_0 \left\{ \left( \lambda_\pi \hat{\pi}_t^2 + \lambda_x \hat{x}_t^2 \right) + 2\theta_{1,t}\left[ (1+\phi)\hat{\pi}_t - \kappa \hat{x}_t - \beta \hat{\pi}_{t+1} - \phi \hat{R}_{t-1} \right] + 2\theta_{2,t}\left( \sigma \hat{x}_{t+1} - \sigma \hat{x}_t - \hat{R}_t + \hat{\pi}_{t+1} + \hat{r}_t^n \right) \right\}$$

[19] Para um tratamento da questão da inconsistência dinâmica da política monetária, ver Woodford (1999, pp. 22-30).

$$C.P.O.'s\begin{cases}\lambda_\pi \hat{\pi}_0 + (1+\phi)\theta_{1,0} = 0\\ \lambda_x \hat{x}_0 - \kappa\theta_{1,0} - \sigma\theta_{2,0} = 0\\ \lambda_\pi \hat{\pi}_t + (1+\phi)\theta_{1,t} + \beta^{-1}\theta_{2,t-1} - \theta_{1,t-1} = 0, \forall t > 0\\ \lambda_x \hat{x}_t - \kappa\theta_{1,t} - \sigma\theta_{2,t} + \sigma\beta^{-1}\theta_{2,t-1} = 0, \forall t > 0\\ \theta_{2,t} + \beta\phi E_t(\theta_{1,t+1}) = 0, \forall t \geq 0\end{cases}$$

As cinco condições de primeira ordem apresentadas acima podem ser reduzidas a três equações de diferenças, em que os multiplicadores de Lagrange aparecem entre as variáveis cuja dinâmica está sendo conjuntamente determinada, e duas condições iniciais para esses multiplicadores. O conjunto de C.P.O.'s pode ser representado por:

$$C.P.O.'s\begin{cases}\lambda_\pi \hat{\pi}_t + (1+\phi)\theta_{1,t} + \beta^{-1}\theta_{2,t-1} - \theta_{1,t-1} = 0, \forall t \geq 0\\ \lambda_x \hat{x}_t - \kappa\theta_{1,t} - \sigma\theta_{2,t} + \sigma\beta^{-1}\theta_{2,t-1} = 0, \forall t \geq 0\\ \theta_{2,t} + \beta\phi E_t(\theta_{1,t+1}) = 0, \forall t \geq 0\\ \theta_{1,-1} = \theta_{2,-1} = 0\end{cases}$$

Assim, o sistema que define as trajetórias ótimas para as variáveis endógenas é construído a partir dessas condições de primeira ordem e das equações estruturais do modelo, impostas as condições iniciais para as variáveis pré-determinadas. O sistema pode ser representado por[20]:

$$\begin{cases}\lambda_\pi \hat{\pi}_t + (1+\phi)\theta_{1,t} + \beta^{-1}\theta_{2,t-1} - \theta_{1,t-1} = 0,\\ \lambda_x \hat{x}_t - \kappa\theta_{1,t} - \sigma\theta_{2,t} + \sigma\beta^{-1}\theta_{2,t-1} = 0,\\ \theta_{2,t} + \beta\phi E_t(\theta_{1,t+1}) = 0,\\ (1+\phi)\hat{\pi}_t = \kappa\hat{x}_t + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1}) + \phi\hat{R}_{t-1}\\ \sigma[E_t(\hat{x}_{t+1}) - \hat{x}_t] = \hat{R}_t - E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \hat{r}_t^n\\ r_t^n = \rho\hat{r}_{t-1}^n + \xi_t\end{cases}$$

A solução desse sistema é localmente determinada sob parametrizações usuais – como discutido em Woodford (1999) – e caracteriza um ótimo no sentido

[20] As equações (3.03)'' e (3.06)' não foram incluídas no sistema, pois não há o interesse em acompanhar as respostas do salário e das horas trabalhadas aos choques.

mais amplo, sem restringir a atenção a qualquer família particular de funções de reação para o instrumento de política monetária. Assim, ao se especificar uma determinada família de funções de reação, a política ótima nessa classe envolverá fatalmente uma perda de bem-estar maior ou igual à obtida pela abordagem deste capítulo.

## 4.2 Resultados

Nesta seção são apresentadas as trajetórias ótimas das três variáveis endógenas de interesse, a saber, inflação, hiato do produto e taxa de juros nominal, em resposta a um choque exógeno que atinge a economia. Os resultados são apresentados através de *funções de impulso-resposta* (FIRs), que descrevem o comportamento do sistema ao longo do tempo em resposta a um choque isolado. Uma FIR consiste na simulação de um choque unitário num período inicial, acompanhando a partir daí a evolução das variáveis de interesse nos períodos subseqüentes.

As Figuras 4.01 e 4.02 mostram as respostas das variáveis de interesse para diferentes combinações dos parâmetros. As linhas tracejadas representam os comportamentos das variáveis quando não se considera a existência da restrição a suavizar taxação. As linhas contínuas foram obtidas para os parâmetros indicados em cada figura.

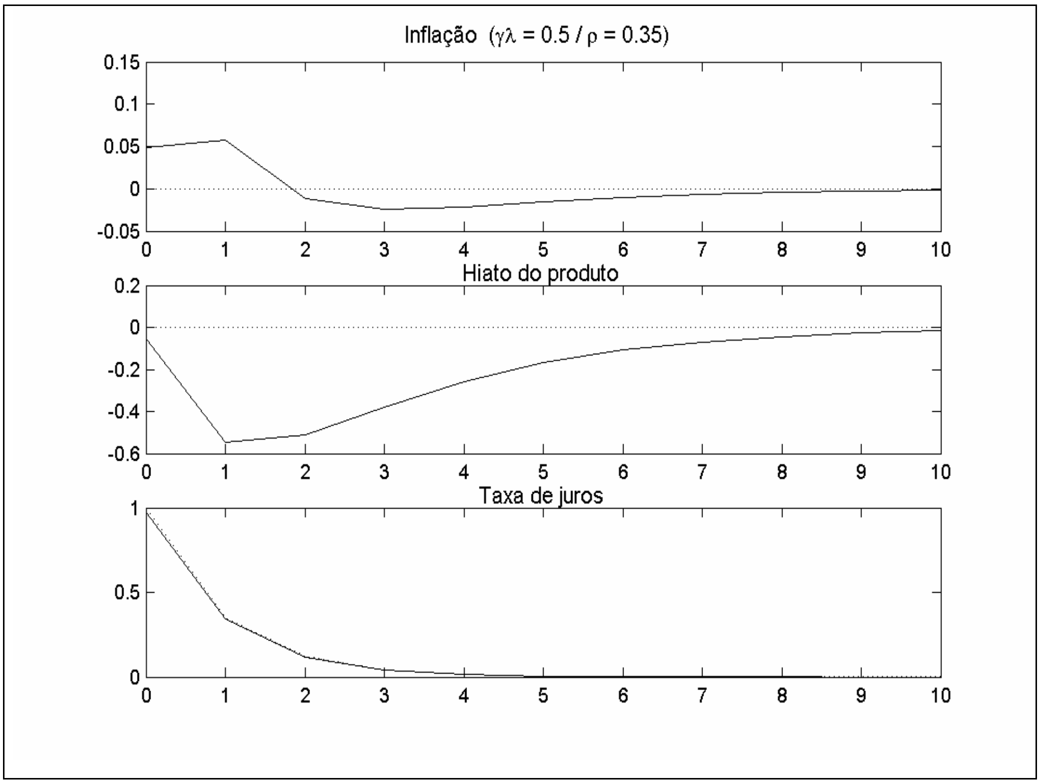


Figura 4.01

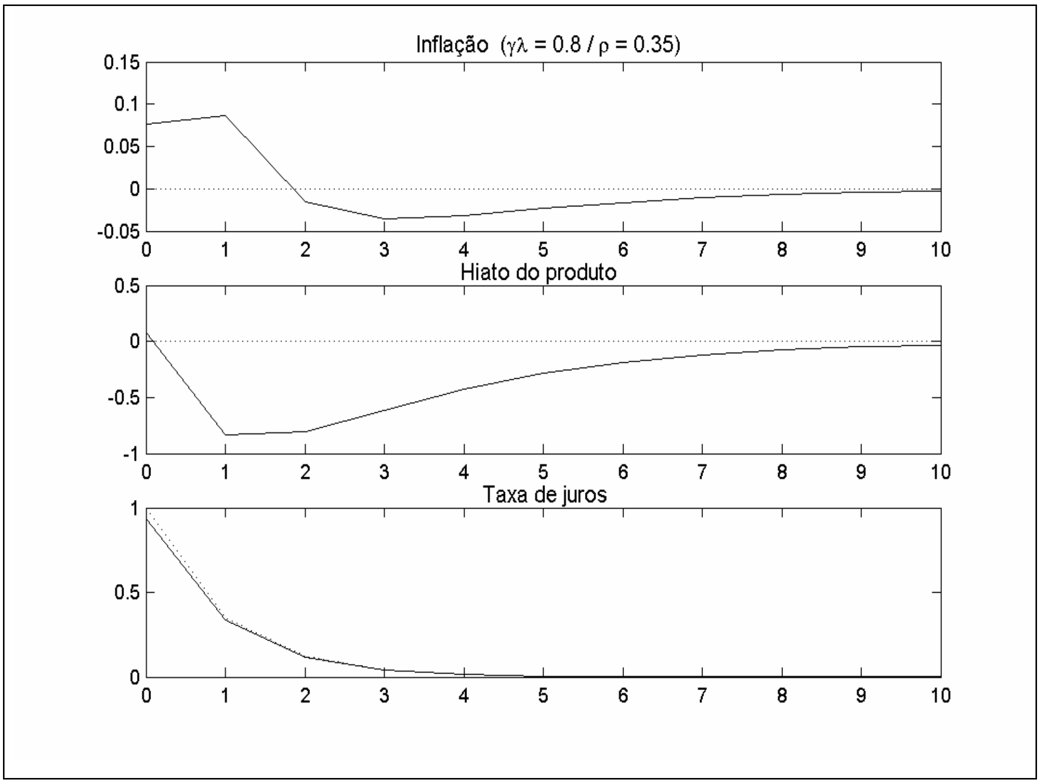


Figura 4.02

Os resultados para o modelo sem restrição de financiamento, isto é, quando $\gamma\lambda = 0$, estão de acordo com o esperado. Como a autoridade deseja (e tem a capacidade de) implementar uma política que estabilize totalmente a inflação e o hiato do produto, o choque que afeta a taxa de juros natural é integralmente repassado para a taxa nominal. Assim, a inflação e o hiato não são afetados direta ou indiretamente pelo choque e a trajetória da taxa nominal de juros é idêntica à trajetória da taxa natural.

Para o modelo com restrição de financiamento, isto é, quando $\gamma\lambda > 0$, as respostas mudam. Nesses casos, a resposta ótima da taxa de juros nominal ao choque é inferior à do caso original, implicando uma queda na variância da taxa de juros[21]. No gráfico da Figura 4.03 são apresentadas as diferenças entre as respostas ótimas da taxa de juros nominal entre um modelo sem restrição de financiamento e outro onde a restrição está presente e sua gravidade é medida por $\gamma\lambda$, para cada um dos três primeiros períodos após a ocorrência do choque. Os resultados comprovam o surgimento de um *dilema de política* quando há restrição de financiamento. Ou seja, a autoridade não pode mais implementar uma política de estabilização completa da inflação e do hiato do produto; logo, estas variáveis são afetadas pelos choques e suas variâncias tornam-se positivas. Além disso, como comprova a Figura 4.04, à medida que o problema da restrição ao financiamento se agrava, *i.e.*, quando $\gamma\lambda$ cresce, a variância da taxa de juros diminui e as variâncias da inflação e do hiato crescem, assim como aumenta a perda de bem-estar associada à trajetória ótima (relativamente à trajetória ótima na ausência de restrição de financiamento).

---

[21] Para valores de $\gamma\lambda \in (0,0.16)$ há um pequeno aumento na resposta ótima da taxa de juros no primeiro período após o choque, no valor máximo de 0.08%.

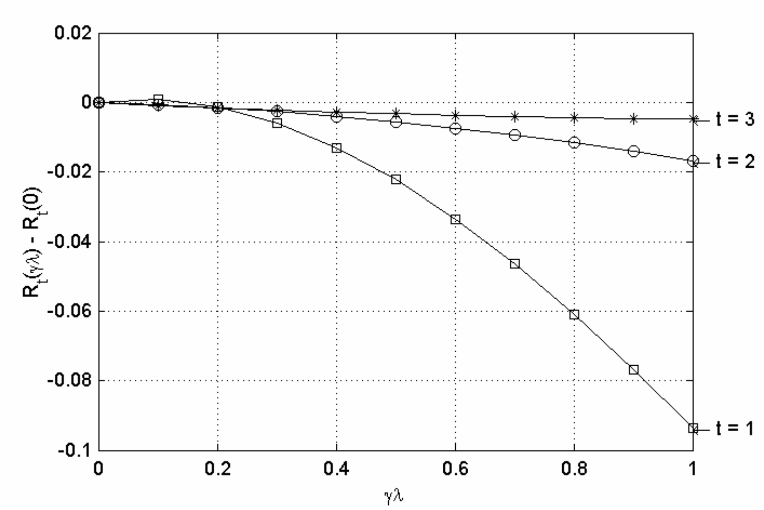


Figura 4.03

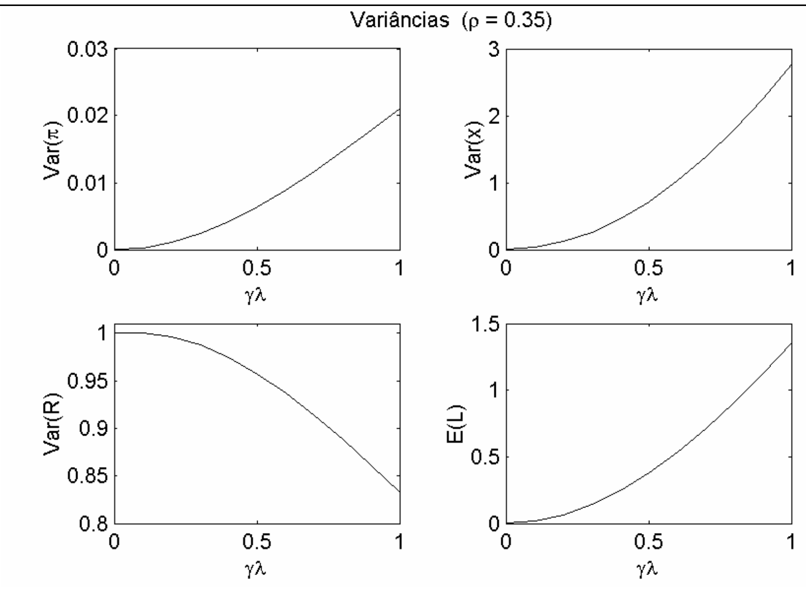


Figura 4.04



## 4.3
## Separação dos efeitos

Os resultados apresentados nos gráficos das Figuras 4.01 – 4.04 indicam como muda a resposta ótima da economia a choques da taxa de juros natural, à medida que se intensifica a restrição a suavizar taxação. Há basicamente duas razões para essas mudanças. Primeiro, as variações da taxação distorciva associadas a variações da taxa de juros real (*ex post*) já mudariam a resposta de variáveis endógenas como inflação e hiato do produto, mesmo que se mantivesse inalterada a forma como o instrumento de política monetária responde aos choques, ou seja, mesmo que a taxa de juros nominal continuasse acompanhando exatamente a taxa natural, como ocorre no equilíbrio ótimo na ausência de restrição ao financiamento do governo. Segundo, maiores flutuações da taxa de juros real levam a maiores flutuações da taxação distorciva, e esse efeito é devidamente internalizado na determinação do equilíbrio ótimo na presença da restrição. O resultado é que a resposta ótima da taxa de juros nominal deve mudar – intuitivamente, deveria ficar comparativamente mais inibida. Essa mudança, por si só, também faz com que mudem as respostas das demais variáveis endógenas.

Esta seção se dedica a separar esses dois efeitos. A idéia central é procurar saber qual seria o comportamento das variáveis econômicas caso a estrutura da economia fosse modificada pela restrição à suavização, mas a trajetória ótima do instrumento de política monetária (taxa de juros nominal) não pudesse ser modificada. Mais precisamente, consiste na determinação das trajetórias ótimas para as variáveis do modelo impondo uma restrição a mais para o comportamento da taxa de juros nominal, qual seja, seguir exatamente a mesma trajetória da taxa de juros natural, assim como ocorre no equilíbrio ótimo quando não se restringe a capacidade do governo de suavizar taxação. Comparados aos da economia sem restrição de financiamento, os resultados desse experimento contêm somente o efeito direto das flutuações de taxação distorciva, sem contudo permitirem que esse fenômeno seja internalizado na escolha da resposta ótima do instrumento de política monetária. A importância dessa internalização, por sua vez, pode ser apreciada pela comparação dos resultados do experimento parcial conduzido aqui com os resultados já expostos na seção anterior.

O problema de escolha da trajetória ótima, sujeita a manter a igualdade entre a taxa de juros nominal e a taxa natural, pode ser descrito por:

$$
\begin{cases}
\min E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\lambda_\pi \hat{\pi}_t^2 + \lambda_x \hat{x}_t^2\right) \\
s.a: \begin{cases}
(1+\phi)\hat{\pi}_t = \kappa \hat{x}_t + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1}) + \phi \hat{R}_{t-1} \\
\sigma\left[E_t(\hat{x}_{t+1}) - \hat{x}_t\right] = \hat{R}_t - E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \hat{r}_t^n \\
\hat{R}_t = \hat{r}_t^n
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\Im = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big[ & \left(\lambda_\pi \hat{\pi}_t^2 + \lambda_x \hat{x}_t^2\right) + 2\theta_{1,t}\left((1+\phi)\hat{\pi}_t - \kappa \hat{x}_t - \beta \hat{\pi}_{t+1} - \phi \hat{R}_{t-1}\right) + 2\theta_{2,t}\left(\sigma \hat{x}_{t+1} - \sigma \hat{x}_t - \hat{R}_t + \hat{\pi}_{t+1} + \hat{r}_t^n\right) + \\
& + 2\theta_{3,t}\left(\hat{R}_t - \hat{r}_t^n\right)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
C.P.O.'s \begin{cases}
\lambda_\pi \hat{\pi}_t + (1+\phi)\theta_{1,t} - \theta_{1,t-1} + \beta^{-1}\theta_{2,t-1} = 0, \forall t \geq 0 \\
\lambda_x \hat{x}_t - \kappa \theta_{1,t} - \sigma \theta_{2,t} + \sigma \beta^{-1} \theta_{2,t-1} = 0, \forall t \geq 0 \\
\phi \beta E_t(\theta_{1,t+1}) + \theta_{2,t} - \theta_{3,t} = 0, \forall t \geq 0 \\
\theta_{1,-1} = \theta_{2,-1} = \theta_{3,-1} = 0
\end{cases}
$$

Seguindo os mesmos passos que na seção anterior, pode-se reduzir as equações que caracterizam o plano ótimo a:

$$
\begin{cases}
\lambda_\pi \hat{\pi}_t + (1+\phi)\theta_{1,t} - \theta_{1,t-1} + \beta^{-1}\theta_{2,t-1} = 0 \\
\lambda_x \hat{x}_t - \kappa \theta_{1,t} - \sigma \theta_{2,t} + \sigma \beta^{-1} \theta_{2,t-1} = 0 \\
\phi \beta E_t(\theta_{1,t+1}) + \theta_{2,t} - \theta_{3,t} = 0 \\
(1+\phi)\hat{\pi}_t = \kappa \hat{x}_t + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1}) + \phi \hat{R}_{t-1} \\
\sigma\left[E_t(\hat{x}_{t+1}) - \hat{x}_t\right] = \hat{R}_t - E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \hat{r}_t^n \\
\hat{R}_t = \hat{r}_t^n
\end{cases}
$$

As figuras 4.05 e 4.06 descrevem os resultados desse modelo (designado por ‘alternativo’), ao lado dos resultados do modelo da seção anterior (‘completo’) e do modelo em que a taxação distorciva é plenamente suavizada (‘irrestrito’). Nota-se que o modelo alternativo produz FIR’s bastante semelhantes às do modelo completo, tanto para a inflação quanto para o hiato do produto. Se a autoridade fosse obrigada a adotar a mesma trajetória ótima para a taxa de juros nominal que adotava no caso de inexistência da restrição à suavização da taxação distorciva, isso pouca mudança introduziria no comportamento das variáveis endógenas do modelo. Ou seja, a conclusão é que a maior parte das flutuações que surgem no modelo completo devem-se à própria mudança na estrutura da economia (entendida aqui como o surgimento de uma variável – endógena – associada à perda de eficiência da economia), e não à mudança que esta induz no comportamento ótimo da taxa de juros. A mesma conclusão emerge do exame das variâncias incondicionais da inflação e da taxa de juros. A esperança incondicional da função perda no modelo alternativo é notavelmente próxima à obtida com o modelo completo.

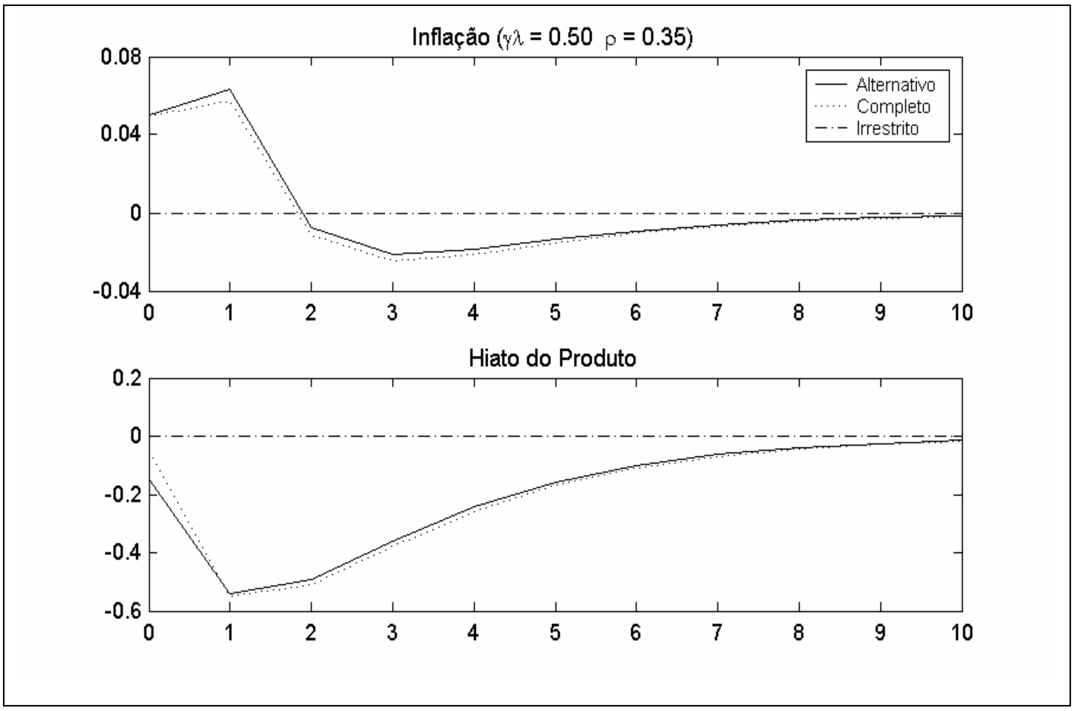


Figura 4.05

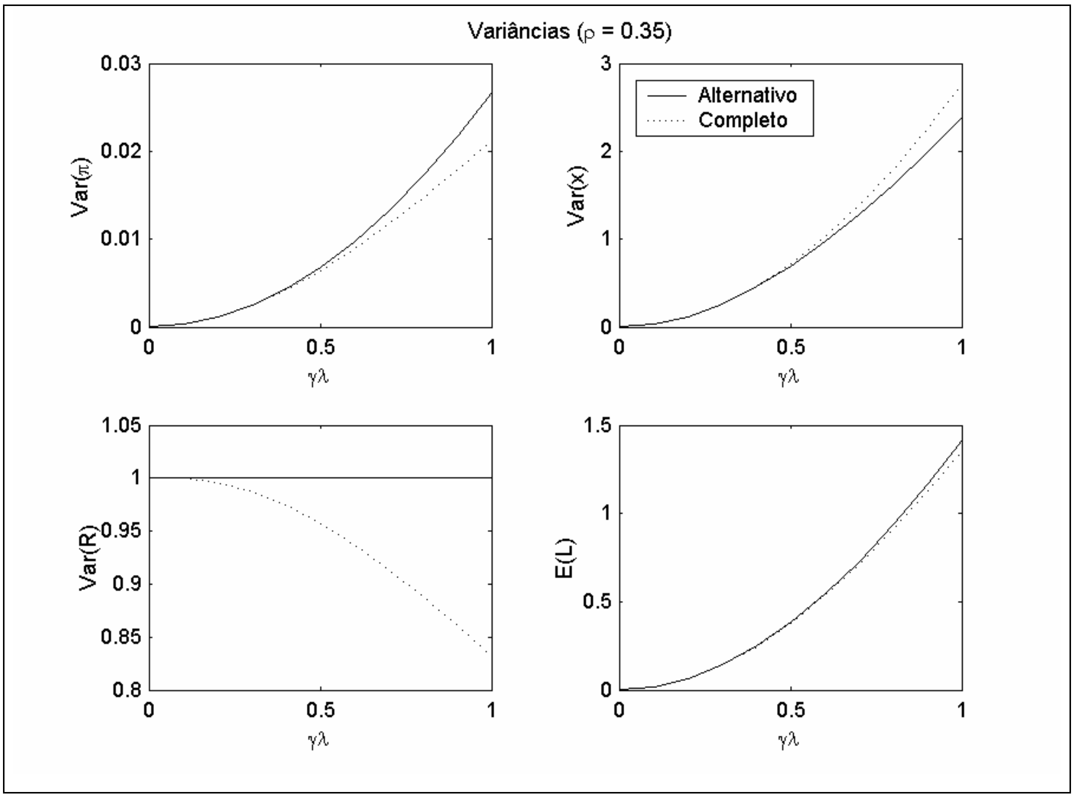
Variâncias (ρ = 0.35)
Var(π)
Var(x)
Var(R)
E(L)
γλ
Alternativo
Completo
0.03
0.02
0.01
0
0.5
1
3
2
1.05
0.95
0.9
0.85
0.8
1.5

Figura 4.06