# 3
# Modelo Completo

Na seção anterior foi apresentado um modelo simplificado que teve como objetivo estabelecer uma conexão entre perda de bem-estar econômico e variações na taxação distorciva exigida para fazer frente ao serviço corrente da dívida pública. No entanto, o objetivo final do trabalho é analisar como o bem-estar depende da condução de política monetária, numa economia incapaz de suavizar plenamente a taxação distorciva. A hipótese básica continuará sendo a necessidade de recorrer a variações na taxação distorciva corrente para fazer frente às variações no serviço da dívida. O que se passará a levar em conta é o efeito da política monetária sobre a trajetória das taxas de juros reais, e portanto sobre o serviço da dívida.

Para tratar desse problema, é preciso dotar o modelo, em primeiro lugar, de uma unidade de conta nominal em termos da qual os preços sejam denominados, sem o que não haveria qualquer papel para a política monetária. Além disso, o modelo passará a incorporar rigidez nominal de preços, de modo que a política monetária tenha efeitos não apenas sobre as variáveis nominais, mas também sobre as reais. O modelo completo é derivado a partir das mesmas hipóteses do modelo simplificado, reproduzidas novamente abaixo, e da nova hipótese de rigidez nominal de preços:

i. Produtos diferenciados e concorrência monopolística;
ii. Função de produção linear, somente trabalho como insumo;
iii. Ocorrência apenas de ‘choques de produtividade’;
iv. Duas formas de taxação: ‘lump sum’ e distorciva (subsídio sobre a folha de pagamento);
v. Os impactos dos choques sobre as variáveis fiscais do governo podem ser acomodados mediante variações em ambas as formas de taxação disponíveis. A proporção dessa *acomodação fiscal* é um parâmetro de controle no modelo;
vi. Rigidez nominal de preços.

Este terceiro capítulo está divido em três seções. Na primeira seção são derivadas as equações estruturais que compõem o modelo, bem como suas versões linearizadas. A seção seguinte traz a derivação da regra de avaliação de política. A terceira seção discute o formato adotado para a restrição à liberdade de financiamento do governo.

Os resultados obtidos a partir do modelo completo – equações estruturais e regra de avaliação – serão discutidos nos dois capítulos subseqüentes. O quarto capítulo cobre a derivação das trajetórias ótimas para as variáveis endógenas do modelo. O capítulo seguinte, quinto, trata de questões relativas à escolha da regra ótima de política monetária, descrita por uma função de reação para a taxa de juros nominal em termos de indicadores observáveis.



## 3.1 Derivação do modelo

A estrutura do modelo é composta por quatro equações: uma curva de demanda agregada (IS intertemporal), uma curva de oferta de trabalho, uma curva de oferta agregada (curva de Phillips) e uma equação que descreve a tecnologia de produção (função de produção). As duas primeiras curvas serão derivadas a partir do problema de otimização dos consumidores. A curva de Phillips é obtida a partir do problema dos produtores (sua derivação completa encontra-se no Apêndice 1). Por fim, a função de produção adotada é idêntica à do capítulo anterior (linear, sendo trabalho o único insumo e sujeita a choques de produtividade).

### 3.1.1 Produtores

A derivação da equação que representa o comportamento dos produtores no modelo é fortemente dependente da hipótese de rigidez nominal de preços. O formato escolhido para a implementação da hipótese segue a proposta de Calvo (1983). A cada período, uma parcela $\alpha \in (0,1)$ dos bens é sorteada para manter os seus preços inalterados em relação aos cobrados no período anterior. Os demais preços, referentes a uma parcela 1–α dos bens, podem ser reajustados livremente. A característica conveniente desse mecanismo de ajuste estilizado é tornar a probabilidade de uma determinada firma poder reajustar seu preço a cada período independente do número de períodos decorridos desde o seu último reajuste e também da defasagem entre o preço praticado e o desejado.

O problema dos produtores consiste em maximizar o valor esperado do fluxo descontado de lucros presentes e futuros. Seguindo o modelo de rigidez à Calvo, um produtor individual que escolhe um novo preço em *t* deve fazê-lo levando em conta o que ocorrerá com seus lucros caso este mesmo preço ainda esteja em vigor a cada período posterior $t+j$, $j \geq 0$. Como a probabilidade de que permaneça impedido de alterar seu preço pelo menos pelos próximos *j* períodos é $\alpha^j$, o problema pode ser escrito nos seguinte termos:

$$\max_{P_t(z)} E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha\beta)^i \left[P_t(z) y_{t+i}(z) - P_{t+i} ct_{t+i}(z)\right], \forall z \in [0,1],$$

onde $ct_t(z)$ representa o custo total (real) de produção do bem *z* e $P_t$, o índice Dixit-Stiglitz para o nível geral de preços.

A partir das condições de primeira ordem do problema acima, que levam em conta as curvas de demanda pelos produtos (equação 2.03), pode-se obter a seguinte equação linearizada[14]:

$$\hat{\pi}_t = \kappa \hat{x}_t + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \left(\frac{\mu\kappa}{\sigma + \upsilon}\right)\hat{s}_t, \tag{3.01}$$

$$\kappa \equiv \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(1-\alpha\beta)(\sigma+\upsilon).$$

Esta é a curva de Phillips neo-keynesiana. A equação acima representa uma aproximação linear em torno, novamente, do equilíbrio eficiente. A variável

[14] A derivação completa da equação (3.01) é apresentada no Apêndice 1.

$\hat{x}_t \equiv \hat{y}_t - \hat{y}_t^n$ é o desvio do hiato do produto, diferença entre o desvio do produto corrente e o desvio do produto natural. O produto natural é definido como o nível de produto de equilíbrio com preços flexíveis. Como apresentado no Apêndice 1 – equação (A1.09)' – o desvio do produto natural pode ser representado por: $\hat{y}_t^n \equiv \left(\frac{1+\upsilon}{\sigma+\upsilon}\right)\hat{a}_t$.

Normalmente, a curva de Phillips neo-keynesiana não contém o último termo que aparece na equação (3.01). Recorde-se que o modelo prevê um subsídio sobre a folha de salários que, na alíquota correta, corrigiria a distorção advinda do poder de monopólio dos produtores. O último termo da equação (3.01) captura o efeito do desvio da alíquota do subsídio em relação à alíquota ótima, e por isso costuma ser chamado de 'choque de oferta ineficiente'. Choques desse tipo foram contemplados, por exemplo, em Woodford (2002b) e Clarida, Galí e Gertler (1999), mas em ambos os casos se supunha que fossem simplesmente choques exógenos. No modelo apresentado aqui, as variações ineficientes da taxação distorciva serão endogeneizadas, pois dependerão do serviço da dívida pública, e portanto dos movimentos da taxa de juros real.

A segunda equação que descreve o lado da oferta da economia é a função de produção. Como exposto anteriormente, em todo o trabalho foi adotada uma função de produção linear, com um único insumo – horas de trabalho – e choques de produtividade multiplicativos:

$$y_t(z) = a_t h_t(z), \forall z \in [0,1]. \quad (3.02)$$

A partir da equação acima e da curva de demanda por cada um dos bens (2.03), pode-se agregar o total produzido da seguinte forma:

$$y_t(z) = y_t p_t^{-\theta}(z) \quad \Rightarrow \quad h_t(z) = \frac{y_t}{a_t} p_t^{-\theta}(z),$$

$$h_t \equiv \int_0^1 h_t(z)dz = \frac{y_t}{a_t}\int_0^1 p_t^{-\theta}(z)dz = \frac{y_t \Delta_t}{a_t}, \text{ sendo } \Delta_t \equiv \int_0^1 p_t^{-\theta}(z)dz,$$

$$y_t = \frac{h_t a_t}{\Delta_t}. \tag{3.03}$$

Nestas equações, $\Delta_t$ mede a dispersão de preços relativos, ou seja, a distorção provocada pela rigidez nominal de preços. Verifica-se no Apêndice 1 – equação (A1.08) – que a aproximação linear de $\Delta_t$ em torno do equilíbrio eficiente é igual a zero. Assim, a aproximação linear de (3.03) é dada por:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \hat{h}_t. \qquad (3.03)'$$

### 3.1.2
### Consumidores

O problema dos consumidores consiste em resolver:

$$\begin{cases} \max\limits_{\{c_t, h_t\}} E_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) - v(h_t)\right] \\ s.a: B_t = B_{t-1}R_{t-1} + W_t h_t - C_t - T_t + K_t \end{cases} \tag{3.04}$$

onde as variáveis minúsculas estão em termos reais e as maiúsculas, nominais. O agente representativo tal como descrito pelo problema acima obtem utilidade do nível de consumo (real) de bens. O trabalho ($h_t$), como usual, traz desutilidade ao agente. Este formato segue a formulação padrão e são aqui adotadas todas as hipóteses usuais sobre o comportamento das funções $u(.)$ e $v(.)$, a saber, $u'(.) > 0$, $u''(.) < 0$, $v'(.) > 0$ e $v''(.) > 0$.

É importante destacar que o problema do agente representativo não contém nenhuma justificativa para a existência de saldos monetários. Para a determinação das trajetórias de equilíbrio das variáveis macroeconômicas de interesse (pelo menos no modelo linearizado), pouco importa se há ou não há um estoque de moeda em circulação. Isso ocorre porque a política monetária será totalmente definida a partir do controle da taxa de juros nominal, e uma curva de demanda por moeda teria como única função estabelecer qual o estoque real de moeda compatível com a taxa de juros estabelecida pela autoridade monetária e com as demais variáveis endógenas do modelo. Em termos formais, é possível construir e resolver subsistema para todas as variáveis de interesse sem fazer referência a saldos monetários – em particular, sem especificar o formato da demanda por moeda.

Escrevendo o problema acima apenas em termos reais, tem-se:

$$\begin{cases} \max\limits_{\{c_t, h_t\}} E_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) - v(h_t)\right] \\ s.a: b_t = \dfrac{b_{t-1}R_{t-1}}{\pi_t} + w_t h_t - c_t - \tau_t + k_t \end{cases} \tag{3.04)'$$

sendo $\pi_t$ a taxa (bruta) de inflação entre os períodos $t$-1 e $t$. As equações abaixo são as condições de primeira ordem para o problema, já igualando o nível de consumo ao nível de produto:

$$u'(y_t) = \beta E_t\left[\frac{u'(y_{t+1})R_t}{\pi_{t+1}}\right], \tag{3.05}$$

$$v'(h_t) = w_t u'(y_t). \tag{3.06}$$

A equação (3.05) representa a curva de demanda agregada, ou IS intertemporal, e é a primeira das equações estruturais do modelo. A equação (3.06) é a curva de oferta de trabalho, a segunda equação do modelo completo.

Novamente, o modelo será resolvido e analisado apenas em sua versão aproximada linearmente em torno do equilíbrio eficiente. O equilíbrio eficiente é definido tal como no capítulo anterior, ou seja, o equilíbrio (na ausência de choques) que vigora quando o subsídio à folha de pagamento iguala o preço dos produtos ao seu *verdadeiro* custo marginal real de produção. As equações a seguir representam as aproximações lineares das equações (3.05) e (3.06):

$$\sigma\left[E_t\left(\hat{y}_{t+1}\right)-\hat{y}_t\right]=\hat{R}_t-E_t\left(\hat{\pi}_{t+1}\right),$$
$$\hat{w}_t=\upsilon\hat{h}_t+\sigma\hat{y}_t\,.$$

Pode-se reescrever esse par de equações em termos do hiato do produto $\hat{x}_t$ e do produto natural $\hat{y}_t^n$:

$$\sigma\left[E_t\left(\hat{x}_{t+1}\right)-\hat{x}_t\right]=\hat{R}_t-E_t\left(\hat{\pi}_{t+1}\right)-\sigma\left[E_t\left(\hat{y}_{t+1}^n\right)-\hat{y}_t^n\right],$$
$$\hat{w}_t=\upsilon\hat{h}_t+\sigma\left(\hat{x}_t+\hat{y}_t^n\right).$$

Define-se a *taxa de juros natural* como $\hat{r}_t^n\equiv\sigma\left[E_t\left(\hat{y}_{t+1}^n\right)-\hat{y}_t^n\right]$. Novamente supondo que os choques de produtividade sigam um processo auto-regressivo de ordem um (AR-1) as equações acima podem ser escritas no seguinte formato:

$$\sigma\left[E_t\left(\hat{x}_{t+1}\right)-\hat{x}_t\right]=\hat{R}_t-E_t\left(\hat{\pi}_{t+1}\right)-\hat{r}_t^n\,, \qquad (3.05)'$$
$$\hat{w}_t=\upsilon\hat{h}_t+\sigma\hat{x}_t+\frac{1}{(\rho-1)}\hat{r}_t^n\,, \qquad (3.06)'$$

onde $\rho\in[0,1)$ é o coeficiente auto-regressivo dos choques de produtividade. A partir de (3.05)' pode-se observar que a taxa de juros natural é a taxa de juros real *ex ante* que prevaleceria na economia no caso de preços perfeitamente flexíveis, pois nesse caso $\hat{y}_t\equiv\hat{y}_t^n\Rightarrow\hat{x}_t\equiv 0,\forall t\geq 0$. Além disso, essa taxa natural de juros é determinada totalmente por fatores exógenos.

A função de produção também pode ser reescrita em termos da taxa de juros natural:

$$\hat{y}_t=\hat{a}_t+\hat{h}_t\,, \qquad (3.03)'$$
$$\hat{x}_t=\hat{h}+\hat{a}_t-\hat{y}_t^n=\hat{h}_t+\left[\left(\frac{\sigma+\upsilon}{1+\upsilon}\right)-1\right]\hat{y}_t^n\,,$$
$$\hat{x}_t=\hat{h}_t+\left(\frac{\sigma-1}{\sigma(\rho-1)(1+\upsilon)}\right)\hat{r}_t^n\,. \qquad (3.03)''$$

A dinâmica dos choques de produtividade pode ser representada da seguinte forma:

$$\hat{a}_t = \rho \hat{a}_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \hat{r}_t^n = \rho \hat{r}_{t-1}^n + \xi_t, \qquad (3.07)$$

sendo $\xi_t \equiv \dfrac{\sigma(\rho - 1)(1+\upsilon)}{\sigma + \upsilon}\varepsilon_t$.

Assim, (3.01), (3.03)'', (3.05)', (3.06)' e (3.07) representam as equações estruturais (linearizadas) do modelo, resultantes da solução dos problemas de otimização dos consumidores e dos produtores, da função de produção e da hipótese sobre a propagação dos choques de produtividade (agora representados pelos movimentos da taxa de juros natural):

$$\hat{\pi}_t = \kappa \hat{x}_t + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \left(\frac{\mu\kappa}{\sigma + \upsilon}\right)\hat{s}_t, \qquad (3.01)$$

$$\hat{x}_t = \hat{h}_t + \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma(\rho - 1)(1+\upsilon)}\right)\hat{r}_t^n, \qquad (3.03)''$$

$$\sigma[E_t(\hat{x}_{t+1}) - \hat{x}_t] = \hat{R}_t - E_t(\hat{\pi}_{t+1}) - \hat{r}_t^n, \qquad (3.05)'$$

$$\hat{w}_t = \upsilon \hat{h}_t + \sigma \hat{x}_t + \frac{1}{(\rho - 1)}\hat{r}_t^n, \qquad (3.06)'$$

$$r_t^n = \rho \hat{r}_{t-1}^n + \xi_t. \qquad (3.07)$$

O sistema acima está todo escrito seguindo a forma adotada em Woodford (2002a), ou seja, trabalhando com hiato do produto ao invés do produto propriamente dito, e tendo como única variável exógena a taxa de juros natural.

## 3.2
## Avaliação de bem-estar

A avaliação de uma regra de política monetária envolve sempre algumas questões básicas. Em primeiro lugar, que objetivos deveriam ser perseguidos? Certamente a estabilização do nível de inflação é a razão de existir das autoridades monetárias, mas ainda assim é difícil rejeitar a premissa que a preocupação com a estabilização do produto figure entre os objetivos de política. Assim, na existência de mais de um objetivo, quais devem ser os pesos relativos de objetivos possivelmente conflitantes? Em suma, a discussão acima suscita dois pontos importantes para se determinar os critérios de avaliação de regras de política monetária: inicialmente é preciso determinar quais são as variáveis relevantes para essa avaliação; em seguida, determinar sob que formato tais variáveis devem ser incluídas na função objetivo da autoridade monetária; por fim, que peso deve ser atribuído a cada uma dessas variáveis.

A abordagem usual para tratar desse problema consiste em adotar como variáveis relevantes a taxa de inflação e o nível de produto. Tais variáveis entram sob a forma de desvios quadráticos em relação às metas estabelecidas pelos *policymakers*. Os pesos relativos entre os desvios quadráticos da inflação e do produto são também estabelecidos pelos *policymakers*. A equação abaixo apresenta uma típica função de perda da abordagem tradicional:

$$L_t = \lambda_\pi \left(\pi_t - \pi^*\right)^2 + \lambda_y \left(y_t - y^*\right)^2 . \qquad (3.08)$$

O problema com essa abordagem tradicional é que todos os passos da construção da função de perda são totalmente *ad hoc*. Em primeiro lugar, a seleção das variáveis, em seguida, o formato da função e, finalmente, a escolha das metas e dos pesos. Como cada uma dessas três etapas pode comprometer todos os resultados obtidos é interessante partir para análises alternativas que possibilitem a obtenção de critérios de avaliação menos dependentes de hipóteses *ad hoc*. A abordagem alternativa empregada neste trabalho segue a metodologia proposta por Rotemberg e Woodford (1997) e Woodford (2002b), e consiste em trabalhar com uma aproximação de segunda ordem da própria função de bem-estar dos agentes da economia. Assim, as hipóteses *ad hoc* envolvidas na derivação da função objetivo ficam confinadas a elementos mais ‘primitivos’ da especificação do modelo, como preferências, tecnologia, estrutura de mercado e mecanismos de rigidez de preços, que têm uma chance maior de permanecerem invariantes à escolha da política monetária. Além disso, a função objetivo resulta dos mesmos microfundamentos de onde se derivam as equações estruturais que descrevem a dinâmica da economia, contribuindo assim para a consistência interna do método de avaliação.

Abaixo são apresentados todos os passos da derivação da função de perda. A aproximação é feita em torno do *steady state* com produto eficiente e estabilidade do nível de preços[15].

O nível de máximo de bem-estar econômico é obtido pela solução do problema abaixo:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_0(U_t), \tag{3.09}$$

$$U_t \equiv u(y_t) - v(h_t) \Rightarrow \tag{3.10}$$

$$U_t = u(y_t) - v\left(\frac{y_t \Delta_t}{a_t}\right). \tag{3.11}$$

O segundo termo da equação (3.11) representa a perda de bem-estar advinda do trabalho utilizado na produção dos diferentes bens. A hipótese de rigidez de preços traz como conseqüência a dispersão no volume de mão-de-obra utilizada em cada setor, pois os setores cujos preços encontram-se mais defasados enfrentarão maior demanda por seus bens, e portanto empregarão e produzirão mais.

A seguir são apresentados os passos utilizados para obtenção da aproximação *quadrática* de (3.11) – expansão de Taylor de segunda ordem:

$$u(y_t) = u(\bar{y}) + u'(\bar{y})(y_t - \bar{y}) + \frac{1}{2}u''(\bar{y})(y_t - \bar{y})^2 + \mathrm{O}^3,$$

$$= u(\bar{y}) + u'(\bar{y})\bar{y}\left(\hat{y}_t + \frac{1}{2}\hat{y}_t^2\right) + \frac{1}{2}u''(\bar{y})\bar{y}^2\hat{y}_t^2 + \mathrm{O}^3,$$

---

15 Nas expressões abaixo, observa-se a seguinte convenção para uma variável genérica $z_t$: $\hat{z}_t \equiv \ln\left(z_t/\bar{z}\right) \Rightarrow (z_t - \bar{z}) = \bar{z}\left(\hat{z}_t + \frac{1}{2}\hat{z}_t^2\right) + \mathrm{O}^3 \cdot$

$$= u(\bar{y}) + u'(\bar{y})\bar{y}\left( \hat{y}_t + \frac{1-\sigma}{2}\hat{y}_t^2 \right) + \mathrm{O}^3 ,$$

$$u(y_t) = u'(\bar{y})\bar{y}\left( \hat{y}_t + \frac{1-\sigma}{2}\hat{y}_t^2 \right) + t.i.p. + \mathrm{O}^3 . \tag{3.12}$$

Na equação (3.12) e nas que se seguem, '*t.i.p.*' designa a consolidação de 'termos independentes da política', que, sendo aditivos, afetam o bem estar mas são irrelevantes para o problema da avaliação da política monetária, e por isso não precisam ser discriminados em detalhe.

Repetindo o mesmo processo acima para a segunda função tem-se:

$$v(y_t, \Delta_t, a_t) = \bar{v} + \bar{v}_y (y_t - \bar{y}) + \frac{1}{2}\bar{v}_{yy}(y_t - \bar{y})^2 + \bar{v}_\Delta(\Delta_t - \bar{\Delta}) + \frac{1}{2}\bar{v}_{\Delta\Delta}(\Delta_t - \bar{\Delta})^2 +$$
$$+ \bar{v}_{y\Delta}(y_t - \bar{y})(\Delta_t - \bar{\Delta}) + \bar{v}_{ya}(y_t - \bar{y})(a_t - \bar{a}) + \bar{v}_{\Delta a}(a_t - \bar{a})(\Delta_t - \bar{\Delta}) + t.i.p. + \mathrm{O}^3 ,$$
$$= \bar{v}_y \bar{y}\left( \hat{y}_t + \frac{1}{2}\hat{y}_t^2 \right) + \frac{1}{2}\bar{v}_{yy}\bar{y}^2\hat{y}_t^2 + \bar{v}_\Delta\left( \hat{\Delta}_t + \frac{1}{2}\hat{\Delta}_t^2 \right) + \frac{1}{2}\bar{v}_{\Delta\Delta}\hat{\Delta}_t^2 + \bar{v}_{y\Delta}\bar{y}\hat{y}_t\hat{\Delta}_t +$$
$$+ \bar{v}_{ya}\bar{y}\bar{a}\hat{y}_t\hat{a}_t + \bar{v}_{\Delta a}\bar{a}\hat{a}_t\hat{\Delta}_t + t.i.p. + \mathrm{O}^3 ,$$
$$= \bar{h}v'(\bar{h})\left[ \hat{y}_t + \left(\frac{1+\upsilon}{2}\right)\hat{y}_t^2 + \hat{\Delta}_t + \left(\frac{1+\upsilon}{2}\right)\hat{\Delta}_t^2 + \hat{y}_t\hat{\Delta}_t - (1+\upsilon)\hat{a}_t\hat{y}_t + \hat{a}_t\hat{\Delta}_t \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3$$
$$.$$

Nas substituições acima utilizou-se o fato de $\bar{\Delta} = 1$, pois a aproximação é feita em torno do ponto onde $\bar{p}(z) = 1$, ou seja, $\bar{P}(z) = \bar{P}$ .

$$v\left( y_t \Delta_t \big/ a_t \right) =$$
$$u'(\bar{y})\bar{y}\left[ \hat{y}_t + \left(\frac{1+\upsilon}{2}\right)\hat{y}_t^2 - (\sigma+\upsilon)\hat{y}_t\hat{y}_t^n + \hat{\Delta}_t + \left(\frac{1+\upsilon}{2}\right)\hat{\Delta}_t^2 + \hat{y}_t\hat{\Delta}_t + \hat{a}_t\hat{\Delta}_t \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3 .$$

Neste ponto é necessário obter a aproximação de segunda ordem para o índice de dispersão dos preços, apresentada a seguir:

$$\widetilde{p}_t(z) \equiv p_t^{1-\theta}(z) \Rightarrow \int_0^1 \widetilde{p}_t(z)dz = 1,$$

$$\Delta_t \equiv \int_0^1 \widetilde{p}_t^{\mu}(z)dz = \int_0^1 \left[ 1 + \mu(\widetilde{p}_t(z) - 1) + \frac{1}{2}\mu(\mu - 1)(\widetilde{p}_t(z) - 1)^2 \right] dz + \mathrm{O}^3 ,$$

$$\hat{\Delta}_t \equiv \Delta_t - 1 = \frac{1}{2}\mu(\mu - 1)\int_0^1 (\widetilde{p}_t(z) - 1)^2 dz + \mathrm{O}^3 . \qquad (3.13)$$

$$v\left( y_t \Delta_t \big/ a_t \right) = u'(\bar{y})\bar{y}\left[ \hat{y}_t + \left( \frac{1+\upsilon}{2} \right)\hat{y}_t^2 - (\sigma + \upsilon)\hat{y}_t \hat{y}_t^n + \frac{1}{2}\mu(\mu - 1)\int_0^1 (\widetilde{p}(z) - 1)^2 dz \right] + t.i.p.$$

Assim, a aproximação (quadrática) de (3.10) assume o seguinte formato:

$$U_t \equiv u(y_t) - v\left( \int_0^1 h_t(z).dz \right) = -u'(\bar{y})\bar{y}\left[ (\sigma + \upsilon)\hat{x}_t^2 + \frac{\theta}{(\theta - 1)^2}\int_0^1 (\widetilde{p}_t(z) - 1)^2 dz \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3,$$

$$U_t = -u'(\bar{y})\bar{y}\left[ (\sigma + \upsilon)\hat{x}_t^2 + \frac{\theta}{(\theta - 1)^2} Var_Z(\widetilde{p}_t(z)) \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3 . \qquad (3.14)$$

Pela hipótese de rigidez de preços à Calvo são válidas as seguintes relações:

$$\widetilde{p}_t(z) = \begin{cases} \widetilde{p}_{t-1}(z) = 1 + [\widetilde{p}_{t-1}(z) - 1] + \mathrm{O}^2, z \in \Omega \\ (p_t^*)^{1-\theta} = 1 + (1-\theta)(p_t^* - 1) + \mathrm{O}^2, z \notin \Omega \end{cases}$$

$$[\widetilde{p}_t(z) - 1]^2 = \begin{cases} [\widetilde{p}_{t-1}(z) - 1]^2 + \mathrm{O}^3, z \in \Omega \\ (1-\theta)^2 (p_t^* - 1)^2 + \mathrm{O}^3, z \notin \Omega \end{cases}$$

$$\int_0^1 [\widetilde{p}_t(z) - 1]^2 dz = \begin{cases} \int_0^1 [\widetilde{p}_{t-1}(z) - 1]^2 dz + \mathrm{O}^3, z \in \Omega \\ (1-\theta)^2 (p_t^* - 1)^2 + \mathrm{O}^3, z \notin \Omega \end{cases} \qquad (3.15)$$

onde $\Omega_t$ representa o conjunto das firmas que, no período *t*, estão impedidas (por sorteio) de reajustar preços. Esse conjunto tem medida igual a $\alpha$, e seu complemento, $(1-\alpha)$. Como se verifica no Apêndice 1 – equação (A1.11) –, a hipótese de rigidez adotada implica:

$$P_t^{1-\theta} = \alpha P_{t-1}^{1-\theta} + (1-\alpha)\left(P_t^*\right)^{1-\theta},$$

$$1 = \alpha \pi_t^{\theta-1} + (1-\alpha)\left(p_t^*\right)^{1-\theta},$$

$$\left(p_t^* - 1\right) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\hat{\pi}_t + \mathrm{O}^2,$$

$$\left(p_t^* - 1\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \hat{\pi}_t^2 + \mathrm{O}^3. \tag{3.16}$$

A partir de (3.15) e (3.16) tem-se:

$$Var_Z\left(\tilde{p}_t(z)\right) = \alpha Var_Z\left(\tilde{p}_{t-1}(z)\right) + (1-\theta)^2\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)\hat{\pi}_t^2 + \mathrm{O}^3. \tag{3.17}$$

Resolvendo a equação em diferenças apresentada acima tem-se:

$$Var_Z\left(\tilde{p}_t(z)\right) = \alpha^{t+1} Var_Z\left(\tilde{p}_{-1}(z)\right) + (1-\theta)^2\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)\sum_{j=0}^{t}\alpha^{t-j}\hat{\pi}_j^2 + \mathrm{O}^3. \tag{3.18}$$

Substituindo a expressão acima em (3.14) e, em seguida, em (3.09) tem-se[16]:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_0(U_t) = -u'(\bar{y})\bar{y}E_0\left[(\sigma+\upsilon)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\hat{x}_t^2 + \frac{\theta\alpha^2}{(1-\alpha)}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{j=0}^{t}\alpha^{t-j}\hat{\pi}_j^2\right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_0(U_t) = -u'(\bar{y})\bar{y}E_0\left[(\sigma+\upsilon)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\hat{x}_t^2 + \frac{\theta\alpha^2}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\hat{\pi}_t^2\right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_0(U_t) = -u'(\bar{y})\bar{y}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_0\left[(\sigma+\upsilon)\hat{x}_t^2 + \frac{\theta\alpha^2}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}\hat{\pi}_t^2\right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_0(U_t) = -u'(\bar{y})\bar{y}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t E_0(L_t) + t.i.p. + \mathrm{O}^3,$$

---

16 A condição inicial para a variância dos preços relativos entre os setores é um *termo independente de política* (*t.i.p.*).

onde a função de perda é dada por:

$$L_t \equiv \lambda_\pi \hat{\pi}_t^2 + \lambda_x \hat{x}_t^2 \qquad (3.19)$$

$$\begin{cases} \lambda_\pi \equiv \dfrac{\theta\alpha^2}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} \\ \lambda_x \equiv (\sigma + \upsilon) \end{cases}$$

É importante recordar que a aproximação de segunda ordem que resulta na equação (3.19) só é válida numa vizinhança do equilíbrio eficiente. Tomar a aproximação em torno desse e não de outro equilíbrio qualquer é crucial para garantir que não se estejam desprezando indevidamente termos de segunda ordem no cômputo das perdas de bem-estar.

A função de perda (3.19) tem um formato bastante próximo da equação (3.08), embora esta última tivesse sido especificada de forma totalmente *ad hoc*. Apesar da coincidência de formato, há distinções importantes. Na equação (3.19), os pesos já se encontram totalmente determinados, não sendo necessário qualquer hipótese sobre as preferências da autoridade monetária[17]. Além disso, a equação (3.19) envolve uma definição bastante particular para o hiato do produto. Ao invés de considerar a diferença em relação a uma 'tendência histórica' para o produto – a medida do produto potencial que usualmente aparece na equação (3.08) –, o hiato do produto é definido aqui como a diferença entre o produto corrente e o produto que vigoraria em equilíbrio caso fosse suprimida a rigidez de preços.

## 3.3 Restrição fiscal

A restrição de financiamento imposta ao modelo completo segue o formato usado no modelo simplificado. Ou seja, o objetivo é tentar ligar de maneira simples e direta a taxação distorciva corrente a uma parcela do serviço da dívida pública.

---

[17] Para a calibragem utilizada no trabalho – Tabela 2.01 –, o coeficiente de ponderação da inflação em (3.19) é cerca de 88 vezes superior ao coeficiente de ponderação do hiato do produto.

A equação (3.20) representa a identidade orçamentária do governo, escrita em termos nominais; (3.21) é a mesma relação, escrita em função de variáveis reais. Recorde-se que o modelo não contempla um estoque de moeda em circulação – a moeda está restrita ao papel de unidade de conta nominal usada na fixação de preços. No contexto do problema do governo, a ausência de saldos monetários apenas implica que não há qualquer receita de senhoriagem, mas a ligação que se estabelecerá entre o serviço da dívida do governo (seu passivo em títulos) e a taxação corrente não se alteraria caso houvesse senhoriagem. Nas equações (3.20) e (3.21), os dois últimos termos representam, respectivamente, os gastos com o subsídio sobre a folha de salário e a receita da taxação *lump sum*.

$$B_t = B_{t-1}R_{t-1} + P_t s_t w_t h_t - T_t , \tag{3.20}$$

$$b_t = \frac{b_{t-1}R_{t-1}}{\pi_t} + s_t w_t h_t - \tau_t . \tag{3.21}$$

Procedendo à linearização de (3.21) em torno do *steady state* do sistema:

$$\hat{s}_t - \hat{\tau}_t = \lambda\left(\hat{b}_t - \frac{1}{\beta}\hat{b}_{t-1}\right) - \frac{\lambda}{\beta}\left(\hat{R}_{t-1} - \hat{\pi}_t\right) - \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\left(\hat{w}_t + \hat{h}_t\right). \tag*{(3.21)’}$$

A restrição de financiamento é representada pela seguinte equação:

$$\hat{s}_t = -\frac{\gamma\lambda}{\beta}\left(\hat{R}_{t-1} - \hat{\pi}_t\right). \tag{3.22}$$

Esta hipótese é análoga à representada, no modelo simplificado, pela equação (2.13), sendo que lá a taxa de juros real era diretamente contratada, e agora a taxa de juros real *ex post* resulta da diferença entre uma taxa de juros nominal contratada de antemão e a taxa de inflação que se venha a observar no período.