

## 5

### Tensão transversal.

Neste capítulo, mostramos que a propriedade de incompressibilidade não é suficiente para  $\lambda$  ser minimal. Propomos uma outra propriedade, *tensão transversal*, mais forte que a propriedade de incompressibilidade. Introduzimos esse conceito na Seção 5.1, motivado por exemplos. Conjeturamos que tensão transversal é condição necessária à minimalidade de  $\lambda$ . Demonstramos a conjectura supondo certas condições técnicas. Essas condições não são muito fortes: por exemplo, mostramos que podemos supô-las no caso do cubo com alças ter gênero dois.

Na Seção 5.2 aplicamos o conceito de tensão transversal ao problema de estimar o fator de crescimento. Mostramos que, se a laminação for transversalmente tensa, seu respectivo fator de crescimento é limitado superiormente pelo fator de crescimento do automorfismo restrito ao bordo. Em particular, o fator de crescimento minimal de todo automorfismo genérico de um cubo com alças de gênero dois é menor que ou igual ao fator de sua restrição ao bordo.

#### 5.1

##### Discos tensores transversais.

Seja  $f: H \rightarrow H$  um automorfismo genérico de um cubo com alças  $H$ . Suponha que  $(\Lambda, \mu)$  é a laminação bidimensional com medida invariante por  $f$ , associada a uma estrutura de alças  $\mathcal{A}$  e um sistema de discos  $\mathcal{E}$ . Seja  $(\Omega, \nu)$  a respectiva laminação unidimensional com medida, transversal à  $\Lambda$ . Suponha ainda que  $\Lambda - \mathring{H}_0$  seja incompressível em  $\mathring{H} - \mathring{H}_0$ .

Considere o fator de crescimento  $\lambda = \lambda(\mathcal{A})$ . O próximo exemplo sugere que a propriedade de incompressibilidade não é suficiente para garantir minimalidade de  $\lambda$ .

**Exemplo 5.1.** Considere  $\hat{V}$  uma 0-alça de  $H_1$ , e suponha que  $H_0 \cap \hat{V}$  seja como na Figura 5.1 a), com  $\hat{V}$  interceptando 1-alças  $\hat{e}_i$  e  $\hat{e}_j$  de  $H_0$ , e  $f(E_1)$  a imagem de um disco  $E_1 \in \mathcal{E} = \{E_i\}$ .

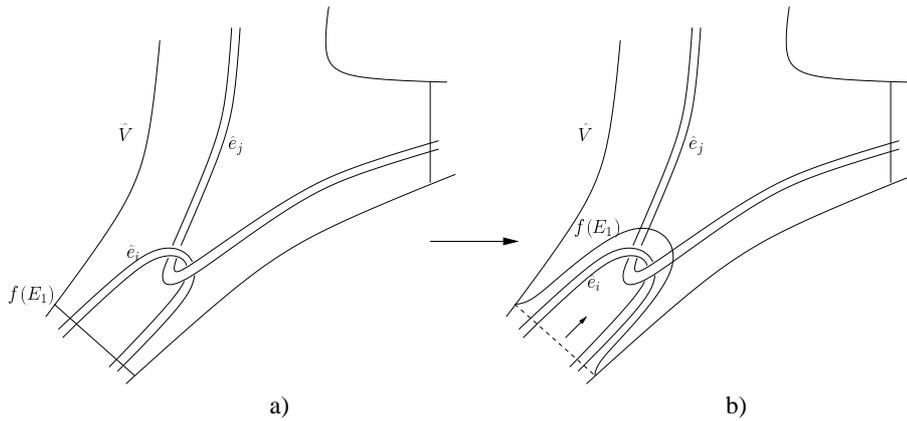


Figura 5.1: a) Um disco  $f(E_1)$  dual a uma 1-alça de  $H_1$ , interceptando a 1-alça  $\hat{e}_i$  de  $H_0$ ; b) a operação que reduz  $\lambda$ .

Agora considere  $N = A^T$ , a matriz de incidência para as 1-alças de  $H$ , que é a transposta da matriz de incidência  $A = A(\mathcal{A})$  do sistema de discos. É claro, portanto, que  $N$  tem o mesmo autovalor de Perron-Frobenius  $\lambda$ .

Lembramos que  $\nu$  é a medida invariante transversal a  $\Omega$ . Como  $E_i$  é transversal a  $\Omega$ , faz sentido considerar

$$\hat{\nu}_i = \nu(E_i),$$

o que determina um vetor  $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_0, \dots, \hat{\nu}_m)$ , que é exatamente o autovetor de Perron-Frobenius de  $N = A^T$ :

$$N\hat{\nu} = \begin{pmatrix} n_{00} & \dots & n_{0i} & \dots & n_{0j} & \dots & n_{0m} \\ & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & & \\ n_{m0} & \dots & \dots & \dots & \dots & n_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\nu}_0 \\ \vdots \\ \hat{\nu}_i \\ \vdots \\ \hat{\nu}_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{\nu}_0 \\ \vdots \\ \hat{\nu}_i \\ \vdots \\ \hat{\nu}_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Suponha que  $\hat{\nu}_j < \hat{\nu}_i$ . Podemos modificar  $f$  por uma isotopia, de forma que  $f(E_1)$  deixe de interceptar  $\hat{e}_i$ , introduzindo interseções com  $\hat{e}_j$  (veja Figura 5.1 b)).

Essa operação pode ser realizada sem modificar o sistema de discos ou a estrutura de alças. Porém, duas entradas da matriz de incidência mudam.

A transposta  $N'$  da nova matriz de incidência se torna:

$$N' = \begin{pmatrix} n_{00} & \dots & n_{0i} - 2 & \dots & n_{0j} + 2 & \dots \\ & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ n_{m0} & \dots & \dots & \dots & \dots & n_{mm} \end{pmatrix}.$$

Vamos supor que  $N'$  é irredutível. Lembramos que  $\hat{\nu}_j < \hat{\nu}_i$  e consideramos  $N'\hat{\nu}$ :

$$\begin{aligned} (N'\hat{\nu})_k &= \lambda\hat{\nu}_k && \text{if } k \neq 0; \\ (N'\hat{\nu})_0 &= \lambda\hat{\nu}_0 - 2\hat{\nu}_i + 2\hat{\nu}_j < \lambda\hat{\nu}_0 \end{aligned}$$

É um resultado clássico na teoria de Perron-Frobenius (Proposição 2.23) que, nessas condições,

$$\lambda(N') < \lambda = \lambda(N).$$

A situação descrita no exemplo acima acontece de fato, como veremos no Exemplo 5.3. Ela não somente mostra que a propriedade de incompressibilidade não é suficiente para garantir minimalidade do fator de crescimento, mas também sugere que a interseção ponderada  $E_i \bullet (\Omega, \nu) = \nu(E_i)$  (onde  $E_i \in \mathcal{E}$ ) deve ser relevante. Introduzimos, então, a seguinte definição:

**Definição 5.2.** Seja  $(D, \partial D) \rightarrow (H, \Lambda)$  um disco mergulhado. Suponhamos que  $\omega: \Omega \rightarrow \mathring{H}$  é transversal a  $D$  e consideremos  $\Delta \subseteq L \in \Lambda$  tal que  $\partial\Delta = \partial D$ . Dizemos que  $D$  é um *disco tensor transversal* para  $\Lambda$  se

$$\nu(D) < \nu(\Delta),$$

onde  $\nu$  é a medida em  $\Omega$ .

A laminação bidimensional  $\Lambda$  é dita *transversalmente tensa* se não há disco tensor transversal. Caso contrário dizemos que é *transversalmente frouxa*.

*Observação.* Podemos nos referir a  $D$  como um *disco tensor transversal imerso* se satisfizer todas as condições da Definição 5.2 mas com  $D \rightarrow H$  uma imersão (por exemplo, no Lema 5.5). Enfatizamos, porém, que, por disco tensor transversal, estaremos supondo que é mergulhado.

Deve ser mencionado também que a exigência de que  $\omega$  seja transversal a um disco tensor transversal, embora natural, até mesmo necessária para

que  $D \bullet (\Omega, \nu)$  faça sentido, implica que  $D$  não intercepta o conjunto singular  $S(\Omega)$  de  $\omega(\Omega)$ . Temos razões para acreditar que  $S(\Omega)$  deve ser relevante, mas não abordaremos essa questão nessa dissertação.

Notamos também que a propriedade de ser transversalmente tensa generaliza a propriedade de incompressibilidade: todo nulógono é um disco tensor transversal.

Vemos, então, que a laminação no Exemplo 5.1 é transversalmente frouxa, com um disco tensor transversal representado na Figura 5.1 b). Tal exemplo, porém, descreve uma situação hipotética. No exemplo que se segue, mostramos que o mesmo tipo de fenômeno acontece em exemplos reais, obtidos de automorfismos reais.

**Exemplo 5.3.** Nos referimos ao Exemplo 4.34 e consideramos o automorfismo  $f: H \rightarrow H$  do cubo com alças  $H$ , com a estrutura de alças  $\mathcal{A}$  ali definida. Como foi feito então, consideramos a direção  $f(B^{-1})$  na 1-alça de  $H_1$ . Essa é a direção onde a regressão ocorre.

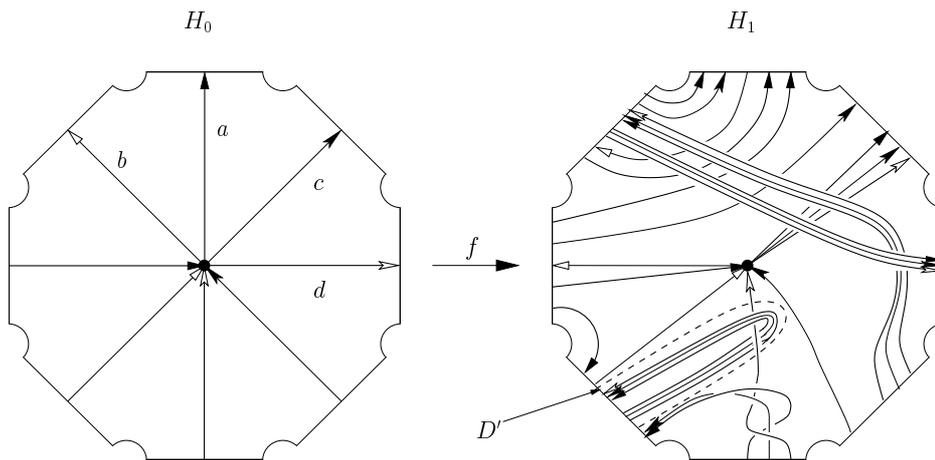


Figura 5.2: Um disco tensor transversal  $D'$  em  $H_1$ .

Na Figura 5.2, pode-se ver que há um disco tensor transversal  $\Delta$  para uma folha de  $\Lambda \cap H_1$  paralela a  $f(B^{-1})$ . De fato, seja  $\Delta' \subseteq f(B^{-1})$  o disco tal que  $\partial\Delta' = \partial\Delta$ . Segue que

$$\nu(\Delta) = 2\nu(D) < 2(\nu(A) + \nu(C) + \nu(D)) = \nu(\Delta').$$

Considerando esses últimos exemplos enunciamos a seguinte conjectura:

**Conjectura 5.4.** *Se  $\lambda$  for minimal então  $\Lambda$  é transversalmente tensa.*

A estratégia para abordar a conjectura será a de supor que  $\Lambda$  não é transversalmente tensa e procurar por uma forma de reduzir  $\lambda$ . A operação

que reduzirá  $\lambda$  será dada pelo Lema 5.11. Para poder usá-lo, precisaremos achar um disco tensor transversal com algumas propriedades convenientes. Isso será feito ao longo dos próximos lemas e envolverá algumas novas definições.

Os discos tensores transversais dos exemplos possuíam algumas propriedades especiais. Por exemplo, eles não interceptam a laminação bidimensional  $\Lambda$  (a não ser em seu bordo). Diremos que um disco tensor transversal com essa propriedade está *no complemento de  $\Lambda$* .

**Lema 5.5.** *Se  $\Lambda$  é transversalmente frouxa então existe um disco tensor transversal no complemento de  $\Lambda$ .*

*Demonstração.* Seja  $D$  um disco tensor transversal para  $\Lambda$ . A estratégia geral será a seguinte: se  $\dot{D} \cap \Lambda \neq \emptyset$  então vamos modificar  $D$  por “corte e colagem”, de forma a simplificar  $|D \cap \Lambda|$ . Essas operações deverão preservar tensão transversal, o que será uma restrição na escolha de quais cortes e colagens podem ser realizados. Privilegiando tensão transversal, podemos ser forçados a introduzir auto-interseções, obtendo um disco tensor transversal imerso que não será mergulhado. Vamos, então, precisar de uma nova operação que conserte o mergulho, ainda preservando tensão transversal e sem introduzir novas interseções em  $|D \cap \Lambda|$ . A seguir desenvolvemos essa estratégia com detalhes.

Há um  $n$  tal que  $D \subseteq H_n$ . Em  $H_n$  a laminação  $\Lambda \cap H_n$  consiste de discos duais às 1-alças  $\hat{e}_i = \hat{e}_i^n$  de  $H_n$  (para não carregar a notação vamos omitir o sobrescrito das 1-alças, lembrando que estará implícito que estamos em  $H_n$ ). Damos às 1-alças a estrutura produto padrão  $\hat{e}_i \simeq E_i \times I$  por discos duais, donde  $\Lambda \cap \hat{e}_i$  é uma laminação por discos horizontais. Podemos supor ainda que  $\Omega \cap \hat{e}_i$  é vertical na estrutura de produto (veja Figura 5.3).

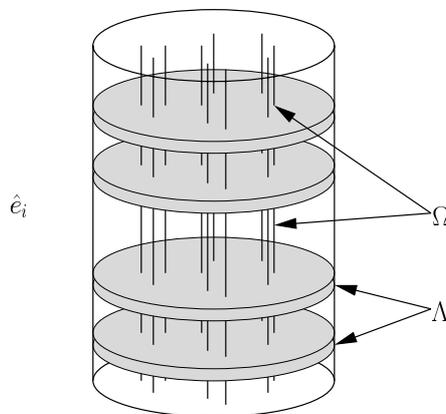


Figura 5.3: A estrutura de produto em  $\hat{e}_i$ , onde  $\Lambda$  é horizontal e  $\Omega$  é vertical.

Começamos perturbando  $D$  de forma que fique transversal a  $\Lambda$ , o que não viola sua condição de disco tensor transversal. Queremos agora tornar  $D \cap \hat{e}_i$  vertical em  $\hat{e}_i$ , portanto consistindo de uma união de anéis (veja Figura 5.4).

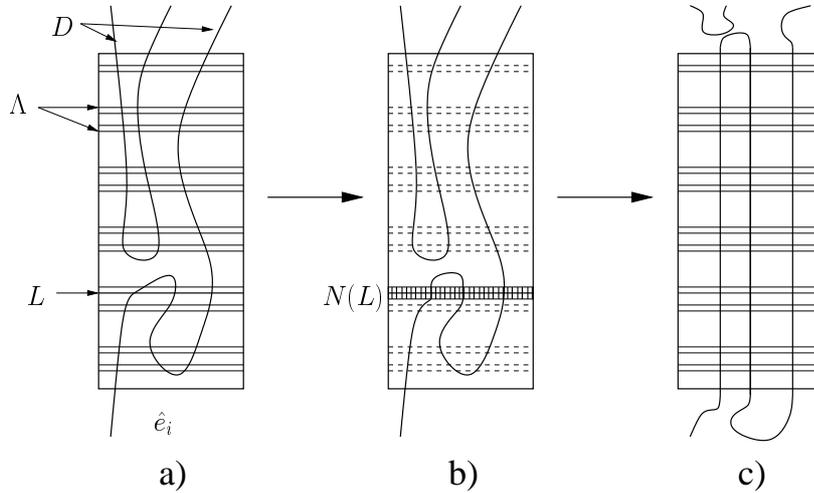


Figura 5.4: a) o disco  $D$  transversal a  $\Lambda$  em  $\hat{e}_i$ ; b)  $D$  é feito vertical em uma vizinhança de uma folha  $L$ ; c)  $D$  é colocado em posição vertical em  $\hat{e}_i$ .

Escolhemos uma folha  $L$  de  $\Lambda \cap \hat{e}_i$  e, se necessário, perturbamos  $D$  verticalmente de forma que  $D \cap L \cap \Omega = \emptyset$ . Consideramos uma vizinhança produto regular  $N(L)$  em  $\hat{e}_i$ . Por uma isotopia com suporte em  $N(L)$  preservando a estrutura de produto de  $N(L)$ , podemos tornar  $D$  vertical em uma vizinhança produto menor  $N'(L) \subseteq N(L)$ . Agora expandimos  $D \cap N'(L)$  verticalmente, de forma a preencher toda a alça  $\hat{e}_i$ , levando o complemento  $D \cap (\hat{e}_i - N'(L))$  para fora de  $\hat{e}_i$ . Fazemos aqui dois comentários:

1. a escolha da folha  $L \subset \Lambda \cap \hat{e}_i$  é arbitrária a não ser na alça contendo  $\partial D$ , onde  $L$  deve ser a folha contendo  $\partial D$ ;
2. as isotopias realizadas foram todas verticais, portanto não alteram  $D \bullet (\Omega, \nu)$ , preservando tensão transversal.

Temos, então,  $D \cap (\cup \hat{e}_i)$  uma união de anéis laminados por círculos, esses anéis contendo todo  $D \cap \Lambda$ . Além disso  $D \cap \hat{e}_i \cap \Omega = \emptyset$ .

Nossa meta é ter  $D \cap \hat{e}_i = \partial D$ , portanto  $D \cap \Lambda = \partial D$ . Conforme esboçamos no início da prova, isso será alcançado por cirurgias que simplificarão  $D \cap \hat{e}_i$ . Essas cirurgias serão descritas abaixo no Processo 1.

– Processo 1

O complemento  $\overline{D - \hat{e}_i}$  deve ter como componente algum disco  $D'$ : uma curva de  $\partial(D \cap \hat{e}_i)$  mais ao interior em  $D$  deve bordar um disco,

que interceptaria  $\hat{e}_i$  somente se fosse uma componente de  $D \cap \hat{e}_i$ , que consiste apenas de anéis (veja Figura 5.5). Aumentamos  $D' \subseteq D$  de forma que  $D' \cap \Lambda = \partial D' \subseteq L'$ , onde  $L'$  é uma folha de bordo de  $\Lambda$ . Segue que  $\partial D'$  borda um disco  $\Delta' \subseteq L'$ . Comparamos  $\nu(D')$  com  $\nu(\Delta')$ .

Se  $\nu(D') < \nu(\Delta')$  então  $D'$  é um disco tensor transversal e  $D' \cap \Lambda = \partial D'$ , provando o lema nesse caso.

Suponhamos, então, que  $\nu(D') \geq \nu(\Delta')$ . Nesse caso, consideramos  $\alpha \subseteq D$  cobordando com  $\partial D'$  uma componente  $A$  de  $D \cap \hat{e}_i$  (veja Figura 5.5).

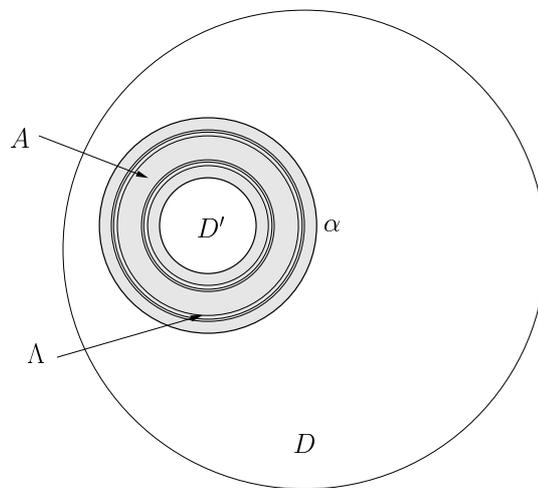


Figura 5.5: A interseção  $D \cap \hat{e}_i$  em  $D$ .

Da mesma forma que argumentamos para  $\partial D'$ , notamos que  $\alpha$  borda um disco  $D'' \subseteq D'$  e um disco  $\Delta''$  paralelo a uma folha de  $\Lambda \cap \hat{e}_i$ . Como  $A \cap \Omega = \emptyset$ , concluímos que  $\nu(D'') = \nu(D')$  e  $\nu(\Delta'') = \nu(\Delta')$ , donde

$$\nu(D'') \geq \nu(\Delta''). \tag{5-1}$$

Seja  $F = \overline{D - D''}$ . Redefinimos  $D$  para ser a união do anel  $F$  com  $\Delta''$  (grosseiramente, estamos substituindo  $D''$  por  $\Delta''$ ). Depois suavizamos as quinas e puxamos  $\Delta'' \subseteq D$  um pouco para fora de  $\hat{e}_i$ . Essa cirurgia reduz o número de componentes de  $D \cap (\bigcup_i \hat{e}_i)$  e, pela desigualdade (5-1), preserva tensão transversal.

Agora notamos que  $F$  e  $\Delta'' \subseteq D$  são ambos mergulhados. Mas é possível que  $\mathring{F} \cap \mathring{\Delta}'' \neq \emptyset$ , em cujo caso  $D$  será somente um disco tensor transversal imerso. Descrevermos a seguir o processo que modifica  $D$  de forma a conseguirmos um mergulho.

– Processo 2

Pela construção  $D = F \cup \Delta''$ , onde o anel  $F$  e o disco  $\Delta''$  são mergulhados. O conjunto singular  $S$  de  $D$  está contido em  $F \cap \Delta''$ . Como  $\partial D$  é mergulhado, conclui-se que  $S$  consiste de curvas fechadas. Além disso,  $S \cap \partial\Delta'' = \emptyset$  (pois  $D$  é mergulhado em uma vizinhança de  $\partial\Delta''$ ), portanto cada curva de  $S = \overset{\circ}{F} \cap \overset{\circ}{\Delta''}$  é fechada, tanto em  $\Delta''$  quanto em  $F$ . Consideremos uma curva  $\beta \subseteq S$ . Segue que  $\beta \subseteq \Delta''$  borda um disco  $D_1 \subseteq \Delta''$  e  $\beta \subseteq F$  borda um disco  $D_2 \subseteq D$ . Há dois casos a serem considerados (Figura 5.6), quando  $D_2 \subseteq F$  (caso  $\beta$  não seja essencial em  $F$ ), ou quando  $\Delta'' \subseteq D_2$  (caso  $\beta$  seja essencial em  $F$ ).

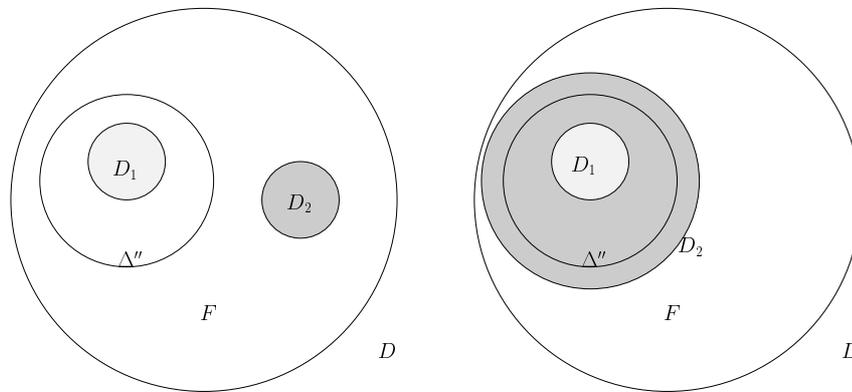


Figura 5.6: As duas possíveis posições relativas de  $D_1, D_2$ .

Se  $D_2 \subseteq F$  redefinimos  $D$  trocando  $D_1$  com  $D_2$ , então afastando-os e suavizando as quinas (veja Figura 5.7). Isso elimina a curva  $\beta$  de  $S$ , reduzindo o número de componentes de  $S$ . Como  $D$  não muda longe de  $\beta$ ,  $\nu(D)$  não se altera, preservando a tensão transversal de  $D$ . Além disso, a cirurgia não introduz interseções de  $D$  com  $\Lambda$  (pois  $\beta \subseteq \Delta''$  e  $\Delta'' \cap \Lambda = \emptyset$ ), preservando o progresso conseguido pelo Processo 1.

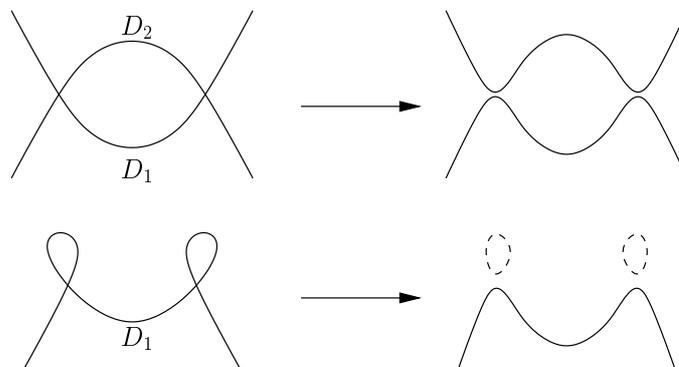


Figura 5.7: A cirurgia para simplificar o conjunto singular de  $D$  em ambos os casos.

Se  $\Delta'' \subseteq D_2$  então  $D_1 \subseteq D_2$  e substituímos  $D_2$  por  $D_1$ , eliminando  $D_2 - D_1$  (e então suavizando as quinas, veja Figura 5.7). Assim como para a outra cirurgia, essa reduz o número de componentes de  $S$  e não introduz interseções com  $\Lambda$ . Novamente, tensão transversal é preservada: a cirurgia pode até mesmo reduzir  $\nu(D)$ , pois  $D_2 - D_1$  é eliminada.

Em todo caso, reduzimos o número de componentes de  $S$  sem perder as propriedades desejadas de  $D$ .

Alternando o Processo 1 com o Processo 2 acabaremos com um disco tensor transversal mergulhado, cujo interior não interseparará  $\Lambda$ .  $\square$

*Observação.* As cirurgias descritas no Processo 2 da demonstração do Lema 5.5 são padrão, conhecidas como “double curve surgeries”. Elas são relevantes na demonstração do Teorema do Laço.

Outra propriedade especial do disco tensor transversal do Exemplo 5.1 é que seu bordo está contido em  $H_1 - H_0$ . Em geral um disco tensor transversal não terá essa propriedade (e.g. Exemplo 5.3). O próximo lema mostra que ela pode ser suposta sem perda de generalidade.

**Lema 5.6.** *Se  $\Lambda$  for transversalmente frouxa então existe um disco tensor transversal no complemento de  $\Lambda$  cujo bordo está contido no bordo de algum  $H_n$ .*

*Demonstração.* Usando o Lema 5.5, obtemos um disco tensor transversal  $D$  no complemento de  $\Lambda$ . Tal disco está contido em algum  $H_n$ . Seja  $L$  a folha de  $\Lambda \cap H_n$  contendo  $\partial D$ . Segue que  $\partial D$  borda um disco  $\Delta \subseteq L$ . Consideremos o anel  $A = \overline{L - \Delta}$  (Figura 5.8). O disco  $D'$  desejado será, essencialmente,  $D \cup A$ .

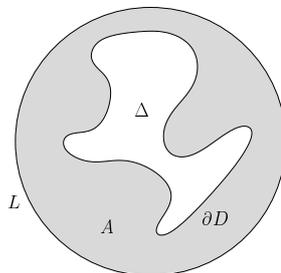


Figura 5.8: A curva  $\partial D$  separa um disco de um anel em  $L$ .

Para obter  $D'$  conduzimos a seguinte construção: depois de fazer  $D$  transversal a  $L$ , consideramos uma vizinhança regular  $N(L) \simeq L \times I$  de  $L$ . Identificamos  $L$  com  $L \times \{1/2\}$  e supomos que  $D \cap L \times \{0\} = \emptyset$ . Como

fizemos na demonstração do Lema 5.5, podemos supor que  $D \cap N(L)$  e  $\Omega \cap N(L)$  são verticais (veja Figura 5.9).

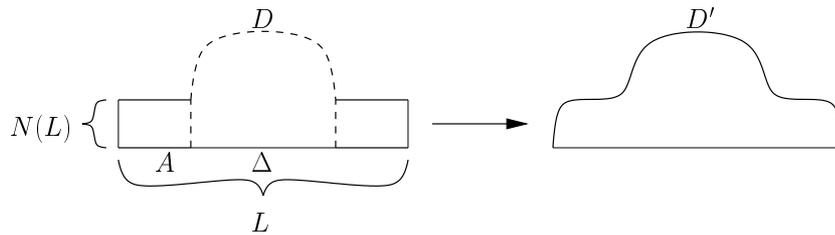


Figura 5.9: A construção de  $D'$ .

Transladamos  $A \subseteq L \times \{1/2\}$  ao longo do produto, até  $A' = A \times \{1\}$ . Finalmente construímos

$$D' = (\overline{D - N(L)}) \cup A' \cup \left( (\partial L) \times \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \right),$$

tomando o cuidado de suavizar as quinas. Afastamos levemente  $D'$  de  $\partial H_n$ , mantendo  $\partial D'$  fixado, de forma que  $D' \cap \partial H_n = \partial D'$ . É fácil de se verificar que  $D'$  é tensor transversal, pois a interseção ponderada com  $(\Omega, \nu)$  é aumentada na mesma quantidade  $\nu(A)$  tanto no lado do disco quanto no lado da folha. As outras propriedades são claras pela construção.  $\square$

**Exemplo 5.7.** No Exemplo 5.3 o bordo do disco tensor transversal não estava em  $\partial H_1$ . A Figura 5.10 mostra como o Lema 5.5 modifica o disco.

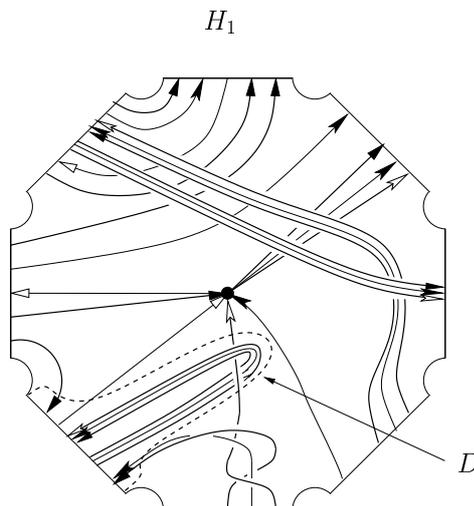


Figura 5.10: Um disco tensor transversal  $D$  com  $\partial D \subseteq \partial H_1$ .

Um inconveniente de se lidar com discos tensores transversais é que eles são definidos em termos da sua interseção com a laminação unidimensional, que é construída de um processo infinito. A definição de

*disco tensor com respeito a  $H_0$* , que daremos abaixo, será uma versão finita de disco tensor transversal. Antes disso, porém, precisaremos da seguinte construção: consideramos a estrutura de alças em  $H_0$  e a transposta  $M = A^T$  da matriz de incidência  $A = A(\mathcal{A})$ . Se  $\hat{\nu}_i = \nu(E_i)$ , onde  $E_i \in \mathcal{E}$  é um disco do sistema em  $H_0$  e  $\nu$  é a medida transversal em  $\Omega$ , então o vetor  $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_m)$  é um autovetor de  $M$ . Usaremos  $\hat{\nu}$  para dar um *sistema de pesos* para  $H_0$  i.e., o par  $(H_0, \hat{\nu})$ . Se  $T$  é uma superfície interceptando  $H_0$  em discos duais às 1-alças  $\hat{e}_i$  de  $H_0$  definimos:

$$T \bullet (H_0, \hat{\nu}) = \sum_{1 \leq i \leq m} |T \cap \hat{e}_i| \cdot \hat{\nu}_i,$$

onde  $|T \cap \hat{e}_i|$  é o número de discos de  $T \cap H_0$  duais à 1-alça  $\hat{e}_i$ . Notemos que, com essa definição,

$$T \bullet (H_0, \hat{\nu}) = T \bullet (\Omega, \nu). \quad (5-2)$$

*Observação.* A igualdade 5-2 acima justifica a escolha da notação  $\bullet \bullet (*, *)$ .

**Definição 5.8.** Seja  $(D, \partial D) \rightarrow (H_n, \Lambda)$  um disco mergulhado interceptando  $H_0$  em suas 1-alças e considere  $\Delta \subseteq f^n(E)$  o disco bordado por  $\partial D$  no disco  $f^n(E)$  (onde  $E \subseteq \mathcal{E}$  é um disco dual a uma 1-alça de  $H_0$ ). Dizemos que  $D$  é *disco tensor com respeito a  $H_0$*  se

$$D \bullet (H_0, \hat{\nu}) < \Delta \bullet (H_0, \hat{\nu}).$$

Como para discos tensores transversais, dizemos que  $D$  está no *complemento de  $\Lambda$*  se  $D \cap \Lambda = \partial D$  e  $\Lambda$  é dito *tensa com respeito a  $H_0$*  se não existir discos tensores com respeito a  $H_0$

*Observação.* Faz sentido considerar  $D \bullet (H_0, \hat{\nu})$  pelas hipóteses em  $D \cap H_0$ . Similarmente,  $\Delta \bullet (H_0, \hat{\nu})$  faz sentido pois  $f^n(E)$  intersepta  $H_0$  em discos duais às 1-alças de  $H_0$  e  $\partial \Delta = \partial D$  não intersepta  $H_0$ , donde  $\Delta$  intersepta  $H_0$  em discos duais às 1-alças.

Pela igualdade 5-2 é imediato que um disco tensor com respeito a  $H_0$  é tensor transversal. É claro também que um nulógono é um disco tensor com respeito a  $H_0$ , donde a propriedade de ser *tensa com respeito a  $H_0$*  ainda é mais forte do que a propriedade de *incompressibilidade*.

Notamos também que os discos tensores transversais dos Exemplos 5.1 e 5.3 eram tensores com respeito a  $H_0$ .

Não perdemos generalidade por considerar essa versão relativa:

**Lema 5.9.** *Se existe disco tensor transversal então existe disco tensor com respeito a  $H_0$ .*

*Demonstração.* Consideremos a estrutura de alças  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$  de  $H_0$ . É fácil ver que, para  $n$  suficientemente grande,  $f^n(D)$  não intercepta as 0-alças de  $H_0$ , caso contrário  $D$  interceptaria o conjunto singular de  $\omega(\Omega)$ . Supomos, portanto, que  $n$  é grande o suficiente para que  $f^n(D)$  intercepte  $H_0$  somente em suas 1-alças. Consideremos agora a folheação natural por intervalos  $S^1 \times I$  das 1-alças de  $H_0$ . Afirmamos que, para  $n$  suficientemente grande,  $f^n(D)$  é transversal às fibras dessa folheação: caso contrário, como  $D$  é compacto,  $D$  teria um ponto tangente à  $\omega(\Omega)$ . Vemos, portanto, que  $f^n(D) \cap H_0$  consiste de discos transversais às fibras das 1-alças, portanto paralelos a discos duais. Agora é simples alterar  $f^n(D)$  (somente em uma vizinhança de  $f^n(D) \cap H_0$ ) por uma isotopia preservando  $|f^n(D) \cap \hat{e}_i|$  (para toda alça  $\hat{e}_i$ ) e de forma que  $f^n(D) \cap H_0$  consista de discos duais. Tal isotopia não altera  $f^n(D) \bullet (\Omega, \nu)$  donde, pela igualdade 5-2, verificamos que  $f^n(D)$  é, de fato, disco tensor com respeito a  $H_0$ .  $\square$

*Observação.* É claro que se  $\Lambda$  for transversalmente tensa então é tensa com respeito a  $H_0$ . Acima mostramos que se não for transversalmente tensa então não é tensa com respeito a  $H_0$ , donde provamos:

*Lema 5.10.* *A laminação é transversalmente tensa se e somente se for tensa com respeito a  $H_0$ .*

O lema principal que relaciona tensão transversal com minimalidade de  $\lambda$  é o seguinte.

**Lema 5.11.** *Se existir um disco  $D \subseteq H_1$  tensor com respeito a  $H_0$  no complemento de  $\Lambda$  tal que  $\partial D \subseteq \partial H_1$  então  $\lambda$  não é minimal.*

*Observação.* O Exemplo 5.1 mostra um caso particular do lema. A demonstração seguirá, essencialmente, o mesmo argumento dado no exemplo.

*Demonstração.* Seja  $(H_0, \hat{\nu})$  um sistema de pesos para  $H_0$ , onde lembramos que  $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_k)$  é um autovetor da matriz  $M = (m_{ij}) = [A(\mathcal{A})]^T$ . Então o sistema de pesos em  $H_1$  induzido por  $f$  é  $(H_1, \lambda \hat{\nu})$ . Como  $\partial D \subseteq H_1 \cap \Lambda$  então  $\partial D = \partial E_{i_0}^1$ , onde  $E_{i_0}^1 = f(E_{i_0}) \subseteq \mathcal{E}^1(\mathcal{A})$  é um disco dual a uma 1-alça de  $H_1$ . Como  $D$  é tensor com respeito a  $H_0$ ,

$$D \bullet (H_0, \hat{\nu}) < E_{i_0}^1 \bullet (H_0, \hat{\nu}) = \lambda \hat{\nu}_{i_0}.$$

Mas  $D \cap H_0$  consiste de discos duais às 1-alças de  $H_0$ , donde podemos substituir  $E_i$  por  $D$  sem modificar a estrutura de alças. Seja  $M' = (m'_{ij})$  a

nova matriz de incidência. Segue que  $m'_{ij} = m_{ij}$  se  $i \neq i_0$  e  $m'_{i_0j} = m_{i_0j} + d_j$ , onde  $d_j \in \mathbb{Z}$  satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\sum_{1 \leq j \leq k} d_j \hat{\nu}_j < 0.$$

Se  $M'$  for irredutível então para  $i \neq i_0$ ,

$$(M'\hat{\nu})_i = (M\hat{\nu})_i = \lambda\hat{\nu}_i$$

mas, para a linha  $i_0$

$$(M'\hat{\nu})_{i_0} = (M\hat{\nu})_{i_0} + \sum_{1 \leq j \leq k} d_j \hat{\nu}_j < \lambda\hat{\nu}_{i_0},$$

donde, pela Proposição 2.23,

$$\lambda' = \lambda(M') < \lambda,$$

completando a prova nesse caso.

Se  $M'$  for redutível então, talvez permutando os índices,  $M'$  pode ser escrita na seguinte forma:

$$M' = \left( \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & M'' \end{array} \right),$$

onde, para algum  $1 \leq r \leq k-1$ ,  $B$  é  $r \times r$ ,  $C$  é  $r \times (k-r)$ ,  $0$  é a matriz nula  $(k-r) \times r$  e  $M''$  é irredutível de dimensão  $(k-r)$ . Do sistema de discos original  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_k\}$  obtemos um sistema irredutível  $\mathcal{E}'' = \{E_{r+1}, \dots, E_k\}$  por um colapso (ver Seção 2.7). A transposta da matriz de incidência  $A(\mathcal{E}'')$  desse sistema é exatamente  $M''$ . Vamos mostrar que, também nesse caso,  $\lambda(M'') < \lambda(M)$ .

Como  $M$  é irredutível, existem  $r+1 \leq i_1 \leq k$  e  $1 \leq j_1 \leq r$  tais que  $m_{i_1 j_1} > 0$ . Seja  $\hat{\hat{\nu}}$  o vetor de dimensão  $k-r$  definido por  $\hat{\hat{\nu}}_i = \hat{\nu}_{i+r}$ ,  $1 \leq i \leq k-r$  (isto é,  $\hat{\hat{\nu}}$  consiste das últimas  $k-r$  coordenadas de  $\hat{\nu}$ ).

Segue que, para  $i \neq i_0 - r, i_1 - r$ ,

$$(M''\hat{\hat{\nu}})_i \leq (M\hat{\nu})_{i+r} = \lambda\hat{\nu}_{i+r} = \lambda\hat{\nu}_i$$

e, para  $i = i_1 - r$

$$(M''\hat{\nu})_{i_1-r} \leq (M\hat{\nu})_{i_1} - (m_{(i_1j_1)})\hat{\nu}_{j_1} < (M\hat{\nu})_{i_1} = \lambda\hat{\nu}_{i_1} = \lambda\hat{\nu}_{i_1-r}.$$

Se  $1 \leq i_0 \leq r$  então segue que  $\lambda'' = \lambda(M'') < \lambda$ , provando o lema também nesse caso.

Se  $r + 1 \leq i_0 \leq k$  então, além das desigualdades acima temos, para  $i = i_0 - r$ ,

$$(M''\hat{\nu})_{i_0-r} = \sum_{r+1 \leq j \leq k} (m'_{i_0j})\hat{\nu}_j \leq \sum_{1 \leq j \leq k} (m'_{i_0j})\hat{\nu}_j = (M'\hat{\nu})_{i_0} < \lambda\hat{\nu}_{i_0} = \lambda\hat{\nu}_{i_0-r},$$

donde, também nesse caso,  $\lambda'' < \lambda$ , completando a demonstração do lema. □

**Exemplo 5.12.** Voltamos ao Exemplo 5.3, com estrutura  $\mathcal{A}$  em  $H_0$ , e lembramos que a laminação era transversalmente frouxa e que havia um disco tensor com respeito a  $H_0$  em  $H_1$ . De acordo com o Lema 5.11 acima  $\lambda(\mathcal{A})$  não pode ser minimal. De fato, se realizamos a isotopia descrita pelo lema vemos que a posição de  $H_0$  em  $H_1$  mudará da forma representada na Figura 5.11.

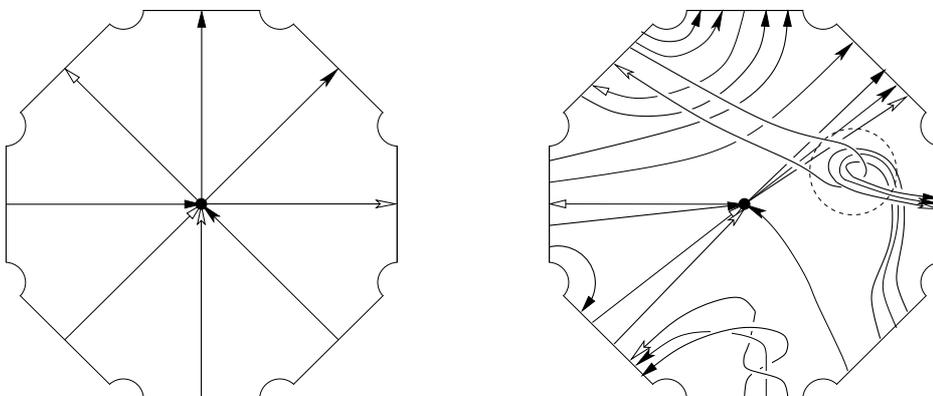


Figura 5.11: Após realizar a isotopia.

Verificamos que a nova matriz de incidência é

$$M(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo autovalor é  $\lambda(\mathcal{A}) = 4.542$  com precisão de até três casas decimais,

mostrando que o representante antigo não tinha fator de crescimento minimal.

Identificaremos condições suficientes para a minimalidade do fator de crescimento implicar tensão transversal na Proposição 5.14. Precisaremos do seguinte lema técnico em sua demonstração.

**Lema 5.13.** *Se  $\Lambda$  goza da propriedade de incompressibilidade e admite um disco tensor com respeito a  $H_0$  em  $H_n$  então há um tal disco  $D$  gozando das seguintes propriedades:*

1.  $D$  está no complemento de  $\Lambda$ ;
2.  $\partial D \subseteq \partial H_n$ ;
3.  $D \cap H_{n-1}$  consiste de discos essenciais.

*Demonstração.* A demonstração do Lema 5.5 funciona exatamente da mesma forma para discos tensor com respeito a  $H_0$ , donde podemos supor que tal disco está no complemento de  $\Lambda$ . O truque utilizado no Lema 5.6 também funciona aqui, logo podemos supor que o disco  $D$  tem as propriedades 1 e 2 acima. O que realmente precisamos de provar é que ele pode ser escolhido gozando da propriedade 3.

Perturbamos  $D$  de forma que fique transversal a  $\partial H_{n-1}$ . A interseção  $D \cap H_{n-1}$  consiste de superfícies planares. Queremos modificar  $D$  de forma que  $D \cap H_{n-1}$  consista de discos essenciais. Uma forma natural de fazê-lo seria comprimir componentes compressíveis de  $D \cap H_{n-1}$  mas, como tal compressão seria realizada em  $H_{n-1}$ , poderia introduzir interseções com  $H_0$ , aumentando  $D \bullet (H_0, \hat{\nu})$ . Nesse caso seria difícil controlar se  $D$  continuaria sendo tensor com respeito a  $H_0$  ou não. Preferimos, portanto, realizar as cirurgias em  $H_n - \mathring{H}_{n-1}$ , que não estarão sujeitas a esse problema.

Comçaremos observando propriedades relativamente gerais. Seja  $C$  a componente de  $\widehat{H_n - \Lambda}$  que contém  $D$  (lembramos que  $D$  satisfaz a condição 1 do enunciado). Lembrando que as componentes de  $\widehat{H_{n-1} - \Lambda}$  são bolas, é fácil ver que  $\partial H_{n-1} \cap C$  é uma superfície planar *totalmente compressível* em  $H_{n-1} \cap C$ , no sentido em que toda curva simples fechada borda um disco em  $H_{n-1} \cap C$ . Segue, portanto, que  $\partial H_{n-1} \cap C$  é incompressível em  $C - \mathring{H}_{n-1}$ : se  $\Delta$  for um disco compressor então  $\partial \Delta$  separa uma componente  $S$  de  $\partial H_{n-1} \cap C$  em duas superfícies  $S_1, S_2$  (pois  $\partial H_{n-1} \cap C$  é planar). Como  $\partial \Delta \subseteq S$  é essencial, separa duas componentes  $\gamma_1 \subseteq S_1, \gamma_2 \subseteq S_2$  de  $\partial S$ . Mas  $\partial \Delta \subseteq S \subseteq \partial H_{n-1} \cap C$  borda um disco  $\Delta'$  em  $H_{n-1} \cap C$  (pois  $H_{n-1} \cap C$  consiste de bolas). Segue que  $\Delta \cup \Delta' \subseteq \mathring{C}$  é uma esfera mergulhada, donde

separa  $C$  em uma bola  $C_1 \subseteq \overset{\circ}{C}$  e seu complemento  $C_2$ , que contém  $\partial C$  (lembramos que  $C$  é uma bola). Mas  $(\Delta \cup \Delta') \cap S = \partial\Delta$  consiste de uma única componente, donde uma das  $S_1, S_2$  esta contida em  $C_1$  e a outra em  $C_2$ . Segue que uma das componentes de bordo  $\gamma_1, \gamma_2$  está contida em  $C_1$  e a outra em  $C_2$ . Mas  $\partial S \subseteq \partial C \subseteq \partial C_2$ , donde  $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq \partial C_2$ , uma contradição. Portanto não existe disco compressor  $\Delta$ , donde  $\partial H_{n-1} \cap C$  é incompressível em  $C - \overset{\circ}{H}_{n-1}$ .

Agora notamos que, como  $D$  satisfaz a propriedade 2 do enunciado,  $D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$  consiste de curvas simples fechadas. Segue, portanto, que  $D \cap (C - \overset{\circ}{H}_{n-1})$  contém exatamente uma componente  $S$  tal que  $\partial D \subseteq \partial S$ . As outras componentes de  $\partial S$  estão contidas em  $\partial H_{n-1} \cap C$ . Se  $S'$  for outra componente de  $D \cap (C - \overset{\circ}{H}_{n-1})$  então  $\partial S' \subseteq (\partial H_{n-1} \cap C)$ .

Agora descreveremos as operações que modificarão o disco  $D$  até que satisfaça as condições desejadas. Deve-se notar que todas essas operações serão realizadas no interior de  $C$ , donde não introduzirão interseções com  $\Lambda$  ou alterando a interseção com  $\partial H_n$ , preservando as propriedades 1 e 2 do enunciado, estas já satisfeitas.

– Processo 1

Seja  $\gamma$  uma componente de  $D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$  mais ao interior em  $\partial H_{n-1} \cap C$ . Se  $\gamma \subseteq (\partial H_{n-1} \cap C)$  não for essencial então  $\gamma$  borda um disco  $\Delta \subseteq (\partial H_{n-1} \cap C)$ . Mas  $\gamma$  também borda um disco  $\Delta' \subseteq D$ . Alteramos, então,  $D$  por uma isotopia levando  $\Delta'$  a  $\Delta$  (e indo um pouco além) e depois suavizamos as quinas.

Como  $\Delta \cap H_0 = \emptyset$  essa operação não introduz interseções com  $H_0$ , logo não aumenta  $D \bullet (H_0, \hat{\nu})$ , donde  $D$  continua sendo tensor. É claro, também, que reduz  $|D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)|$  donde, após um número finito de operações desse tipo, podemos supor que  $D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$  consiste apenas de curvas essenciais em  $\partial H_{n-1} \cap C$ .

Considere  $F$  uma componente de  $D \cap (C - \overset{\circ}{H}_{n-1})$ . Se  $F$  for um disco então  $\partial F \subseteq (\partial H_{n-1} \cap C)$  é uma curva essencial. Segue, portanto, que  $F$  é disco compressor para  $\partial H_{n-1} \cap C$  em  $C - \overset{\circ}{H}_{n-1}$ , uma contradição. Concluimos que  $F$  não pode ser um disco.

Se  $\gamma$  for uma componente de  $D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$ , agora mais ao interior em  $D$ , borda um disco  $\Delta \subseteq D$ . Pelo parágrafo acima,  $\Delta \not\subseteq (C - \overset{\circ}{H}_{n-1})$ , donde  $\Delta \subseteq (H_{n-1} \cap C)$ . Concluimos que, se todas as componentes de  $D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$  forem mais ao interior em  $D$ , então a demonstração termina.

Se houver alguma curva em  $D \cap \partial H_{n-1}$  que não está mais ao interior em  $D$ , vamos supor que  $D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$  é incompressível em  $(C - \mathring{H}_{n-1})$  usando o seguinte processo.

– Processo 2

Se  $D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$  for compressível, consideramos  $\Delta$  um disco compressor. Como  $\partial\Delta \subseteq D$ , existe disco  $\Delta' \subseteq D$  tal que  $\partial\Delta' = \partial\Delta$ . Modificamos  $D$  trocando  $\Delta'$  por  $\Delta$  (e suavizando as quinas).

Notamos que:

1. tal cirurgia não aumenta  $D \bullet (H_0, \hat{\nu})$ : de fato, como  $\Delta \subseteq H_n - \mathring{H}_{n-1}$ ,  $\Delta \cap H_0 = \emptyset$ .
2. tal cirurgia reduz  $|D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)|$ : de fato,  $\Delta' \cap (\partial H_{n-1} \cap C) \neq \emptyset$  pois  $\partial\Delta'$  é essencial em  $D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$ . Como  $\Delta \cap (\partial H_{n-1} \cap C) = \emptyset$ , segue que a cirurgia reduz  $|D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)|$ .

Pelas observações acima, combinando os processos 1 e 2 podemos supor que  $D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$  é essencial em  $\partial H_{n-1} \cap C$  e que  $D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$  é incompressível em  $C - \mathring{H}_{n-1}$ .

O passo seguinte será mostrar que também podemos supor que  $D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$  é conexo, logo  $D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$  consistindo somente de curvas mais ao interior em  $D$  donde, conforme já foi argumentado, satisfazendo a condição 3 do enunciado.

– Processo 3

Suponha que  $D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$  não é conexo. Então contém uma componente  $S'$  tal que  $\partial S' \subseteq (\partial H_{n-1} \cap C)$ . Agora consideramos  $S'$  em  $H_n - \mathring{H}_{n-1}$ . Notamos que  $S'$ , por ser incompressível em  $C - \mathring{H}_{n-1}$ , é incompressível em  $H_n - \mathring{H}_{n-1}$ : caso contrário, seja  $\Delta$  um disco compressor (em  $H_n - \mathring{H}_{n-1}$ ). Se  $\Delta \cap S' \neq \emptyset$ , como  $\Delta \cap (H_n - \mathring{H}_{n-1})$  é incompressível (em  $H_n - \mathring{H}_{n-1}$ ), podemos simplificar  $\Delta \cap S'$  até termos  $\Delta \cap S' = \emptyset$ . Mas  $\partial\Delta \subseteq C$  donde  $\Delta \subseteq C$ , sendo um disco compressor para  $S'$  em  $C - \mathring{H}_{n-1}$ , uma contradição, provando que  $S'$  é incompressível em  $H_n - \mathring{H}_{n-1}$ .

Mas  $H_n - \mathring{H}_{n-1}$  tem estrutura de produto  $(H_n - \mathring{H}_{n-1}) \simeq \partial H_{n-1} \times I$ . É um fato bem conhecido que uma superfície incompressível  $S'$  em um tal produto, com  $\partial S' \subseteq \partial H_{n-1} \times \{0\}$  é paralela ao bordo, i.e., existe  $S'' \subseteq \partial H_{n-1}$  com  $\partial S'' = \partial S'$  e  $S'' \cup S'$  bordando um produto  $P \simeq S' \times I$ ,  $S' \times \{1\}$  identificado com  $S'$  e  $S' \times \{0\} \subseteq \partial H_{n-1}$ . É fácil

ver que  $P \cap \Lambda = \emptyset$ : caso contrário, seja  $L$  uma folha de  $\Lambda \cap (H_n - \mathring{H}_{n-1})$  tal que  $L \cap P \neq \emptyset$ . Como  $S' \subseteq \mathring{D}$  e  $\mathring{D} \cap \Lambda = \emptyset$ , segue que  $S' \cap L = \emptyset$ . Mas  $S'$  separa  $P$  de  $\partial H_n$  e, por outro lado,  $\partial L \cap \partial H_n \neq \emptyset$ , donde  $L \cap S' \neq \emptyset$ , uma contradição, provando que  $P \cap \Lambda = \emptyset$ . Como  $S' \subseteq P$  está contido em  $C$ , temos  $P \subseteq C$ .

É claro que  $S' \subseteq D \cap P$ . Se  $D \cap P$  contiver outras componentes, consideramos  $F$  alguma dessas que seja *mais baixa*, no seguinte sentido: todas as componentes de  $D \cap P \subseteq D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$  são incompressíveis e, pelo mesmo argumento utilizado para  $S'$ , são paralelas a  $\partial H_{n-1} \cap C$ . Escolhemos  $F$  de forma que o respectivo produto  $P_F$  não contenha nenhuma outra componente de  $D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$ .

Assim,  $F$  é paralela a  $F' \subseteq (\partial H_{n-1} \cap C)$ . Modificamos  $D$  substituindo  $F \subseteq D$  por  $F'$ , puxando  $F'$  levemente para o interior de  $H_{n-1} \cap C$  (e suavizando as quinas).

Pela escolha de  $F$  temos que  $D$  continua sendo um mergulho. É claro também que  $D \bullet (H_0, \hat{\nu})$  não muda e que a operação reduz  $|D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)|$ .

Mostramos, então, que uma combinação finita dos processos 1, 2 e 3 resulta em um disco  $D$  tal que  $D \cap \partial H_{n-1} = D \cap (\partial H_{n-1} \cap C)$  como uma união de curvas simples fechadas essenciais em  $\partial H_{n-1}$  e tal que  $D \cap (H_n - \mathring{H}_{n-1}) = D \cap (C - \mathring{H}_{n-1})$  é conexo. Conforme já argumetamos, tal disco goza das propriedades 1, 2 e 3 do enunciado, completando a demonstração.  $\square$

*Observação.* Todas as operações descritas na demonstração do lema, dado que  $C$  é irreduzível, podem ser realizadas por isotopia.

Demonstraremos a Conjectura 5.4 sob as seguintes condições.

**Proposição 5.14.** *Se  $\lambda(\mathcal{E})$  de um automorfismo genérico for minimal e todas as 0-alças tiverem valência 2 ou 3 então  $\Lambda$  é transversalmente tensa.*

*Demonstração.* A idéia da demonstração é a seguinte: se  $\Lambda$  não for transversalmente tensa então existe um disco  $D$  tensor com respeito a  $H_0$ . Entre todos tais discos  $D$  vamos escolher algum contido no menor  $H_n$  possível. Vamos mostrar que tal disco está contido em  $H_1$  e aplicar o Lema 5.11 para reduzir  $\lambda$ , uma contradição.

Começamos, então, supondo que  $\Lambda$  não é transversalmente tensa, e usando os Lemas 5.9, 5.13 para obter um disco tensor com respeito a  $H_0$  que esteja

1. no complemento de  $\Lambda$ ,

2. contido em algum  $H_n$  com  $\partial D \subseteq \partial H_n$  e
3.  $D \cap H_{n-1}$  consistindo de discos essenciais.

Escolhemos  $D$ , entre tais discos, com altura mínima:  $D$  está contido em um  $H_n$  que tem a propriedade de estar contido em qualquer  $H_{n'}$  que contenha um tal disco.

Se  $n = 1$  aplicamos o Lema 5.11, reduzindo  $\lambda$ , uma contradição.

Se  $n \geq 2$  consideramos  $D \cap H_{n-1}$ , que consiste de discos essenciais em  $H_{n-1}$ . Se um tal disco  $D'$  estiver contido em uma 1-alça de  $H_{n-1}$  então é imediato que é paralelo a um disco dual. Se  $D'$  interceptar uma 0-alça de  $H_{n-1}$  então, dado que a alça tem valência menor que ou igual a 3,  $D'$  também é paralelo a um disco dual a uma 1-alça. Mostramos que  $D \cap H_{n-1}$  consiste de discos paralelos aos discos  $E_i^{n-1}$  duais às 1-alças de  $H_{n-1}$  (embora talvez não sejam exatamente discos duais).

Seja  $D'$  um tal disco, paralelo ao disco dual  $E_i^{n-1}$ . Como  $D' \subseteq D$ , que intercepta  $H_0$  em discos duais às suas 1-alças,  $D' \cap H_0$  também consiste de discos duais de  $H_0$ , donde podemos considerar  $D' \bullet (H_0, \hat{\nu})$ . Se

$$D' \bullet (H_0, \hat{\nu}) \geq E_i^{n-1} \bullet (H_0, \hat{\nu}) \quad (5-3)$$

para todos os discos  $D' \subseteq D \cap H_{n-1}$ , então podemos alterar  $D$  por uma isotopia de forma que cada  $D'$  seja levado ao respectivo disco dual. Essa operação não aumenta  $D \bullet (H_0, \hat{\nu})$  (potencialmente reduz, no caso da desigualdade ser estrita para algum  $D'$ ), logo  $D$  continua sendo um disco tensor com respeito a  $H_0$ . Agora  $E_i^{n-1} \bullet (H_0, \hat{\nu}) = \lambda^{n-1} \hat{\nu}_i$  é exatamente o peso  $E_i^{n-1} \bullet (\Omega, \nu)$  na  $i$ -ésima 1-alça de  $H_{n-1}$ . Se aplicamos  $f^{-n+1}$  a  $D$  e  $E_i^{-n+1}$  a desigualdade

$$f^{-n+1}(D') \bullet (H_0, \hat{\nu}) \geq E^i \bullet (H_0, \hat{\nu}),$$

é obtida de 5-3 pela multiplicação de ambos os lados por um fator de  $\lambda^{-n+1}$ , provando que  $f^{-n+1}(D) \subseteq H_1$  é tensor com respeito a  $H_0$ . Isso contradiz a hipótese  $n \geq 2$ .

Se

$$D' \bullet (H_0, \hat{\nu}) < E_i^{n-1} \bullet (H_0, \hat{\nu})$$

para algum  $D' \subseteq D \cap H_{n-1}$  então, modificando  $D'$  por uma isotopia somente em uma vizinhança regular de  $\partial H_{n-1}$  (portanto não alterando  $D' \bullet (H_0, \hat{\nu})$ ), podemos supor que  $\partial D' = \partial E_i^{n-1}$ . Assim  $D' \subseteq H_{n-1}$  se torna um disco tensor com respeito a  $H_0$  no complemento de  $\Lambda$  e com  $\partial D' \subseteq \partial H_{n-1}$ . Pelo

Lema 5.13 podemos supor ainda que  $D \cap H_{n-2}$  consiste somente de discos essenciais, contradizendo altura minimal na escolha de  $D$ .

Portanto  $\Lambda$  é transversalmente tensa.  $\square$

**Corolário 5.15.** *Seja  $f: H \rightarrow H$  um automorfismo genérico de um cubo com alças de gênero 2. Se  $\lambda(\mathcal{E})$  for minimal então  $\Lambda(\mathcal{E})$  é transversalmente tensa.*

*Demonstração.* Consideremos a estrutura de alças  $\mathcal{E}$  para  $H$ . Se toda 0-alça tiver valência 2 ou 3 então aplicamos a Proposição 5.14, demonstrando o corolário. Se não, como  $H$  tem gênero 2, então  $\mathcal{A}$  tem somente uma 0-alça com valência 4 e as outras (possivelmente nenhuma) têm valência 2. Nesse caso a idéia da demonstração é bem representada no quadro unidimensional: consideramos o grafo  $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$ , que terá um vértice com valência 4. Utilizando a função altura em  $H_1 - H_0$ , temos os grafos  $\Gamma_t$  duais a  $f(\mathcal{E}) \cap H_t$ . Ao subirmos nos níveis  $t$  da função altura,  $\Gamma_t$  muda por dobras. A primeira dobra deverá ocorrer no vértice de valência 4 (dobras em vértices de valência 2 não ocorrem por incompressibilidade). Gostariamos de argumentar que a dobra elimina o vértice de valência 4 introduzindo dois de valência 3, reduzindo o problema ao caso anterior. Mas pode ser o caso de que a dobra ocorra ao longo de um laço fechado, quando trocaria um vértice de valência 4 por outro. Esse problema pode ser solucionado por subdivisão das arestas de  $\Gamma$  (i.e., introduzindo vértices de valência 2).

Daremos a demonstração mais detalhada (e precisa) no quadro bidimensional.

A condição de que uma 0-alça tenha valência 4 implica, em gênero 2, que  $\mathcal{E}$  consiste de apenas duas classes de isotopia de discos. Queremos que cada uma dessas classes contenha ao menos dois discos de  $\mathcal{E}$  (no quadro dual isso significa que queremos que todo laço em  $\Gamma$  localmente mergulhado passe por ao menos um vértice de valência 2). Isso pode ser facilmente conseguido por uma sequência de subdivisões.

Pelo Teorema 2.28  $f(\mathcal{E}) - H_0$  é incompressível em  $\mathring{H} - \mathring{H}_0$ . Temos, então, uma função altura em  $H_1 - \mathring{H}_0$ , com respeito à qual podemos supor que  $f(\mathcal{E})$  está em posição de Morse tendo somente selas como pontos críticos, estes em alturas distintas (vide [40] e Proposição 2.36). Seja  $t$  entre os dois primeiros valores críticos. Então  $\mathcal{E}_t = H_t \cap f(\mathcal{E})$  é um sistema de discos para  $H_t$  tal que

1.  $(\Lambda(\mathcal{E}_t), \mu(\mathcal{E}_t)) = (\Lambda(\mathcal{E}), \mu(\mathcal{E}))$ ,
2.  $(\Omega(\mathcal{E}_t), \nu(\mathcal{E}_t)) = (\Omega(\mathcal{E}), \nu(\mathcal{E}))$  e

3.  $\lambda(\mathcal{E}_t) = \lambda(\mathcal{E})$ .

Afirmamos que  $\mathcal{E}_t$  contém três classes de isotopia de discos distintas. Para ver esse fato, identificamos  $H_t$  com  $H_0$  pela estrutura de produto e notamos que  $\mathcal{E}_t$  é obtida de  $f(\mathcal{E}) \cap H_0$  trocando dois discos por outro obtido pela soma conexa dos seus bordos (uma “band sum”). Essa soma conexa deve ser realizada ao longo de um arco no complemento dos discos, uma 0-alça. Se tal 0-alça tivesse valência 2 então a soma conexa uniria dois discos paralelos, contradizendo incompressibilidade em  $H_1 - \mathring{H}_0$ . Logo o arco deve estar contido na 0-alça com valência 4. Mas a soma conexa dos bordos de dois disco em uma 0-alça com valência maior que 3 produz um disco em uma nova classe de isotopia. Finalmente, como escolhemos  $\mathcal{E}$  tendo ao menos dois discos em cada classe de isotopia, segue que uma única soma conexa preserva ao menos um disco em cada classe original. Isso prova que  $\mathcal{E}_t$  tem três classes de discos distintas, portanto suas respectivas 0-alças têm valência 3 ou 2. Isso demonstra que  $\Lambda(\mathcal{E}_t)$  é transversalmente tensa então, portanto, esse também é o caso de  $\Lambda(\mathcal{E})$ .  $\square$

*Observação.* Na demonstração, começamos dando uma idéia do argumento no quadro unidimensional e seguimos com uma versão mais detalhada no quadro bidimensional. Há um outro ponto de vista informativo: se o leitor estiver familiarizado como espaço de discos de  $H$  (veja a observação após a Proposição 2.36), a idéia da prova é bem simples, conforme esboçaremos a seguir. O espaço de discos projetivizado  $\mathcal{PD}(H)$  de um cubo com alças  $H$  de gênero 2 tem dimensão 3. Como  $\Lambda \cap H_t$  determina um sistema completo de discos para qualquer valor  $t$  que não seja crítico (Proposition 2.36), tal sistema contém ao menos duas classes de isotopia de discos. Isso significa que o caminho em  $\mathcal{PD}(H)$  correspondendo a  $\Lambda$  nunca passa pelo 0-esqueleto de  $\mathcal{PD}(H)$ . Mas tal caminho não pode ficar restrito a um único 1-simplexo. Deve, portanto, interceptar o interior de algum 2-simplexo de  $\mathcal{PD}(H)$ , o que corresponde a três classes distintas de discos. O argumento é finalizado como na demonstração acima.

## 5.2

### Comparação de fatores de crescimento.

Em [40] se pergunta se existe alguma relação entre o fator de crescimento mínimo  $\lambda_{min}$  de um automorfismo genérico  $f: H \rightarrow H$  e o fator de crescimento  $\lambda_\partial$  do automorfismo pseudo-Anosov  $\partial f = f|_{\partial H}$ . Nessa seção

mostramos que tensão transversal implica que  $\lambda_{min} \leq \lambda_\partial$ , respondendo parcialmente a pergunta.

Como já fizemos anteriormente vamos privilegiar  $f^{-1}$  em vez de  $f$ . Aqui também isso será natural: tensão transversal é realizada minimizando a interseção de  $\Lambda$  com a laminação unidimensional  $(\Omega, \nu)$ , que é aproximada por  $(f^{-n}(H_0), \lambda^{-n}\hat{\nu})$ . É relevante também mencionar que o fator de crescimento de  $\partial f^{-1}$  é igual ao de  $\partial f$ . Seja então  $g = f^{-1}$ , que é um automorfismo contrator. Segue que  $\bigcap_n g^n(H_0)$  determina  $\Theta = \omega(\Omega)$ .

Seja  $\Gamma = \Gamma(\mathcal{A})$  o grafo associado à estrutura de alças de  $H$ . Começamos com um lema de valor totalmente técnico mas natural.

**Lema 5.16.** *Seja  $N(\partial H) \subseteq H$  uma vizinhança produto regular do bordo  $\partial H$ . Existe uma isotopia ambiente levando  $\Gamma$  a um grafo horizontal  $G \subseteq N(\partial H)$ .*

*Demonstração.* Consideremos a estrutura de alças de  $H_0$ . Separamos cada 0-alça  $\hat{V}$  em dois usando um disco  $D_{\hat{V}}$  propriamente mergulhado em  $\hat{V}$  contendo  $\Gamma \cap \hat{V}$ . Pedimos ainda que  $D_{\hat{V}}$  também separe os discos de  $\partial \hat{V}$  onde as 1-alças são adicionadas em dois (é claro que tal disco existe). Daremos uma estrutura de produto  $\hat{V} \simeq D_{\hat{V}} \times [-1, 1]$  identificando  $D_{\hat{V}}$  com  $D_{\hat{V}} \times \{0\}$ . Denotaremos as metades de  $\hat{V}$  separadas por  $D_{\hat{V}}$  por  $\hat{V}_+ = D_{\hat{V}} \times [0, 1]$  e  $\hat{V}_- = D_{\hat{V}} \times [-1, 0]$ .

Faremos construção similar em cada 1-alça, buscando estender a decomposição das 0-alças. Seja  $\hat{e}$  uma 1-alça, ligando as 0-alças  $\hat{V}$  e  $\hat{V}'$  (não necessariamente distintas). Vamos escolher uma faixa  $b_{\hat{e}} \simeq I \times I$  propriamente mergulhada em  $\hat{e}$  contendo  $\Gamma \cap \hat{e}$ . Pedimos também que  $b_{\hat{e}} \cap \hat{V} = D_{\hat{V}} \cap \hat{e}$  e que essa interseção  $b_{\hat{e}} \cap D_{\hat{V}}$  seja suave. Dando um estrutura de produto  $\hat{e} \simeq b_{\hat{e}} \times [-1, 1]$ , pedimos, ainda, que as fibras dos produtos coincidam em  $\hat{e} \cap \hat{V}$  e preservem a orientação do intervalo, i.e.  $\hat{e}_+ = \hat{e} \times [0, 1]$  intercepta  $\hat{e} \cap \hat{V}$  em  $\hat{V}_+$  e, similarmente,  $\hat{e}_- = \hat{e} \times [-1, 0]$  intercepta  $\hat{e} \cap \hat{V}$  em  $\hat{V}_-$ . Isso claramente pode ser realizado torcendo uma faixa padrão em  $\hat{e}$  (veja Figura 5.12).

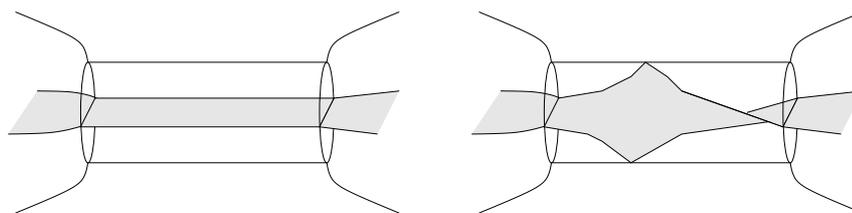


Figura 5.12: A faixa  $b_{\hat{e}}$  chegando sendo colada aos discos  $D_{\hat{V}}$ .

Seja  $S$  a união de todas essas superfícies  $D_{\hat{\gamma}}$  e  $b_{\hat{e}}$ . Então  $\Gamma \subseteq S$  e a estrutura de produto nas alças determina uma estrutura de produto  $H_0 \simeq S \times I$ . Podemos estender esse produto, um pouco além de  $H_0$  na direção vertical, obtendo  $S \times I'$  (onde  $I \subseteq I'$ ). Finalmente, usamos uma isotopia ambiente com suporte em  $S \times I'$  para levar  $\Gamma$  verticalmente a um gráfico  $\Gamma' \subseteq \partial H_0$ . Mantemos  $\Gamma'$  e esquecemos o resto da construção.

Consideramos a estrutura de produto em  $H - \mathring{H}_0$  e a ajustamos para coincidir com a estrutura de produto da vizinhança  $N(\partial H)$  de  $\partial H$ . Agora, simplesmente aplicamos uma isotopia ambiente que leve  $\partial H_0$  em uma superfície horizontal  $F \subseteq N(\partial H)$ . Segue que  $\Gamma'$  é levado em um grafo  $G \subseteq F$ .  $\square$

Lembramos que  $g = f^{-1}$  e definimos  $\partial g = g|_{\partial H}$ . Vamos usar  $\lambda_{\partial}$  para denotar o fator de crescimento do automorfismo pseudo-Anosov  $\partial g$ .

Para o próximo lema, introduzimos a noção para grafos análoga a um sistema de pesos em  $H_n$ . Dado um grafo  $\Gamma \subseteq H$  com  $q$  arestas e um vetor  $w = (w_1, \dots, w_q)$ , onde  $w_i \geq 0$  e algum  $w_i > 0$ , temos um par  $(\Gamma, w)$ , que denominamos um *grafo ponderado*. O vetor  $w$  é chamado de um *sistema de pesos* em  $\Gamma$ . Dada uma superfície interceptando  $\Gamma$  em suas arestas e transversalmente, definimos a *interseção ponderada* por

$$S \bullet (\Gamma, w) = \sum_{1 \leq i \leq q} |S \cap e_i| \cdot w_i.$$

Se  $(\Gamma, w)$  for um grafo ponderado e  $h: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  for um homeomorfismo, então  $h$  induz um sistema de pesos em  $\Gamma'$  que denotaremos pelo mesmo vetor  $w$ , determinando o grafo ponderado  $(\Gamma', w)$ .

**Lema 5.17.** *Seja  $D$  um disco propriamente mergulhado e essencial em  $H$ . Para qualquer sistema de pesos  $w$  em  $\Gamma$  há uma sequência de grafos ponderados  $n \mapsto (G^n, w)$ , isotópicos a  $(g^n(\Gamma), w)$  por uma isotopia ambiente compatível com os sistemas de pesos, tal que a sequência de interseções ponderadas  $n \mapsto D \bullet (G^n, w)$  cresce comparável a  $\lambda_{\partial}^n$ . Mais precisamente,*

$$\frac{D \bullet (G^n, w)}{(\lambda_{\partial})^n} \rightarrow r > 0.$$

*Demonstração.* A idéia é, grosseiramente, a seguinte: puxamos  $\Gamma$  para o bordo e aplicamos  $g$  várias vezes. As interseções de  $D$  com os iterados do grafo crescerá, a longo prazo, com fator  $\lambda_{\partial}$ .

Seja  $N(\partial H)$  uma vizinhança regular do bordo com estrutura de produto. Podemos alterar  $g$  somente em uma vizinhança regular de  $N(\partial H)$  de forma que  $g|_{N(\partial H)}$  seja o levantamento de  $\partial g$  para o produto.

Agora usamos uma isotopia ambiente para levar  $(\Gamma, w)$  a um grafo ponderado  $(G, w)$  com  $G \subseteq F \subseteq N(\partial H)$ , onde  $F$  é horizontal em  $N(\partial H)$  (Lema 5.16).

O automorfismo  $g|_F: F \rightarrow F$  é, essencialmente,  $\partial g$ , portanto abusamos da notação e denotamos  $\partial g = g|_F$ . Seja então  $\tau$  o “train-track” estável invariante por  $\partial g$  e  $N(\tau)$  uma vizinhança fibrada de  $\tau$  que seja  $\partial g$ -invariante. Podemos modificar  $g$  por uma isotopia de forma que  $D$  intercepte  $N(\tau)$  de forma eficiente e somente nas vizinhanças das arestas (“branches”). Alteramos  $G$  por uma isotopia ambiente de forma que  $G \subseteq N(\tau)$ : cada componente  $C$  de  $F - N(\tau)$  é um disco, portanto escolhemos um ponto  $p \in C - G$  e projetamos  $G$  radialmente em  $N(\tau)$  (notamos que isso também pode ser realizado por uma isotopia ambiente). Aprimoramos a posição de  $G$  em  $N(\tau)$  de forma que:

1. os vértices de  $G$  estejam contidos na vizinhança dos vértices de  $\tau$ ,
2. as arestas de  $G$  sejam transversais às fibras de  $N(\tau)$  nas vizinhanças das arestas de  $\tau$ .

Notamos que podemos não conseguir realizar a propriedade 2 acima na vizinhança dos vértices (veja Figura 5.13). Mas isso não será nenhum problema, pois  $D$  não intercepta  $N(\tau)$  nessa vizinhança. Mencionamos, também, que as propriedades 1 e 2 podem ser realizadas por isotopias ambiente.

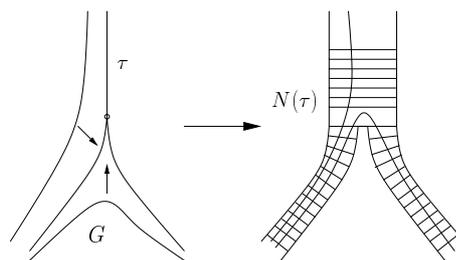


Figura 5.13: O grafo pode deixar de ser transversal às fibras de  $N(\tau)$  perto de um vértice.

Agora usamos  $G \subseteq N(\tau)$  para dar um sistema de pesos  $x$  em  $\tau$  (como grafo) da seguinte forma: seja  $\alpha_i$  uma fibra de  $N(\tau)$  transversal a uma aresta  $e_i$  de  $\tau$ . O peso  $x_i$  em  $e_i$  será a interseção ponderada  $\alpha_i \bullet (G, w)$ , que está bem definido (no sentido em que não depende da escolha do arco transversal  $\alpha_i$ ) pela posição de  $G$  transversal às fibras da vizinhança de  $e_i$ .

Pela  $\partial g$ -invariância de  $N(\tau)$ , os grafos  $g^n(G)$  gozam das mesmas propriedades 1 e 2 que  $G$ , donde podemos definir um sistema de pesos  $x^n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$  em  $\tau$  de forma análoga:

$$x_i^n = \alpha_i \bullet (g^n(G), w).$$

Isso nos dá um train-track ponderado  $(\tau, x^n)$  que podemos usar para achar a interseção ponderada do disco fixo  $D$  com  $g^n(G)$ :

$$D \bullet (g^n(G), w) = D \bullet (\tau, x^n).$$

Mas  $(\tau, x^n) = g^n(\tau, x^0)$ , implicando que  $x^n$  deve convergir, projetivamente, para um autovetor de Perron-Frobenius da matriz de incidência das arestas de  $\tau$ , que tem  $\lambda_\partial$  autovalor. Resumindo:

$$\frac{x^n}{(\lambda_\partial)^n} \rightarrow x^\infty,$$

onde  $x^\infty$  é autovetor da matriz de incidência das arestas de  $\tau$ . Segue que

$$\frac{D \bullet (g^n(G), w)}{(\lambda_\partial)^n} \rightarrow D \bullet (\tau, x^\infty) > 0.$$

Olhando para trás na demonstração, verificamos que  $(\Gamma, w)$  é levado a  $(G, w)$  por uma composição de isotopias ambiente, o que, portanto, se aplica também a  $(g^n(\Gamma), w)$  em relação a  $(g^n(G), w)$ , completando a demonstração.  $\square$

**Proposição 5.18.** *Se  $f: H \rightarrow H$  for um automorfismo genérico e  $\lambda = \lambda(\mathcal{E}) > \lambda_\partial$  então  $\Lambda(\mathcal{E})$  é transversalmente frouxa.*

*Demonstração.* Seja  $(\Gamma, \hat{\nu})$  o grafo associado à estrutura de alças de  $H_0$  com o respectivo autovetor  $\hat{\nu}$  como sistema de pesos. Se fixamos um disco  $E_i$  dual a uma 1-alça de  $H_0$  então

$$E_i \bullet (g^n(\Gamma), \hat{\nu}) = \lambda^n \hat{\nu}_i. \quad (5-4)$$

Mas o Lema 5.17 obtém grafos ponderados  $(G^n, \hat{\nu})$  isotópicos a  $(g^n(\Gamma), \hat{\nu})$  satisfazendo

$$\frac{E_i \bullet (G^n, \hat{\nu})}{(\lambda_\partial)^n} \rightarrow r > 0.$$

Como  $\lambda(\mathcal{E}) > \lambda_\partial$  então

$$\frac{E_i \bullet (G^n, \hat{\nu})}{(\lambda(\mathcal{E}))^n} \rightarrow 0,$$

donde há um  $N$  tal que

$$\frac{E_i \bullet (G^N, \hat{\nu})}{(\lambda(\mathcal{E}))^N} < \hat{\nu}_i. \quad (5-5)$$

De (5-4) e (5-5) segue

$$E_i \bullet (G^N, \hat{\nu}) < E_i \bullet (g^N(\Gamma), \hat{\nu}). \quad (5-6)$$

Usaremos a desigualdade (5-6) acima para achar um disco tensor com respeito a  $H_0$ .

Inicialmente voltamos para a direção expansora, considerando o automorfismo original  $f = g^{-1}$ . Se aplicamos  $f^N$  ao objetos envolvidos na desigualdade (5-6), obtemos

$$f^N(E_i) \bullet (f^N(G^N), \hat{\nu}) < f^N(E_i) \bullet (\Gamma, \hat{\nu}). \quad (5-7)$$

Agora vemos  $H_0$  como uma vizinhança de  $\Gamma$  e notamos que  $f^N(E_i) \cap H_0$  consiste de discos duais às 1-alças e que

$$f^N(E_i) \bullet (H_0, \hat{\nu}) = f^N(E_i) \bullet (\Gamma, \hat{\nu}). \quad (5-8)$$

A situação é similar para  $f^N(G^N)$ : há uma vizinhança  $H'$  de  $f^N(G^N)$  cuja estrutura de alças vindo de  $(f^N(G^N), \hat{\nu})$  herda o sistema de pesos, de onde obtemos  $(H', \hat{\nu})$  satisfazendo

$$f^N(E_i) \bullet (H', \hat{\nu}) = f^N(E_i) \bullet (f^N(G^N), \hat{\nu}). \quad (5-9)$$

Combinando (5-8) e (5-9) com (5-7) segue diretamente que:

$$f^N(E_i) \bullet (H', \hat{\nu}) < f^N(E_i) \bullet (H_0, \hat{\nu}). \quad (5-10)$$

Lembramos agora que  $\Gamma$  é isotópico a  $G$  donde  $H_0$  é isotópico a  $H'$  por uma isotopia ambiente. Seja  $h: H \rightarrow H$  isotópico à identidade  $\text{id}_H$  tal que  $h(H_0) = H'$  e notemos que o sistema de pesos  $\hat{\nu}$  nas 1-alças de  $H'$  determina o mesmo par  $(H', \hat{\nu})$  que tínhamos anteriormente, induzido por  $(f^N(G^N), \hat{\nu})$ . Agora usamos  $h$  para construir um disco tensor transversal: aplicando  $h^{-1}$  a  $f^N(E_i)$  e  $H'$ , concluímos da desigualdade (5-10):

$$(h^{-1} \circ f^N(E_i)) \bullet (H_0, \hat{\nu}) < f^N(E_i) \bullet (H_0, \hat{\nu}).$$

Completamos a demonstração modificando o disco  $D = h^{-1} \circ f^N(E_i)$  por

uma isotopia perto do bordo (portanto sem alterar sua interseção com  $H_0$ ) de forma que  $\partial D \subseteq \Lambda$  donde vemos, pela desigualdade acima, que  $D$  é disco tensor com respeito a  $H_0$ .  $\square$

**Corolário 5.19.** *Se  $\Lambda(\mathcal{E})$  for transversalmente tensa então  $\lambda(\mathcal{E}) \leq \lambda_\partial$ .*

**Corolário 5.20.** *O fator de crescimento minimal de um automorfismo genérico  $f: H \rightarrow H$  de um cubo com alças de gênero 2 é menor que ou igual ao fator de crescimento do automorfismo pseudo-Anosov  $\partial f = f|_{\partial h}$ .*

*Demonstração.* Usamos o Corolário 5.19 e o Corolário 5.15.  $\square$