

3

Formulação Matemática

3.1

Descrição do problema

O problema a ser analisado é mostrado na fig. 3.1. O fluido escoa através de um duto circular de diâmetro d , passa através de um duto maior (diâmetro D) e sofre uma contração, saindo pelo duto menor com diâmetro igual ao de entrada. Para todos os casos analisados, o comprimento e raio dos tubos de entrada e saída são de 200 mm e 4,8 mm, respectivamente, garantindo que o escoamento esteja desenvolvido antes da expansão. O escoamento é laminar, em regime permanente, e o fluido tem um comportamento viscoplástico. Para a solução numérica do problema, serão resolvidas as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento linear, juntamente com uma equação constitutiva.

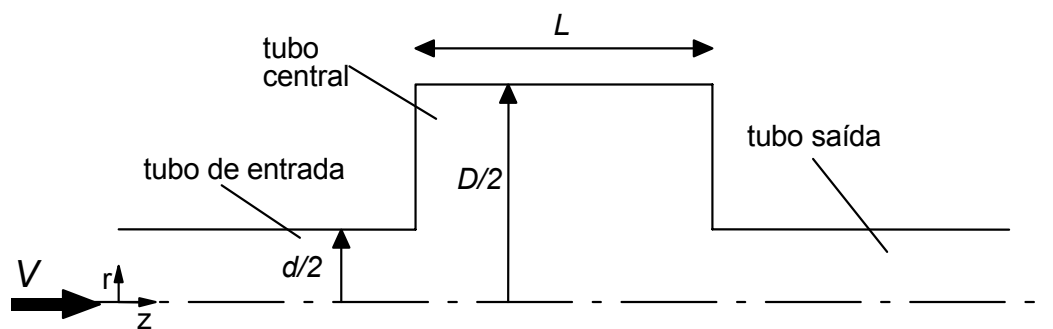


Figura 3.1 - Geometria do problema analisado

3.2

Equacionamento

As seguintes hipóteses são consideradas para a solução do problema:

1. Dissipação viscosa desprezível
2. Fluido incompressível
3. Escoamento laminar

4.Regime permanente

5.Escoamento com simetria axial

6.Tubulação horizontal

Todas as equações estão representadas em coordenadas cilíndricas. Devido à simetria axial o problema torna-se bi-dimensional.

Considerando-se as hipóteses acima, a equação de conservação de massa pode ser assim descrita :

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbf{v} = u \hat{e}_z + v \hat{e}_r + w \hat{e}_\theta \quad (3.2)$$

Nas equações acima, $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade, u é o componente da velocidade na direção axial, v é o componente da velocidade na direção radial e w é o componente da velocidade na direção tangencial, que é igual a zero para o problema estudado.

Sendo assim, a equação de conservação de massa em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} = 0 \quad (3.3)$$

onde z é a coordenada na direção axial e r é a coordenada na direção radial.

A equação de conservação de quantidade de movimento linear é dada por:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = - \text{grad } p + \text{div } \mathbf{T} \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{T}$ é o tensor das tensões, ρ é a densidade do fluido e p é a pressão.

O fluido a ser analisado tem comportamento viscoplástico, podendo ser modelado pela equação constitutiva de Fluido Newtoniano Generalizado, eq.(1.1), com uma função viscosidade apropriada.

As equações completas de conservação de quantidade de movimento linear em coordenadas cilíndricas, já desprezando o componente na direção θ , ficam :

- Equação de conservação de quantidade de movimento linear na direção radial :

$$\rho \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.5)$$

- Equação de conservação de quantidade de movimento linear na direção axial :

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.6)$$

Os componentes do tensor das tensões são dados por :

$$\tau_{zz} = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{zz} \quad (3.7)$$

$$\tau_{rr} = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{rr} \quad (3.8)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{zr} \quad (3.9)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{\theta\theta} \quad (3.10)$$

Nas expressões acima, η é a função viscosidade e $\dot{\gamma}_{ij}$ são os componentes ij do tensor taxa de deformação, dados por:

$$\dot{\gamma}_{zz} = 2 \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.11)$$

$$\dot{\gamma}_{rr} = 2 \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.12)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \dot{\gamma}_{zr} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.13)$$

$$\dot{\gamma}_{\theta\theta} = 2 \frac{v}{r} \quad (3.14)$$

Substituindo os componentes da equação constitutiva na equação de conservação de quantidade de movimento temos para a direção radial:

$$\rho \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(2r\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] - \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{v}{r^2} \right\} - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.15)$$

e para a direção axial:

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.16)$$

Para a obtenção das equações de conservação de quantidade de movimento linear na sua forma final, é necessário definir a função viscosidade a ser utilizada. Serão utilizadas duas diferentes expressões para a função viscosidade. A primeira delas é a do modelo de Herschel-Bulkley, característica para modelar materiais viscoplásticos. Nesta equação, a viscosidade tende a infinito para tensões inferiores a tensão limite de escoamento e, para tensões acima deste valor, a viscosidade cai com a taxa de deformação. A equação da função viscosidade é dada por:

$$\eta = \begin{cases} \infty & \tau \leq \tau_0 \\ \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^{n-1} & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

É difícil lidar numericamente com a função viscosidade de Herschel-Bulkley apresentada na forma descrita pelas equações (3.17). A abordagem usual utilizada em esquemas numéricos é substituir o modelo de Bingham por uma outra função viscosidade. Este procedimento foi feito pela primeira vez por Beverly e Tanner (1992), que definiram um modelo de bi-viscosidade para substituir o modelo de Bingham. Esta idéia pode ser facilmente estendida para materiais de Herschel-Bulkley, resultando na seguinte representação aproximada da função viscosidade (modelo de bi-viscosidade modificado):

$$\eta = \begin{cases} \eta_{grande} & \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c \\ \frac{\tau_o}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^{n-1} & \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad (3.18)$$

Para o caso de materiais de Bingham, Beverly e Tanner (1992) recomendam $\eta_{grande} = 1000\mu_p$, sendo μ_p a viscosidade plástica. Emprega-se esse valor aqui também. Assim:

$$\eta_{grande} = 1000k\dot{\gamma}_c^{n-1} \quad (3.19)$$

onde $\dot{\gamma}_c$ é a taxa de deformação característica, dada por:

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\tau_o}{\eta_{\infty} - k\dot{\gamma}^{n-1}} = \frac{\tau_o}{999k\dot{\gamma}^{n-1}} \quad (3.20)$$

A outra função viscosidade a ser utilizada é dada pela equação de Carreau-Yasuda (Bird et al., 1987). Neste modelo, a viscosidade cai com a taxa de deformação, mas é limitada por dois patamares, um máximo de viscosidade, a baixas taxas de deformação e um mínimo de viscosidade, a altas taxas de deformação. Neste caso, a função viscosidade é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_o - \eta_{\infty}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.21)$$

Na equação acima, η_o é a viscosidade a baixas taxas de deformação, η_{∞} é a viscosidade a altas taxas de deformação, λ é a constante de tempo, a é o coeficiente exponencial, n é o expoente, estes são parâmetros reológicos do material, obtidos a partir de um ajuste de curvas aos dados experimentais de viscosidade.

3.3 Condições de contorno

As condições de contorno para o problema são dadas por:

- Na entrada do duto, a velocidade é considerada horizontal e uniforme, na seção transversal:

$$u = \bar{u} \quad (3.22)$$

$$v = 0 \quad (3.23)$$

- Na saída do escoamento, considera-se o escoamento desenvolvido, i.e., velocidade nula na direção radial e variação nula da velocidade na direção axial :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

$$v = 0 \quad (3.25)$$

- Na linha de simetria, correspondente ao centro do duto:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (3.26)$$

$$v = 0 \quad (3.27)$$

- Nas paredes dos dutos utiliza-se a condição de impermeabilidade e não deslizamento:

$$u = 0 \quad (3.28)$$

$$v = 0 \quad (3.29)$$

3.4 Adimensionalização

As equações (3.15), (3.16), (3.18) e (3.21) na forma adimensional são assim expressas:

- equação adimensional de conservação de quantidade de movimento para a direção radial:

$$\left(v^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2r^* \eta^* (\dot{\gamma}) \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\eta^* (\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \right] - \eta^* (\dot{\gamma}) 2 \frac{v^*}{r^*} \right\} - \frac{\partial P^*}{\partial r^*} \quad (3.30)$$

- equação adimensional de conservação de quantidade de movimento para a direção axial:

$$\left(v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \eta^* (\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(2 \eta^* (\dot{\gamma}) \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \right\} - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \quad (3.31)$$

- equação adimensional da função viscosidade de Herschel-Bulkley modificado:

$$\eta^* = \begin{cases} \eta^*_{grande} & \dot{\gamma}^* \leq \dot{\gamma}_c^* \\ \frac{\tau_o^*}{\dot{\gamma}^*} + (1 - \tau_o^*) \dot{\gamma}^{*n-1} & \dot{\gamma}^* \geq \dot{\gamma}_c^* \end{cases} \quad (3.32)$$

onde $\eta^*_{grande} = 1000$ e $\dot{\gamma}_c^* = 1$.

- equação adimensional da função viscosidade de Carreau-Yasuda:

$$\frac{\eta^* - \eta_\infty^*}{\eta_o^* - \eta_\infty^*} = \left[1 + \left(De \dot{\gamma}^* \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.33)$$

Os parâmetros e as variáveis adimensionais utilizados nas equações acima são dados por:

$$r^* = \frac{r}{d}, \quad z^* = \frac{z}{d} \quad (3.34)$$

$$u^* = \frac{u}{\bar{u}}, \quad v^* = \frac{v}{\bar{v}}, \quad (3.35)$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_c}, \quad \eta_o^* = \frac{\eta_o}{\eta_c}, \quad \eta_\infty^* = \frac{\eta_\infty}{\eta_c} \quad (3.36)$$

$$\dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \quad (3.37)$$

$$P^* = \frac{P}{\rho \bar{u}^2} \quad (3.38)$$

$$De = \lambda \dot{\gamma}_c \quad - \text{número de Deborah} \quad (3.39)$$

$$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\eta_c} \quad - \text{número de Reynolds} \quad (3.40)$$

A viscosidade e a taxa de deformação características, η_c e $\dot{\gamma}_c$, são calculadas na parede do tubo de menor diâmetro na região desenvolvida do escoamento.