2
Modelo simplificado

O objetivo final do trabalho é avaliar regras de condução de política monetária em uma economia sujeita a alguma forma de restrição ao financiamento da dívida do governo. Ao invés de abordar diretamente o problema, optou-se, numa primeira etapa, por trabalhar com um modelo mais simples para se testar a sensibilidade dos resultados aos parâmetros que caracterizam a economia[6]. Entretanto, várias das principais características do modelo completo estão presentes também nesta versão simplificada. Todas as características do modelo abaixo estarão presentes também no modelo completo. Este último, por sua vez, traz apenas duas hipóteses adicionais, quais sejam, a existência de uma unidade de conta nominal para a economia e a presença de rigidez de preços. Não havendo variáveis nominais nesta versão simplificada, os agentes podem contratar a taxa de juros em termos reais, quando no modelo completo contratarão normalmente uma taxa nominal. Evidentemente, a questão de condução da política monetária não é sequer abordada neste estágio inicial, pois a economia é toda descrita em termos reais. Abaixo são apresentadas as principais características do modelo tratado nesta seção:

i. Produtos diferenciados e concorrência monopolística;
ii. Função de produção linear, somente trabalho como insumo;
iii. Ocorrência apenas de ‘choques de produtividade’;
iv. Duas formas de taxação: ‘lump sum’ e distorciva (subsídio sobre a folha de pagamento);
v. Os impactos dos choques sobre as variáveis fiscais do governo podem ser acomodados mediante variações em ambas as formas de taxação disponíveis. A proporção dessa *acomodação fiscal* é um parâmetro de controle no modelo.

[6] Estes parâmetros tanto podem ser estruturais, como a taxa de impaciência, quanto parâmetros eminentemente fiscais, como a relação dívida-PIB.

Produtores e consumidores são os dois tipos de agente presentes nesta economia. O primeiro dos itens listados acima tem como conseqüência a existência de poder de mercado por parte dos produtores, que desejam fixar o preço de seus produtos acima do custo marginal de produção. Os itens (ii) e (iii) têm como objetivo apenas simplificar a obtenção dos resultados, tratando especificamente de uma função de produção mais simples. Os itens (iv) e (v) são *as* hipóteses centrais do modelo e serão tratados logo a seguir.

Este capítulo está dividido em quatro seções. A primeira traz a derivação do modelo propriamente dito. Na segunda seção é apresentada a derivação da função de bem-estar social utilizada para avaliação dos resultados. A seção seguinte, terceira, traz os resultados simulados para o modelo. Por fim, a quarta seção apresenta uma extensão ao modelo tal como derivado na primeira seção. A extensão tem como objetivo permitir a existência de títulos com maturidade efetiva superior a um período.

2.1
Derivação do modelo

As equações estruturais do modelo são todas obtidas através da solução dos problemas de otimização para os diferentes agentes da economia. Para os produtores o problema consiste na maximização de lucros período a período. (É importante destacar aqui a ausência de qualquer tipo de rigidez nominal de preços. Ou seja, os produtores têm total liberdade para estabelecer os preços de seus produtos em cada período do tempo. Esta hipótese será relaxada no modelo ampliado, na linha da literatura neo-keynesiana.) Já o consumidor *representativo* tem como objetivo maximizar seu nível (descontado) de bem-estar esperado, ao longo de uma vida infinita.

Nas duas subseções que seguem são obtidos os dois conjuntos de equações que definem o modelo. A terceira subseção apresenta o modelo na forma com a qual será analisado, isto é, em sua forma linearizada.

2.1.1 Produtores

O poder de monopólio presente no modelo advém da diferenciação entre os bens produzidos pelos produtores individuais. Por conveniência algébrica, supõe-se que haja na economia um contínuo de bens, representado pelo intervalo [0,1]. O ponto de partida para a solução do problema dos produtores é determinar as características da demanda com que se deparam, e estipular a tecnologia de produção adotada.

Para obtenção das curvas de demanda seguiu-se a formulação adotada por Dixit e Stiglitz, utilizando os índices agregados CES (ou seja, elasticidade substituição constante entre os bens). Os índices que representam o consumo agregado e o nível de preços são:

$$c_t = \left[\int_0^1 c_t(z)^{\frac{\theta-1}{\theta}} dz\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}, \tag{2.01}$$

$$P_t = \left[\int_0^1 P_t(z)^{1-\theta} dz\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \Rightarrow \left[\int_0^1 p_t(z)^{1-\theta} dz\right]^{\frac{1}{1-\theta}} = 1\text{, sendo } p_t(z) \equiv \frac{P_t(z)}{P_t}, \tag{2.02}$$

onde o parâmetro $\theta > 1$ representa o grau de substituibilidade entre os produtos. O índice agregado P_t representa o preço da cesta de consumo ótima – a forma mais barata de obter uma unidade do agregado definido na equação (2.01) –, em termos de um numerário *qualquer*. Sem perda de generalidade, optou-se pela normalização apresentada na segunda relação de (2.02). Ou seja, optou-se por expressar os preços dos diferentes bens em termos do preço da cesta ótima. Sendo assim, $p_t(z)$ representa o preço relativo de cada um dos bens em relação ao da cesta ótima.

O objetivo dos consumidores (demandantes) é maximizar o agregado c_t, levando em consideração a restrição 'orçamentária'. Ou seja,

$$\begin{cases} \max\limits_{c_t(z)} \{c_t\} \\ \\ s.a: \int_0^1 p_t(z) c_t(z) dz \leq y_t \end{cases}$$

A condição de primeira ordem (CPO) do problema acima fornece a curva de demanda por cada um dos bens em função dos agregados de Dixit-Stiglitz e do preço de oferta.

$$c_t(z) = c_t p_t(z)^{-\theta}, \forall z \in [0,1].$$

Em equilíbrio, o consumo de cada um dos bens será igual ao total produzido do bem, ou seja, $c_t(z) = y_t(z), \forall z \in [0,1]$. Assim, o índice Dixit-Stiglitz para o produto será igual ao índice para o consumo, ou $c_t = y_t$. A partir dessas relações, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$y_t(z) = y_t p_t(z)^{-\theta}, \forall z \in [0,1]. \qquad (2.03)$$

Em relação à tecnologia de produção, adotou-se uma função de produção simples, linear e tendo como único insumo a mão-de-obra (contada em horas de trabalho). Além disso, a função de produção é afetada de forma multiplicativa por um choque de produtividade exógeno:

$$y_t(z) = a_t h_t(z), \forall z \in [0,1], \qquad (2.04)$$

onde $h_t(z)$ representa as horas de trabalho empregadas no setor *z* e a_t é o choque de produtividade. Nesta formulação os choques de produtividade são sempre *agregados*, isto é, afetam igualmente todos os setores.

Por fim, o objetivo de cada um dos produtores é a maximização dos lucros através do estabelecimento do preço do bem produzido[7],

$$\max_{p_t(z)}\{\Pi_t(z)\equiv p_t(z)y_t(z)-(1-s_t)w_t h_t(z)\}, \forall z\in[0,1].$$

Neste ponto aparecem duas novas variáveis no problema: w_t e s_t. A primeira, w_t, representa o salário real, cujo valor é tomado como dado pelo produtor no momento de determinar o preço (relativo) de seu produto. A variável s_t é um subsídio que incide sobre o total da folha de salários. O objetivo da inclusão deste subsídio ficará mais claro no decorrer do trabalho. Por ora, vale esclarecer que tal subsídio poderá corrigir a ineficiência econômica gerada pelo poder de monopólio exercido pelos produtores. Em outras palavras, o *mark-up* definido pelos produtores pode ser (artificialmente) reduzido pela introdução de um subsídio de tal forma a igualar o preço ofertado ao custo marginal (real) de produção. Assim como o choque de produtividade, o subsídio também é agregado, ou seja, incide igualmente sobre a mão-de-obra utilizada em todos os setores.

Substituindo a equação (2.04) no problema acima obtem-se a seguinte condição de primeira ordem:

$$p_t(z)=\mu(1-s_t)\frac{w_t}{a_t}, \forall z\in[0,1], \qquad (2.05)$$

onde $\mu\equiv\theta/_{\theta-1}$ e o *mark-up* é dado por $\mu(1-s_t)$ [8]. Como $\mu>1$ fica clara a forma pela qual o subsídio pode atuar com vistas a corrigir a ineficiência causada pela existência de poder de mercado. Ou seja, o subsídio pode ser fixado em um valor tal que o *mark-up* aplicado seja exatamente igual a 1 (um), isto é, o preço seja igual ao custo marginal de produção e produto igual, portanto, ao produto

[7] Como dito anteriormente, nesta etapa do trabalho não há qualquer tipo de rigidez de preços. Logo, maximizar o lucro futuro esperado é equivalente a maximizar lucros correntes a cada instante.

[8] Sob o ponto de vista *privado,* o *mark-up* do produtor é igual ao parâmetro μ, pois o subsídio representa uma diminuição em seu custo marginal de produção. Assim, o *mark-up* referido no texto é aquele definido sob o ponto de vista *social*.

eficiente. A definição aqui adotada para produto eficiente é, justamente, o nível de produto que se obtem quando se corrige a única fonte de ineficiência do modelo, a saber, o poder de mercado dos produtores.

A partir da equação acima algumas conclusões podem ser extraídas. A principal delas é que todos os produtores estabelecerão o mesmo preço para seus produtos, ou seja, $p_t(z)=1, \forall z \in [0,1]$, uma vez que nenhuma das variáveis que determinam o preço ótimo pela equação (2.05) depende diretamente do setor de atuação do produto. A partir desta última conclusão e da equação (2.03) obtem-se a seguinte relação: $y_t(z)=y_t, \forall z \in [0,1]$. Finalmente, a partir destas duas últimas relações e da função de produção (2.04) conclui-se que todos os setores absorvem a mesma quantidade de mão-de-obra. Ou seja, $h_t(z)=h_t \equiv \int_0^1 h_t(z)dz, \forall z \in [0,1]$. Os resultados aqui obtidos podem ser resumidos no seguinte par de equações:

$$y_t = a_t h_t, \tag{2.06}$$

$$a_t = \mu(1-s_t)w_t. \tag{2.07}$$

Trabalhando com as relações obtidas no parágrafo anterior e a definição de produto eficiente as duas relações abaixo são facilmente obtidas:

$$w_t^{ef} = a_t, \tag{2.08}$$

$$s_t^{ef} = \frac{\mu-1}{\mu} > 0. \tag{2.09}$$

A rigor, garantida a equação (2.09) o nível de produto atingido pela economia é o eficiente, pois a relação (2.08) é uma conseqüência direta de (2.09) e (2.07). Assim, para que o produto não se desvie do eficiente, é necessário que o nível do subsídio adotado seja constante (e igual a $\frac{\mu-1}{\mu}$). Por isso, choques que afetem s_t estão entre os que Woodford (2002b) classifica como *choques ineficientes*.

2.1.2
Consumidores

O problema dos consumidores é inteiramente convencional:

$$\begin{cases} \max\limits_{\{c_t, h_t\}} E_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) - v(h_t)\right] \\ s.a: b_t = b_{t-1} r_{t-1} + w_t h_t - c_t - \tau_t + k_t \end{cases}$$

onde $\beta < 1$ é o fator de desconto intertemporal, $u(.)$ representa a utilidade advinda do consumo de bens, $v(.)$ a desutilidade do trabalho na produção dos bens, c_t é o nível de consumo, τ_t é a parcela que representa o pagamento de imposto *lump sum*, k_t é a parcela de transferências *lump sum* das firmas aos consumidores, *e.g.*, pagamento de dividendos, r_t é a taxa bruta de juros em termos reais entre os períodos t e t+1 e b_t o estoque (real) de títulos detidos pelo agente representativo.

A solução para o problema acima é direta e resulta no seguinte par de condições de primeira ordem:

$$u'(y_t) = \beta r_t E_t\left[u'(y_{t+1})\right], \tag{2.10}$$

$$v'(h_t) = w_t u'(y_t), \tag{2.11}$$

já substituído o consumo (agregado) pelo nível de produto.

Para a derivação das equações (2.10) e (2.11) são adotadas as hipóteses usuais sobre o funcionamento do mercado de crédito, inclusive considerando apenas títulos emitidos em um período e resgatados no período seguinte. Esta hipótese será relaxada a seguir, permitindo títulos com maturidade efetiva superior a um período, mas de forma a não ser necessário reescrever o problema do consumidor.

2.1.3
Restrição fiscal

A equação abaixo representa a *identidade orçamentária* do governo, que segue o formato padrão para títulos emitidos com maturidade efetiva igual a um:

$$b_t = r_{t-1} b_{t-1} + s_t w_t h_t - \tau_t . \tag{2.12}$$

No modelo, o resultado primário do governo é totalmente determinado pela receita de impostos e pelo pagamento do subsídio, não havendo, por simplicidade, gastos do governo em bens e serviços.

O modelo será totalmente determinado a partir das equações derivadas nas duas últimas subseções e pela hipótese adotada para o comportamento das variáveis fiscais (no modelo, τ_t e s_t), caracterizando a restrição à liberdade de suavização da taxação ao longo do tempo. Estabelece-se assim um canal de ligação entre variações no serviço da dívida e variações na taxação distorciva corrente. A equação que representa a restrição será apresentada na próxima subseção, pois terá seu formato definido a partir da versão já linearizada de (2.12).

2.1.4
Modelo linearizado

O conjunto de equações derivadas acima fornece o sistema que representa o modelo. Por se tratar de um sistema dinâmico não-linear com expectativas racionais, a estratégia de solução adotada no trabalho foi partir para a determinação *local* da solução, através de um sistema linearizado em torno de algum equilíbrio estacionário, que é a metodologia padrão no trato do problema. As soluções assim obtidas são soluções locais e são tão mais precisas quanto mais próximo do ponto de aproximação o sistema esteja. O ponto escolhido para aproximação foi o equilíbrio estacionário eficiente: a aproximação é feita em torno do equilíbrio onde são válidas as equações (2.08) e (2.09) e na ausência de choques, isto é, $a_t = \overline{a}$. Esse equilíbrio estacionário pode ser representado por:

$$\begin{cases} \bar{s} = \dfrac{\mu - 1}{\mu} \\ \bar{w} = \bar{a} \\ \bar{r} = \dfrac{1}{\beta} \\ \bar{\tau} = \left(\dfrac{\mu - 1}{\mu}\right)\bar{a}\bar{h} + \left(\dfrac{1-\beta}{\beta}\right)\bar{b} \end{cases}$$

Os valores de *steady state* do produto e do emprego são determinados implicitamente pelo seguinte par de equações:

$$\begin{cases} \bar{y} = \bar{a}\bar{h} \\ v'\left(\bar{h}\right) = \bar{a}u'\left(\bar{y}\right) \end{cases}$$

O sistema exato é composto pelas equações (2.06), (2.07), (2.10), (2.11) e (2.12), todas reapresentadas abaixo:

$$y_t = a_t h_t , \tag{2.06}$$

$$a_t = \mu\left(1 - s_t\right)w_t , \tag{2.07}$$

$$u'\left(y_t\right) = \beta r_t E_t\left[u'\left(y_{t+1}\right)\right], \tag{2.10}$$

$$v'\left(h_t\right) = w_t u'\left(y_t\right), \tag{2.11}$$

$$b_t = r_{t-1}b_{t-1} + s_t w_t h_t - \tau_t . \tag{2.12}$$

Realizando-se a linearização dessas equações em torno do equilíbrio estacionário descrito acima, tem-se:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \hat{h}_t , \tag*{(2.06)’}$$

$$\hat{a}_t = -\mu\hat{s}_t + \hat{w}_t , \tag*{(2.07)’}$$

$$\hat{r}_t = \sigma\left[E_t\left(\hat{y}_{t+1}\right) - \hat{y}_t\right], \tag*{(2.10)’}$$

$$\sigma\hat{y}_t + \upsilon\hat{h}_t = \hat{w}_t , \tag*{(2.11)’}$$

$$\hat{s}_t - \hat{\tau}_t = \lambda\left(\hat{b}_t - \frac{\hat{b}_{t-1}}{\beta}\right) - \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)\left(\hat{w}_t + \hat{h}_t\right) - \frac{\lambda}{\beta}\hat{r}_{t-1} . \tag*{(2.12)’}$$

onde $\sigma \equiv -\frac{\bar{y}u''(\bar{y})}{u'(\bar{y})}$, $\upsilon \equiv \frac{\bar{h}v''(\bar{h})}{v'(\bar{h})}$ e $\lambda \equiv \frac{\bar{b}}{\bar{y}}$, ou seja, este último parâmetro mede a relação dívida-PIB *em steady state*.

Nas equações acima as variáveis estão todas escritas em termos de desvios percentuais – para uma variável genérica z_t, $\hat{z}_t \equiv \frac{z_t - \bar{z}}{\bar{z}}$ – exceto, por conveniência algébrica, $\hat{s}_t \equiv (s_t - \bar{s})$ e $\hat{\tau}_t \equiv \left(\frac{\tau_t - \bar{\tau}}{\bar{y}}\right)$.

A equação (2.12)' representa a versão linearizada da identidade orçamentária do governo e deixa claro quais são os diferentes componentes que afetam sua dinâmica fiscal. Embora (2.12) – e, portanto (2.12)' – normalmente descreva a dinâmica da dívida do governo dadas as demais variáveis, no modelo ela é interpretada como sendo uma regra de determinação do resultado primário requerido para uma dada trajetória do estoque da dívida. Nesse sentido, o primeiro termo do lado direito de (2.12)' representa o impacto dos desvios do estoque da dívida (atual e defasada) sobre o resultado primário requerido. A segunda parcela representa o impacto de desvios na base de incidência do subsídio. Por fim, o terceiro termo representa o impacto de desvios na taxa de juros sobre o esforço fiscal.

A hipótese básica a respeito do comportamento do subsídio à folha de pagamento das firmas é que:

$$\hat{s}_t = -\frac{\gamma\lambda}{\beta}\hat{r}_{t-1}, \qquad (2.13)$$

onde o parâmetro de controle $\gamma \in (0,1)$ representa a parcela da variação do serviço do dívida devida à variação da taxa de juros que deve ser acomodada por variações no nível do subsídio. Assim, estabelece-se uma conexão direta entre essas variações no serviço da dívida (com um período de defasagem) e a taxação (corrente). No modelo, o parâmetro de suavização e a relação dívida-PIB em *steady state* podem ser considerados como um parâmetro único $\gamma\lambda$.

Em princípio, outras hipóteses poderiam ser feitas para representar alguma forma de restrição à liberdade de suavização da taxação distorciva. Como foi exposto na introdução, o objetivo do trabalho é procurar ligar a liberdade de suavização ao serviço da dívida. Este objetivo, no contexto do modelo, é traduzido pela equação (2.13). Fica implícito, conforme revela a equação (2.12)', que o governo pode acomodar pressões fiscais advindas de desvios do estoque da dívida herdada do passado ou da base de incidência do subsídio através de taxação não distorciva, ou tolerando temporariamente uma maior acumulação de dívida. Optou-se por excluir da determinação da alíquota do subsídio, segundo (2.13), os desvios da base de incidência, de modo a destacar a ligação entre o serviço da dívida e a taxação distorciva corrente. Optou-se também por excluir de (2.13) termos que levassem em consideração os desvios do estoque defasado da dívida, embora esses termos, assim como os desvios da taxa de juros, também digam respeito ao serviço da dívida. Essa é apenas uma hipótese simplificadora, sem a qual seria necessário fazer hipóteses também a respeito do comportamento da taxação *lump sum* ao longo do tempo, de tal forma que fosse satisfeita a restrição orçamentária intertemporal e que ficasse inteiramente especificada a trajetória do estoque da dívida (que a solução do modelo precisaria então levar em conta). Em outras palavras, excluir o termo do estoque em (2.13) toma como exatamente equivalentes variações na taxação *lump sum* corrente e suavização via acumulação ou desacumulação de dívida, facilitando a análise. Relaxar essa hipótese seria interessante, mas se optou aqui pela versão mais simples.

Definidas as equações estruturais do modelo, falta apenas especificar a trajetória dos choques de produtividade. Adotou-se no trabalho choques de produtividade seguindo um processo auto-regressivo de ordem um (AR-1). Dessa forma o sistema linear (aproximado) de expectativas racionais fica assim determinado:

$$\begin{cases} \hat{y}_t = \hat{a}_t + \hat{h} \\ \hat{a}_t = -\mu\hat{s}_t + \hat{w}_t \\ \hat{r}_t = \sigma\left[E_t(\hat{y}_{t+1}) - \hat{y}_t\right] \\ \sigma\hat{y}_t + \upsilon\hat{h}_t = \hat{w}_t \\ \hat{s}_t = -\dfrac{\gamma\lambda}{\beta}\hat{r}_{t-1} \\ \hat{a}_t = \rho\hat{a}_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$$

Se o parâmetro de controle γ fosse igual a zero, o sistema de equações seria o mesmo que no caso em que não há restrição para suavizar a taxação. Ou seja, todas as variações de taxa de juros poderiam ser acomodadas através do imposto *lump sum*, ou por acumulação e posterior desacumulação de dívida, sem envolver perda de bem-estar. Essa situação servirá de ponto de referência para a análise. Depois de estipulado o critério de avaliação, os resultados (perdas de bem-estar) serão todos apresentados tendo como base de comparação o modelo 'irrestrito'[9] – com $\hat{s}_t = 0, \forall t$, ou seja, $s_t = \bar{s} \equiv \dfrac{\mu - 1}{\mu}, \forall t$.

2.2 Avaliação de bem-estar

A etapa final antes de partir para a solução do modelo aproximado é determinar qual será o critério utilizado para avaliar os resultados.

Assim como as equações estruturais do modelo foram obtidas lançando mão de princípios de otimização para os agentes, o critério de avaliação do bem-estar econômico também será derivado a partir dos mesmos princípios. Mais precisamente, a avaliação dos resultados será feita a partir de uma aproximação de segunda ordem da utilidade esperada do agente representativo[10]. Esta abordagem

---

[9] O termo 'irrestrito' aqui está no sentido de ausência de restrição ao financiamento do serviço da dívida, que exige variações da taxação distorcionária corrente.

[10] Nas expressões abaixo uma variável genérica $\tilde{z}_t \equiv z_t - \bar{z}$ e o termo '*t.i.p.*' representa os *termos independentes de política*. No presente modelo, estão agrupadas neste termo as parcelas que dependem exclusivamente dos choques exógenos. Por fim, 'O^n' indica que os termos desprezados na aproximação são de ordem igual ou superior a *n*.

segue a linha dos trabalhos de Rotemberg e Woodford (1997) e Woodford (2002b).

$$U_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{t+i} E_t \left[u(y_{t+i}) - v(h_{t+i}) \right].$$

$$\begin{aligned}
&u(a_t h_t) - v(h_t) = \\
&= \bar{u} - \bar{v} + \bar{u}'\left(\bar{a}\tilde{h}_t + \bar{h}\tilde{a}_t\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{u}''\bar{a}^2\tilde{h}_t^2 + 2\left(\bar{u}' + \bar{h}\bar{a}\bar{u}''\right)\tilde{h}_t\tilde{a}_t + \bar{u}''\bar{h}^2\tilde{a}_t^2\right) - \bar{v}'\tilde{h}_t - \frac{1}{2}\bar{v}''\tilde{h}_t^2 + \mathrm{O}^3, \\
&= \bar{u} - \bar{v} + \bar{u}'\bar{y}\left\{ \hat{a}_t + \frac{1}{2}\left[\frac{\bar{y}\bar{u}''}{\bar{u}'}\left(\hat{h}_t^2 + \hat{a}_t^2\right) + 2\left(1 + \frac{\bar{y}\bar{u}''}{\bar{u}'}\right)\hat{h}_t.\hat{a}_t \right]\right\} - \bar{v}'\bar{h}\left(\frac{1}{2}\frac{\bar{h}v''}{v'}\hat{h}_t^2\right) + \mathrm{O}^3, \\
&= -\frac{\bar{u}'\bar{y}}{2}\left[(\sigma + \upsilon)\hat{h}_t^2 + 2(\sigma - 1)\hat{h}_t\hat{a}_t \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[u(a_t h_t) - v(h_t)\right] &= -\frac{\bar{u}'\bar{y}}{2}\left[(\sigma + \upsilon)E\left(\hat{h}_t^2\right) + 2(\sigma - 1)E\left(\hat{h}_t\hat{a}_t\right) \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3, \\
E\left[u(a_t h_t) - v(h_t)\right] &= -\Omega\left[(\sigma + \upsilon)Var\left(\hat{h}_t\right) + 2(\sigma - 1)Cov\left(\hat{h}_t, \hat{a}_t\right) \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3, \\
U_t &= -\frac{\Omega}{1-\beta}\left[(\sigma + \upsilon)Var\left(\hat{h}_t\right) + 2(\sigma - 1)Cov\left(\hat{h}_t, \hat{a}_t\right) \right] + t.i.p. + \mathrm{O}^3.
\end{aligned}$$

Assim, a função objetivo da autoridade monetária pode ser representada pela seguinte expressão:

$$E(L_t) \equiv (\sigma + \upsilon)Var\left(\hat{h}_t\right) + 2(\sigma - 1)Cov\left(\hat{h}_t, \hat{a}_t\right). \tag{2.14}$$

A aproximação que levou à equação (2.14) foi feita, assim como no caso das condições de equilíbrio do modelo, em torno do *steady state* em que a única imperfeição da economia é corrigida, mediante uma alíquota de subsídio que iguala preços a custos marginais. Adotar (2.14) como regra de avaliação pressupõe que o equilíbrio obtido pela solução do modelo não se distancie muito do equilíbrio eficiente, sob pena de (2.14) estar, na verdade, desprezando indevidamente alguns outros termos de segunda ordem.[11] Por isso foi feita a hipótese de que a única forma de taxação distorciva é na verdade um subsídio que corrige a distorção decorrente do poder de mercado dos produtores. De qualquer maneira, desvios do subsídio em relação à alíquota ótima, de modo a satisfazer a equação (2.13), serão causadores de ineficiência.

2.3 Resultados

O sistema de equações que representa o modelo linearizado pode ser resolvido utilizando os procedimentos numéricos de solução de sistemas lineares com expectativas racionais.[12] Para a solução numérica do sistema foram adotados algoritmos computacionais desenvolvidos com base nos trabalhos de Blanchard e Kahn (1980) e King e Watson (1998).

O modelo apresenta uma série de parâmetros estruturais, que são calibrados a partir de valores já usuais na literatura, de acordo com evidência empírica disponível, ou para os quais se convencionou experimentar um pequeno número de calibragens diferentes. Um conjunto distinto é formado por parâmetros cujos papéis o modelo tem especial interesse em abordar, como a relação dívida-PIB e o grau de repasse de variações no serviço da dívida à taxação distorciva. Em contraposição aos parâmetros *estruturais*, os componentes deste segundo conjunto serão chamados de *específicos*. Os dois conjuntos estão apresentados na tabela abaixo:

Parâmetros

Estruturais	Específicos
β, σ, ν, θ e ρ	λ e γ

Os parâmetros estruturais β, σ, ν e θ foram calibrados seguindo os valores usuais na literatura, de acordo com Woodford (2002b). Quanto à persistência dos

[11] Para uma discussão mais detalhada sobre as limitações ao se utilizar uma função de perda nos moldes derivados aqui, ver Woodford (2002b, pp. 4–11).
[12] Para este modelo simplificado foram obtidas também soluções analíticas.

choques, os resultados são apresentados para três valores diferentes de ρ. Para os parâmetros específicos não se adota uma calibragem particular, mas sim experimenta-se uma ampla gama de valores de modo a verificar como afetam os resultados.

Para o primeiro conjunto de resultados apresentados, os parâmetros estruturais do sistema de equações foram calibrados da seguinte forma:

Tabela 2.01 – Parâmetros Estruturais

β	0.99
σ	0.16
ν	0.11
θ (μ)	7.67 (1.15)
ρ	0 , 0.35 , 0.70

A Figura 2.01 traz os primeiros resultados obtidos com a solução do sistema linearizado. O critério para avaliação de bem-estar empregado é representado pela função objetivo (2.14). O gráfico traz as perdas percentuais de bem-estar em função da combinação de parâmetros γλ, para diferentes valores de ρ = (0, 0.35, 0.70). A perda de bem-estar é calculada em relação ao caso onde γ = 0, ou seja, os resultados apresentados são os desvios percentuais em relação à situação onde não há qualquer restrição à suavização da taxação distorciva (ou seja, $s_t = \bar{s} \Rightarrow \hat{s}_t = 0, \forall t$). Uma representação esquemática para essa medida é:

$$\frac{E[L_t(\gamma\lambda, \rho)] - E[L_t(0, \rho)]}{E[L_t(0, \rho)]}.$$

No procedimento de solução do modelo, variações no parâmetro ρ são acompanhadas também por variações na variância dos choques exógenos, $Var(\varepsilon_t)$, de tal forma a manter constante $Var(\hat{a}_t)$. Assim, normalizando $Var(\hat{a}_t) = 1$, a variância do choque exógeno é dada por $Var(\varepsilon_t) = (1 - \rho^2)$. No entanto, dado o formato escolhido para a apresentação dos resultados – desvios relativos da perda de bem-estar –, eles de qualquer modo não seriam afetados pelas mudanças em $Var(\hat{a}_t)$ que seriam produzidas por mudanças no parâmetro ρ, mantida $Var(\varepsilon_t)$ constante. Formalmente, a partir da solução analítica para o modelo é possível escrever as seguintes relações:

$$\begin{cases} Var(\hat{h}_t) = F(\gamma\lambda, \rho; \Theta) Var(\hat{a}_t) \\ Cov(\hat{h}_t, \hat{a}_t) = G(\gamma\lambda, \rho; \Theta) Var(\hat{a}_t) \end{cases},$$

onde $\Theta \equiv (\beta, \sigma, \upsilon, \theta)$ representa o conjunto dos parâmetros *estruturais* do modelo, exceto ρ. Assim, a perda relativa de bem-estar associada a quaisquer mudanças nos parâmetros independe do impacto desses parâmetros sobre $Var(\hat{a}_t)$, ou seja,

$$\frac{E[L_t(\gamma\lambda, \rho)] - E[L_t(0, \rho)]}{E[L_t(0, \rho)]} = \frac{H(\gamma\lambda, \rho; \Theta) - H(0, \rho; \Theta)}{H(0, \rho; \Theta)},$$

sendo $H(\gamma\lambda, \rho; \Theta) \equiv (\sigma + \upsilon) F(\gamma\lambda, \rho; \Theta) + 2(\sigma - 1) G(\gamma\lambda, \rho; \Theta)$. Enfim, o objetivo aqui foi deixar claro que os resultados apresentados a seguir independem da variância dos choques, daí seu valor não ser um parâmetro também calibrado, mas apenas normalizado em um valor de referência com base na normalização feita para a variância de $\hat{a}_t$, qual seja, $Var(\hat{a}_t) = 1$.

Os resultados apresentados seguem, todos, o que se deveria esperar. Ou seja, para uma dada relação dívida-PIB, quanto menor o grau de suavização permitido *maior* será a perda de bem-estar associada à inclusão da restrição. Dado o estoque da dívida em *steady state*, quanto maior for a obrigatoriedade de se alterar a taxação distorciva da economia em resposta aos choques, maior será a perda de bem-estar associada. Por outro lado, para um dado grau de suavização, γ, quanto maior a relação dívida-PIB de *steady state*, λ, maior será a perda associada, pois aumentam as variações do serviço da dívida que resulta de variações da taxa de juros. Além disso, como mostra o gráfico da Figura 2.02, quanto maior a persistência dos choques de produtividade (maior ρ), menor será o impacto da restrição fiscal sobre a perda de bem-estar.

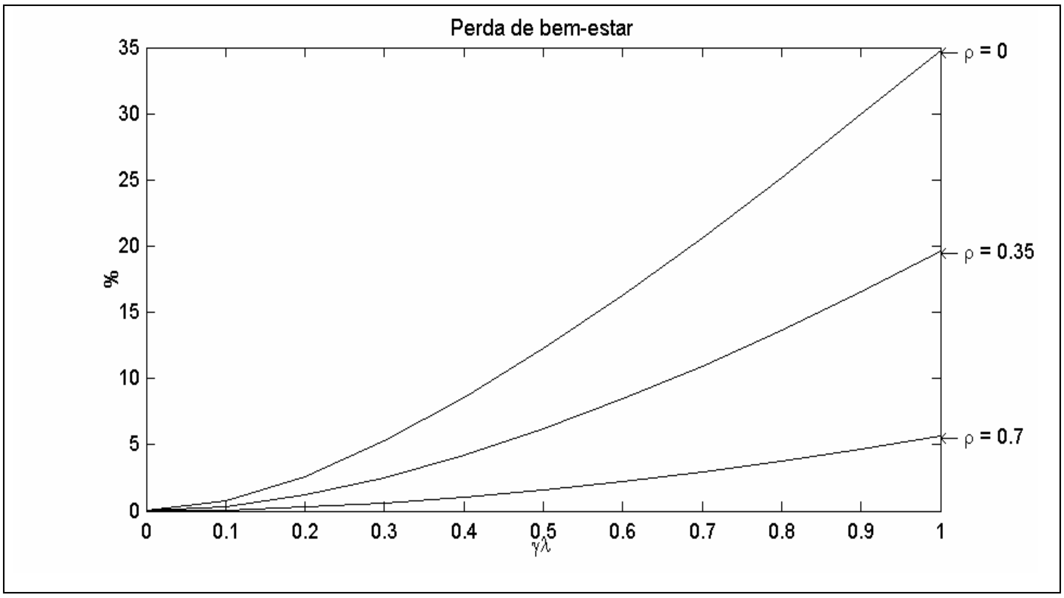

Figura 2.01

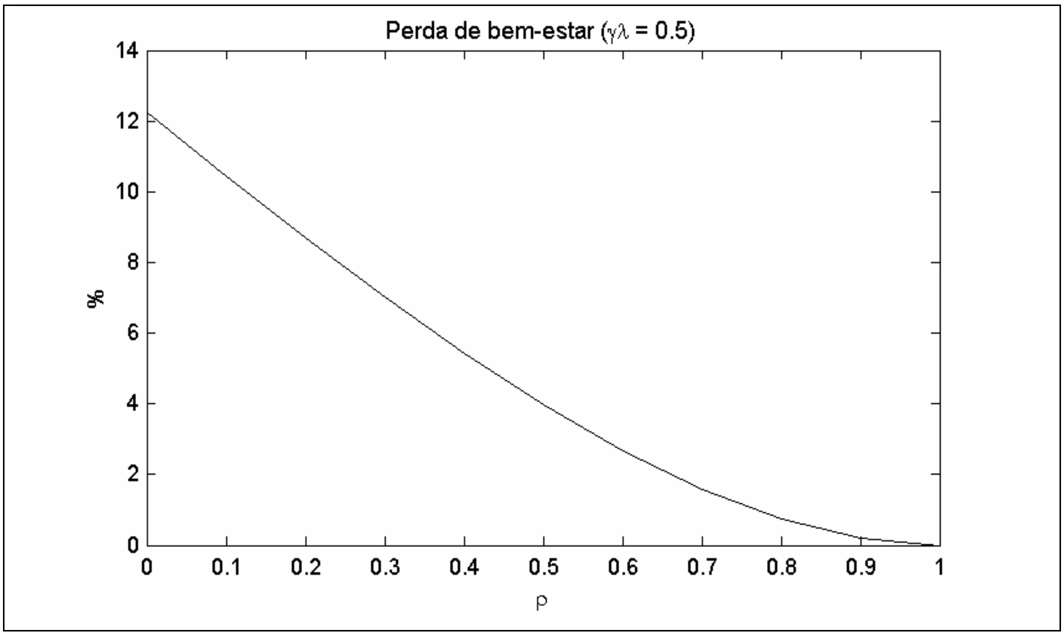

Figura 2.02

2.4
Extensão do modelo

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o mesmo modelo derivado acima, exceto por uma modificação na identidade orçamentária do governo. A alteração é o relaxamento da hipótese que admite a existência de apenas um tipo de título, com maturidade efetiva igual a um. A identidade orçamentária será reescrita de forma a acomodar a existência de títulos com maturidade mais longa.

Pelos mecanismos explorados aqui, um aumento da maturidade deveria trazer como conseqüência uma diminuição da perda de bem-estar causada pela restrição a suavizar taxação distorciva. A perda de bem-estar surge pela ligação entre variações no serviço da dívida e variações na taxação distorciva corrente (o subsídio). Com uma dívida de perfil mais longo, os impactos de mudanças na taxa de juros sobre o serviço seriam menores, e com isso a necessidade de variações mais bruscas na taxação corrente também seria menor.

2.4.1
Restrição fiscal

A identidade orçamentária do governo apresenta uma pequena alteração em relação ao usual, justamente para levar em conta a existência de títulos com maturidade superior a um período. O formato adotado para implementar tal alteração foi escolhido de tal forma a não ser preciso alterar (2.12) de maneira muito drástica. O objetivo principal era evitar o aumento da dimensionalidade de (2.12), ou seja, não precisar levar em consideração os estoques de títulos emitidos em cada ponto do passado, mas apenas o estoque de títulos em circulação no período imediatamente anterior.

Considera-se, além dos títulos de um período (que rendem r_t entre os períodos t e $t+1$), a existência de um título emitido no período t a um preço q_t e que tenha um esquema bastante particular de pagamentos: cada título paga uma unidade no primeiro período subseqüente à sua emissão, e a partir daí estes pagamentos caem a uma taxa geométrica em todos os demais períodos, sem limite de duração. Ou seja, um título emitido em t é lançado pelo preço q_t e seus pagamentos são: 1 em $t+1$, δ em $t+2$, δ^2 em $t+3$, e assim por diante. Fica logo clara a ligação entre o parâmetro δ e a maturidade efetiva do título. Se T indica a maturidade efetiva, do esquema de pagamentos apresentado acima obtem-se as seguintes relações:

$$T = \frac{1}{1-\delta\beta}, \quad \text{e} \quad \delta = \frac{T-1}{T\beta}. \tag{2.15}$$

O esquema de pagamentos implica também uma trajetória bem definida de 'desvalorização' progressiva dos títulos emitidos em períodos anteriores, em relação aos títulos do período corrente. Essa trajetória é simples porque um título emitido em *t-s* pagará, a partir de *t*, um fluxo de caixa que a cada período será proporcional ao do título emitido em *t*, com o fator de proporcionalidade constante igual a δ^s. Em particular, o preço de um título emitido no período anterior deve ser igual ao preço de um título recém-emitido descapitalizado pelo parâmetro δ, isto é,

$$q_{t-1}^t = \delta q_t,$$

onde q_{t-1}^t representa o preço no período *t* de um título emitido em *t-1*.

Por arbitragem com um título de um período (que rende taxa bruta r_t) tem-se a seguinte equação:

$$r_t = \frac{1 + E_t\left(q_t^{t+1}\right)}{q_t}.$$

A taxa de juros de títulos de um período na equação acima é contratada e definida *ex ante*. Já o rendimento de um título longo (lado direto da equação acima) depende de expectativa sobre o preço do título no futuro. Como o sistema será tratado em sua forma linearizada, mesmo com agentes avessos ao risco pode-se adotar a aproximação linear desta equação como condição de arbitragem para os agentes.

Combinando as duas últimas equações tem-se:

$$r_t = \frac{1 + \delta E_t(q_{t+1})}{q_t}. \tag{2.16}$$

A versão linearizada[13] de (2.16) é representada por:

$$\hat{r}_t = \delta\beta E_t(\hat{q}_{t+1}) - \hat{q}_t. \qquad (2.16)'$$

A identidade orçamentária do governo pode ser escrita da seguinte forma:

$$q_t\tilde{b}_t = (1 + \delta q_t)\tilde{b}_{t-1} + s_t w_t h_t - \tau_t,$$

onde $\tilde{b}_t$ representa a quantidade total de títulos emitidos pelo governo no período *t*. Para a validade da equação acima deve ser feita uma hipótese adicional sobre o esquema de lançamento dos títulos. A saber, é preciso que a cada período o governo troque todo o estoque de sua dívida que esteve em circulação no período anterior por dívida nova. Essa hipótese não faz qualquer diferença para os detentores dos títulos ou para o tesouro, pois a nova carteira oferecida em troca da dívida antiga terá exatamente a mesma seqüência de pagamentos futuros, data por data. O objetivo dessa hipótese é simplificar a notação, não sendo necessário fazer menção a quantidades de títulos de diferentes gerações ou ao preço de qualquer título fora da data de lançamento.

Definindo uma nova variável $b_t \equiv q_t\tilde{b}_t$ como sendo o valor real do estoque da dívida do governo, a equação anterior assume o seguinte formato:

---

[13] A variável q_t assume o seguinte valor em *steady state*: $\overline{q} \equiv \dfrac{\beta}{1-\delta\beta}$.

$$b_t = \left(\frac{1 + \delta q_t}{q_{t-1}} \right) b_{t-1} + s_t w_t h_t - \tau_t \,, \tag{2.17}$$

Analogamente à equação (2.12), a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$b_t = \widetilde{r}_{t-1} b_{t-1} + s_t w_t h_t - \tau_t \,, \tag{2.18}$$

$$\widetilde{r}_{t-1} \equiv \frac{1 + \delta q_t}{q_{t-1}} \,, \tag{2.19}$$

onde $\widetilde{r}_{t-1}$ é a taxa real de juros *ex post* do título de longo prazo, somente conhecida no período *t*, em contraposição a r_{t-1}, taxa de juros *ex ante* do título de um período, conhecida no período *t-1*, como indicado pela equação (2.16). A equação (2.19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\widetilde{r}_{t-1} \equiv \frac{1 + \delta q_t}{q_{t-1}} = \frac{1 + \delta E_{t-1}(q_t)}{q_{t-1}} + \delta \left[\frac{q_t - E_{t-1}(q_t)}{q_{t-1}} \right] = r_{t-1} + \delta \left[\frac{q_t - E_{t-1}(q_t)}{q_{t-1}} \right].$$

A versão linearizada de (2.19) é:

$$\hat{\widetilde{r}}_{t-1} = \frac{1}{\beta} \hat{r}_{t-1} + \delta \left[\hat{q}_t - E_{t-1}(\hat{q}_t) \right]. \tag{2.19'}$$

Assim, a versão *linearizada* de (2.18) pode ser representada por:

$$\hat{s}_t - \hat{\tau}_t = \lambda \left(\hat{b}_t - \frac{\hat{b}_{t-1}}{\beta} \right) - \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right) \left(\hat{w}_t + \hat{h}_t \right) - \lambda \hat{\widetilde{r}}_{t-1} \,. \tag{2.18'}$$

A equação (2.18)' difere da equação (2.12)' apenas em seu terceiro termo. Enquanto no caso inicial a variável relevante era a taxa de juros para títulos de um período, aqui, de acordo com (2.19)', este termo é uma expressão que envolve também os ganhos ou perdas não esperadas de capital para os detentores dos títulos de longa duração. A expressão (2.12)' pode ser obtida como caso particular de (2.18)', adotando-se simplesmente a hipótese de maturidade efetiva igual a um (T = 1 ou δ = 0).

Finalmente, a partir de (2.18)' deve ser feita a hipótese adicional sobre a restrição à liberdade de financiamento do governo. Seguindo o objetivo inicial de ligar a taxação corrente ao serviço da dívida, no presente modelo essa hipótese, em analogia ao caso apresentado na seção anterior, assume o seguinte formato:

$$\hat{s}_t = -\gamma\lambda\hat{\tilde{r}}_{t-1}\,. \tag{2.20}$$

A equação (2.20) é a expressão análoga a (2.13), exceto por uma diferença. A taxa de juros relevante aqui é a *ex post*, que não é conhecida em t-1, mas apenas em t. O novo formato da restrição à suavização da taxação distorciva incorpora um termo adicional que corresponde às perdas (ou ganhos) de capital sofridas por detentores de títulos de maturidade superior a um período:

$$\hat{s}_t = -\gamma\lambda\left(\frac{1}{\beta}\hat{r}_{t-1} + \delta\left[\hat{q}_t - E_{t-1}\left(\hat{q}_t\right)\right]\right). \tag{2.21}$$

2.4.2
Resultados

Aqui são apresentados os resultados obtidos a partir da solução do modelo que já incorpora a possibilidade de títulos com maturidades superiores a um período. O novo sistema linearizado é formado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \hat{y}_t = \hat{a}_t + \hat{h} \\ \hat{a}_t = -\mu \hat{s}_t + \hat{w}_t \\ \hat{r}_t = \sigma\left[E_t\left(\hat{y}_{t+1}\right) - \hat{y}_t\right] \\ \sigma \hat{y}_t + \upsilon \hat{h}_t = \hat{w}_t \\ \hat{r}_t = \delta\beta E_t\left(\hat{q}_{t+1}\right) - \hat{q}_t \\ \hat{s}_t = -\gamma\lambda\left(\dfrac{1}{\beta}\hat{r}_{t-1} + \delta\left[\hat{q}_t - E_{t-1}\left(\hat{q}_t\right)\right]\right) \\ \\ \hat{a}_t = \rho \hat{a}_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$$

Os resultados da Figura 2.03 foram obtidos trabalhando com o mesmo conjunto de parâmetros apresentados na Tabela 2.01. Aqui, no entanto, há um novo parâmetro de controle no modelo, qual seja, a maturidade média da dívida. No sistema acima o parâmetro relevante é $\delta \geq 0$, mas os resultados são apresentados sob a forma de maturidade média (*T*, em períodos de tempo). A relação entre o δ e T é única, e representada por (2.15). O resultado obtido confirma a expectativa inicial. Ou seja, *tudo mais constante*, um aumento da maturidade média da dívida diminui o impacto das mudanças na taxa de juros sobre o serviço da dívida, diminuindo assim a necessidade de se alterar o nível de taxação distorciva corrente e, portanto, diminuindo a perda de bem-estar associada à incapacidade de suavizar a taxação.

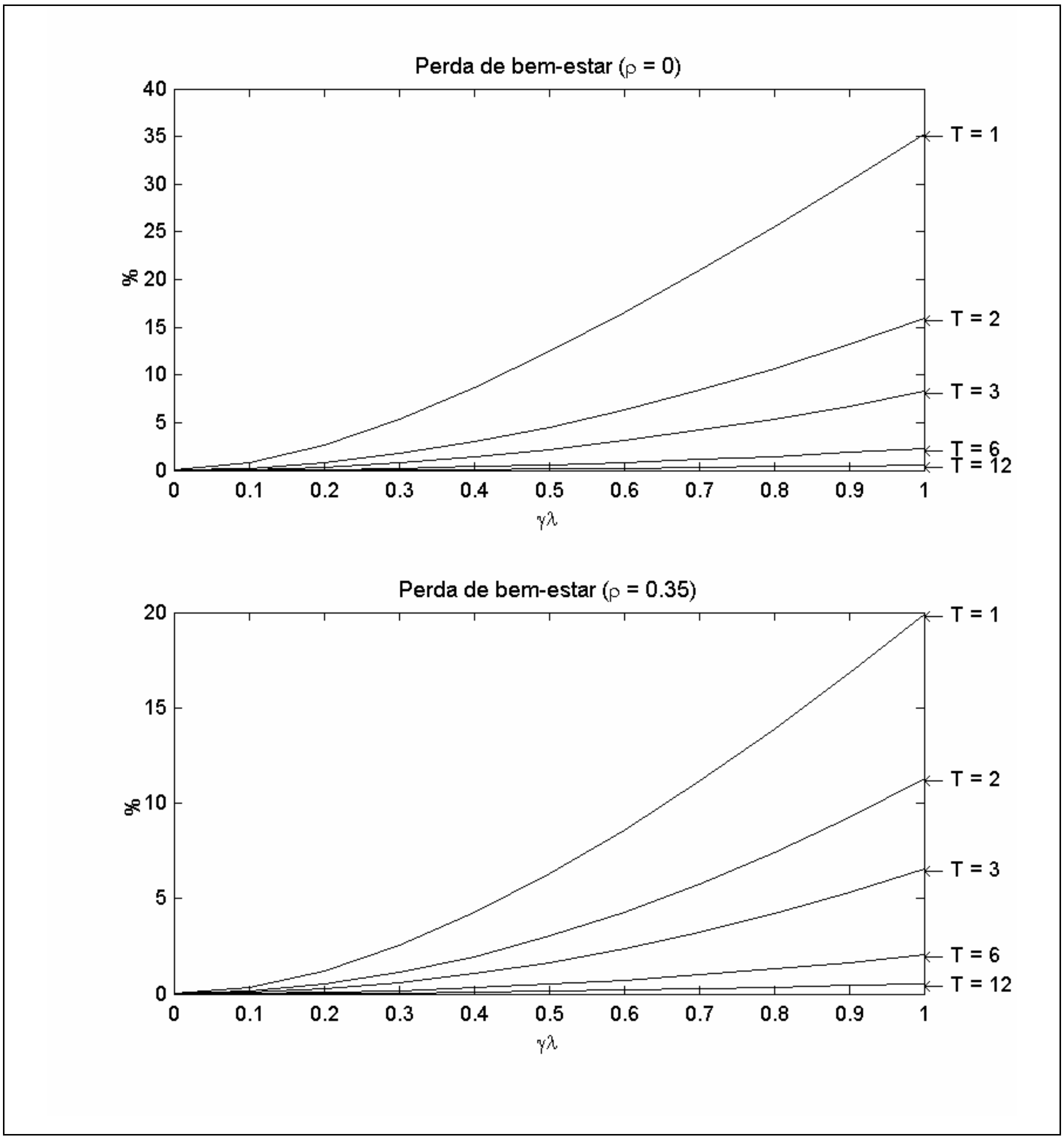
Perda de bem-estar (ρ = 0)
%
γλ
T = 1
T = 2
T = 3
T = 6
T = 12
Perda de bem-estar (ρ = 0.35)
%
γλ
T = 1
T = 2
T = 3
T = 6
T = 12

Figura 2.03