

1

Introdução

O estudo de automorfismos genéricos de cubos com alças (“*handlebodies*”) é parte do projeto de se entender classes de isotopia de automorfismos de variedades orientáveis de dimensão três que são compactas, conexas, irredutíveis e com bordo (não vazio).

Uma abordagem natural é seguir o modelo da classificação de automorfismos de superfícies de Nielsen-Thurston (ver Teorema 2.19 e [47]). Suponha que M é uma superfície com $\chi(M) < 0$. Dado um homeomorfismo $f: M \rightarrow M$ (i.e. um *automorfismo de M*), procura-se por subvariedades de codimensão um $S \subseteq M$ que sejam *f -invariantes a menos de isotopia* (i.e. $f(S)$ é isotópica a S). Nesse caso, pode-se supor que $f(S) = S$. Assim f pode ser *reduzida*: se $M' = M - \mathring{N}(S)$, onde $\mathring{N}(S)$ é uma vizinhança regular aberta de S invariante por f , então f induz $f' = f|_{M'}: M' \rightarrow M'$. A estratégia prossegue procurando por reduções de f' , na esperança de que uma sequência finita de reduções apropriadas produza como resultado automorfismos sujeitos a alguma classificação. A meta final é que cada elemento da classificação seja, em algum sentido legítimo, bem entendido. Esse projeto é extremamente bem sucedido no caso em que M é uma superfície.

Considere essa mesma estratégia no caso em que M é uma variedade orientável de dimensão três compacta, conexa, irredutível e com bordo (não vazio). Parte do projeto é realizada de forma independente do automorfismo, utilizando duas decomposições canônicas de variedades de dimensão três: a *decomposição de Jaco-Shalen-Johannson* [23, 26] e a decomposição determinada pelo *produto com alças característico* da variedade (“*characteristic compression body*”) [6].

Se ∂M for incompressível então M admite a decomposição de Jaco-Shalen-Johannson: existe uma superfície propriamente mergulhada canônica (a menos de isotopia) $S \subseteq M$ que separa M em duas subvariedades compactas $M_1, M_2 \subseteq M$ (não necessariamente conexas) satisfazendo:

1. cada componente de M_1 é fibrada: ou um *espaço fibrado de Seifert* (“*Seifert fibered space*”), que é essencialmente uma variedade folheada

por círculos, ou um fibrado sobre uma superfície compacta (não necessariamente orientável) cuja fibra é o intervalo;

2. cada componente N de M_2 ou é também um espaço fibrado de Seifert ou é *atoroidal*, no sentido em que todo subgrupo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ de $\pi_1(N)$ é conjugado a um subgrupo de $\pi_1(V)$, onde V é uma componente de ∂N .

A variedade M_1 é denominada *subvariedade característica de M* (“*characteristic submanifold*”) e é única a menos de isotopia, donde S determina uma redução de f a $f|_{M_1}$ e $f|_{M_2}$. Ambas as partes são bem comportadas.

Com excessão de três casos simples, um espaço fibrado de Seifert com bordo tem estrutura fibrada única a menos de isotopia (vide [24]), que, portanto, deve ser preservada por $f|_{M_1}$. Argumento similar se aplica às componentes de M_1 fibradas sobre superfícies, especialmente dado que $f|_{M_1}$ deve preservar certas estruturas extras únicas determinadas pela decomposição (essencialmente $M_1 \cap S \subseteq \partial M_1$).

Em M_2 a situação não é pior: prova-se que o grupo das classes de mapeamento de M_2 é finito [26], donde $f|_{M_2}$ é *periódico*, no sentido em que alguma potência é isotópica à identidade.

A análise acima supunha que ∂M era incompressível. Se ∂M for compressível em M então o *produto com alças característico* Q de M , conforme definido por Bonahon, é único a menos de isotopia [6]¹. Essa unicidade garante que Q e seu complemento fechado $M' = \overline{M - Q}$ são invariantes por qualquer automorfismo $f: M \rightarrow M$. Pode-se, portanto, reduzir f a $f_{M'}: M' \rightarrow M'$ e $f_Q = f|_Q: Q \rightarrow Q$. Mostra-se facilmente que M' é irreduzível e $\partial M'$ é incompressível, donde M' admite a decomposição de Jaco-Shalen-Johannson mencionada acima. Resta estudar $f_Q: Q \rightarrow Q$.

A variedade Q é um *produto com alças* no sentido usado aqui (Definição 2.16) e em [40]: um produto $F \times I$ (onde F é uma superfície) com alças adicionadas a $F \times \{1\}$ no bordo do produto². Há um caso excepcional: quando $F = \emptyset$, Q é um cubo com alças (i.e., uma variedade orientável H de dimensão três obtida da adição de alças a uma bola, vide Definição 2.2). Como produtos com alças e cubos com alças não estão sujeitos a decomposição de Jaco-Shalen-Johannson (pois seus bordos são compressíveis) ou de Bonahon (pois já são seus próprios produtos com alças característicos) o estudo de seus automorfismos necessita de outras ferramentas.

¹O produto com alças característico de M definido em [6] é o *produto com alças característico de ∂M* (“*characteristic compression body*”) como definido em [40].

²No caso particular de Q ser um produto com alças característico, F é fechada.

Procurar por decomposições canônicas de produtos com alças e cubos com alças não parece muito promissor, pois estas já são variedades bem simples. De fato, em geral isso não funciona [27], embora seja possível se beneficiar desse tipo de rigidez em alguns casos particulares, como faremos na Proposição 3.12. Para se prosseguir com o estudo, é necessário que se aproveite propriedades do automorfismo.

Embora a literatura sobre automorfismos de produtos com alças e cubos com alças a menos de isotopia seja extensa, o enfoque é, em geral, dado ao *grupo das classes de mapeamento* (“*mapping class group*”) (e.g. [33], [6], [45], [49], [34], [28], [32]). Uma classificação geométrica dessas classes de aplicações não aparece até [40].

Johannson já havia atentado para algumas sutilezas que uma tal classificação teria que levar em conta no caso de cubos com alças: em [27, Capítulo 1] é claro que há um interesse em se identificar os automorfismos de cubos com alças que são irredutíveis. Se mostra que há uma tensão entre dois casos delicados, quando a restrição do automorfismo ao bordo é *pseudo-Anosov* (Definição 2.12) e quando o automorfismo é o *levantamento* de um automorfismo de uma superfície. Esses casos serão brevemente comentados abaixo.

Seja $p: H \rightarrow S$ um fibrado sobre uma superfície com bordo (possivelmente não orientável). Se o espaço total H for orientável, deve ser um cubo com alças. Um automorfismo $h: S \rightarrow S$ pode ser levantado para um automorfismo $f: H \rightarrow H$. Supondo que h é pseudo-Anosov, seu *levantamento* f tem a seguinte propriedade: uma superfície orientável, propriamente mergulhada e invariante por f é necessariamente paralela ao bordo [27]. Tal fato sugere que tais automorfismos devam ser considerados como irredutíveis. Johannson usa esse exemplo para argumentar que um automorfismo f cuja restrição ao bordo *não* é pseudo-Anosov (o que certamente é o caso de um levantamento) pode, nesse sentido, ser irredutível. Continuando a análise, acha-se condições suficientes sobre a restrição de f ao bordo para garantir que f admita uma superfície invariante que não seja paralela ao bordo. Deve ser notado que essas condições implicam que a restrição $f|_{\partial H}$ *não* é pseudo-Anosov. Passa sem comentários o seguinte fato relevante para o estudo: um automorfismo cuja restrição ao bordo é pseudo-Anosov *pode* admitir uma superfície invariante que não é paralela ao bordo, como mostraremos no Exemplo 3.16.

A classificação dada por Oertel em [40], cujos detalhes serão omitidos aqui, parece ser quase tão boa quanto se é possível. A tensão mencionada acima é resolvida declarando que levantamentos são redutíveis. Embora isso

viole a definição mais natural de redutibilidade que vem sendo considerada, a estrutura de fibrado $p: H \rightarrow S$ determina uma forma de simplificar o automorfismo $f: H \rightarrow H$. Uma alternativa seria considerar levantamentos como casos excepcionais. De qualquer forma os levantamentos são considerados peças finais da decomposição, o que é apropriado dada a rigidez imposta pelo fibrado e que automorfismos pseudo-Anosov são bem entendidos. Há outros casos que a classificação considera redutíveis, mesmo sendo estas peças finais da decomposição, no mesmo sentido em que estão sujeitos à rigidez de alguma estrutura preservada pelo automorfismo (para a lista completa, vide [40]).

Um sucesso da classificação é o de identificar os automorfismos *genéricos* de cubos com alças (Definição 2.17) e produtos com alças [40], que são *irredutíveis*, no sentido em que não podem ser decompostos, e não têm nenhuma estrutura extra invariante clara (no caso particular de cubos com alças isso implica que a restrição ao bordo é pseudo-Anosov). Nesse sentido, eles são os análogos aos automorfismos pseudo-Anosov de superfícies. Essa analogia não se resume a esse aspecto, conforme será comentado mais adiante. Mesmo sob essas considerações, estes permanecem sendo, naturalmente, os elementos mais misteriosos e complicados da classificação.

Suponha que $f: H \rightarrow H$ é um automorfismo genérico de um cubo com alças. Ainda em [40] se acha uma estrutura invariante para automorfismos genéricos. Utilizando técnicas de [29], se constrói uma laminação $\Lambda \subseteq \overset{\circ}{H}$ bidimensional do interior do cubo com alças (ou produto com alças) invariante por f . Além disso, a laminação admite uma *medida invariante*³ *transversal* (Λ, μ) que é *projetivamente invariante por f* (Teorema 2.28, vide [40]). Mais precisamente, existe um representante $\hat{f}$ da classe de f tal que

$$\hat{f}(\Lambda, \mu) = (\Lambda, \lambda\mu)$$

para algum real $\lambda > 1$, que é chamado de *o fator de crescimento de f relativo à Λ* . Esse fator de crescimento é uma medida da complexidade de $\hat{f}$ (e.g., a construção análoga, no caso de f ser periódico, determinaria fator de crescimento $\lambda = 1$).

A laminação Λ não é única. É natural, portanto, que se procure pelo representante $\hat{f}$ e laminação com medida (Λ, μ) que determinem o fator de crescimento minimal dentre todas as possíveis escolhas: tal representante capta a complexidade essencial do automorfismo, que não pode ser simplificada por isotopia. Em [40] se mostra que esse mínimo

³Essa invariância é relativa à holonomia da laminação.

existe e que, nesse caso, a laminação goza de uma certa *propriedade de incompressibilidade*: se $H_0 \subseteq \mathring{H}$ é um cubo com alças tal que $H - \mathring{H}_0$ é um produto $\partial H \times I$, então as folhas de $\Lambda - \mathring{H}_0$ são incompressíveis em $\mathring{H} - \mathring{H}_0$ (Teorema 2.28). Além disso, há, nesse caso, uma laminação unidimensional Ω transversal a Λ também invariante por $\hat{f}$. As propriedades exatas de Ω estão descritas no Teorema 2.28. Essencialmente essa laminação tem uma medida invariante transversal (Ω, ν) tal que

$$\hat{f}(\Omega, \nu) = (\Omega, \lambda^{-1}\nu).$$

Discutimos anteriormente o problema de dividir automorfismo de cubos com alças entre irredutíveis e redutíveis. A existência dessas duas laminações transversais (Λ, μ) , (Ω, ν) é evidência forte (senão suficiente) de que, de fato, os automorfismos genéricos de cubos com alças são análogos aos automorfismos pseudo-Anosov de superfícies.

Resultados semelhantes são obtidos também para produtos com alças [40].

Essa dissertação pretende dar continuidade ao estudo de automorfismos genéricos de cubos com alças. O problema geral é o de identificar o fator de crescimento minimal λ e sua relação com propriedades geométricas da respectiva laminação Λ . Seguindo essa linha, começaremos mostrando o resultado natural de que o automorfismo induzido em π_1 pode ser usado para dar uma cota inferior para o fator de crescimento, servindo como condição suficiente para garantir minimalidade. Provaremos que a condição necessária de que a laminação goze da propriedade de incompressibilidade pode ser realizada de forma algorítmica. Mostraremos também que essa condição não é suficiente para garantir minimalidade do fator de crescimento. Sugeriremos uma nova propriedade mais forte, *tensão transversal*, e conjecturaremos que ela é condição necessária para λ ser minimal. Provaremos a conjectura em alguns casos, incluindo automorfismos genéricos de um cubo com alças de gênero 2. Como aplicação, mostraremos também que a conjectura implica que λ seja menor que ou igual ao fator de crescimento do automorfismo restrito ao bordo (que é pseudo-Anosov). Uma parte do trabalho que permeia toda a dissertação é a construção de exemplos. Desenvolveremos métodos para gerar automorfismos genéricos. Em particular, daremos condições suficientes para que um automorfismo seja genérico.

No Capítulo 2 reveremos brevemente parte das definições e técnicas que serão usadas. Alguns aspectos da teoria clássica de variedades de dimensão três serão vistos na Seção 2.1. A Seção 2.2 será dedicada às

laminacões, onde apresentaremos alguns exemplos padrão. Na Seção 2.3 reveremos a definição de automorfismo pseudo-Anosov de superfícies. Esse conceito será necessário para a definição que daremos de automorfismo genérico de um cubo com alças na seção seguinte. Enunciaremos também o Teorema 2.15 de Penner, que determina um método para se construir automorfismos pseudo-Anosov. Tal teorema será de utilidade especial na construção de exemplos no Capítulo 3.

Dedicaremos a Seção 2.4 à teoria de classificação desenvolvida em [40]. Definiremos produto com alças e automorfismo genérico de cubo com alças. Por sua relevância na área, enunciaremos o Teorema de Classificação de Oertel (Teorema 2.18). Por outro lado, não o faremos com total clareza, uma vez que evitaremos a definição detalhada de automorfismo redutível. Justificamos a escolha observando que essa definição precisa não é necessária nesse trabalho e envolve várias sutilezas que tenderiam a desviar a atenção e esforço do leitor.

É comum que técnicas e resultados em dimensão dois tenham papel fundamental em seus análogos em dimensão três. Esse é o caso do Teorema de Classificação, que depende fortemente do Teorema de Classificação de automorfismos de superfícies de Thurston (Teorema 2.19), cujo enunciado daremos ainda na Seção 2.4. Finalizando, relembremos as definições de torções de Dehn (“Dehn twists”) ao longo de discos e anéis em variedades de dimensão três. Usaremos composições de torções para construir exemplos.

A teoria de Perron-Frobenius de matrizes não negativas está intimamente ligada à construção de uma medida para a laminação (que seja invariante pelo automorfismo) e seu respectivo fator de crescimento. Enunciaremos na Seção 2.5 alguns dos resultados dessa teoria que precisaremos usar. Mencionamos aqui a Proposição 2.23, que determinará um critério para detectar redução do fator de crescimento.

Bestvina e Handel relacionam classes de conjugação de automorfismos de grupos livres com equivalências de homotopia de grafos [2]. Em [3] essas técnicas são usadas com grande sucesso no estudo de automorfismos de superfícies [2, 3]. No Capítulo 4 vamos adaptar essas técnicas para nossas necessidades. Na Seção 2.6 comentaremos alguns aspectos dessa teoria. Alguns desses resultados serão particularmente importantes também no Capítulo 3.

Finalmente na Seção 2.7 voltamos à teoria de [40] e descreveremos a construção da laminação invariante (Λ, μ) e do fator de crescimento λ . Enunciaremos o Teorema 2.28, que determina que a propriedade de incompressibilidade de Λ é condição necessária para λ ser minimal. Descreveremos

como obter uma laminação com essa propriedade. Também nessa seção descreveremos uma estrutura de alças no cubo com alças que será importante para todo o trabalho.

Os Capítulos 3, 4 e 5 contêm o material original dessa tese.

O Capítulo 3 será dedicado a exemplos. A construção de automorfismos genéricos não é óbvia. Em verdade, sequer é óbvio, da definição, que automorfismos genéricos existem. Mostraremos que esse é o caso, identificando em exemplos condições suficientes para um automorfismo ser genérico (Exemplo 3.1 e Lema 3.2). Isso será feito na Seção 3.1.

Iremos além, desenvolvendo métodos para construir automorfismos genéricos. Isso será feito na Seção 3.2 (Teorema 3.5 ou, em versão mais geral, Teorema 3.7) e, também, na Seção 3.4 (Corolário 3.14). Esses métodos geram uma vasta variedade de automorfismos e devem ser de interesse a qualquer investigação sobre automorfismos genéricos. O método da Seção 3.2 será uma generalização das técnicas usadas na construção do exemplo da seção anterior. Ele resolverá um problema anunciado em [40, Seção 9]. Embora os automorfismos obtidos por esse método sejam sempre sobre cubos com alças de gênero par não existe limite para esse gênero. Usaremos o método para construir outro exemplo, mais interessante e complicado do que o primeiro (Exemplo 3.8).

Na Seção 3.3 abordaremos o problema de se identificar o fator de crescimento λ . Acharemos uma cota inferior para λ , o que determinará condições suficientes para o fator de crescimento ser minimal. Tal cota é determinada por teoria de homotopia, portanto é bem natural. Como exemplo, iremos usá-la para identificar minimalidade do fator de crescimento do primeiro exemplo.

Na Seção 3.4 será relevante considerarmos produtos com alças. Mostraremos que produtos com alças com somente uma alça admitem uma redução canônica, que, portanto, independe do automorfismo (Proposição 3.12). Usaremos esse resultado para mostrar que, se um automorfismo de um cubo com alças for pseudo-Anosov no bordo, então uma superfície redutora fechada não pode ter característica de Euler muito próxima da do bordo. (Teorema 3.13). Como corolário teremos que um automorfismo de um cubo com alças de gênero dois cuja restrição ao bordo é pseudo-Anosov é necessariamente genérico (Corolário 3.14). Aplicaremos esse resultado construindo um automorfismo genérico de um cubo com alças cujo homomorfismo induzido em π_1 é a identidade (Exemplo 3.15), resolvendo outro problema anunciado em [40]. Finalizaremos construindo um automorfismo *reduzível* de um cubo com alças de gênero três cuja res-

trição ao bordo é pseudo-Anosov. Tal exemplo mostrará que as estimativas feitas no Teorema 3.13 são ótimas. Será também relevante como resposta às considerações de Johansson sobre a classificação de automorfismos de cubos com alças, conforme foi discutido anteriormente.

A laminação Λ gozar da propriedade de incompressibilidade é condição necessária para o fator de crescimento λ ser minimal. É, portanto, relevante realizar essa propriedade na busca desse fator. No Capítulo 4 mostraremos que essa tarefa é algorítmica e a realizaremos em exemplos. Não sabemos avaliar a dificuldade de implementar esse algoritmo em um programa.

Se conhecermos um disco compressor para $\Lambda - \mathring{H}_0$ em $\mathring{H} - \mathring{H}_0$, o processo descrito em [40] é naturalmente algorítmico. Se soubermos que Λ é compressível, a procura por um disco compressor é, teoricamente, direta e óbvia. Na Seção 4.1 proporemos técnicas que tornarão essa procura uma tarefa mais eficiente, podendo ser realizada em exemplos concretos. Achado o disco compressor, as técnicas de [40] determinam como modificar a laminação e reduzir o fator de crescimento. Esse processo é também bastante tratável e o aplicaremos em exemplos.

O processo descrito acima é finito se Λ for compressível. Se não houver disco compressível para ser encontrado, é necessário um critério de parada. Na Seção 4.2 determinaremos esse critério (Teorema 4.15). Concluiremos a seção verificando a propriedade de incompressibilidade em um exemplo.

A propriedade de incompressibilidade não garante minimalidade do fator de crescimento. Identificaremos esse fato no Capítulo 5 e proporemos uma condição mais forte, *tensão transversal* (Definição 5.2), que diz, essencialmente, que a interseção ponderada por ν de Λ com a laminação unidimensional (Ω, ν) é minimal. Conjecturaremos que essa condição é necessária para λ ser minimal (Conjectura 5.4) e a demonstramos parcialmente, assumindo hipóteses técnicas extras (Proposição 5.14). A propriedade de tensão transversal nos dará condições para comparar λ com o fator de crescimento do automorfismo restrito ao bordo (Corolário 5.19), respondendo a uma pergunta proposta em [40] nos casos em que a conjectura é verdadeira. Isso será verdade em particular para todos os automorfismos genéricos de cubos com alças de gênero 2 (Corolário 5.20).

Na Seção 5.1 apresentaremos um exemplo que goza da propriedade de incompressibilidade cujo fator de crescimento não é minimal. Definiremos a propriedade de tensão transversal e identificaremos hipóteses extras sob as quais a violação de tensão transversal implica que λ não é minimal (Lema 5.11). Mostraremos que boa parte dessas hipóteses não impõe restrições, podendo ser supostas sem perda de generalidade. Esse não será o

caso de uma delas, a de que o disco tensor transversal deve estar contido em H_1 , que é a obstrução para a demonstrarmos a conjectura em geral. Identificaremos uma propriedade geométrica da laminação em H que nos permitirá supor também essa hipótese, demonstrando a conjectura nesse caso (Proposição 5.14). Essa propriedade será, essencialmente, a de que o fecho de cada componente de $H_t - \Lambda$ intercepte Λ em no máximo 3 discos para algum $t \geq 0$. Teremos evidência de que essa propriedade não é muito forte: em gênero 2, por exemplo, ela é sempre satisfeita (Corolário 5.15). Em particular concluiremos que, em gênero 2, a condição de tensão transversal é necessária para minimalidade de λ .

A propriedade de tensão transversal tem uma aplicação interessante, que desenvolveremos na Seção 5.2. Mostraremos que se Λ for transversalmente tensa, então o respectivo fator de crescimento λ é menor que ou igual ao fator de crescimento do automorfismo restrito ao bordo, que é pseudo-Anosov (Corolário 5.19). Essa comparação vale, portanto, para o fator de crescimento minimal sempre que a Conjectura 5.4 for verdadeira. Em particular, quando o cubo com alças tiver gênero 2.

Além dos aspectos preliminares que serão discutidos no Capítulo 2, esta dissertação não necessitará de muitos pré-requisitos. Suporemos conhecimentos básicos em teoria de variedades diferenciáveis (e.g. [17]) e um mínimo de topologia algébrica, no nível do grupo fundamental (e.g. [31]). Algum conhecimento da teoria clássica de variedades de dimensão três, no nível do Teorema do Laço e superfícies incompressíveis (e.g. [22, 19]), seria apreciável. Embora desenvolvamos na Seção 2.7 as estruturas construídas em [40], seria conveniente que o leitor tivesse acesso ao artigo original, dada sua extrema importância para nosso trabalho.