6

Conclusão

No Capítulo 1 discutimos brevemente como os automorfismos genéricos de cubos com alças se enquadram no projeto de entender classes de isotopias de variedades de dimensão três que são orientáveis, compactas, irredutíveis, conexas e com bordo. Conforme esboçamos, automorfismos genéricos de produtos com alças e cubos com alças são as partes menos entendidas desse estudo. Os progressos obtidos por [40] e por esta tese, embora significativos, ainda deixam espaço para muita pesquisa subsequente.

Uma das dificuldades principais no estudo atual de automorfismos genéricos de cubos com alças é a falta de estrutura. A construção das laminações invariantes em [40] procura suprir essa falta, mas seu sucesso ainda é limitado: aparentemente, ainda é mais fácil provar resultados negativos, através de contra-exemplos, do que conseguir estabelecer relações gerais entre os diversos conceitos e objetos envolvidos (e.g., propriedades das laminações, o fator de crescimento). Por exemplo, fazendo a comparação natural com automorfismos de superfícies, no caso de cubos com alças não existe condição sobre o automorfismo induzido em π_1 que seja necessária para o automorfismo ser genérico (vide Exemplo 3.15). Um problema muito importante é, portanto, estabelecer estruturas extras que possam trazer informação sobre o automorfismo. Nesse sentido, ter identificado a propriedade de tensão transversal, que introduzimos e discutimos no Capítulo 5, é um dos grandes sucessos desse trabalho. É claro que ainda há várias perguntas em aberto relacionadas a tal propriedade, deixando, até que se consiga identificar seu papel exato no estudo de automorfismos genéricos, espaço para bastante pesquisa subsequente. Os outros dois principais capítulos deste trabalho, dos quais destacamos a construção de exemplos como outro grande sucesso dessa tese, também ainda admitem continuidade e aperfeiçoamento. Nos próximos parágrafos, abordaremos brevemente cada um desses três capítulos, na tentativa de indicar caminhos e perguntas que possam promover progresso subsequente. Pretendemos seguir algumas dessas idéias em trabalhos futuros.

A questão dos exemplos, no Capítulo 3, é de motivação óbvia. As técnicas que desenvolvemos já podem gerar uma boa variedade de exemplos mas admitem generalizações simples. Um automorfismo de um cubo com alças é genérico se satisfizer duas condições. Uma é simples: sua restrição ao bordo deve ser pseudo-Anosov, e existem várias ferramentas para verificar essa propriedade ou gerar automorfismos que a satisfaçam. A parte mais difícil é garantir que não há superfícies redutoras fechadas.

Usamos dois critérios diferentes para garantir a inexistência de superfícies redutoras fechadas. Um é algébrico, dependendo das potências do automorfismo induzido em π_1 serem irredutíveis (Lema 3.3). O outro é geométrico: a superfície redutora fechada deve ser o bordo interno de um produto com alças invariante com, no mínimo, duas 1-alças.

Na abordagem algébrica, garantimos que o automorfismo tinha a propriedade desejada construindo um automorfismo pseudo-Anosov de uma superfície com somente uma componente de bordo (ver Teorema 2.26). Porém, nem todo automorfismo de um grupo livre pode ser realizado como o automorfismo induzido em π_1 de um automorfismo de uma superfície com bordo (automorfismos obtidos dessa forma são, às vezes, denominados por *automorfismos geométricos* [2]). Uma forma de generalizar nossa construção é procurar por automorfismos de grupos livres que *não* sejam geométricos e cujas potências sejam irredutíveis. Isso é possível: por exemplo, em [15] se desenvolvem técnicas algébricas para a construção de automorfismos de grupos livres com essas propriedades. Sabemos que qualquer automorfismo de um grupo livre é realizado como o automorfismo induzido em π_1 por um automorfismo $f: H \rightarrow H$ de algum cubo com alças H ([16]). Podemos, portanto, compor tal f com uma sequência de torções em discos que garanta que a restrição ao bordo seja pseudo-Anosov e, portanto, o resultado será genérico.

Uma das propriedades interessantes conseguidas nos exemplos construídos utilizando o critério geométrico era que o automorfismo induzido em π_1 não era necessariamente irredutível, podendo até mesmo ser a identidade (Exemplo 3.15). Para isso é necessário que o gênero do cubo com alças seja 2. Esse tipo de argumento pode ser generalizado. Se obtemos algum controle sobre as reduções que um automorfismo de um grupo livre admite, combinado com a restrição geométrica no número de alças de um produto com alças invariante, devemos poder obter automorfismos genéricos de cubos com alças de gênero arbitrariamente alto cujo automorfismo induzido em π_1 seja redutível. Por exemplo, consideremos um automorfismo redutível do grupo livre F_3 em três geradores. Suponhamos que a única redução possível

seja dada por um fator próprio livre F_2 em dois geradores (é fácil construir um tal automorfismo a partir de um automorfismo irredutível do grupo livre em dois geradores). Como já foi mencionado, ele é realizado como automorfismo induzido em π_1 de um automorfismo f de um cubo com alças de gênero 3 cuja restrição ao bordo é pseudo-Anosov. Segue que uma superfície redutora S para f deve ser fechada e ter gênero 2. Mas, nesse caso, o produto com alças invariante por f cujo bordo interior é S deve ter exatamente uma 1-alça, uma contradição, donde f deve ser genérico. Este é somente um exemplo da seguinte construção mais geral: se toda redução do automorfismo induzido $f_*: \pi_1 \rightarrow \pi_1$ tiver que ser realizada em H por um cubo com alças $H' \subseteq H$ cujo complemento é um produto com alças tendo somente uma 1-alça, então f é genérico.

É conveniente ter o algoritmo que desenvolvemos no Capítulo 4. Idealmente seria bom ter um algoritmo que decidisse se um determinado automorfismo é genérico ou não. É possível que nosso algoritmo possa ser adaptado para realizar essa tarefa, conforme indicamos: se a restrição de um automorfismo f ao bordo for pseudo-Anosov então f deixa de ser genérico somente se admitir superfície redutora fechada. Nesse caso existe sistema de discos admissível que não é irredutível. Conforme ocorre no caso das superfícies, é plausível que, ao se achar um representante para f que seja o mais eficiente possível em algum sentido (que provavelmente deverá levar em conta a questão de tensão transversal), se ache a redução. No caso contrário de não se achar nenhuma redução, o automorfismo seria genérico. Tal algoritmo permitiria, potencialmente, a obtenção de qualquer automorfismo genérico, na base de “ensaio e erro”.

É bem natural, também, que a remoção da hipótese de que ∂f é pseudo-Anosov na condução do algoritmo possa trazer informação relevante sobre alguns casos redutíveis (e.g. levantamentos ou automorfismos genéricos de produtos com alças).

A questão da tensão transversal, tratada no Capítulo 5, parece ser extremamente importante. Um dos problemas principais que buscamos no estudo de automorfismos genéricos é o de identificar até que ponto é única a laminação cujo fator de crescimento é minimal. Outro problema, claramente relacionado, é o de se achar propriedades da laminação que sejam necessárias e suficientes para se ter fator de crescimento minimal. Acreditamos que tensão transversal seja relevante para ambas as questões. Metas naturais seriam, portanto, mostrar a Conjectura 5.4 em geral e tentar identificar o quão única é uma laminação transversalmente tensa.

A principal obstrução à demonstração da conjectura é que todas as

modificações em Λ devem ser equivariantes. Na Proposição 5.14 demonstramos a conjectura em condições especiais. Sob tais hipóteses mostramos que, talvez fazendo uma pequena modificação no sistema de discos (obtida por mudança de nível), a existência de um disco tensor com respeito a H_0 implica a existência de um tal disco em H_1 , donde podemos usá-lo para modificar Λ de forma equivariante e diminuir λ . O argumento que usamos então certamente não funciona em uma demonstração geral, não sendo difícil imaginar contra-exemplos. Isso não significa que a conjectura seja intratável: podemos procurar por outras operações equivariantes que modifiquem a laminação de forma que o resultado apresente discos tensor com respeito a H_0 em H_1 .

Não temos nenhuma proposta clara para abordar a questão da unicidade da laminação cujo fator de crescimento é minimal.

Finalizando nossas observações sobre a propriedade de tensão transversal, notamos que a conjectura que enunciamos diz que tal propriedade é condição necessária para a minimalidade de λ . Devemos fazer algum comentário sobre a questão da suficiência. De fato, não sabemos se tensão transversal é condição suficiente para minimalidade: é plausível que, mesmo com $\Lambda(\mathcal{E})$ sendo transversalmente tensa, exista um outro sistema de discos $\mathcal{E}'$ tal que $\lambda(\mathcal{E}') < \lambda(\mathcal{E})$. Isso pode ser muito difícil de se detectar: o critério que temos para identificar redução do fator de crescimento é dado pela Proposição 2.23, que não consegue comparar sistemas sem nenhuma relação a não ser em situações muito particulares. Nesse sentido, a propriedade de tensão transversal parece ser a melhor possível.

Acreditamos que o estudo de automorfismos genéricos de cubos com alças ainda admite muito progresso. Certamente há uma grande variedade de perguntas interessantes cujas respostas permanecem desconhecidas nesse momento, não se limitando àquelas discutidas acima, deixando bastante espaço para muita atividade e pesquisa.