

### 3 Construindo Exemplos.

Dedicaremos este capítulo à construção de exemplos. Logo na primeira seção apresentamos um exemplo de automorfismo genérico, mostrando que estes existem. Na Seção 3.2 generalizamos a construção do primeiro exemplo e construímos um método para gerar uma variedade de automorfismos genéricos.

Já começando a abordar o problema de estimar o fator de crescimento mostramos uma condição suficiente (bem natural) para o fator de crescimento ser minimal, motivado por um dos exemplos. Isso é feito na Seção 3.3.

A seção final é dedicada às superfícies redutoras fechadas. Damos uma estimativa, que é a melhor possível dentro das hipóteses assumidas, para a característica de Euler de uma superfície redutora fechada. Seguirá, como corolário, que um automorfismo cuja restrição ao bordo é pseudo-Anosov deve ser genérico se o cubo com alças tiver gênero dois.

#### 3.1 Um exemplo.

Mostramos que automorfismos genéricos de cubos com alças existem apresentando um exemplo.

Seja  $H$  um cubo com alças de gênero 2. Vamos construir um automorfismo de  $H$  como composição de torsões de Dehn ao longo de dois anéis e um disco. Depois, provamos que o automorfismo é genérico mostrando que sua restrição à  $\partial H$  é pseudo-Anosov e que não podem haver superfícies redutoras fechadas.

**Exemplo 3.1.** Começamos com um automorfismo pseudo-Anosov  $\varphi: S \rightarrow S$  do toro menos um disco. Tal  $\varphi$  será definido como composição de torsões de Dehn ao longo de duas curvas.

Representaremos  $S$  como uma cruz identificando dois a dois seus lados opostos (veja Figura 3.1).

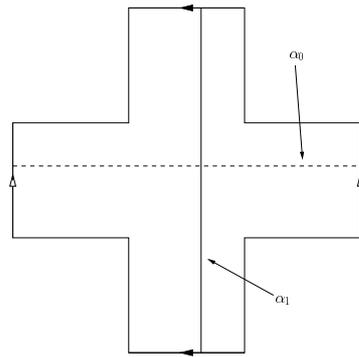


Figura 3.1: A superfície  $S$  e as curvas  $\alpha_0, \alpha_1$ . As torsões serão para a esquerda em  $\alpha_0$  e para a direita em  $\alpha_1$ .

Sejam  $\alpha_0, \alpha_1$  as curvas simples fechadas como na figura. É fácil verificar que os sistemas de curvas  $\mathcal{C} = \{\alpha_0\}$  e  $\mathcal{D} = \{\alpha_1\}$  satisfazem as hipóteses do Teorema 2.15 de Penner. Sejam  $T_0^-$  a torsão de Dehn para a esquerda ao longo de  $\alpha_0$  e  $T_1^+$  a torsão para a direita ao longo de  $\alpha_1$ . Definiremos

$$\varphi = T_1^+ \circ T_0^-.$$

Pelo Teorema 2.15,  $\varphi$  é pseudo-Anosov. Se tomamos os laços  $a, b$  como na Figura 3.2 para geradores de  $\pi_1(S)$  (usando o ponto destacado na figura como base), é fácil verificar que  $\varphi_*: \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(S)$  é dado por

$$\begin{aligned} a &\mapsto ab \\ b &\mapsto bab, \end{aligned}$$

que é irredutível pelo Teorema 2.26.

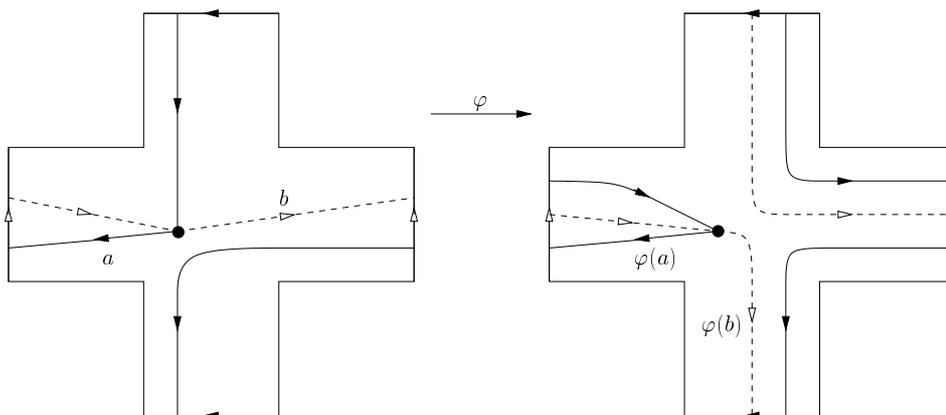


Figura 3.2: O efeito de  $\varphi$  em  $\pi_1(S)$ .

Agora consideramos o cubo com alças  $H = S \times I$  e levantamos  $\varphi$  para  $H$ , obtendo  $\phi: H \rightarrow H$ , uma composição de torsões ao longo dos anéis

$A_0 = \alpha_0 \times I$ ,  $A_1 = \alpha_1 \times I$  como na Figura 3.3.

*Observação.* Para uso futuro, devemos pensar na figura como se a estivessemos olhando “de cima”, com  $S \times \{0\}$  atrás de  $S \times \{1\}$ . Mais precisamente, orientamos  $H$  de forma que a orientação induzida em  $S \times \{1\}$  coincida com a orientação herdada de  $S$ .

Se identificamos  $\pi_1(H)$  com  $\pi_1(S)$ , temos que  $\phi_* = \varphi_*$ .

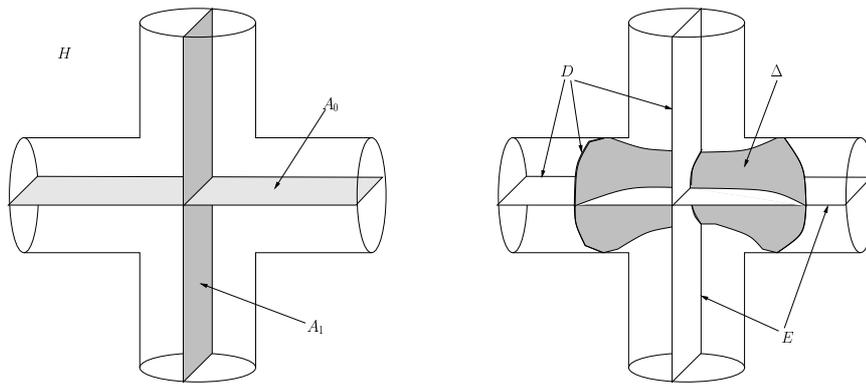


Figura 3.3: O automorfismo  $f$  é definido como composição de torsões ao longo dos anéis  $A_0$ ,  $A_1$  e do disco  $\Delta$ .

Finalmente, construiremos o automorfismo  $f: H \rightarrow H$  desejado compondo  $\phi$  com uma torsão ao longo de um disco  $\Delta$ , representado na Figura 3.3. Seja  $T_{\Delta}^+$  a torsão de Dehn para a direita ao longo de  $\Delta$ . Definimos

$$f = T_{\Delta}^+ \circ \phi.$$

**Lema 3.2.** *O automorfismo  $f: H \rightarrow H$  é genérico.*

Parte da demonstração será feita no seguinte lema.

**Lema 3.3.** *Seja  $g: H' \rightarrow H'$  um automorfismo de um cubo com alças  $H'$  tal que  $\partial g$  seja pseudo-Anosov. Se  $g$  for redutível então, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_*^n: \pi_1(H') \rightarrow \pi_1(H')$  é redutível.*

*Demonstração.* Seja  $Q$  um produto com alças invariante por  $g$ . Sejam  $S \subseteq \partial_i Q$  uma componente da superfície redutora fechada e  $L \subseteq \mathring{H}'$  o cubo com alças cujo bordo é  $S$  (i.e.,  $\partial L = S$ ). Seja  $g^n$  uma potência de  $g$  que preserve  $L$ . Escolhendo como base um ponto de  $L$ , podemos escrever

$$\pi_1(H') = \pi_1(L) * G.$$

Como  $Q$  não é trivial então  $G$  não é trivial, donde  $\pi_1(L)$  é um fator livre próprio de  $\pi_1(H')$ . De

$$g^n(L) = L$$

segue que  $g_*^n(\pi_1(L))$  é conjugado à  $\pi_1(L)$ , portanto a classe de  $g_*^n$  em  $Out(\pi_1(H'))$  é redutível.  $\square$

*Demonstração do Lema 3.2.* Precisamos provar que  $\partial f$  é pseudo-Anosov e que  $f$  não admite superfícies redutoras fechadas.

Comaçamos provando que  $\partial f = f|_{\partial H}$  é pseudo-Anosov. Por definição,  $\partial f$  é uma composição de torsões ao longo de curvas: para a esquerda ao longo de

$$E = \{(\alpha_0 \times \{1\}), (\alpha_1 \times \{0\})\},$$

e para a direita ao longo de

$$D = \{(\alpha_0 \times \{0\}), (\alpha_1 \times \{1\}), \partial\Delta\}.$$

Agora notamos que quaisquer duas tais curvas se interseptom de forma eficiente (i.e., transversalmente e de forma minimal) e que a união  $E \cup D$  preenche  $\partial H$  (i.e., o complemento de  $E \cup D$  é uma união de discos). Além disso, se duas tais curvas se interseptom então as respectivas torsões são em sentidos opostos. Nestas condições o Teorema 2.15 garante que a composição de torsões  $\partial f$  é pseudo-Anosov.

Agora mostramos que o automorfismo  $f$  não admite superfície redutora fechada. Se existisse uma tal superfície, pelo Lema 3.3, existiria  $n$  tal que  $f_*^n$  seria redutível. Mas  $f = (T_\Delta^+) \circ \phi$  e a torsão  $T_\Delta^+$  (como toda torção ao longo de um disco) induz a identidade em  $\pi_1(H)$ . Portanto, lembrando que tomamos os geradores de  $\pi_1(S)$  como geradores de  $\pi_1(H)$  (pela inclusão  $S \rightarrow S \times \{1\}$ ), temos que  $f_*^n = \phi_*^n$ , que é irredutível para qualquer  $n$  (Teorema 2.26), uma contradição.

Segue que  $f$  é genérico.  $\square$

*Observação.* O Exemplo 3.1 acima é caso particular de dois critérios que dão condições suficientes para um automorfismo ser genérico, descritos pelo Teorema 3.5 e Corolário 3.14.

## 3.2

### Um metodo para gerar automorfismos genéricos.

A construção do Exemplo 3.1 pode ser generalizada de forma a obtermos um método para produzir uma grande variedade de automorfismos de cubos com alças (veja Teoremas 3.5 e 3.7). Tal método resolve parcialmente um problema proposto em [40].

**Definição 3.4.** Dizemos que um par  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  de sistemas de curvas em uma superfície  $S$  compacta e orientada com  $\chi(S) < 0$  é um *par de Penner em  $S$*  se  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  satisfizerem as hipóteses do Teorema 2.15 de Penner i.e.,

1. cada  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  é um sistema de curvas simples, fechadas e disjuntas dois-a-dois,
2.  $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  preenchem  $S$ .

Suponhamos que  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  seja um par de Penner. Um automorfismo  $\varphi: S \rightarrow S$  de  $S$  obtido de  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  como no Teorema 2.15, é dito um *automorfismo de Penner subordinado à  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$* . Se  $\partial S \neq \emptyset$  então um arco propriamente mergulhado e essencial  $\theta$  é dito *dual à  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$*  se  $\theta$  interceptar  $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  transversalmente e em exatamente um ponto  $p \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ .

*Observação.* Embora nem todo par de Penner admita arcos duais, é bem fácil construir pares que admitam: um tal par  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  em  $S$  tem a propriedade de que há duas componentes (não necessariamente distintas) de  $S - (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$  que contêm alguma componente de  $\partial S$  e são adjacentes. Se o par não satisfizer essa propriedade, podemos remover discos de  $S$  de forma a introduzir arcos duais.

**Teorema 3.5.** *Seja  $S$  uma superfície compacta com  $\chi(S) < 0$  e tal que  $\partial S \neq \emptyset$  tenha exatamente uma componente. Seja  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  um par de Penner em  $S$  com arco dual  $\theta$  e  $\varphi: S \rightarrow S$  um automorfismo de Penner subordinado à  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ . Consideramos  $H = S \times I$  orientado pela inclusão  $S \simeq S \times \{1\} \rightarrow H$ . Se  $\hat{\varphi}: H \rightarrow H$  for o levantamento de  $\varphi$  ao produto  $H = S \times I$  então existe um disco propriamente mergulhado  $\Delta \subseteq H$  tal que, para uma torção de Dehn apropriada  $T_\Delta: H \rightarrow H$  ao longo de  $\Delta$ , a composição*

$$\hat{\varphi} \circ T_\Delta: H \rightarrow H$$

*é um automorfismo genérico do cubo com alças  $H$ .*

*Observação.* Para algumas das definições usadas no enunciado do teorema nos referimos à Definição 3.4 acima.

O leitor não deve se desestimular pelo enunciado técnico do teorema: o objetivo é somente generalizar a construção do Exemplo 3.1 com alguma flexibilidade.

Seguindo o exemplo, a idéia da prova do teorema será construir um automorfismo de  $H$  cuja restrição ao bordo seja pseudo-Anosov e cujo automorfismo induzido em  $\pi_1(H)$  seja irredutível. Ambas propriedades serão

mostradas por uso do Teorema 2.15 de Penner. Dado o disco  $\Delta$  o argumento seguirá essencialmente como no exemplo. O Lema 3.6 abaixo providenciará o tal disco desejado  $\Delta$ .

**Lema 3.6.** *Sejam  $S$ ,  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ,  $\theta$  e  $H = S \times I$  como no enunciado do Teorema 3.5 e suponhamos que  $\theta \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{C}$ . Sejam  $\mathcal{C}_i = \mathcal{C} \times \{i\} \subseteq S_i = S \times \{i\}$  e  $\mathcal{D}_i = \mathcal{D} \times \{i\} \subseteq S_i = S \times \{i\}$ , definindo  $\mathcal{C}_0, \mathcal{D}_0 \subseteq S_0$  e  $\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1 \subseteq S_1$ . Nessas condições há um disco propriamente mergulhado  $\Delta \subseteq H$  tal que os seguintes sistemas de curvas em  $\partial H$*

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \{\partial\Delta\} \\ \mathcal{S} &= \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_1\end{aligned}$$

determinam um par de Penner  $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$  em  $\partial H$ .

*Demonstração.* Começamos fazendo a observação óbvia de que  $\mathcal{C}_0, \mathcal{D}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1 \subseteq \partial H$ .

Seja  $\theta \subseteq S$  como no enunciado e consideremos  $\gamma \in \mathcal{C}$  a curva que  $\theta$  intercepta. Se  $D = \theta \times I \subseteq H$  e  $\gamma_1 = \gamma \times \{1\}$  então é claro que  $\partial D \cap \mathcal{D}_i = \emptyset$  para  $i = 0, 1$ , e que  $|\partial D \cap \mathcal{C}_0| = 1$ ,  $\partial D \cap \mathcal{C}_1 = \partial D \cap \gamma_1$ , que consiste de somente um ponto. Seja então  $\Delta$  o *band sum* de  $D$  consigo mesmo ao longo de  $\gamma_1$  i.e.,  $\Delta$  é obtido de  $D$  e  $\gamma_1$  pela seguinte construção: consideremos uma vizinhança regular  $N(D \cup \gamma_1)$ . Então  $\Delta = \overline{\partial D - \partial H}$  é um disco propriamente mergulhado.

Da construção é bem claro que  $\Delta \cap \gamma_1 = \emptyset$  e portanto que  $\Delta \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$ . Como  $D \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$  então  $\Delta \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$ , donde  $\mathcal{R} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \{\partial\Delta\}$  é um sistema de curvas simples, fechadas e essenciais em  $\partial H$ . É até mais claro que  $\mathcal{S} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_1$  é uma tal sistema. Para concluir que  $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$  é um par de Penner temos somente que verificar, então, que  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  preenche  $\partial H$ .

Uma componente de  $S - (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$  ou é um disco ou um anel que retrai para  $\partial S$ , portanto uma componente de  $\partial H - (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1)$  ou é um disco ou um anel  $A$  (que retrai para  $\partial S \times I$ ). Mas  $A \cap \Delta$  é uma união de 4 arcos essenciais em  $A$ , donde cada componente de  $\partial H - (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})$  é um disco, mostrando que  $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$  preenche  $\partial H$ , completando a demonstração.  $\square$

Vamos mostrar o teorema mais geral abaixo, que claramente implica o Teorema 3.5. O enunciado fará referência a uma definição que damos agora: se  $S$  for uma superfície orientada e  $c$  for uma curva simples fechada então  $T_c^+ : S \rightarrow S$  denotará a torção de Dehn para a direita ao longo de  $c$  e  $T_c^-$  denotará a respectiva torção para a esquerda. Se  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  for um par de Penner então  $\mathcal{C}^\pm = \{T_c^\pm \mid c \in \mathcal{C}\}$  e  $\mathcal{D}^\pm = \{T_d^\pm \mid d \in \mathcal{D}\}$ .

**Teorema 3.7.** *Sejam  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ,  $S$ ,  $\theta$  e  $H = S \times I$  como no Teorema 3.5 e consideremos as coleções de torções  $\mathcal{C}^\pm$ ,  $\mathcal{D}^\mp$  em  $S$ . Elas sobem para coleções  $\hat{\mathcal{C}}^\pm$ ,  $\hat{\mathcal{D}}^\mp$  de torções ao longo de anéis em  $H$ . Seja  $\Delta$  um disco propriamente mergulhado em  $H$  e consideremos  $T_\Delta^\pm$  a respectiva torção ao longo de  $\Delta$ . Nessas condições existe uma escolha de  $\Delta$  tal que um elemento  $f$  do semi-grupo gerado por  $G = \{T_\Delta^\pm\} \cup \hat{\mathcal{C}}^\pm \cup \hat{\mathcal{D}}^\mp$  será genérico desde que cada gerador apareça ao menos uma vez na composição de  $f$ .*

*Demonstração.* Mostraremos inicialmente que  $f_*^n: \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(H)$  é um automorfismo irreduzível de um grupo livre para todo  $n \geq 0$  (portanto não pode haver nenhuma superfície redutora fechada) e depois que  $\partial f = f|_{\partial H}$  é pseudo-Anosov, completando a demonstração de que  $f$  é genérico.

Primeiro identificamos  $\pi_1(H)$  com  $\pi_1(S)$  identificando  $S$  com  $S \times \{1\}$  e então tomando a inclusão. Como  $(T_\Delta^+)_*: \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(H)$  é a identidade para qualquer disco  $\Delta$  então  $f_* = \varphi_*$  para algum automorfismo de Penner  $\varphi: S \rightarrow S$  subordinado ao  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ : simplesmente apagamos qualquer potência de  $T_\Delta^+$  da composição de  $f$  obtendo um levantamento de um automorfismo de Penner. Automorfismos de Penner são pseudo-Anosov e, dado que  $\partial S$  tem somente uma componente, segue do Teorema 2.26 que  $\varphi_*^n$  é um automorfismo irreduzível de  $\pi_1(S)$  para todo  $n \geq 0$ , portanto  $f_*^n: \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(H)$  é irreduzível, mostrando que  $f$  não admite superfícies redutoras fechadas (Lema 3.3).

Para concluir que  $\partial f$  é pseudo-Anosov precisaremos usar uma boa escolha de  $\Delta$ . Sejam  $\Delta$ ,  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  como no Lema 3.6. É rotineiro verificar que o conjunto de geradores  $G$  do enunciado restringe à  $\partial H$  como  $\partial G = \mathcal{R}^\pm \cup \mathcal{S}^\mp$ . Mas  $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$  é um par de Penner (Lema 3.6) e  $\partial f$  é uma composição de elementos de  $\partial G$ , donde  $\partial f$  é um automorfismo de Penner subordinado à  $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ . Logo  $\partial f$  é um automorfismo pseudo-Anosov de  $\partial H$ , completando a demonstração de que  $f$  é genérico.  $\square$

**Exemplo 3.8.** Consideremos  $S$  um bitoro menos um disco, representado na Figura 3.4 como um octógono cujos lados são identificados seguindo as setas.

Na figura estão representadas também 4 curvas:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ . Definindo

$$\mathcal{C} = \{ \beta, \delta \}$$

$$\mathcal{D} = \{ \alpha, \gamma \}$$

é fácil de se verificar que  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  é um par de Penner em  $S$ . O automorfismo

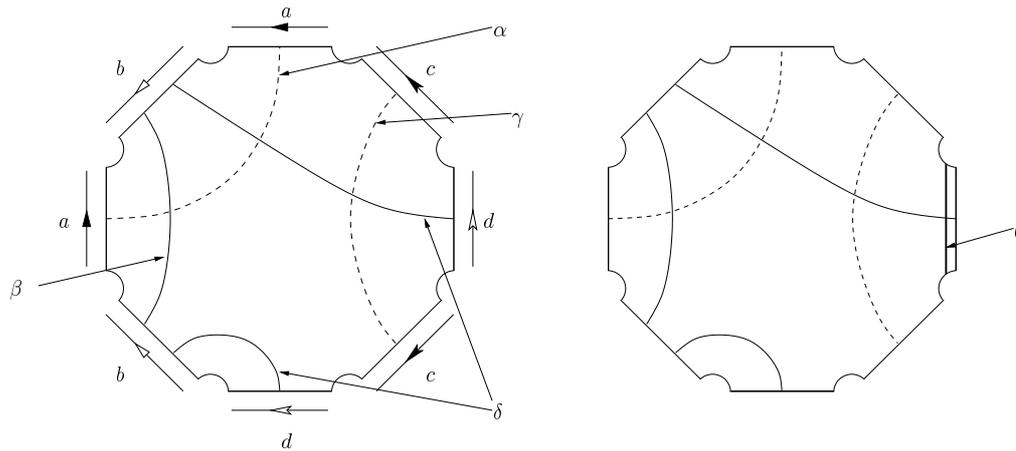


Figura 3.4: O par de Penner em  $S$  e o arco dual  $\theta$ .

$\varphi: S \rightarrow S$  definido por

$$\varphi = T_{\beta}^{-} \circ T_{\delta}^{-} \circ T_{\alpha}^{+} \circ T_{\gamma}^{+}$$

é, portanto, automorfismo de Penner subordinado ao par  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ .

O par  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  admite arcos duais. A figura mostra um deles, o arco  $\theta$ , que é paralelo ao lado  $d$  do octógono. O Lema 3.6 produz um disco  $\Delta = \Delta(\theta)$  em  $H = S \times I$  que é usado para se gerar automorfismos genéricos em  $H$ . A Figura 3.5 mostra  $S_0 = S \times \{0\}$ ,  $S_1 = S \times \{1\} \subseteq \partial H$  e como  $\partial\Delta$  os intercepta.

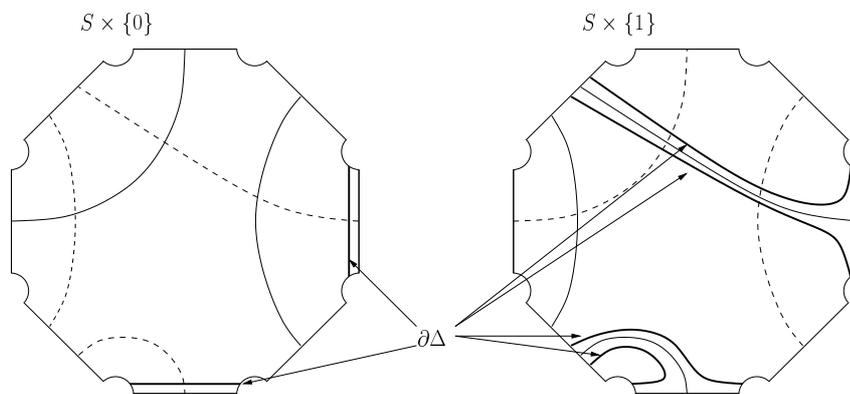


Figura 3.5: A curva  $\partial\Delta$  em  $\partial H$ .

A Figura 3.5 mostra também o par  $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$  obtido pelo Lema 3.6:  $\mathcal{R}$  consiste das curvas cheias, incluindo  $\partial\Delta$ , enquanto as curvas pontilhadas formam  $\mathcal{S}$ .

O Teorema 3.5 garante que, se  $\hat{\varphi}: H \rightarrow H$  for o levantamento de  $\varphi$  para  $H$ , então

$$\hat{\varphi} \circ T_{\Delta}: H \rightarrow H$$

é um automorfismo genérico.

### 3.3

#### Limitando o fator de crescimento.

Uma de nossas metas é achar – ou ao menos estimar – o fator de crescimento minimal  $\lambda_{min}$  de um automorfismo genérico. A Proposição 3.9 abaixo dará um limite inferior natural para esse fator.

Seja  $f: H \rightarrow H$  um automorfismo genérico de  $H$ . Definimos o *fator de crescimento de  $f_*^{-1}: \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(H)$* , denotado por  $\lambda(f_*^{-1})$ , como sendo

$$\exp(h_A(f^{-1})),$$

onde  $h_A(f^{-1})$  é a *entropia algébrica*, conforme [18, Capítulo 3], cuja definição adaptamos e apresentamos brevemente a seguir, no caso de  $\pi_1(H)$  ser um grupo livre.

Seja  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  um conjunto de geradores para  $\pi_1(H)$ . Fixado  $g \in \pi_1(H)$  denotamos por  $|g|_G$  o tamanho da palavra reduzida que representa  $g$  nos geradores  $g_i$ . Definimos  $L_n(f_*^{-1}, G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{|f_*^{-n}(g_i)|_G\}$ . É possível se provar que

$$\lambda(f_*^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L_n(f_*^{-1}, G))^{\frac{1}{n}}$$

existe e independe de  $G$ . Dizemos que  $\lambda(f_*^{-1})$  é o *fator de crescimento de  $f_*^{-1}: \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(H)$* .

**Proposição 3.9.** *O fator  $\lambda_{min}$  é maior que ou igual ao fator  $\lambda(f_*^{-1})$ .*

*Observação.* A proposição é bem natural:  $\lambda_{min}$  é um mínimo alcançado na classe de isotopia de  $f$ , enquanto  $\lambda(f_*^{-1})$  é um mínimo alcançado em sua classe de homotopia (que, obviamente, contém a classe de isotopia). Para fazer dessa observação um argumento rigoroso somente precisamos relacionar os dois fatores ( $\lambda(f_*^{-1})$  e  $\lambda_{min}$ ) por meio de objetos comuns, o que faremos de forma elementar na demonstração abaixo. Mas mencionamos que a proposição segue facilmente de resultados de [2] e [46] (vide [2, Remark 1.8]).

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{E}$  o sistema de discos que realiza o fator de crescimento minimal (i.e.,  $\lambda_{min} = \lambda(\mathcal{E})$ ) e consideramos  $\Gamma(\mathcal{E}) \subseteq H$ . Tomamos um vértice de  $\Gamma$  como ponto base e consideramos uma árvore maximal  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ . Sejam  $e_1, \dots, e_k$  suas arestas complementares,  $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{E}$  os discos duais às

tais arestas e  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \rightarrow \Gamma$  laços localmente mergulhados tais que  $\gamma_i$  passa por  $e_j$  se e somente se  $i = j$ , em cujo caso passa exatamente uma vez. É claro que  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  geram  $\pi_1(H)$ . Escolhendo, por exemplo,  $\gamma_j$ , iterando  $f^{-n}(\gamma_j)$  e contando o crescimento da sua interseção com os discos  $E_1, \dots, E_k$  nos permite aproximar  $\lambda_{min}$ . Mais precisamente

$$\left| f^{-n}(\gamma_j) \cap \left( \bigcup_{i=1}^k E_i \right) \right|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \lambda_{min}, \tag{3-1}$$

onde relembramos que  $|A|$  denota o número de componentes conexas de  $A$ . Se  $|f_*^{-n}[\gamma_1]|$  denota o tamanho da palavra reduzida representando  $f_*^{-n}[\gamma_1] \in \pi_1(H)$  nos geradores  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , é claro que

$$|f_*^{-n}[\gamma_j]| \leq \left| f^{-n}(\gamma_j) \cap \left( \bigcup_{i=1}^k E_i \right) \right|,$$

donde

$$\max_{1 \leq j \leq k} \left\{ |f_*^{-n}[\gamma_j]|^{\frac{1}{n}} \right\} \leq \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \left| f^{-n}(\gamma_j) \cap \left( \bigcup_{i=1}^k E_i \right) \right|^{\frac{1}{n}} \right\}. \tag{3-2}$$

Como em 3-2 o máximo é tomado sobre  $j$  em um conjunto finito e a convergência em 3-1 independe de  $j$ , concluímos que o lado direito da desigualdade 3-2 converge para  $\lambda_{min}$ , donde

$$\max_{1 \leq j \leq k} \left\{ |f_*^{-n}[\gamma_j]|^{\frac{1}{n}} \right\} \rightarrow \lambda(f_*^{-1}) \leq \lambda_{min}.$$

□

**Exemplo 3.10.** Voltamos ao Exemplo 3.1. Consideremos os laços  $a, b$  geradores de  $\pi_1(H)$  como definidos no Exemplo 3.1 e os vejamos como definindo uma estrutura de alças para  $H_0$  i.e., interpretamos o ponto base como um vértice e os laços (agora não mais representando classes de homotopia) como arestas de um grafo  $\Gamma$ , que define em  $H_0 = N(\Gamma)$  um sistema de discos duais  $\mathcal{E} = \{A, B\}$  (ver Figura 3.6).

Agora consideramos  $g = f^{-1}: H \rightarrow H$  onde  $f$  é o automorfismo genérico construído no Exemplo 3.1. Portanto  $g$  também é genérico e, a partir do sistema  $\mathcal{E}$ , podemos construir a laminação  $\Lambda(\mathcal{E})$ . Para isso, escolhemos um representante da classe de  $g$  que seja expansor e precisamos de ver como  $g(\mathcal{E}) \subseteq H_1$  intercepta  $H_0$ . Isso é o mesmo que ver como  $\mathcal{E}$  intercepta  $H_{-1} = g^{-1}(H_0) = f(H_0)$  (use  $g^{-1} = f$ , que é contrator, como

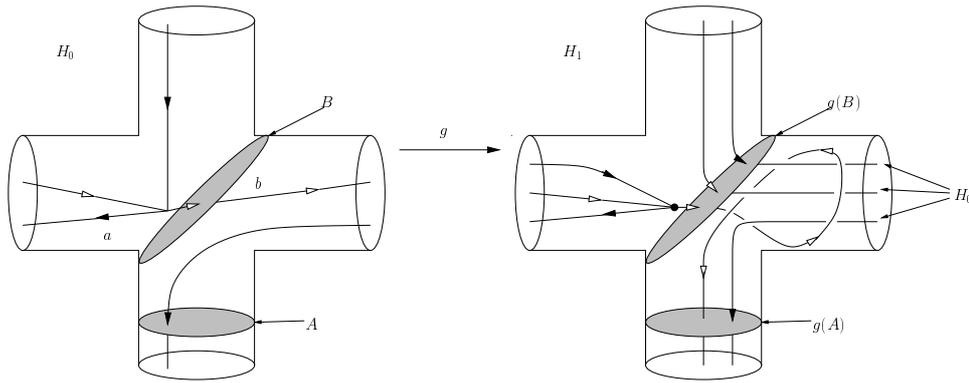


Figura 3.6: À esquerda:  $H_0$  com estrutura de alças determinada por um grafo. À direita:  $H_0 \subseteq H_1$  deve ser visto como vizinhança do grafo.

mudança de coordenadas), representado na Figura 3.6.

Vemos, então, que a matriz de incidência  $M(\mathcal{E})$  para  $g$  é:

$$M(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cujos auto-valor de Perron-Frobenius é

$$\lambda(\mathcal{E}) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Agora relembremos do Exemplo 3.1 que  $g_*^{-1}$  é dado, em um determinado conjunto de geradores, por

$$\begin{aligned} a &\mapsto ab \\ b &\mapsto bab, \end{aligned}$$

cujas matrizes de incidência  $M(g_*^{-1})$  é igual à matriz  $M(\mathcal{E})$  acima. Como  $g_*^{-n}(a)$  nunca apresenta expoentes negativos não há cancelamentos e, portanto,  $|g_*^{-n}(a)|$  é exatamente a soma das coordenadas da primeira coluna de  $M(g_*^{-1})^n$ , cujo crescimento aproxima o autovalor de Perron-Frobenius  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ . Logo  $\lambda(g_*^{-1}) = \lambda(\mathcal{E}) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  é o fator de crescimento (minimal) de  $g$  (Proposição 3.9).

No exemplo acima temos a igualdade  $\lambda_{min} = \lambda(g_*^{-1})$ . Veremos mais adiante que há casos onde não ocorre essa igualdade, mostrando que a desigualdade da Proposição 3.9 pode ser estrita (ver Exemplo 3.15).

### 3.4

#### Superfície redutora fechada.

Nessa seção desenvolveremos um outro método para construção de automorfismos genéricos. Por um lado, este será mais limitado do que aquele da Seção 3.2, no sentido em que gera exemplos somente em gênero 2, em oposição ao gênero arbitrariamente grande permitido pelo outro. Por outro lado, independe da complexidade em  $\pi_1$ , indispensável naquele, dando uma liberdade com consequências interessantes (ver Exemplo 3.15). Esse novo método também resolve parcialmente um problema proposto em [40].

**Lema 3.11.** *Se  $Q$  é um produto com alças com  $n$  1-alças então*

$$\chi(\partial_e Q) = \chi(\partial_i Q) - 2n$$

*Demonstração.* Indutivamente, reconstruímos  $M_n = Q$  a partir de  $\partial_i Q$  começando com  $M_0 = \partial_i Q \times I$  e obtendo  $M_{i+1}$  de  $M_i$  pela adição da respectiva 1-alça ao  $\partial_e M_i$ . É claro então que, se uma 1-alça liga duas componentes de  $M_i$  então o efeito na componente de bordo exterior é, a menos de homeomorfismo, o de tomar a soma conexa das respectivas componentes de  $\partial_e M_i$ . Similarmente, se ambos os extremos da 1-alça são colados à mesma componente de  $\partial_e M_i$ , então o efeito é o de se tomar a soma conexa desta componente com um toro. De qualquer forma a característica de Euler do bordo exterior cai em duas unidades para cada alça.  $\square$

**Proposição 3.12.** *Seja  $(Q, U)$  um produto com alças com somente uma alça. A alça é única a menos de isotopia.*

*Demonstração.* Começamos observando que, a menos de isotopia, uma 1-alça é determinada por um *disco dual* (i.e., se  $D \times I$  é a 1-alça então um disco dual é um disco propriamente mergulhado isotópico a um disco da forma  $D \times \{t\}$ ). É evidente que um tal disco dual também está bem definido a menos de isotopia.

Fixada uma 1-alça para  $(Q, U)$  segue da observação acima que um disco dual  $D$  a determina. Fixamos  $D$ . Consideremos agora uma outra alça para  $(Q, U)$  e seja  $D'$  o respectivo disco dual. A estratégia será a de modificar  $D'$  por isotopias realizando operações de “corte e colagem” padrão que simplifiquem  $D \cap D'$ . Esse processo terminará com  $D$  e  $D'$  disjuntos. Essa parte do argumento somente usa que  $D$  e  $D'$  são discos compressores de  $\partial_e Q$ . Completamos a prova usando o fato de que  $D$  e  $D'$  são discos duais às 1-alças para concluir que eles são paralelos, portanto isotópicos. Segue então que as 1-alças são isotópicas.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $Q$  é conexa: como  $Q$  só tem uma 1-alça, somente uma de suas componentes não é um produto, sendo  $\partial_e Q$  compressível somente nessa componente. Segue, então, que ela deve conter tanto  $D$  quanto  $D'$ .

Perturbamos  $D'$  por uma isotopia de forma que  $D'$  intercepte  $D$  transversalmente. Portanto  $D \cap D'$  consiste de uma união disjunta de curvas simples fechadas e arcos. Vamos aplicar isotopias a  $D'$  para eliminar as curvas simples fechadas seguidas de isotopias que eliminarão os arcos.

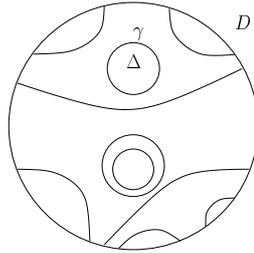


Figura 3.7: O padrão de interseção  $D \cap D'$  em  $D$ .

Se  $D \cap D'$  contiver alguma curva fechada, consideramos  $\gamma$  alguma que seja mais ao interior em  $D$ , i.e.,  $\gamma$  é o bordo de um disco  $\Delta \subseteq D$  cujo interior não intersepta  $D'$  (ver Figuras 3.7 e 3.8). Como  $\gamma \subseteq D'$  segue que  $\gamma$  borda um disco  $\Delta' \subseteq D'$  (não necessariamente mais ao interior). Pela escolha de  $\gamma$  temos que  $\Delta \cap \Delta' = \gamma$  logo  $\Delta \cup \Delta'$  é uma 2-esfera mergulhada. Mas  $Q$  é irredutível, portanto essa 2-esfera borda uma bola  $B$  (ver Figura 3.8).

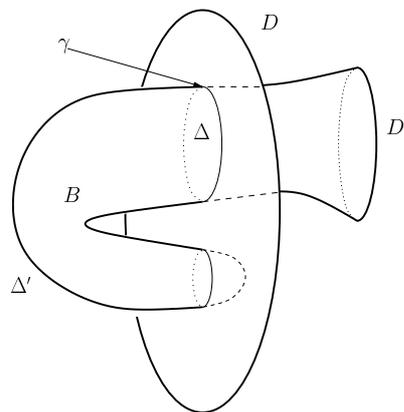


Figura 3.8:  $\Delta \cup \Delta'$  bordam uma bola

Aplicamos, então, uma isotopia à  $D'$  puxando  $\Delta'$  ao longo de  $B$ , indo um pouco além de  $D$ . Esta operação elimina a curva  $\gamma$  de  $D \cap D'$  sem introduzir novas componentes na interseção, reduzindo o número de componentes fechadas em  $D \cap D'$ . Repetimos esse processo para alguma curva fechada (mais ao interior em  $D$ ) remanescente em  $D \cap D'$  até que não reste nenhuma.

Se, ainda,  $D \cap D' \neq \emptyset$  então  $D \cap D'$  consiste de uma união de arcos. Novamente vamos aplicar isotopias à  $D'$  que eliminem esses arcos sem introduzir novas curvas de interseção. Seja  $U = \partial_i Q$ . Consideraremos dois casos: 1.  $U$  não é conexa e 2.  $U$  é conexa.

1. [ $U$  não é conexa]: neste caso  $D$  separa  $Q$ . Seja  $\alpha$  um arco de  $D \cap D'$  mais ao bordo em  $D'$  i.e.,  $\alpha$  borda com um arco  $\beta \subseteq \partial D'$  um disco  $\Delta'$  cujo interior não intersepta  $D$  (ver Figura 3.9).

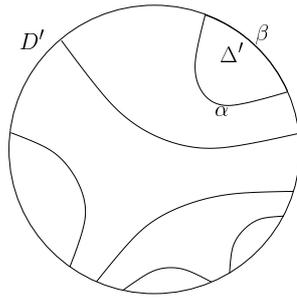


Figura 3.9: O padrão de interseção  $D \cap D'$  em  $D'$ .

Denotemos  $Q' = \widehat{Q - V} \simeq U \times I$  com estrutura de produto herdada de  $Q$ . Como  $D$  separa  $Q$  segue que  $Q'$  tem duas componentes (ver Figura 3.10).

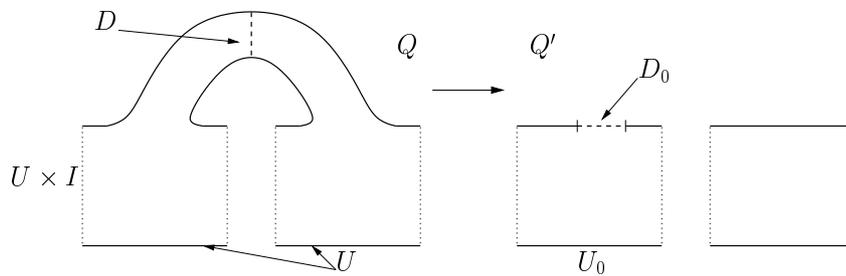


Figura 3.10: Cortando  $Q$  ao longo de  $D$  obtém-se  $Q'$  (caso 1).

Seja  $U_0 \times I$  a componente que contém  $\Delta'$ . Há um disco  $D_0 \subseteq U_0 \times \{1\}$  correspondente ao  $D$  e, abusando da notação, seja  $\alpha \subseteq D_0$  definido por  $\alpha = \partial \Delta' \cap D_0$ . Além disso, temos que  $\partial \Delta' \subseteq U_0 \times \{1\}$ . Como  $U_0 \times \{1\}$  é incompressível,  $\partial \Delta'$  deve bordar um disco  $\Delta'' \subseteq U_0 \times \{1\}$ . A irreduzibilidade de  $Q'$  implica que a esfera  $\Delta' \cup \Delta''$  borda uma bola. “Colando”  $Q'$  de volta e recuperando  $Q$  (isto é, descendo pela imersão canônica  $Q' \rightarrow Q$ ), tal bola determina uma bola  $B$  em  $Q$ . Vemos que uma isotopia pode puxar  $\Delta'$  por  $B$  – e ir um pouco além de  $D$  – eliminando  $\alpha$  de  $D \cap D'$  sem introduzir novas componentes na interseção, reduzindo  $|D \cap D'|$ . Novamente, aplicando esse processo repetidas vezes, obtemos  $|D \cap D'| = 0$  e portanto  $D \cap D' = \emptyset$ .

2.  $[U$  é conexa]: neste caso  $D$  não separa  $Q$ . Consideremos um arco  $\alpha \subseteq D \cap D'$  como no caso 1:  $\alpha$  está mais ao bordo em  $D'$ , bordando com um arco  $\beta \subseteq \partial D'$  um disco  $\Delta'$  que é o fecho de uma componente de  $D' - D$ .

Seja  $Q' = \widehat{Q - D} \simeq U \times I$  o produto com alças  $Q$  cortado ao longo de  $D$  (Figura 3.11).

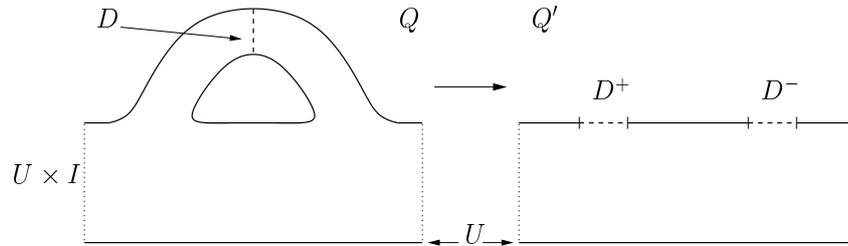


Figura 3.11: Cortando  $Q$  ao longo de  $D$  obtém-se  $Q'$  (caso 2).

Nesse caso  $U \times \{1\}$  contém dois discos  $D^+, D^-$  correspondentes ao  $D$  e supomos que  $D^+$  corresponde ao lado de  $D$  associado ao  $\Delta'$ . Há dois arcos,  $\alpha^+ \subseteq D^+$  e  $\alpha^- \subseteq D^-$  correspondendo ao  $\alpha$ . Prosseguindo como no caso anterior, temos  $\partial \Delta' \cap D^+ = \alpha^+, \partial \Delta' \cap D^- = \emptyset, \partial \Delta' \subseteq U \times \{1\}$ . Incompressibilidade nos dá, novamente, que  $\partial \Delta'$  borda um disco  $\Delta'' \subseteq U \times \{1\}$ . Há dois subcasos a serem considerados dependendo de  $\Delta'' \cap D^-$ :

- (a) Se  $\Delta'' \cap D^- = \emptyset$  (ver Figura 3.12 (a)) prosseguimos como no caso 1, eliminando o arco  $\alpha$  de  $D \cap D'$ , reduzindo o número de componentes da interseção.
- (b) Se  $\Delta'' \cap D^- \neq \emptyset$  (Figura 3.12 (b)) o argumento é um pouco mais trabalhoso. Como  $\partial \Delta' \cap D' = \emptyset$ , nesse caso devemos ter  $\Delta'' \cap D^- = D^-$ .

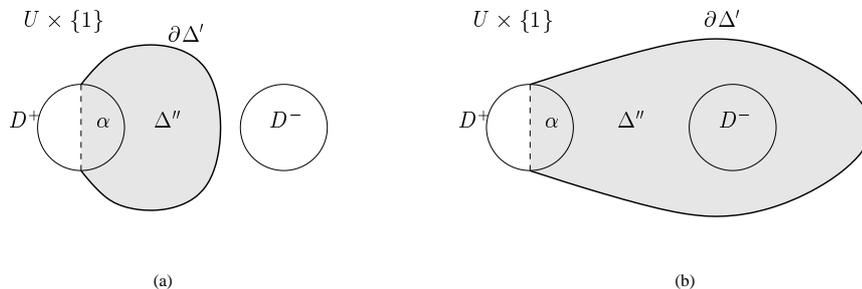


Figura 3.12: O disco  $\Delta'' \subseteq U \times \{1\}$  paralelo ao  $\Delta'$ . Os casos (a) e (b) dependem de  $\Delta'' \cap D^-$ .

Voltando para o quadro  $D, D' \subseteq Q$ , consideramos  $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\}$  o conjunto dos fechos das componentes de

$\partial D' - D$ . Como  $D \cap D' \neq \emptyset$  estas componentes são arcos e, por propriedade dos mergulhos  $D$  e  $D'$ , são em quantidade finita. Fixamos uma orientação arbitrária para  $\partial D'$  e a usamos para induzir uma ordem cíclica em  $\Gamma$ . Podemos supor que os índices respeitam essa ordem e, como  $\beta \in \Gamma$ , supomos também que  $\gamma_0 = \beta$  (ver Figura 3.13).

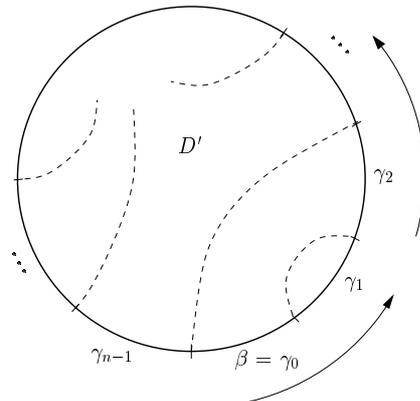


Figura 3.13: Orientação dos arcos em  $\partial D'$ .

Além da ordem em  $\Gamma$ , a orientação de  $\partial D'$  induz também uma orientação em cada  $\gamma_i$ , dando uma ordem entre os extremos de cada arco.

Voltamos agora a  $Q'$  e supomos que algum arco  $\gamma_i$  de  $\Gamma$  tem ambos os extremos em  $\partial D^-$ . Neste caso  $\gamma_i$  borda, com um arco  $\delta \subseteq \partial D^-$ , um disco  $\Delta''' \subseteq \overline{(U \times \{1\} - (D^+ \cup D^-))}$  já que, em  $Q'$ ,  $\gamma_i \cap D^+ = \emptyset$ ,  $\gamma_i \cap \beta = \emptyset$  (ver Figura 3.14).

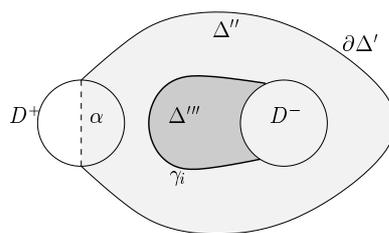


Figura 3.14: O disco  $\Delta'''$  usado para simplificar  $D \cap D'$ .

Voltamos à  $Q$ . Uma isotopia pode puxar  $\gamma_i$  e todo  $\partial D' \cap \Delta'''$  ao longo de  $\Delta'''$  por  $D$ . Nesse processo ou

- o número de componentes de  $\Delta \cap D$  se mantém, substituindo-se um arco por uma curva fechada e então repetimos o argumento usado anteriormente para eliminar essa tal curva, ou
- dois arcos de  $\Delta \cap D$  se juntam em um.

Em ambas as situações, obtemos  $D \cap D'$  com menos componentes, ainda todas arcos.

Resta, portanto, o caso em que nenhum  $\gamma_i$  tem seus dois extremos em  $\partial D^-$ . Vamos mostrar que esse caso não pode acontecer.

Relembramos que os extremos de cada  $\gamma_i$  têm ordem induzida pela orientação de  $\partial D'$  e observamos que  $\gamma_0 = \beta$  tem ambos os extremos em  $\partial D^+$ . Segue que  $\gamma_1$  tem seu primeiro extremo em  $\partial D^-$ . Como nenhum  $\gamma_i$  tem ambos os extremos em  $\partial D^-$  então o segundo extremo de  $\gamma_1$  está em  $\partial D^+$ . O mesmo argumento mostra que, se  $\gamma_i$  vai de  $\partial D^-$  para  $\partial D^+$  então  $\gamma_{i+1}$  também vai de  $\partial D^-$  para  $\partial D^+$ , portanto, por indução, todos os  $\gamma_i$ ,  $i \geq 1$  gozam dessa propriedade. Mas  $\Gamma$  é finito com ordem cíclica donde algum  $\gamma_n = \gamma_0 = \beta$ , que não goza dessa propriedade, uma contradição. Isso completa a análise do caso 2, mostrando que, também nessa situação, podemos tomar  $D'$  na sua classe de isotopia de forma que  $D \cap D' = \emptyset$ .

O estudo dos dois casos conduzido acima prova que podemos, sempre, tomar  $D'$  disjunto de  $D$ . Resta mostrar que eles são paralelos, portanto isotópicos. Voltamos a quebrar a demonstração nos mesmos dois casos:

1.  $U$  não é conexa ( $D$  separa  $Q$ ):

Seja  $Q_0$  a componente de  $Q'$  ( $Q$  cortado ao longo de  $D$ ) que contém  $D'$ . Como anteriormente,  $Q_0 \simeq U_0 \times I$  e há um disco  $D_0 \subseteq U_0 \times \{1\}$  correspondente ao  $D$ . Como  $\partial \Delta \subseteq U_0 \times \{1\}$ , a incompressibilidade de  $U_0 \times \{1\}$  e irreduzibilidade de  $U_0 \times I$  implica que  $D'$  é paralelo a um disco  $\Delta' \subseteq U_0 \times \{1\}$ . Há somente duas opções: ou  $\Delta' \cap D_0 = \emptyset$  ou  $\Delta' \cap D_0 = D_0$ . Se  $\Delta' \cap D_0 = \emptyset$  então  $D'$  é paralelo a  $\partial_e Q$  em  $Q$ , donde não é disco compressor de  $\partial_e Q$ , uma contradição. Segue, então, que  $\Delta' \cap D_0 = D_0$ , donde  $\Delta' - D_0$  é um anel. Uma isotopia ao longo desse anel coloca  $D'$  paralelo a  $D_0$ . Voltando para  $Q$ ,  $D'$  fica paralelo a  $D$  e uma isotopia pode tornar  $D' = D$ .

2.  $U$  é conexa ( $D$  não separa  $Q$ ):

Segue de forma análoga ao caso anterior. Consideramos  $Q' \simeq U \times I$  e os dois discos  $D^+$  e  $D^-$  correspondentes a  $D$ . Assim  $D'$  é paralelo a  $\Delta' \subseteq U \times \{1\}$  e o caso  $\Delta' \cap (D^+ \cup D^-) = \emptyset$  também não pode ocorrer. Os casos  $\Delta' \cap (D^+ \cup D^-) = D^+$  ou  $\Delta' \cap (D^+ \cup D^-) = D^-$  dão  $D'$  paralelo a  $D$  em  $Q$  e portanto podemos fazer  $D' = D$ . A única situação

sem análogo no caso anterior é quando  $\Delta' \cap (D^+ \cup D^-) = D^+ \cup D^-$ . Mas voltamos para  $Q$  vemos que  $D'$  separa  $Q$ , implicando que  $U$  não é conexa, uma contradição.

□

**Teorema 3.13.** *Seja  $f: H \rightarrow H$  um automorfismo de um cubo com alças  $H$ . Se  $\partial f = f|_{\partial H}$  for pseudo-Anosov então  $f$  é genérico ou redutível. No caso de ser redutível, uma superfície redutora fechada  $S$  satisfaz*

$$\chi(\partial H) + 4 \leq \chi(S) \leq 0.$$

*Demonstração.* De fato, como  $\partial f$  é pseudo-Anosov,  $f$  ou é genérico ou admite superfície redutora fechada. Uma superfície redutora fechada  $S \subseteq \overset{\circ}{H}$  é o bordo interno  $\partial_i Q = S$  de um produto com alças  $(Q, S)$   $f$ -invariante cujo bordo externo é  $\partial_e Q = \partial H$ . Pelo Lema 3.11,

$$\chi(S) = \chi(\partial H) + 2n,$$

onde  $n$  é o número de alças de  $Q$ . Seja  $D$  o disco dual à uma 1-alça. É claro que  $f(D)$  é disco dual a alguma 1-alça para  $(Q, S)$ . Se  $n = 1$  então a Proposição 3.12 acima implica que  $f(D) = D$ , donde  $f(\partial D) = \partial D \subseteq \partial H$ , contradizendo a hipótese de que  $\partial f$  é pseudo-Anosov. Portanto  $n \geq 2$ . É claro que  $\chi(S) \leq 0$  pois esferas não podem ser superfícies redutoras. □

**Corolário 3.14.** *Se  $f: H \rightarrow H$  restringe a um automorfismo pseudo-Anosov em  $\partial H$  e  $H$  tem gênero 2 então  $f$  é genérico.*

*Demonstração.* Se  $S$  fosse uma superfície redutora fechada para  $f$  então

$$2 \leq \chi(S) \leq 0.$$

□

Por esse resultado podemos reduzir perguntas e problemas sobre automorfismos genéricos em gênero 2 para os similares sobre automorfismos pseudo-Anosov de superfícies. Por exemplo, o Teorema 2.15 de Penner [41] se adapta automaticamente a um novo método para se construir automorfismos genéricos. Além disso o algoritmo de Bestvina e Handel [3] para verificar se um automorfismo de uma superfície é ou não pseudo-Anosov se torna um algoritmo para decidir se um automorfismo de um cubo com alças de gênero 2 é ou não genérico.

Por outro lado o mesmo resultado destaca diferenças entre as duas dimensões. Por exemplo, no caso de automorfismos pseudo-Anosov de superfícies, o fator de crescimento de  $f: S \rightarrow S$  pode ser estimado pelo fator de crescimento do automorfismo induzido  $f_*: \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(S)$  [2, 3]. O exemplo abaixo mostra que nenhum resultado dessa forma pode ser válido para automorfismos genéricos de cubos com alças.

**Exemplo 3.15.** Considere  $H$  um cubo com alças de gênero 2. Na Figura 3.15 estão representadas duas curvas  $C_0, C_1$  em  $\partial H$ .

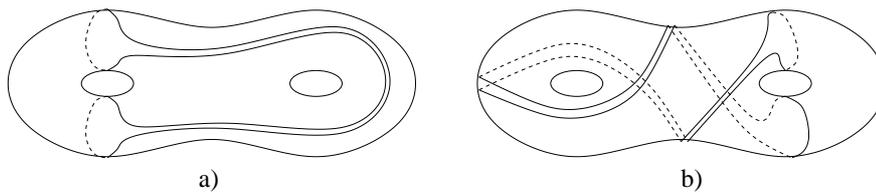


Figura 3.15: a) curva  $C_0$  bordando disco  $D_0 \subseteq H$ ; b) curva  $C_1$  bordando disco  $D_1 \subseteq H$ .

É fácil ver que essas curvas bordam discos em  $H$ ,  $D_0$  e  $D_1$  respectivamente (na figura podemos vê-los como band sum de discos duais as alças). Vamos definir  $f: H \rightarrow H$  como sendo a composição de uma torções de Dehn para a esquerda em  $D_1$  com uma torção de Dehn para a direita em  $D_0$ :

$$f = T_{D_0}^+ \circ T_{D_1}^-.$$

Verificando que  $C_0 \cup C_1 \subseteq \partial H$  preenche  $\partial H$ , segue do Teorema 2.15 que

$$\partial f = T_{C_0}^+ \circ T_{C_1}^-$$

é pseudo-Anosov e, portanto, que  $f$  é genérico.

Como  $f: H \rightarrow H$  é genérico, seu fator de crescimento é estritamente maior que 1. Por outro lado, dado que  $f$  é composição de torções em discos, o automorfismo  $f_*$  induzido em  $\pi_1(H)$  é a identidade, cujo fator de crescimento é 1.

O exemplo abaixo mostra que não se pode melhorar as desigualdades do Teorema 3.13.

**Exemplo 3.16.** Como no Exemplo 3.15 a Figura 3.16 a), b) representa os bordos de dois discos em um cubo com alças  $H$ , aqui com gênero 3. Estes bordos também preenchem  $\partial H$  portanto, se tomamos  $f$  a composição das torções em direções opostas,  $\partial f$  é pseudo-Anosov. O Teorema 3.13 diz que uma superfície redutora  $S$  para  $f$  tem que ser fechada e  $\chi(S) = 0$ . De fato

podemos ver que existe um toro que não intercepta os discos, sendo portanto invariante por  $f$ . (Figura 3.16).

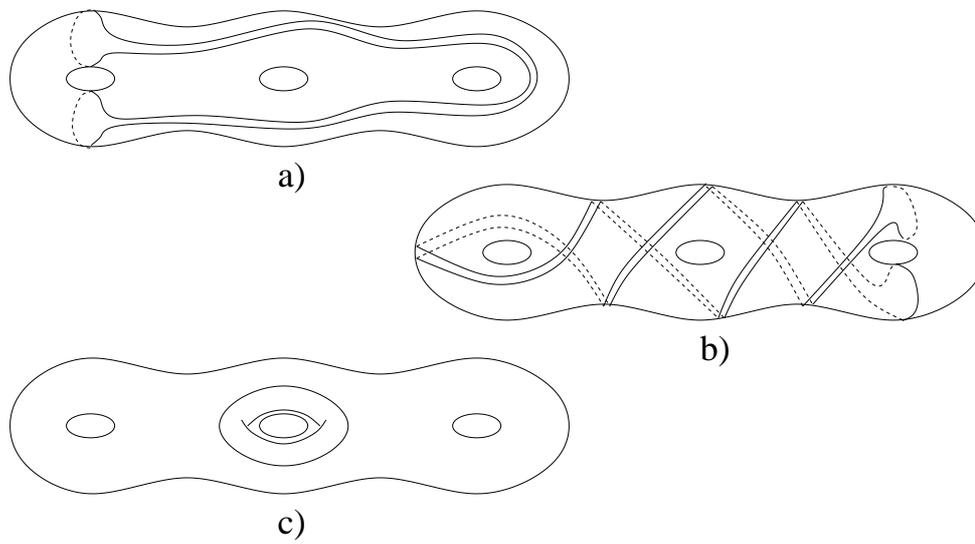


Figura 3.16: a) curva  $C_0$  bordando disco  $D_0 \subseteq H$ ; b) curva  $C_1$  bordando disco  $D_1 \subseteq H$ ; c) o toro invariante.