# 2
# Preliminares

Neste Capítulo revemos brevemente algumas definições e resultados de diferentes áreas sobre as quais fundamentamos este trabalho. Naturalmente, estas apresentações serão superfíciais. Em cada seção sugerimos algumas referências, que devem ser usadas caso nossa exposição se mostre muito limitada.

## 2.1
## Variedades de dimensão três.

Para a teoria clássica de variedades de dimensão três (ou 3-variedades) sugerimos primeiramente [22, 19, 48] ou então [5, 36, 24]. Nessa seção discutiremos brevemente convenções e notações que adotaremos ao longo da dissertação.

É uma fato clássico em teoria de variedades de dimensão três que as categorias diferenciável, PL ("piecewise linear") e topológica são equivalentes, no sentido em que resultados em uma categoria têm análogo direto na outra (ver por exemplo [22] ou [42]). Esse resultado deriva dos trabalhos de Moise (vide [36]) e Bing (vide [5]), Munkres [38] e Whitehead [50], ainda nos anos 60. Em geral vamos privilegiar a categoria diferenciável mas o leitor deve ter em mente que, com respaldo do fato acima, nos permitiremos violar diferenciabilidade em alguns momentos. Similarmente, podemos fazer uso de terminologias típicas das várias categorias, como *vizinhança regular* ou *vizinhança tubular*, *posição geral* ou *transversalidade*.

Assim, dado uma variedade de dimensão três $M$ e uma subvariedade $A \subseteq M$ denotaremos por $N(A)$ sua vizinhança regular (vizinhança tubular).

As variedades de dimensão três que consideraremos serão todas orientáveis. Superfícies, porém, podem ser orientáveis ou não. A não ser quando explicitamente indicado, por *disco* entenderemos a bola fechada de dimensão dois e por *bola* entenderemos a bola fechada de dimensão 3.

Dado um espaço topológico $X$ qualquer (tipicamente uma variedade ou subvariedade) entenderemos por $|X|$ o número de componentes conexas por caminhos de $X$. Denotaremos por $\mathring{X}$ o interior de $X$ e por $\overline{X}$ seu fecho.

Uma 3-variedade $M$ é dita *irredutível* se toda esfera $S^2 \to M$ mergulhada for o bordo de uma bola de dimensão três em $M$.

Seja $S$ uma superfície compacta e $M$ uma 3-variedade. Dizemos que $S$ está *propriamente mergulhada em* $M$ se existir um mergulho $\varphi\colon S \to M$ tal que $\varphi^{-1}(\partial M) = \partial S$ e $\varphi$ seja transversal à $\partial M$. Se $S$ não for compacta pedimos também que $\varphi^{-1}(K) \subseteq S$ seja compacto para qualquer compacto $K \subseteq M$. Representaremos um tal *mergulho próprio* por $\varphi\colon (S, \partial S) \to (M, \partial M)$ e, nessas condições, podemos identificar $S$ com $\varphi(S)$. Em verdade, será comum identificar uma superfície ou curva com sua imagem por um mergulho ou imersão em uma 3-variedade $M$.

Seja $S \subseteq M$ uma superfície propriamente mergulhada em uma variedade orientável $M = M^3$. Dizemos que $S$ tem *dois lados* se seu fibrado normal for trivial. Se $S \subseteq \partial M$ for orientável então $S$ sempre tem dois lados.

*Observação.* Em uma variedade orientável uma superfície mergulhada tem dois lados se e somente se é orientável.

Diremos que uma superfície mergulhada $S \subseteq M$ é *paralela ao bordo* (ou *bordo-paralela* ou mesmo *$\partial$-paralela*) se

- $S \subseteq \partial M$ ou
- $S$ for propriamente mergulhada e existir $S \times I \to M$ tal que
  1. $S \times I \to M$ seja um mergulho no interior de $S \times I$,
  2. $S \times \{0\} = S$ seja um mergulho,
  3. $S \times \{1\} \cup (\partial S \times I) \subseteq \partial M$ seja um mergulho.

Um disco propriamente mergulhado é dito *essencial* se não for paralelo ao bordo.

Suponhamos que $M$ seja irredutível e seja $S$ uma superfície propriamente mergulhada em $M$ com dois lados. Diremos que $S$ é *compressível* se algum dos seguintes for verdade:

1. $S$ for uma esfera $S^2$,
2. se $S$ for um disco bordo-paralelo ou
3. se existir um disco $D \subseteq M$ tal que $\partial D \subseteq S$ não é contrátil em $S$.

Se $S$ não for compressível então é dita *incompressível*. Um disco $D$ como em 3 acima é dito um *disco compressor*. Um disco mergulhado com $\partial D \subseteq \partial S$ é dito um *candidato a disco compressor*.

*Observação.* Alertamos o leitor quanto à hipótese de que $M$ é irredutível e que $S$ tem dois lados na definição acima. Em geral a literatura apresenta definições mais gerais de compressibilidade e incompressibilidade. No caso de $M$ ser irredutível e de $S$ ter dois lados geralmente essas definições coincidem com a que demos acima [22, 19, 24]. Dado que as 3-variedades que consideraremos serão irredutíveis e orientáveis e que as superfícies serão tipicamente orientáveis, optamos por nossa versão em nome da simplicidade.

Por exemplo, um disco propriamente mergulhado em $M$ é essencial se e somente se for um disco compressor de $\partial M$.

O seguinte teorema dá uma caracterização de superfícies incompressíveis a partir da inclusão de seu grupo fundamental na variedade ambiente:

**Teorema 2.1.** *Uma superfície conexa $S \subseteq M$ com dois lados, $S \neq D^2$, $S^2$ é incompressível se e somente se a inclusão $\pi_1(S) \to \pi_1(M)$ for injetora. Se $S = D^2$ então $S$ é incompressível se e somente se $S$ não for $\partial$-paralela.*

Um *meio-disco* é um terno $(\Delta, \alpha, \beta)$ onde $\Delta$ é um disco e $\alpha$, $\beta \subseteq \partial\Delta$ são arcos fechados conexos tais que $\alpha \cup \beta = \partial\Delta$ e $\alpha \cap \beta = \partial\alpha = \partial\beta$.

Seja $S$ uma superfície propriamente mergulhada com $\partial S \neq \emptyset$. Dizemos que $S$ é *incompressível ao bordo* (ou *bordo-incompressível* ou mesmo *$\partial$-incompressível*) se para todo meio-disco mergulhado em $M$ com $\Delta \cap S = \alpha$ e $\Delta \cap \partial M = \beta$ existir um meio-disco $(\Delta', \alpha', \beta')$ tal que $\Delta' \subseteq S$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' \subseteq \partial S$. Caso contrário é dita *compressível ao bordo* (ou *bordo-compressível*, *$\partial$-compressível*). Nesse caso o meio-disco é dito *compressor ou bordo*, ou *bordo-compressor* ou mesmo *$\partial$-compressor*.

Agora definimos o que entenderemos por uma 1-alça de dimensão três: consideremos $h = I \times D^2$, onde $I$ é o intervalo e $D^2$ é o disco. Dizemos que $h$ é uma 1-*alça*. Tipicamente usaremos 1-alças para construir 3-variedades com bordo a partir de outra. Essa construção é feita da seguinte forma: seja $M$ uma 3-variedade tal que $\partial M \neq \emptyset$ e consideremos um mergulho $\psi\colon (\{0,1\} \times D^2) \to \partial M$. Consideramos a união disjunta $h \sqcup M$ e passamos ao quociente por $\psi$, obtendo $M'$. Tal $M'$ não é suave em $\partial M'$ portanto completamos a operação suavizando o bordo. Dizemos que $M'$ assim construida é obtida de $M$ por *adição de uma* 1-*alça*. Podemos repetir esse processo e nos referir à *adição de* 1-*alças*. Como lidaremos somente com 3-variedades orientáveis, assumiremos que $\psi$ é escolhida de forma que a adição de uma 1-alça produza uma variedade orientável.

Similarmente podemos nos referir à uma bola de dimensão 3 como uma 0-alça. O processo análogo de adicionar uma 0-alça consiste apenas de se tomar a união disjunta.

As variedades de dimensão 3 mais importante nessa dissertação serão os cubos com alças.

**Definição 2.2.** Um *cubo com alças* (*handlebody*) $H$ é uma 3-variedade (orientável) homeomorfa a uma bola de dimensão 3 com um certo número finito $g \geq 1$ de 1-alças adicionadas. Alternativamente, $H$ pode ser visto como uma vizinhança regular de um grafo mergulhado em $\mathbb{R}^3$ cujo grupo fundamental é $F_g$, o grupo livre em $g$ geradores. Dizemos que $g$ é o *gênero* de $H$.

*Observação.* A literatura em inglês, em geral, define *cube with handles* admitindo variedades não orientáveis enquanto por *handlebody* se entende um "cube with handles" orientável. Desconhecemos na literatura em português qualquer tradição na definição desses objetos. Optamos, portanto, por nos referir a um "handlebody" como um cubo com alças pela idéia geométrica que sugere, ressaltando que estamos supondo orientabilidade.

Seja $M$ uma variedade (aqui de dimensão 2 ou 3). Um *automorfismo de $M$* é um difeomorfismo (ou homeomorfismo, dependendo da categoria) $f\colon M \to M$. Dizemos que dois automorfismos $f_0$, $f_1$ são *isotópicos* se existir uma homotopia $F\colon M \times I \to M$ tal que $F(p,0) = f_0(p)$, $F(p,1) = f_1(p)$ e cujas aplicações $p \mapsto F(p,t)$ são difeomorfismos para todo $t \in I$. É claro que isotopias determinam uma relação de equivalência no grupo dos automorfismos de $M$, cujo quociente é denominado o *grupo das classes de mapeamento de $M$*, denotado por $MCG(M)$. Similarmente, se $M$ for orientável, denotamos por $MCG^+(M)$ o grupo das classes que preservam orientação.

O objetivo desse trabalho é entender melhor certos elementos do grupo das classes de mapeamento de um cubo com alças, os automorfismos *genéricos* (Definição 2.17).

## 2.2 Laminações.

Laminações, introduzidas em dimensão 2 por Thurston para evitar as singularidades das folheações invariantes por um automorfismo pseudo-

Anosov de uma superfície, se tornaram ferramentas muito bem sucedidas no estudo de variedades de dimensão 3, objetos de extensa pesquisa. Nessa dissertação as laminações aparecem em um contexto bem semelhante ao proposto originalmente: automorfismos genéricos de cubos com alças, analogamente aos automorfismos pseudo-Anosov de superfícies (Definição 2.12), têm a propriedade de preservar duas laminações com medida transversais, agindo nas medidas como produto por escalares recíprocos (Teorema 2.28).

Nessa seção damos as definições básicas de laminação e laminação com medida invariante por holonomia (seguindo [37]). Para mais detalhes sugerimos [37, 40, 14] em dimensão 3 e [7, 9] em dimensão 2.

**Definição 2.3.** Uma *laminação* $\Lambda$ de dimensão $k = 1, 2$ em uma variedade orientável $M$ de dimensão $n = 2, 3$, onde $n > k$, é uma folheação de dimensão $k$ de um subconjunto fechado de $M$.

Mais precisamente, suponha que $\Lambda \subseteq M$ é um subconjunto fechado e sejam $P = P^k \subseteq \mathbb{R}^k$ uma bola aberta de dimensão $k$, $T \subseteq P^{n-k}$ um espaço topológico localmente compacto e $V$ um aberto de $\Lambda$. Dizemos que um homeomorfismo $\varphi\colon P \times T \to V$ é uma *carta laminada de* $\Lambda$ (ou somente *carta* de $\Lambda$). Dizemos que cada imagem $\varphi(P \times \{t\}) \subseteq V$, $t \in T$ é uma *placa* da carta.

Uma carta $\varphi_i\colon P_i \times T_i \to V_i$ é uma *sub-carta* de $\varphi_j\colon P_j \times T_j \to V_j$ se

1. $V_i \subseteq V_j$,

2. existir uma aplicação contínua $g = g_{ij}\colon T_i \to T_j$ (chamada *aplicação de transição*) que seja homeomorphismo em sua imagem,

3. existir uma aplicação contínua $h = h_{ij}\colon P_i \times T_i \to P_j$ tal que $h|_{P_i \times \{t\}}$ seja um homeomorfismo em sua imagem para cada $t \in T_i$ e satisfazendo, para cada $(p, t) \in P_i \times T_i$, $\varphi_j\big(h(p, t), g(t)\big) = \varphi_i(p, t)$.

Um *atlas laminador* $A = \{\, \varphi_i\colon P_i \times T_i \to V_i \,\}$ de $\Lambda$ é uma coleção de cartas laminadas *cobrindo* $\Lambda$ (i.e., $\Lambda \subseteq \bigcup_i V_i$) tais que, se $x \in V_i \cap V_j$, então existe sub-carta $\varphi_k \in A$ comum a $\varphi_i$ e $\varphi_j$ (donde $V_k \subseteq V_i \cap V_j$) e tal que $x \in V_k$.

Dizemos que $\Lambda$ é uma *laminação* se estiver munida de um atlas laminador.

Se $P \subseteq \Lambda$ for uma placa de uma carta então $P$ é dita uma *placa de* $\Lambda$. A união de todos os abertos de todas as placas de $\Lambda$ determina uma topologia em $\Lambda$, cujas componentes conexas são chamadas *folhas*.

Para essa dissertação são de particular relevância laminações de dimensões 1 e 2 em variedades de dimensão 3 e o leitor deve ter isso em mente ao longo dessa seção. Porém não ignoraremos as laminações de dimensão 1 em superfícies: tais laminações são mais simples, sendo úteis para iluminar idéias sobre laminações em 3-variedades; as laminações que consideraremos em cubos com alças, invariantes por um automorfismo genérico, são análogas às laminações invariantes por um automorfismo pseudo-Anosov de superfícies, estas bem entendidas, de forma que é natural tê-las em mente em nosso estudo; além disso elas serão diretamente necessárias em alguns de nosso argumentos e construções (por exemplo, Lema 5.17). É, portanto, relevante considerar laminações em superfícies.

**Exemplo 2.4.** Qualquer folheação é uma laminação.

A recíproca não é verdadeira. Frequentemente laminações interessantes têm interior vazio.

**Exemplo 2.5.** Consideremos $S$ uma superfície hiperbólica e seja $\Lambda$ uma união finita de curvas simples (sem auto-interseção) fechadas disjuntas. Tal $\Lambda$ é uma laminação. Em particular uma união finita de geodésicas simples, fechadas e disjuntas dois-a-dois é uma laminação de $S$ de dimensão 1.

**Exemplo 2.6.** Seja $M$ uma variedade de dimensão 3. O análogo da construção do Exemplo 2.5 acima é considerar $\Lambda$ uma união finita de superfícies fechadas mergulhadas e disjuntas dois a dois.

Dizemos que uma folha $L$ de $\Lambda$ é *isolada* se existe uma vizinhança $N(L)$ interceptando $\Lambda$ somente em $L$. Nas laminação dos dois exemplos acima todas as folhas são isoladas. Laminações mais interessantes e gerais não têm essa propriedade.

**Exemplo 2.7.** A superfície $S$ do Exemplo 2.5 admite laminações mais interessantes. Consideremos $\gamma$ uma geodésica simples aberta (homeomorfa à $\mathbb{R}$). Tal geodésica pode não ser um subconjunto fechado (se, por exemplo, $S$ for fechada então $\gamma$ não é fechada). Nesse caso seu fecho $\Lambda$ é uma laminação cujas folhas são todas geodésicas. Se $p \in (\Lambda - \gamma)$ então toda vizinhança suficiente pequena de $p$ intercepta $\gamma$, e portanto $\Lambda$, em uma infinidade de componentes. Em particular a folha $L \in \Lambda$ passando por $p$ não é isolada.

Uma laminação cujas folhas são geodésicas é dita *geodésica*.

Se $\Lambda$ tem codimensão 1 podemos querer identificar quais folhas que deixam de ser isoladas por um lado somente: consideremos uma vizinhança pequena $V$ de um ponto $p$ na folha $L$. A folha separa $V$ em duas. Se alguma dessas metades não interceptar $\Lambda$ dizemos que $L$ é uma *folha de bordo de* $\Lambda$.

*Observação.* A escolha da definição de folha de bordo se deve à seguinte construção. Dada uma variedade $S$ de codimensão 1 em $M$ é frequente precisarmos considerar $\widehat{M-S}$ a variedade obtida de $M$ *cortando-se ao longo de* $S$, homeomorfa à $M - N(S)$, onde $N(S)$ é uma vizinhança tubular de $S$. Mais precisamente definimos $\widehat{M-S}$ como o completamento de $M - S$ com a seguinte métrica herdada de uma métrica Riemanniana em $M$: a distância entre dois pontos de $M - S$ é o ínfimo dos comprimentos (na métrica de $M$) de todos os caminhos em $M - S$ os ligando. Similarmente, se $\Lambda$ é uma laminação, definimos $\widehat{M-\Lambda}$ como o tal completamento de $M - \Lambda$. Há uma imersão natural $\widehat{M-\Lambda} \to M$. A definição de folha de bordo se justifica porque tais folhas são exatamente as folhas de $\Lambda$ que estão na imagem dessa imersão, cuja imagem inversa está contida no bordo de $\widehat{M-\Lambda}$ (no caso $\partial M = \emptyset$ então essa imagem inversa é exatamente $\partial(\widehat{M-\Lambda})$).

**Exemplo 2.8.** Voltamos à laminação geodésica do Exemplo 2.7. Se $\gamma$ não for isolada então $\Lambda$ não tem folhas isoladas, porém é claro que $\Lambda$ tem folhas de bordo (como toda laminação de codimensão 1 com interior vazio). Se $\alpha$ for um arco transversal à $\Lambda$ então $\alpha \cap \Lambda$ é um conjunto de Cantor em $\alpha$.

*Observação.* A título de mera curiosidade notamos aqui que o conjunto de Cantor mencionado acima pouco se assemelha metricamente ao conjunto de Cantor padrão, construido pela remoção sucessiva do intervalo médio. Para tais laminações geodésicas o tamanho dos intervalos complementares cai com velocidade maior [7].

**Exemplo 2.9.** Do Exemplo 2.8 podemos construir exemplos em dimensão 3 por suspensão. Se $M = S \times S^1$ então $\Lambda' = \Lambda \times S^1$ é uma laminação de $M$ com a mesma propriedade de que arcos transversais a interceptam em um conjunto de Cantor.

Lembramos que, no contexto do estudo de automorfismos genéricos de cubos com alças, laminações aparecem munidas de uma medida invariante transversal, o que definiremos a seguir.

Fixamos um atlas laminador $A = \{\varphi_i \colon P_i \times T_i \to V_i\}$ de $\Lambda$ na variedade $M^3$ e supomos que todo $T_i$ é um conjunto de Borel. Para tornar a notação mais leve, identificamos $P_i \times T_i$ e $V_i \subseteq \Lambda$ por $\varphi_i$. Podemos então considerar a projeção $p_i \colon V_i \to T_i$. Dizemos que $\tau \subseteq V_i$ é um *transversal local de* $\Lambda$ se $p_i|_\tau$ for injetiva. Se, além disso, $p_i(\tau)$ for de Borel então $\tau$ é dito um *transversal local de Borel.* Nosso interesse é utilizar transversais locais para estudar a interseção $T \cap \Lambda$ de uma subvariedade $T$ de $M$ de codimensão $k$ que seja *transversal a* $\Lambda$ (i.e., transversal às folhas de $\Lambda$). É claro que, nesse caso, $T \cap V_i$ consiste de uma união de transversais locais.

**Definição 2.10.** Uma *medida $\mu$ invariante transversal a* $\Lambda$ (ou somente uma *medida* em $\Lambda$) é uma função associando, a cada carta $\varphi_i$, uma medida de Borel positiva $\mu_i$ no conjunto $T_i$ que seja invariante pelas aplicações de transição (i.e., se $V_i \subseteq V_j$ e $T \subseteq T_i$, então $\mu_i(T) = \mu_j(g(T))$).

Se $\tau \subseteq V_i \subseteq \Lambda$ for um transversal local de Borel, abusamos da notação e definimos:

$$\mu(\tau) = \mu_i(\tau),$$

que está bem definido (pela invariância das medidas $\mu_i$).

Se $T$ for uma sub-variedade de $M$ de codimensão $k$ transversal a $\Lambda$, definimos $\mu(T)$ a partir dos transversais locais de Borel por $\sigma$-aditividade.

Denotamos a laminação $\Lambda$, munida com a medida invariante transversal $\mu$, por $(\Lambda, \mu)$.

*Observação.* Se $T$ for transversal a $\Lambda$, uma forma alternativa de representar $\mu(T)$ será

$$T \bullet (\Lambda, \mu) = \mu(T).$$

Essa notação tem a vantagem de enfatizar que $\mu$ é uma estrutura em $\Lambda$. No Capítulo 5 vamos comparar medidas em objetos diferentes, quando será especialmente interessante usar a notação $T \bullet (\Lambda, \mu)$, que enfatiza o objeto com medida sendo considerado.

**Exemplo 2.11.** Voltamos ao Exemplo 2.5 e denominamos $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ as componentes de $\Lambda$. Um vetor positivo $(w_1, \ldots, w_m)$, $w_i > 0$ define uma medida transversal $\mu$ em $\Lambda$ da seguinte forma: se $\alpha$ for uma curva compacta transversal a $\Lambda$ então

$$\mu(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot |\alpha \cap \gamma_i|.$$

onde $|\alpha \cap \gamma_i|$ é a cardinalidade da interseção.

**Definição 2.12.** Um automorfismo $f\colon S \to S$ de uma superfície $S$ é dito *pseudo-Anosov* se existirem duas laminações geodésicas sem folhas isoladas (como no Exemplo 2.8) com medida transversal $(\Lambda^s, \mu^s)$ e $(\Lambda^u, \mu^u)$ satisfazendo:

1. $\Lambda^s$ e $\Lambda^u$ são $f$-invariantes;

2. $\Lambda^s$ e $\Lambda^u$ são transversais;

3. para algum real $\lambda > 1$:

$$\begin{aligned} f(\Lambda^s, \mu^s) =& (\Lambda^s, \lambda\mu^s) \\ f(\Lambda^u, \mu^u) =& (\Lambda^u, \lambda^{-1}\mu^u). \end{aligned}$$

As laminações $(\Lambda^s, \mu^s)$ e $(\Lambda^u, \mu^u)$ são respectivamente chamadas de *laminação estável* e *laminação instável* de $f$ e $\lambda$ é chamado seu *fator de crescimento.*

As laminações estável e instável de um automorfismo pseudo-Anosov têm as propriedades da laminação $\Lambda$ descrita no Exemplo 2.8 acima.

**Exemplo 2.13.** Se $\Lambda$ for a laminação estável de uma automorfismo pseudo-Anosov$f: S \to S$ então suspensão permite a construção de uma laminação mais interessante do que a do Exemplo 2.9 acima. Seja $M$ o espaço total de um fibrado sobre $S^1$ com fibra $S$ e monodromia $f$ (i.e. $M$ é o *mapping torus* de $f$, obtido de $S \times I$ identificando cada ponto $(x, 1) \in S \times \{1\}$ com $(f(x), 0) \in S \times \{0\}$). Agora $\Lambda$ é suspendida para uma laminação $\Lambda'$ cuja holonomia não é trivial.

*Observação.* Mencionamos que a laminação $\Lambda'$ do Exemplo 2.13 acima é uma *laminação essencial* em $M$ (ver [14]).

## 2.3 Automorfismos pseudo-Anosov.

Na Seção 2.2 definimos automorfismos pseudo-Anosov de superfícies (Definição 2.12). Considerando que a definição de automorfismo genérico de um cubo com alças (Definição 2.17) depende da sua restrição ao bordo ser pseudo-Anosov, é importante saber obter automorfismos com essa propriedade.

Usaremos *torções de Dehn* ("Dehn twists"), definidas logo a seguir, para construir automorfismos de superfícies. Lembramos que uma curva simples fechada $\gamma$ em uma superfície $S$ é *essencial* se **nenhuma** componente de $\widehat{S - \gamma}$ for dos seguintes tipos:

- um disco,
- um disco menos um ponto,
- um anel que se retrai a uma componente de $\partial S$.

Similarmente um arco $\alpha$ mergulhado é *essencial* se $\alpha \cap \partial S = \partial\alpha$ e se $\alpha$ não for paralelo ao bordo (i.e., $\alpha$ não é isotópico rel $\partial\alpha$ a um arco $\alpha' \subseteq \partial S$).

**Definição 2.14.** Seja $S$ uma superfície orientável e $\gamma$ uma curva essencial em $S$. Uma *torção de Dehn ao longo de* $\gamma$ é um automorfismo $T\colon S \to S$ cujo suporte é uma vizinhança regular $N(\gamma)$ de $\gamma$ (i.e., $T$ restrito à $S - N(\gamma)$ é a identidade).

Consideremos a torção $T$ restrita à vizinhança $N = N(\gamma)$. É claro que $T|_{\partial N}$ é a identidade. Se damos uma estrutura de produto $N = S^1 \times I$ à $N$ é fácil ver que $T|_N$ é isotópico, módulo $\partial N$, a um automorfismo $T_k\colon S^1 \times I \to S^1 \times I$, $k \in \mathbb{Z}$ dado por

$$(x,t) \mapsto (x + 2k\pi \cdot t, t).$$

Consideremos $S$ orientada pela inclusão $S^1 \times I = N \to S$. Diremos que $T$ é a *torção de Dehn para a direita ao longo de* $\gamma$ se $k = 1$, i.e. $T|_N = T_1$. Denotamos $T$ por $T_\gamma^+$. Similarmente, dizemos que $T$ é a *torção para a esquerda* se $k = -1$, denotado por $T_\gamma^-$.

É um fato bem conhecido que torções de Dehn em uma superfície orientável e fechada $S$ geram $MCG^+(S)$ (ver[27]).

Uma forma conveniente de se construir automorfismos pseudo-Anosov como composição de torções de Dehn é dada pelo Teorema 2.15 abaixo [41]. Revemos algumas definições relevantes para se entender seu enunciado.

Um *sistema de curvas fechadas* em $S$ é uma união finita de curvas simples, fechadas e essenciais, disjuntas dois a dois e sem componentes paralelas. Duas curvas simples, fechadas e essenciais $\gamma$, $\gamma'$ em uma superfície $S$ se interceptam de forma *eficiente* se forem transversais e, para $U = \gamma \cup \gamma'$, nenhuma componente $C$ de $\widehat{S - U}$ for um *dígono* ($C$ é um dígono se for um disco topológico e $\partial C$ contiver exatamente dois pontos duplos, i.e., pontos de $\widehat{S - U}$ que projetam para $\gamma \cap \gamma'$). Dois sistemas de curvas fechadas em $S$ se interceptam de forma *eficiente* se toda curva de um sistema interceptar cada curva do outro de forma eficiente. Uma união $U$ de curvas fechadas transversais dois a dois *preenche* $S$ se as componentes de $\widehat{S - U}$ forem **todas** de algum dos tipos topológicos:

- um disco;
- um disco menos um ponto;
- um anel que se retrai a uma componente de $\partial S$.

**Teorema 2.15 (Penner, [41]).** *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dois sistemas de curvas simples fechadas (sem componentes paralelas) em uma superfície orientada $S$ tal que $\chi(S) < 0$. Suponhamos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ se interceptem de forma eficiente e que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ preencha $S$. Seja $f\colon S \to S$ uma composição de torções de*

*Dehn para a direita ao longo de curvas de $\mathcal{C}$ e para a esquerda ao longo de curvas de $\mathcal{D}$. Se ao menos uma torção ao longo de cada curva aparecer na composição então $f$ é isotópico à um automorfismo pseudo-Anosov.*

*Observação.* Munidos de um automorfismo pseudo-Anosov, podemos achar seu fator de crescimento e uma *"train-track" invariante com medida* (ver [41, 3]) aplicando um algorítmo de Bestvina e Handel [3] (tal algoritmo já foi implementado em um programa para computador com pequenas limitações por P. Brinkmann [8]). Em verdade o algorítmo é ainda mais poderoso, pois decide se um dado automorfismo é pseudo-Anosov ou não.

## 2.4
## Automorfismos de cubos com alças.

A referência básica para essa seção é [40].

Considere um cubo com alças $H$. O objetivo dessa dissertação é entender melhor elementos de $MCG(H)$ que sejam *genéricos*, cuja Definição 2.17 daremos mais abaixo, seguindo [40]. Para isso precisamos da seguinte definição:

**Definição 2.16.** Um *produto com alças* é um par $(Q, U)$ onde $Q$ é uma 3-variedade com bordo construida a partir da superfície compacta $U$ (não necessariamente conexa) da seguinte forma: se $M$ é a união disjunta de $U \times I$ com um número finito de bolas $B$ , adicionamos 1-alças à $U \times \{1\} \cup \partial B$, obtendo $Q$. Seguindo [40] aceitamos que $U$ tenha bordo ou não mas não pode conter esferas. Identificamos $U$ com $U \times \{0\} \subseteq \partial Q$, que denominamos o *bordo interno* de $(Q, U)$, denotado por $\partial_i Q$. De forma complementar o *bordo externo* de $Q$, denotado por $\partial_e Q$, é o fecho de $\partial Q - \partial_i Q$. Se $Q = U \times I$ então $(Q, U)$ é dito *trivial*.

Podemos abusar da notação e nos referir a $Q$ como um produto com alças.

A definição de automorfismo genérico abaixo depende da Definição 2.12 de automorfismo pseudo-Anosov de uma superfície.

**Definição 2.17.** Seja $f \colon H \to H$ um automorfismo do cubo com alças $H$ tal que a restrição $\partial f = f|_{\partial H}$ seja isotópica a um automorfismo pseudo-Anosov de $\partial H$. Se $(Q, U)$, com $Q \subseteq H$ for um produto com alças $f$-invariante a menos de isotopia (i.e., $f(Q, U)$ é isotópico a $(Q, U)$) que não seja trivial e cujo $\partial_e Q = \partial H$ então dizemos que $U = \partial_i Q$ é uma *superfície redutora fechada* de $f$ e que $f$ é *redutível.*

Se $\partial f$ for isotópica a um automorfismo pseudo-Anosov e $f$ não admitir superfícies redutoras fechadas então dizemos que a classe $f$ em $MCG(H)$ é *genérica*. Se a classe de $f$ for genérica dizemos que $f$ é *genérico*.

Lembramos que, pela definição de produto com alças, $\partial_i Q$ não pode ter esferas $S^2$ como componentes, donde esferas não podem ser superfícies redutoras fechadas.

*Observação.* A definição de redutível dada em 2.17 acima coincide com a definição dada originalmente em [40] somente se supomos que $\partial f$ é pseudo-Anosov. No Teorema 2.18 abaixo, a referência a automorfismos redutíveis inclui, mas não se restringe a, aqueles definidos acima (vide [40] para a definição geral).

No caso de $\partial f$ ser pseudo-Anosov, é relevante a seguinte observação: se $Q$ for $f$-invariante a menos de isotopia então $f$ é isotópico a um automorfismo que preserva $Q$ (ver [40]), portanto um elemento redutível de $MCG(H)$ (cuja restrição ao bordo $\partial f$ é pseudo-Anosov) tem um representante que é legitimamente redutível.

O Teorema 2.18 [40] abaixo dá uma classificação, a menos de isotopia, de automorfismos de cubos com alças.

**Teorema 2.18.** *(Oertel) Seja $H$ um handlebody. Um elemento de $MCG(H)$ é de um dos seguintes tipos:*

1. *redutível,*
2. *periódico ou*
3. *genérico.*

Por *periódico* deve-se entender que o elemento tem ordem finita. A definição de redutível é mais complicada (ver [40]).

A classificação acima deve ser comparada com o seguinte Teorema ([47]):

**Teorema 2.19.** *(Thurston) Seja $S$ uma superfície tal que $\chi(S) \leq 0$. Então um automorfismo de $S$ é isotópico a um automorfismo $g\colon S \to S$ que é*

1. *redutível,*
2. *periódico ou*
3. *pseudo-Anosov.*

*No caso de $g$ ser redutível existe um sistema de curvas redutor $\mathcal{R}$ canônico preservado por $g$. Se $S'$ é a superfície obtida de $S$ cortando-se ao longo desse sistema então alguma potência $g^n$ mantém cada componente de $S'$ invariante. Tal $g^n$ é isotópico a um automorfismo $\widehat{g^n}$ cuja restrição a cada componente é periódica ou pseudo-Anosov.*

Definimos *automorfismo pseudo-Anosov* na Definição 2.12. O automorfismo é redutível se não for (isotópico a um automorfismo) periódico e preservar um *sistema de curvas simples fechadas* (i.e., uma união finita e não vazia de curvas simples, fechadas, essenciais, disjuntas dois a dois e sem componentes paralelas). Tal sistema de curvas é dito um *sistema de curvas redutor*.

*Observação.* É relevante mencionar que o Teorema 2.19 escolhe um bom representante em sua classe de isotopia, enquanto o Teorema 2.18 se limita à classes em $MCG(H)$. Essa diferença se deve, principalmente, a ainda não termos, no caso de cubos com alças, um representante canônico (em algum sentido rasoável) para uma classe genérica.

Na Seção 2.3 descrevemos torções de Dehn ao longo de uma curva em uma superfície $S$ (Definição 2.14), usados para gerar automorfismos de $S$. Há duas generalizações naturais para cubos com alças.

**Definição 2.20.** Seja $H$ um cubo com alças e $T\colon H \to H$ um automorfismo de $T$. Seja $D$ um disco essencial em $H$. Dizemos que $T$ é uma *torção de Dehn ao longo de $D$* se o suporte de $T$ for uma vizinhança regular $N(D)$ de $D$ (i.e., se $T$ for a identidade em $H - N(D)$). Similarmente, se $A$ for um anel incompressível em $H$ então dizemos que $T$ é uma *torção de Dehn ao longo de $A$* se o suporte de $T$ for uma vizinhança regular de $A$.

Na necessidade de caracterizar uma torção ao longo de um disco ou anel o faremos descrevendo sua restrição ao bordo. Suponhamos que $T$ seja uma torção ao longo de um disco $D$. É fácil ver que $\partial T = T|_{\partial H}$ é uma torção de Dehn ao longo de $\partial D$. Se $\partial T$ for a torção para a direita ao longo de $\partial D$ então dizemos que $T$ é a *torção para a direita ao longo de $D$*. Similarmente dizemos que $T$ é a *torção para a esquerda ao longo de $D$* se $\partial T$ for a torção para a esquerda.

No caso de $T$ ser uma torção ao longo de um anel $A$ então é claro que $\partial T$ é uma composição de torções ao longo de duas curvas, as componentes de $\partial A \subseteq \partial H$. Essas torções serão em direções opostas em cada curva. Além disso $\partial T$ restringe à vizinhança regular de uma das componentes $\gamma_1 \subseteq \partial A$ como uma potência $n$ da torção para a direita se e somente se restringir à vizinhança da outra componente como a mesma potência $n$ da torção para a esquerda.

## 2.5 Matrizes não negativas.

Uma matriz $A = (A_{ij})$ é dita *não negativa* se $A_{ij} \in \mathbb{R}$ e $A_{ij} \geq 0$. Uma matriz não negativa $A$ é dita *irredutível* se para todo $i$, $j$ existir $n$ tal que $(A^n)_{ij} > 0$.

A teoria de Perron-Frobenius descreve várias propriedades interessantes de matrizes não negativas, em especial matrizes irredutíveis. A seguir enunciamos alguns desses resultados, cujas demonstrações podem ser achadas em várias referências. Alguns desses resultados são apresentados e demonstrados brevemente em [40, Seção 10] e [29, Apêndice]. Outras referências, com exposições mais completas e detalhadas, são [35, 43, 1]. O resultado mais fundamental do qual precisamos é o próximo teorema.

**Teorema 2.21.** *Uma matriz quadrada $A$ não negativa e irredutível tem um autovalor $\lambda > 0$ que realiza o* raio espectral *de $A$ i.e., se $\lambda'$ é autovalor de $A$ então $|\lambda'| \leq \lambda$. Além disso $A$ tem um autovetor $v$ positivo (i.e., todas suas coordenadas são estritamente positivas), único a menos produto por um escalar, cujo respectivo autovalor é $\lambda$.*

Nas condições do teorema acima dizemos que $\lambda$ é o *autovalor de Perron-Frobênius de $A$* (ou mesmo somente o *autovalor de $A$*), denotado por $\lambda(A)$. Similarmente nos referimos à $v$ como o *autovetor de Perron-Frobênius de $A$* ou somente o *autovetor de $A$*.

Em relação ao autovalor, o Teorema 2.21 pode ser estendido por continuidade para qualquer matriz não negativa: matrizes irredutíveis são densas nas não negativas e o raio espectral é contínuo. O respectivo autovetor não negativo, entretanto, não necessariamente é positivo e não precisa ser único.

No caso de $A$ ser irredutível o seguinte lema dá algumas caracterizações de $\lambda(A)$. Antes definimos

$$X^n = \{\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0,\, x_i \geq 0 \,\}.$$

**Lema 2.22.** *Se $A$ for uma matriz $n \times n$ não negativa e irredutível seu autovalor $\lambda = \lambda(A)$ satisfaz:*

*1.*
$$\lambda = \inf_{x \in X^n} \left\{ \max_{x_i \neq 0} \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i} \right\} \right\};$$

*2.*
$$\lambda = \sup_{x \in X^n} \left\{ \min_{x_i \neq 0} \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i} \right\} \right\};$$

*3. se $x \in X^n$, $k$ for suficientemente grande e $A$ não for uma matriz de permutação:*
$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{(A^{k+1}x)_i}{(A^k x)_i}.$$

A seguinte proposição, natural dado o lema acima, determina um critério para se detectar redução do autovetor de Perron-Frobenius.

**Proposição 2.23.** *Sejam $A$ uma matriz $n \times n$ não negativa e irredutível e $x \in X^n$. Se*
$$(Ax)_i \leq \lambda x_i, \qquad \textit{para todo } i$$
*então $\lambda(A) \leq \lambda$ e $x_i > 0$. Se além disso $(Ax)_i < \lambda x_i$ para algum $i$ então $\lambda(A) < \lambda$.*

Uma matriz $A$ é dita *inteira* se $A_{ij} \in \mathbb{Z}$.

**Proposição 2.24.** *Se $A$ é uma matriz não negativa, irredutível e inteira então $\lambda(A) \geq 1$. Além disso $\lambda(A) = 1$ se e somente se $A$ for uma matriz de permutação transitiva.*

**Lema 2.25.** *Seja $\mathcal{A}^n$ o conjunto das matrizes quadradas não negativas, irredutíveis e inteiras de tamanho menor que ou igual a $n \times n$. Então o conjunto $\{\lambda(A) \mid A \in \mathcal{A}^n\}$ é bem ordenado.*

## 2.6 Automorfismos de grupos livres.

As referências principais para essa seção são [2, 3].

Seja $F_n$ o grupo livre em $n$ geradores. Seja $Aut(F_n)$ o grupo de isomorfismos de $F_n$ em si mesmo e consideremos o quociente $Out(F_n)$ obtido de $Aut(F_n)$ identificando automorfismos conjugados.

Seja $\mathcal{O} \in Out(F_n)$ e suponha que haja fatores livres próprios $G_1, \ldots, G_k$ de $F_n$ tais que $G_1 * \cdots * G_k$ é um fator livre de $F_n$ (possivelmente $G_1 * \cdots * G_k = F_n$). Se $\mathcal{O}$ permutar transitivamente as classes de conjugação desses $G_i$ então ele é dito *redutível* (no sentido de Bestvina-Handel [2]). Caso não existam tais fatores $G_1, \ldots, G_k$, $\mathcal{O}$ é dito *irredutível.* Podemos dizer que um automorfismo de $F_n$ é redutível ou irredutível se sua classe for respectivamente redutível ou irredutível.

Seja $X$ um espaço topológico conexo por caminhos e consideremos $MCG(X)$. É bem claro que a cada elemento de $MCG(X)$ temos associado outro de $Out(\pi_1(X))$. Em [2] o espaço $X$ é um grafo (portanto $\pi_1(X)$ é livre) e essa associação permite que se extraia informação sobre elementos de um espaço usando elementos do outro. Em [3] isso é feito no caso de $X$ ser uma superfície com bordo. Em ambos os casos a distinção entre automorfismos redutíveis e irredutíveis de grupos livres é de total relevância.

**Teorema 2.26.** *Seja $S$ uma superfície compacta cujo bordo não é vazio e $\chi(S) < 0$. Um automorfismo $f\colon S \to S$ é pseudo-Anosov se e somente se a classe (em $Out(\pi_1(S))$) do homomorphismo induzido $f_*\colon \pi_1(S) \to \pi_1(S)$ for irredutível e $f$ permutar transitivamente as componentes de $\partial S$. Se $\partial S$ tiver somente uma componente então $f$ é pseudo-Anosov se e somente se (a classe de) $f_*^n$ for irredutível (em $Out(\pi_1(S))$) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Seja $\phi\colon \Gamma \to \Gamma$ uma equivalência de homotopia de um grafo e suponhamos que $\phi$ leve vértices em vértices e que a restrição de $\phi$ ao interior $\mathring{e}$ de qualquer aresta $e \subseteq \Gamma$ seja localmente injetiva (o que pode ser realizado por homotopia). À $\phi$ associamos uma *matriz de incidência* $M$ cujas entradas $m_{ij}$ contam quantas vezes a imagem da aresta $e_j$ cruza a aresta $e_i$ (i.e., $m_{ij} = |\phi^{-1}(e_i) \cap e_j|$). Tal $M$ é uma matriz inteira não negativa e dizemos que seu raio espectral $\lambda$ é o *fator de crescimento* de $\phi$. Dizemos que $\phi$ é de tipo *train-track* se as restrições $\phi^n|_{\mathring{e}}$ de qualquer potência $\phi^n$ de $\phi$ ao interior de qualquer aresta $e \subseteq \Gamma$ for localmente injetiva.

**Teorema 2.27.** *Se $\mathcal{O} \in Aut(F_n)$ for irredutível então existe $\phi\colon \Gamma \to \Gamma$ um automorfismo do tipo train-track de um grafo $\Gamma$ tal que $\phi_*\colon \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\Gamma)$ pertence à classe $\mathcal{O}$. Em verdade basta que a matriz de incidência de $\phi$ seja irredutível e que seu fator de crescimento seja minimal para garantir que $\phi$ é de tipo train track. Além disso, se tal fator de crescimento for $1$ então $\phi$ é periódico.*

## 2.7 Automorfismos genéricos de cubos com alças.

Nessa seção apresentamos brevemente os progressos de [40] no estudo de automorfismos genéricos de cubos com alças.

Podemos ver a teoria de Nielsen-Thurston, resumida aqui no Teorema 2.19, da seguinte forma: seja $S$ uma superfície, $\chi(S) < 0$ e $f : S \to S$

um automorfismo. Se $f$ não for isotópico a nenhum automorfismo periódico ou redutível então podem ser achadas laminações com medida como na Definição 2.12. Esse é exatamente o caso dos automorfismos genéricos: estes são, essencialmente, definidos por exclusão e, para eles, vale o teorema a seguir [40]. No seu enunciado $H_0 \subseteq H$ se refere a um cubo com alças "concêntrico" com $H$ i.e., $H - \mathring{H}_0$ é um produto $\partial H \times I$.

**Teorema 2.28.** *(Oertel) Seja $f\colon H \to H$ um automorfismo genérico de um cubo com alças. Então existem uma laminação bidimensional de $\mathring{H}$ com medida transversal $(\Lambda, \mu)$ e $\hat{f}$ isotópico a $f$ tais que $\hat{f}(\Lambda, \mu) = (\Lambda, \lambda\mu)$ para algum $\lambda > 1$. Além disso, podemos supor que a laminação $\Lambda$ goza das seguintes propriedades:*

1. *Cada folha $L$ de $\Lambda$ é um disco aberto;*
2. $\Lambda$ preenche $H_0$ *i.e., as componentes de $H_0 - \Lambda$ são contráteis;*
3. (propriedade de incompressibilidade) *para cada folha $L$ de $\Lambda$ o complemento $L - \mathring{H}_0$ é incompressível em $\mathring{H} - \mathring{H}_0$;*
4. *$\Lambda \cup \partial H$ é fechado em $H$.*

*Há, também, uma laminação unidimensional com medida transversal $(\Omega, \nu)$ e uma função $\omega\colon \Omega \to \mathring{H}_0$ transversal à $\Lambda$ tal que $\hat{f} \circ \omega(\Omega, \nu) = \omega(\Omega, \nu/\lambda)$. Tal $\omega$ é um mergulho em $\omega^{-1}(N(\Lambda))$ para alguma vizinhança $N(\Lambda)$ de $\Lambda$. A igualdade $\hat{f} \circ \omega(\Omega, \nu) = \omega(\Omega, \nu/\lambda)$ deve ser lida significando que há um isomorfismo $h\colon (\Omega, \nu) \to (\Omega, \nu/\lambda)$ tal que $\hat{f} \circ \omega = \omega \circ h$.*

Uma boa parte de [40] é dedicada à construção de tais laminações e o leitor deve recorrer ao artigo no caso de qualquer dúvida. Por outro lado esses objetos serão de extrema importância para este trabalho de forma que resumiremos aqui sua construção. Nossa apresentação será levemente diferente da original de forma que o leitor pode se beneficiar de ambos os textos. Em geral nos limitaremos a dar os enunciados dos resultados relevantes, omitindo as demonstrações, contidas em [40].

Um automorfismo $f\colon H \to H$ é dito *expansor* com respeito ao cubo com alças concêntrico $H_0 \subseteq H$ se $f$ restrito ao produto $H - \mathring{H}_0 = \partial H \times I$ (identificando $\partial H$ com $\partial H \times \{1\}$) for um produto, crescente na vertical. Mais precisamente, $f|_{\partial H \times I} = (f|_{\partial H \times \{1\}}) \times g$, onde $g\colon I \to I$ tem um único ponto fixo $1 \in I$, sendo estritamente crescente no resto do intervalo. É bem claro que todo automorfismo de $H$ é isotópico a um que é expansor. Analogamente, podemos falar de automorfismos *contratores*, como $f^{-1}$.

Suporemos, de agora em diante, que $f$ é expansor. Definimos $H_n = f^n(H_0)$ para toda potência $f^n$ de $f$. No momento, vamos considerar somente potências positivas, mas adiantamos que faz sentido considerar $H_n$ para $n < 0$. Notamos que $H - \mathring{H}_n$ tem estrutura de produto compatível com a original em $H - \mathring{H}_0$.

Seja $\mathcal{E} = \{E_0, \ldots, E_q\}$ uma coleção de discos compressores para $\partial H_0$ propriamente mergulhados em $H_0$, transversais a $\partial H_0$ e disjuntos dois a dois. Chamamos tal coleção de um *sistema de discos* em $H_0$, que dizemos *completo* se $H_0 - N(\mathcal{E})$ for uma união de bolas (aqui estamos abusando da notação e considerando $\mathcal{E} = \bigcup_i E_i$). De forma semelhante, podemos nos referir a sistemas de discos em qualquer $H_i$ (e.g., $f(\mathcal{E})$ é um sistema de discos em $H_1 = f(H_0)$).

Associado a um sistema completo de discos $\mathcal{E}$ em $H_0$, existe um grafo dual $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E}) \subseteq \mathring{H}_0$, com uma aresta $e_i$ para cada disco $E_i$ e um vértice $v_j$ para cada componente no complemento $H_0 - N(\mathcal{E})$. Podemos ver $H_0$ como uma vizinhança de $\Gamma$ e considerar a retração $r\colon H_0 \to \Gamma$ que colapsa cada disco de $\mathcal{E}$ a um ponto no interior da respectiva aresta. Essa retração determina uma *estrutura de alças* para $H_0$, decompondo o cubo com alças em uma união de 0-alças e 1-alças: fixamos $V_j \subseteq \Gamma$ uma vizinhança do vértice $v_j$ e definimos uma 0-alça como $r^{-1}(\overline{V_i})$. O fecho dos complementos das 0-alças determina as 1-alças i.e., uma 1-alça é dada por $r^{-1}(e_i - V)$, onde $V = \bigcup_j V_j$. Denotamos a 0-alça associada ao vértice $v_i$ de $\Gamma$ por $\hat{v}_i$. De forma semelhante, a 1-alça associada à aresta $e_j$ é denotada por $\hat{e}_j$. Nos referimos à tal estrutura de alças como $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E})$, notando que $\mathcal{E}$ a determina a menos de isotopia. Podemos alterar a retração por uma isotopia de forma que as fibras nas 1-alças sejam discos. Diremos que um tal disco é um *disco dual* à respectiva 1-alça. É claro que cada disco dual é isotópico a algum disco de $\mathcal{E}$.

Consideramos agora $f(\mathcal{E}) \cap H_0$, onde lembramos que $f(\mathcal{E}) \subseteq H_1$. Se $f(\mathcal{E}) \cap H_0$ consistir de discos duais às 1-alças de $H_0$ dizemos que o sistema $\mathcal{E}$ é *admissível*. Se $\mathcal{E}$ for um sistema completo podemos alterar $f$ por uma isotopia de forma torná-lo admissível: perturbando $f$ por uma isotopia podemos supor que $f(\mathcal{E})$ intercepta $\Gamma$ transversalmente e em suas arestas, sem interceptar a vizinhança dos vértices $V$. Usando esse padrão de interseção, uma nova isotopia de $f$ faz com que $f(\mathcal{E})$ intercepte $H_0$ em discos duais às 1-alças. De agora em diante supomos que $\mathcal{E}$ é completo e admissível.

*Observação.* Essa definição de admissibilidade é um pouco mais forte do que a dada em [40], que exige somente que $f(\mathcal{E}) \cap H_0$ consista de discos paralelos aos de $\mathcal{E}$. É bem claro que nossa condição pode ser facilmente obtida desta por uma isotopia.

Por motivos essencialmente técnicos aprimoramos um pouco mais as propriedades de $f$ em relação à estrutura de alças. Cada $H_n$ ganha uma estrutura de alças $f^n(\mathcal{A})$ por $f$, portanto podemos considerar $f(\hat{e}_j)$ uma 1-alça da estrutura $f(\mathcal{A})$ de $H_1$. Para cada $E_i$, consideremos $N(E_i)$ uma vizinhança fechada na 1-alça $\hat{e}_i$ da estrutura $\mathcal{A}$ de $H_0$ que seja uma união de fibras (discos duais). Pedimos que $f(\hat{e}_j) \cap \hat{e}_i \subseteq N(E_i)$ e que as fibras de $f(\hat{e}_j)$ interceptem $\hat{e}_i$ em fibras, o que pode ser realizado por uma isotopia de $f$. Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E})$ satisfizer essas propriedades e $\mathcal{E}$ for admissível dizemos que $\mathcal{A}$ é *admissível*. De admissibilidade segue que as 0-alças de $H_0$ e os extremos de suas 1-alças estão contidas nas 0-alças de $H_1$. Iterando $f$, é fácil ver que, para qualquer $n > 0$, $f^n(\hat{e}_j)$ intercepta $\hat{e}_i$ em fibras de $N(E_i)$ e que as 0-alças de $H_0$ estão contidas nas 0-alças de $H_n$. Diremos que $N(E_i)$ é o *centro laminado* da 1-alça $\hat{e}_i$ ou, no quadro dual, a *vizinhança laminada* de $E_i$.

O sistema $\mathcal{E}$ é dito *irredutível* se para todo $i$, $j$ existir um $n$ tal que $f^n(E_j) \cap \hat{e}_i \neq \emptyset$. Similarmente, $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ é *irredutível* se $\mathcal{E}$ o for.

**Proposição 2.29.** *Se $f$ for genérico então existe um sistema de discos completo, admissível e irredutível.*

Se $f$ for genérico e $\mathcal{E}$ for um sistema de discos completo e admissiível que não é irredutível, podemos realizar a proposição acima passando a um subsistema $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, conforme descreveremos abaixo.

Seja $\mathcal{R} = \{\, E_0, \ldots, E_p \mid p < q,\ E_j \in \mathcal{E}, \,\}$ uma *redução* para $f$, no sentido em que se $0 \leq j \leq p < q$ e $p < i \leq q$ então $f^n(E_j) \cap \hat{e}_i = \emptyset$ para qualquer $n$. Consideremos o conjunto $T$ obtido da união de

$$T' = \bigcup_{0 \leq j \leq p} \hat{e}_j$$

com todas as 0-alças que são adjacentes a $T'$. Como $f$ é genérico, $T$ é uma união de componentes contráteis. Seja $\mathcal{E}'$ o sistema $\mathcal{E} - \mathcal{R} = \{\, E_i \mid p < i \leq q \,\}$. Dizemos que $\mathcal{E}'$ é obtido de $\mathcal{E}$ por um *colapso*. Modficamos a estrutura $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ eliminando as 1-alças de $T$ e tornando cada componente de $T$ uma 0-alça, obtendo a estrutura $\mathcal{A}(\mathcal{E}')$.

*Observação.* A definição de colapso, seguindo [2], é justificada se consideramos o efeito da operação em $\Gamma$: a união das arestas (fechadas) $e_0, \ldots, e_p$ é uma união de componentes contráteis e a operação colapsa cada uma dessas componentes a um ponto.

### 2.7.1 Laminação bidimensional invariante

Supomos de agora em diante que $f\colon H \to H$ é genérico e que $\mathcal{A}$ é admissível e irredutível e o usamos a seguir para definir uma laminação bidimensional que seja $f$-invariante. Lembramos que $N(E_i)$ é uma vizinhança fechada de $E_i$ e definimos $N(\mathcal{E}) = \bigcup_{0\leq i\leq q} N(E_i)$ e $U = \bigcup_{i\geq 0} f^i(N(\mathcal{E}))$. Seja

$$\Lambda_n = \bigcap_{0\leq i\leq n} f^i(U).$$

Segue imediatamente da construção que $\Lambda_0 \supsetneq \Lambda_1 \supsetneq \dots$ portanto o limite

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \bigcap_{i\geq 0} f^i(U)$$

faz sentido. Da construção é imediato que $\Lambda$ é $f$-invariante. Além disso $\Lambda_n \cap H_0$ é uma união de discos duais às 1-alças e é fácil ver que $\Lambda_{n+1} \cap H_0$ é obtido de $\Lambda_n \cap H_0$ por remoção de um conjunto aberto de discos duais, de forma que $\Lambda \cap H_0$ é um conjunto de Cantor de tais discos. Em verdade isso é verdade para qualquer $\Lambda \cap H_i$, donde $\Lambda$ é uma laminação bidimensional. Como a construção de $\Lambda$ depende fortemente de $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ pode ser conveniente denotá-la por $\Lambda(\mathcal{A})$ ou $\Lambda(\mathcal{E})$ (dependendo de querermos enfatizar a estrutura de alças ou o sistema de discos).

Para uma escolha apropriada de $\mathcal{A}$, a laminação $\Lambda(\mathcal{A})$ que construímos acima é exatamente aquela à qual o Teorema 2.28 se refere. A seguir descrevemos como se constrói a medida transversal à laminação e depois o processo que modifica $\mathcal{A}$ de forma que $\Lambda$ goze da propriedade de incompressibilidade.

Dado um espaço topológico $X$, lembramos que $|X|$ denota o número de componentes conexas por caminhos de $X$. Se $\mathcal{A}$ for admissível, podemos considerar $a_{ij} = |f(E_j) \cap e_i|$, definindo uma matriz não negativa inteira $A = A(\mathcal{A})$, que chamamos de *a matriz de incidência* de $\mathcal{A}$ com respeito a $f$. O sistema admissível $\mathcal{A}$ é irredutível se e somente se $A$ for *irredutível* i.e., para quaisquer $i, j$ existe potência $n$ de $A$ tal que $(A^n)_{ij} > 0$ (ver Seção 2.5). Pelo Teorema 2.24 o raio espectral de $A$ é um autovalor $\lambda = \lambda(\mathcal{A}) > 1$ e o autovetor $u = u(\mathcal{A}) = (u_1, \dots, u_q)$ associado pode ser tomado de forma que $u_i > 0$. Usaremos $u$ para construir a medida transversal.

Podemos associar, a cada $N(E_i)$, uma *largura*, a coordenada $u_i$ de $u$. Isso dá uma medida $\mu_0$ transversal à folheação $\mathcal{F}_0$ de $N(\mathcal{E})$ por discos duais. Similarmente podemos associar a cada $f^n(N(E_i))$ a largura $u_i \cdot \lambda^{-n}$, dando uma medida $\mu_n$ à folheção $\mathcal{F}_n$ de $f^n(N(\mathcal{E}))$. Se $\alpha$ é um arco transversal à $\Lambda$ e $\partial\alpha \cap \Lambda = \emptyset$) então definimos a medida $\mu$ em $\Lambda$ como sendo

$$\mu(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\alpha).$$

Essa definição faz sentido: primeiro observamos que, para $n$ suficientemente grande, $\alpha$ é transversal à $\mathcal{F}_n$; é também verdade que o limite existe pois, para $n$ suficientemente grande, $\mu_n(\alpha)$ é constante (por $u$ ser autovetor). É simples verificar que $\mu$ satisfaz invariancia por holonomia donde, de fato, $(\Lambda, \mu)$ consiste de uma laminação com medida transversal. É claro, também, que $f(\Lambda, \mu) = (\Lambda, \lambda\mu)$. Dizemos que $\lambda(\mathcal{A})$ é o *fator de crescimento de $f$ com respeito à $\mathcal{A}$*.

A laminação $\Lambda$ construida acima não necessariamente é aquela do Teorema 2.28 porque suas folhas podem ser compressíveis em $H - \mathring{H}_0$. Em [40] são desenvolvidas operações em $\mathcal{A}$ para modificar uma laminação que não satisfaz a condição de incompressibilidade e se obter uma que a satisfaça. Essas operações são definidas em termos da *superfície ramificada $B = B(\mathcal{E})$ associada à $\mathcal{E}$*, que definiremos mais adiante na seção. Aqui, porém, descreveremos as mesmas operações em termos da estrutura de alças $\mathcal{A}$. De qualquer forma, a superfície ramificada é um objeto interessante e tem suas vantagens, portanto daremos uma construção para $B(\mathcal{E})$ e faremos ligações entre as duas abordagens ao longo do texto.

Passamos à descrição das operações.

Se $\Lambda - \mathring{H}_0$ for compressível em $H - \mathring{H}_0$ então um disco compressor está contido em algum $H_n$, donde segue que $f^n(E_i) - \mathring{H}_0$ é compressível para algum $i$. Seja $D$ um disco compressor para $f^n(E_i)$. Podemos mudar $E_i$ e supor que $D \cap f^n(\mathcal{E}) = \partial D \subseteq f^n(E_i)$. Seja $D' \subseteq f^n(E_i)$ tal que $\partial D' = \partial D$. Então $D \cup D'$ bordam uma bola em $H_n$ logo são isotópicos em $H_n$. Se $n = 1$ então podemos modificar $f$ por uma isotopia que leve $D'$ em $D$ e ajustar a estrutura de alças de forma apropriada. Essa operação é chamada de *desvio* (em [40], uma *diversion*).

**Lema 2.30.** *Se $\mathcal{A}$ é admissível e irredutível então um desvio (possivelmente seguida de um colapso) produz um sistema $\mathcal{A}'$ admissível e irredutível tal que $\lambda(\mathcal{A}') < \lambda(\mathcal{A})$.*

Como todas as construções são equivariantes é necessário que as modificações em $\mathcal{A}$ e $f$ também o sejam. Se o disco compressor $D \nsubseteq H_1$ então não podemos realizar um desvio por causa da obstrução imposta por equivariância. Nesse caso, modificamos $\mathcal{A}$ e $f$ sem aumentar $\lambda$ buscando um sistema cuja respectiva laminação seja compressiível em $H_1 - \mathring{H}_0$. Tal sistema estará sujeito a um desvio, que, quando realizada, reduzirá $\lambda$. A seguir definiremos as operações que são usadas para modificar $\mathcal{A}$ e $f$.

Seja $f(v_j)$ uma 0-alça de $H_1$ e suponha que $N(E_i) \cap f(v_j) \neq \emptyset$. Podemos acrescentar uma 0-alça contida em $N(E_i) \cap f(v_j)$ à $\mathcal{A}$ separando a 1-alça $e_i$ em duas novas $e_i'$, $e_i''$. Essa operação é denominada *subdivisão* (*splitting* em [40]).

**Lema 2.31.** *Uma subdivisão de um sistema $\mathcal{A}$ admissível e irredutível produz um novo sistema $\mathcal{A}'$ admissível e irredutível tal que $\lambda(\mathcal{A}') = \lambda(\mathcal{A})$.*

Seja $(\Delta, \alpha, \beta)$ um meio-disco (ver Seção 2.1 para definição) e suponhamos que $\Delta$ seja mergulhado em $H_1 - \mathring{H}_0$ de forma que $\alpha \subseteq f(E_i)$ para algum $i$, e $\beta \subseteq \partial H_0$. Sejam $E_a$, $E_b$ os dois discos de $\mathcal{E}$ cujas vizinhanças laminadas $N(E_a)$, $N(E_b)$ contém $\partial\alpha = \partial\beta$. Suponhamos que $f(\mathcal{E})$ intercepte essas vizinhanças em somente um disco em cada uma e que $E_a$, $E_b$ sejam discos de $\mathcal{E}$ distintos. Definiremos uma *dobra* (em [40], um *down-move*) ao longo de $\Delta$ da seguinte forma: se modificamos $f$ por uma isotopia cujo efeito seja levar o arco $\alpha$ ao longo de $\Delta$ até passar um pouco de $\beta$ vemos que $f(E_i)$ deixa de interceptar $H_0$ em discos duais às 1-alças $e_a$, $e_b$, passando a interceptá-lo em um novo disco $E_{ab}$ que é uma soma conexa ao longo do bordo de $E_a$ com $E_b$. Eliminamos os discos $E_a$, $E_b$ e introduzimos $E_{ab}$. Completamos fazendo os ajustes necessários na estrutura de alças.

*Observação.* A exigência de que $f(\mathcal{E})$ intercepte cada $N(E_a)$, $N(E_b)$ somente uma vez não é muito forte, podendo ser facilmente realizada por subdivisão.

**Lema 2.32.** *Uma dobra de um sistema $\mathcal{A}$ admissível e irredutível produz um novo sistema $\mathcal{A}'$ admissível e irredutível tal que $\lambda(\mathcal{A}') = \lambda(\mathcal{A})$.*

A seguir definimos a operação inversa à dobra.

Suponhamos que $(\Delta, \alpha, \beta)$ seja um meio-disco mergulhado em $H_1 - \mathring{H}_0$ tal que $\alpha \subseteq f(E_i)$ para algum $i$ e $\beta \subseteq \partial H_1$. Nesse caso os dois pontos $\partial\alpha = \partial\beta$ estão contidos na vizinhança laminada $N(E_c)$ do mesmo disco de $\mathcal{E}$. Suponhamos que $f(\mathcal{E}) \cap N(E_c)$ contenha somente um disco. Se alteramos $f$ por uma isotopia que leve $\alpha$ ao longo de $K$ até passar um pouco além de $\beta$ então $f(E_i)$ deixa de interceptar $H_0$ em um disco paralelo à $E_c$, interceptando em dois novos discos $E_a$, $E_b$. Obtemos um novo sistema de discos $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ eliminando $E_c$ e acrescentando $E_a$, $E_b$. Depois de feitos os ajustes necessários na estrutura de alças dizemos que $\mathcal{E}'$ é obtida de $\mathcal{E}$ por uma *separação* (em [40], um *up-move*).

**Lema 2.33.** *Uma separação de um sistema $\mathcal{A}$ admissível e irredutível produz um novo sistema $\mathcal{A}'$ admissível e irredutível tal que $\lambda(\mathcal{A}') = \lambda(\mathcal{A})$.*

Finalmente, definimos a última operação, visando eliminar 0-alças de valência 2. Essa operação não esta claramente definida em [40], embora ela seja usada em uma versão equivalente do Lema 2.34 abaixo.

Suponhamos que a 0-alça $v$ da estrutura $\mathcal{A}$ em $H_0$ tenha valência 2 i.e., o respectivo vértice $v$ em $\Gamma$ tem valência 2. Sejam $e_i$, $e_j$ as arestas incidentes à $v$. Se o gênero de $H$ é $g \geq 2$ então $i \neq j$, embora os discos duais à $e_i$ e $e_j$ sejam paralelos. Consideremos $u(\mathcal{E}) = (u_0 \ldots, u_q)$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $u_j \leq u_i$. Uma *eliminação de valência* 2 é definida da seguinte forma: modificamos $f$ por uma isotopia de forma que todas as interseções $f(\mathcal{E}) \cap e_i$ sejam levadas a interceptar $e_j$, respeitando admissibilidade. Finalmente removemos $e_i$ e $v$ de $\mathcal{A}$, obtendo uma estrutura $\mathcal{A}'$.

**Lema 2.34.** *Se $\mathcal{A}$ é admissível e irredutível então a estrutura $\mathcal{A}'$ obtida de $\mathcal{A}$ por uma eliminação de valência 2 é admissível e irredutível e $\lambda(\mathcal{A}') \leq \lambda(\mathcal{A})$.*

*Observação.* Tem-se a desigualdade estrita $\lambda(\mathcal{A}') < \lambda(\mathcal{A})$ se e somente se $u_j < u_i$.

A contrução da laminação bidimensional com a propriedade de incompressibilidade depende fundamentalmente do seguinte lema:

**Lema 2.35.** *Se $\Lambda(\mathcal{A})$ não gozar da propriedade de incompressibilidade então existe uma estrutura $\mathcal{A}'$ tal que $\Lambda(\mathcal{A}')$ é compressível em $H_1 - \mathring{H}_0$ satisfazendo $\lambda(\mathcal{A}') = \lambda(\mathcal{A})$.*

A construção da laminação com a propriedade de incompressibilidade é finalizada da seguinte forma. Suponhamos que $\Lambda(\mathcal{A}^0)$ não goze da propriedade de incompressibilidade. O Lema 2.35 produz $\mathcal{A}'$ através de uma sequência de dobras, separações e subdivisões. Como há um disco compressor para $\Lambda(\mathcal{A}') - \mathring{H}_0$ em $H_1 - \mathring{H}_0$, podemos realizar um desvio e obter uma nova estrutura $\mathcal{A}^1$ tal que $\lambda(\mathcal{A}^1) < \lambda(\mathcal{A}^0)$. Pelo Lema 2.34, podemos supor que toda 0-alça de $\mathcal{A}^1$ tem valência maior que ou igual a três. Nesse caso, o número de 1-alças é limitado (por um número que depende somente do gênero de $H$), logo o tamanho da matriz de incidência $M(\mathcal{A}^1)$ é limitado. Se $\Lambda(\mathcal{A}^1)$ não satisfizer a condição de incompressibilidade, repetimos o argumento. Esse processo pára: caso contrário teriamos uma sequência $\lambda^0 > \lambda^1 > \ldots$ estritamente decrescente de autovalores de Perron-Frobenius de matrizes não-negativas e inteiras e de tamanho limitado, contradizendo o Lema 2.25. Segue que, em algum momento, o processo produz uma laminação satisfazendo a condição de incompressibilidade.

Do mesmo argumento explorando a boa-ordem nos possíveis autovalores para $\lambda(\mathcal{A})$, vemos que faz sentido falar em um *fator de crescimento minimal* para $f$. Podemos nos referir a tal fator como *o fator de crescimento de* $f$.

A estrutura de produto em $\mathring{H} - \mathring{H}_0 \simeq \partial H \times \mathbb{R}_+$ pode ser ajustada, preservando as fibras de forma que $\partial H_n = f^n(\partial H_0) = \partial H \times \{n\}$. Fixamos essa estrutura e definimos uma função altura em $h\colon \mathring{H} - \mathring{H}_0 \to \mathbb{R}_+$ por projeção. Podemos, então, definir $H_t$ para $t \geq 0$ como sendo $h^{-1}([0,t]) \cup H_0$, estendendo a definição $h_n = f^n(H_0)$.

**Proposição 2.36.** *A laminação bidimensional descrita no Teorema 2.28 pode ser modificada por uma isotopia, de forma que suas folhas fiquem em posição de Morse com respeito à função altura. Isso pode ser feito de tal forma que os pontos críticos dessa função (em uma folha) sejam todos selas. Nesse caso, se $t \geq 0$ não for valor crítico, então $\Lambda_t = \lambda \cap H_t$ é uma laminação cujas folhas são isotópicas a discos de um sistema $\mathcal{E}_t$, completo em $H_t$, admissível e irredutível. Todo disco de $\mathcal{E}_t$ está representado em $\Lambda_t$ e, se $\mu_t$ é a medida em $\Lambda_t$ herdada de $(\Lambda, \mu)$, então a medida $u_{ti}$ induzida por $\mu_t$ no disco $E_{ti} \in \mathcal{E}_t$ determina um autovetor $u_t$ cujo autovalor associado é o mesmo $\lambda$ associado à $u$.*

*Observação.* Usando a proposição acima, pode-se ver $(\Lambda, \mu)$ como um caminho no *espaço de discos* de $H$, onde o parâmetro é dado pela altura. Para uma definição do espaço de discos damos como referência [34]. Esse espaço pode ser visto como uma versão com pesos do *complexo de discos*, como definido em [27].



## 2.7.2 Superfície ramificada.

Finalmente construimos a superfície amificada $B = B(\mathcal{A})$.

Podemos considerar cada $f^i(N(\mathcal{E}))$ como uma vizinhança fibrada de $f(\mathcal{E})$, o intervalo como fibra. Relembramos que

$$U = \bigcup_{i \geq 0} f^i(N(\mathcal{E})),$$

donde $U$ pode ser visto como sendo fibrado por $I$. Se consideramos o quociente $p\colon U \to B$ no espaço dessas fibras é fácil ver que $B$ é uma superfície ramificada que mergulha $B \xrightarrow{\phi} U$ de forma transversal às fibras, fazendo de $U$ uma *vizinhança fibrada de* $\phi(B)$. Identificamos $B$ com $\phi(B)$ e definimos $N(B) = U$. É bem claro que $\Lambda \subseteq N(B)$, interceptando todas as fibras de forma transversal, portanto $B$ *conduz* $\Lambda$ *completamente.* A medida $\mu$ em $\Lambda$ induz uma *medida em* $B$, que denotamos por $(B, \mu)$. É claro que $(B, \mu)$ satisfaz a *switch condition.* Um *nulógono* para $B$ é um disco $D$ propriamente mergulhado em $H - \mathring{N}(B)$ tal que $\partial D \subseteq \partial_h N(B)$. Um nulógono é dito *essencial* se $\partial D$ não bordar um disco em $\partial_h N(B)$ e é dito *inessencial* caso contrário.

*Observação.* Em geral por nulógono estamos deixando implícito que é essencial. Em caso de ambiguidade seremos explícitos.

Um meio-disco $(\Delta, \alpha, \beta)$ é um *monógono* para $B$ se $\Delta$ for mergulhado em $\mathring{H} - \mathring{N}(B)$ e $\beta \subseteq \partial_h N(B)$, $\alpha \subseteq \partial_v N(B)$. Compressibilidade de $\Lambda$ pode ser detectada pela presença de nulógonos e monógonos para $B$:

**Lema 2.37.** *Se $B(\mathcal{E})$ não contiver nenhum nulógono essencial então não contém nenhum monógono.*

**Proposição 2.38.** *As folhas de $\Lambda(\mathcal{E}) - \mathring{H}_0$ são incompressíveis em $H - \mathring{H}_0$ se e somente se $B(\mathcal{E})$ não contiver nenhum nulógono essencial.*



### 2.7.3
### Laminação unidimensional invariante.

A construção da laminação unidmensional $(\Omega, \nu)$, descrita no Teorema 2.28, é feita cuidadosamente em [40] (seção 8), e sua abordagem é baseada na estrutura de alças que decrevemos acima. O leitor deve recorrer ao artigo original para maiores detalhes.

Aprimoramos a escolha de $f$ e $\mathcal{A}$ um pouco mais. Relembramos que $H_n = f^n(H_0)$, onde está definida uma retração $r_n \colon H_n \to f^n(\Gamma)$. Fixada uma métrica em $H$, modificamos $f$ de forma que as fibras $r_n^{-1}(p)$ sobre $p \in f^n(\Gamma)$ tenham diâmetro indo para 0 quando $n \to -\infty$, o que claramente pode ser realizado.

Consideramos

$$\Theta = \bigcap_{r \leq 0} f^r H_0.$$

Tal $\Theta$ é quase uma laminação unidimensional: se $\hat{e}$ for uma 1-alça de $\mathcal{A}$ em $H_0$ então $\hat{e} \cap \Theta$ é uma laminação (de fato a contrução de $\omega \colon \Omega \to \mathring{H}_0$ será feita de forma que $\hat{e} \cap \omega(\Omega) = \hat{e} \cap \Theta$). Se $\hat{v}$ for uma 0-alça de $H_0$ então $\hat{v} \cap \Theta$ contém um conjunto singular

$$S = \bigcap_{r \leq 0} f^r (\bigcup_i \hat{v}_i),$$

onde $\bigcup_i \hat{v}_i$ é o conjunto das 0-alças de $H_0$. Vemos, então, que $S$ é um conjunto finito de pontos e que, em $H_0 - S$, $\Theta - S$ é uma laminação unidimensional. Esse conjunto $S$ é a obstrução para se ter uma laminação em $H_0$. A solução porposta por [40] é de se contruir uma laminação $\Omega$ abstrata e uma aplicação $\omega\colon \Omega \to \mathring{H}_0$ tal que $\omega(\Omega) = \Theta$ e $\omega$ sendo mergulho em $\Omega - \omega^{-1}(S)$.

Para obter $(\Omega, \nu)$ construiremos uma *train-track com medida* $(\tau, \nu)$ satisfazendo a *switch condition*, donde conduzirá uma laminação com medida, que será $(\Omega, \nu)$. Começamos a construção considerando o grafo $\Gamma(\mathcal{E})$ dual à $\mathcal{E}$ e a retração $r_0\colon H_0 \to \Gamma$ associada à $\mathcal{A}(\mathcal{E})$. Removemos de $\Gamma$ uma vizinhança $V$ do vértice $v$ e os segmentos restantes serão denominados por $\epsilon_i$, um para cada aresta $e_i$ de $\Gamma$. Completamos $\tau$ acrescentando ramos ligando os ramos $\epsilon_i$ e $\epsilon_j$ se, para algum $r < 0$, uma 1-alça $f^r(e_k)$ de $f^r(H_0)$ for de $e_i$ para $e_j$ i.e., se uma componente de $f^r(e_k) \cap v$ (onde $v$ é a respectiva 0-alça de $H_0$) tiver um extremo em cada $e_i$, $e_j$. Fazendo isso para todo vértice de $\Gamma$, obtemos $\tau$.

Existe um mergulho $\psi\colon \tau \to H_0$ tal que $r_0 \circ \psi(\epsilon_i) = e_i$ e com $r_0 \circ \psi$ colapsando os outros ramos para os respectivos vértices. O train-track $f^{-1} \circ \psi(\tau)$ é conduzido por $\tau$ se nos permitimos alterar $f^{-1} \circ \psi(\tau)$ por uma homotopia (em geral uma condução deve ser realizada por isotopias). Seja $g\colon \tau \to \tau$ essa aplicação. Isso produz uma matriz de incidência para os ramos de $\tau$. Se restringimos essa matriz para os ramos $\epsilon_i$ associados às arestas de $\Gamma$, temos exatamente a transposta da matriz de incidência $M(\mathcal{A})$, portanto tem o mesmo autovalor de Perron-Frobenius $\lambda = \lambda(\mathcal{A})$.

Seja $x = (x_0, \ldots, x_q)$ um autovetor da matriz de incidência. Para cada $s$ damos pesos $x_i/(\lambda^s)$ aos ramos $\epsilon_i$, o push-forward por $g^s$ induz pesos $\nu_s$ nos ramos de $\tau$. Por construção, $s \mapsto \nu_s$ é constante nos ramos $\epsilon_i$. Estendemos esse propriedade para os outros ramos considerando

$$\nu = \lim_{s \to \infty} \nu_s.$$

Tais limites convergem para um sistema de pesos satisfazendo a switch condition, dando uma train-track com medida $(\tau, \nu)$. Além disso, a condução de $g(\tau, \nu)$ por $\tau$ satisfaz

$$\ldots \xrightarrow{g} \left(\tau, \frac{\nu}{\lambda^2}\right) \xrightarrow{g} \left(\tau, \frac{\nu}{\lambda}\right) \xrightarrow{g} (\tau, \nu)\,.$$

Nessas condições $\tau$ conduz completamente uma laminação com medida $(\Omega, \nu)$, obtida por limite inverso. Fica claro, portanto, que $h = g^{-1}$ determina o isomorfismo ao qual se refere o Teorema 2.28:

$$h(\tau,\nu) = \left(\tau, \frac{\nu}{\lambda}\right).$$

Definimos $\omega\colon \Omega \to \mathring{H}_0$ da seguinte forma: um ponto do limite inverso $\Omega$ é uma sequência $\{y_s\}$ onde $g(y_s) = y_{s-1}$. As funções $\phi_k\colon \Omega \to \tau$ dadas por $\phi_k(\{y_s\}) = y_k$ são contínuas. Seja $\psi_k\colon \tau \to H_{-k}$ definida por $f^{-k} \circ \psi$. Definimos

$$\omega(\{y_s\}) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(y_k),$$

completando a construção descrita pelo Teorema 2.28.