

**Leonardo Navarro de  
Carvalho**

**Automorfismos genéricos de  
cubos com alças**

**TESE DE DOUTORADO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
Programa de Pós-graduação em  
Matemática

Rio de Janeiro  
Novembro de 2002

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Leonardo Navarro de Carvalho**

**Automorfismos genéricos de cubos com  
alças**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em  
Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio  
como parte dos requisitos parciais para obtenção do título  
de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Paul A. Schweitzer  
Co-Orientador: Prof. Ulrich Oertel

Rio de Janeiro  
Novembro de 2002



**Leonardo Navarro de Carvalho**

**Automorfismos genéricos de cubos com  
alças**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paul A. Schweitzer**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ulrich Oertel**

Co-Orientador

Departamento de Matemática e Ciência da Computação  
— Rutgers University – Newark

**Prof. Sebastião Firmo**

Instituto de Matemática — UFF

**Prof. Carlos Gutierrez**

Departamento de Matemática — ICMC – USP

**Prof. Derek Hacon**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Rafael O. Ruggiero**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ney Augusto Dumont**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —  
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 01 de Novembro de 2002

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Leonardo Navarro de Carvalho**

Graduou-se em Matemática pela PUC-Rio em 1994, já manifestando interesse na área de topologia. Imediatamente ingressou no programa de Mestrado em Matemática do mesmo departamento, defendendo a dissertação “A estrutura das folheações de Lie” em 1996. Durante o doutorado direcionou sua pesquisa à área de Topologia em dimensão 3. Além da pesquisa, esteve envolvido com várias atividades de ensino em matemática, tanto em nível superior quanto em projetos de atualização de professores do nível secundário.

#### Ficha Catalográfica

Carvalho, Leonardo Navarro de

Automorfismos genéricos de cubos com alças/  
Leonardo Navarro de Carvalho; orientador: Paul A. Schweitzer; co-orientador: Ulrich Oertel. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2002.

[10], 132 f: il. ; 30 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Topologia em dimensão três. 3. Cubos com alças. 4. Automorfismos. 5. Laminacões. I. Schweitzer, Paul A.. II. Oertel, Ulrich. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Para meus pais.

## Agradecimentos

Ao Paul, pela orientação e pelo apoio, paciência e confiança.

Ao Ulrich, por toda a energia investida.

À Carol, por tudo, tanto que não pode ser listado.

Aos meus pais, ao João e Cris, portos seguros incondicionais.

À Nina, cujo sorriso restaurou, tantas vezes, ânimos perdidos.

Aos meus amigos, me recebendo com calor e afeto no Brasil, me dando apoio e forças nos Estados Unidos.

A todos os professores do departamento, cuja dedicação e paixão determinaram muito da minha relação com a matemática.

À Coordenação de Pós do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

À Creuza, Linda, Tereza, Kátia, Vera, Orlando, Otávio e Kleber, que fazem com que ainda me sinta em casa no departamento.

Ao pessoal da CCPG: Célia, Jorge, Miltinho e, em especial, ao Prof. Bergmann.

Ao CNPq, CAPES e PUC-Rio pelos auxílios e bolsas.

Ao Peter, cujo programa (e auxílio em seu uso) me poupou horas de trabalho manual.

Ao Departamento de Matemática e Ciência da Computação de Rutgers–Newark, pela hospitalidade durante o estágio.

## Resumo

Carvalho, Leonardo Navarro de; Schweitzer, Paul A.; Oertel, Ulrich. **Automorfismos genéricos de cubos com alças**. Rio de Janeiro, 2002. 142p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Automorfismos genéricos de cubos com alças (“handlebodies”) aparecem do estudo de classes the isotopia de automorfismos de variedades orientáveis de dimensão três. Automorfismos genéricos permanecem como uma das partes menos entendidas desse estudo.

Dado um automorfismo genérico de um cubo com alças, é conhecida uma forma de se construir uma laminação bidimensional que é invariante pelo automorfismo. A essa laminação se associa um fator de crescimento. É sabido que, no caso de tal fator de crescimento ser minimal – uma característica importante, pois mede a complexidade essencial do automorfismo – a laminação deve gozar de uma certa propriedade de incompressibilidade. Nessa tese mostramos que o processo de se achar uma laminação com tal propriedade é algorítmico. Por outro lado, mostramos que tal propriedade não garante que o respectivo fator de crescimento seja minimal. Propomos uma outra propriedade, tensão transversal, mais forte que incompressibilidade, que conjecturamos também ser condição necessária para que o fator de crescimento seja minimal. Provamos a conjectura em alguns casos.

Além dos resultados mencionados acima, desenvolvemos métodos para gerar automorfismos genéricos de cubos com alças, que usamos para apresentar alguma variedade de exemplos.

## Palavras-chave

Topologia em dimensão 3; Difeomorfismos de variedades; Cubos com alças; Laminações; Difeomorfismos pseudo-Anosov.

## Abstract

Carvalho, Leonardo Navarro de; Schweitzer, Paul A.; Oertel, Ulrich. **Generic automorphisms of handlebodies**. Rio de Janeiro, 2002. 142p. PhD. Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Generic automorphisms of handlebodies appear naturally in the study of isotopy classes of automorphisms of orientable three-dimensional manifolds. Generic automorphisms remain as one of the least understood parts of this study.

Given a generic automorphism of a handlebody one can construct a bidimensional lamination that is invariant under the automorphism. There is a growth rate associated to this lamination. It is known that, when this growth rate is minimal among all possible choices (an important property, for it measures the essential complexity of the automorphism), the lamination must have a certain incompressibility property. On this thesis we show that the process of finding a lamination with such a property is algorithmic. On the other hand, we show that this said incompressibility property is not sufficient for the minimality of the growth rate. We propose a stronger property, which we called transverse tightness, and conjecture that it is a necessary condition for the growth rate to be minimal. We prove the conjecture in some particular cases.

In addition to the results mentioned above, we develop methods to generate generic automorphisms of handlebodies, which we use to present some variety of examples.

## Keywords

Three-dimensional topology; Diffeomorphisms of manifolds; Handlebodies; Compression bodies; Laminations; Pseudo-Anosov diffeomorphisms.

## Sumário

|     |   |            |
|-----|---|------------|
| 1   | Introdução                                  | <b>11</b>  |
| 2   | Preliminares                                | <b>20</b>  |
| 2.1 | Variedades de dimensão três.                | 20         |
| 2.2 | Laminações.                                 | 23         |
| 2.3 | Automorfismos pseudo-Anosov.                | 28         |
| 2.4 | Automorfismos de cubos com alças.           | 30         |
| 2.5 | Matrizes não negativas.                     | 33         |
| 2.6 | Automorfismos de grupos livres.             | 34         |
| 2.7 | Automorfismos genéricos de cubos com alças. | 35         |
| 3   | Construindo Exemplos.                       | <b>47</b>  |
| 3.1 | Um exemplo.                                 | 47         |
| 3.2 | Um metodo                                   | 50         |
| 3.3 | Limitando o fator de crescimento.           | 55         |
| 3.4 | Superfície redutora fechada.                | 58         |
| 4   | Algoritmo                                   | <b>67</b>  |
| 4.1 | A procura por um nulógono.                  | 67         |
| 4.2 | A parada                                    | 83         |
| 5   | Tensão transversal.                         | <b>108</b> |
| 5.1 | Discos tensores transversais.               | 108        |
| 5.2 | Fator de crescimento                        | 128        |
| 6   | Conclusão                                   | <b>135</b> |
|     | Referências Bibliográficas                  | <b>139</b> |

## Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.1  | A superfície $S$ e as curvas $\alpha_0, \alpha_1$ . As torsões serão para a esquerda em $\alpha_0$ e para a direita em $\alpha_1$ .  | 48 |
| 3.2  | O efeito de $\varphi$ em $\pi_1(S)$ .  | 48 |
| 3.3  | O automorfismo $f$ é definido como composição de torsões ao longo dos anéis $A_0, A_1$ e do disco $\Delta$ .   | 49 |
| 3.4  | O par de Penner em $S$ e o arco dual $\theta$ .  | 54 |
| 3.5  | A curva $\partial\Delta$ em $\partial H$ .   | 54 |
| 3.6  | À esquerda: $H_0$ com estrutura de alças determinada por um grafo. À direita: $H_0 \subseteq H_1$ deve ser visto como vizinhança do grafo.   | 57 |
| 3.7  | O padrão de interseção $D \cap D'$ em $D$ .  | 59 |
| 3.8  | $\Delta \cup \Delta'$ bordam uma bola  | 59 |
| 3.9  | O padrão de interseção $D \cap D'$ em $D'$ .   | 60 |
| 3.10 | Cortando $Q$ ao longo de $D$ obtém-se $Q'$ (caso 1).   | 60 |
| 3.11 | Cortando $Q$ ao longo de $D$ obtém-se $Q'$ (caso 2).   | 61 |
| 3.12 | O disco $\Delta'' \subseteq U \times \{1\}$ paralelo ao $\Delta'$ . Os casos (a) e (b) dependem de $\Delta'' \cap D^-$ .   | 61 |
| 3.13 | Orientação dos arcos em $\partial D'$ .  | 62 |
| 3.14 | O disco $\Delta'''$ usado para simplificar $D \cap D'$ .   | 62 |
| 3.15 | a) curva $C_0$ bordando disco $D_0 \subseteq H$ ; b) curva $C_1$ bordando disco $D_1 \subseteq H$ .  | 65 |
| 3.16 | a) curva $C_0$ bordando disco $D_0 \subseteq H$ ; b) curva $C_1$ bordando disco $D_1 \subseteq H$ ; c) o toro invariante.  | 66 |
| 4.1  | Um novo representante para $g$ , produzindo um fator de crescimento que não é minimal.   | 71 |
| 4.2  | A existência de um disco compressor implica que há um caminho regressor livre.   | 73 |
| 4.3  | O meio-disco compressor $(\Delta, \alpha', \beta)$ .   | 73 |
| 4.4  | A família de sela de índice $i$ na carta folheada $U_i$ .  | 76 |
| 4.5  | A representação, em $H_1$ , dos trechos de 1-alças de $H_0$ que, em $H_2$ , determinarão uma compressão.   | 79 |
| 4.6  | O disco $g^2(B)$ é compressível em $H_2 - H_0$ .   | 80 |
| 4.7  | O processo de dobra: a) o grafo original $\Gamma$ ; b) por subdivisão das arestas obtém-se $\Gamma'$ ; c) a dobra é realizada identificando $c^{-1}$ com $d$ , obtendo-se $\Gamma''$ . | 81 |
| 4.8  | O quadro dual: depois de realizado o down-move vemos que a laminação é compressível em $H_1 - H_0$ .   | 82 |
| 4.9  | Após realizada a diversion.  | 82 |
| 4.10 | O procedimento das cirurgias. Cada seta representa uma compressão ao bordo realizada ao longo de um meio-disco cortado de $D$ . As compressões são realizadas de forma equivariante    | 85 |
| 4.11 | Um disco compressor $D$ para $F_i$ que não é compressor para $F$   | 86 |
| 4.12 | a) e b) típicos discos bons; c) típico disco ruim.   | 88 |
| 4.13 | O caso em que $\Delta_i \subseteq In(F_i)$   | 89 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.14 | $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i)$  | 91  |
| 4.15 | O meio-disco $\Delta_i$ separando $\text{Out}(F_i)$   | 100 |
| 4.16 | $S'_i = S_i \cup \Delta_i$  | 101 |
| 4.17 | A escolha do arco $\alpha$ .  | 102 |
| 4.18 | Preparando a isotopia de $D^j$ .  | 102 |
| 4.19 | O grafo $\Gamma \subseteq H_0$ e $(\hat{\varphi})^{-1}(\Gamma) \subseteq H_0$ .   | 103 |
| 4.20 | O grafo $\Gamma \subseteq H_0$ e $\Gamma \subseteq H_1$ .   | 103 |
| 5.1  | a) Um disco $f(E_1)$ dual a uma 1-alça de $H_1$ , interceptando a 1-alça $\hat{e}_i$ de $H_0$ ; b) a operação que reduz $\lambda$ .   | 109 |
| 5.2  | Um disco tensor transversal $D'$ em $H_1$ .   | 111 |
| 5.3  | A estrutura de produto em $\hat{e}_i$ , onde $\Lambda$ é horizontal e $\Omega$ é vertical.  | 112 |
| 5.4  | a) o disco $D$ transversal a $\Lambda$ em $\hat{e}_i$ ; b) $D$ é feito vertical em uma vizinhança de uma folha $L$ ; c) $D$ é colocado em posição vertical em $\hat{e}_i$ . | 113 |
| 5.5  | A interseção $D \cap \hat{e}_i$ em $D$ .  | 114 |
| 5.6  | As duas possíveis posições relativas de $D_1, D_2$ .  | 115 |
| 5.7  | A cirurgia para simplificar o conjunto singular de $D$ em ambos os casos.   | 115 |
| 5.8  | A curva $\partial D$ separa um disco de um anel em $L$ .  | 116 |
| 5.9  | A construção de $D'$ .  | 117 |
| 5.10 | Um disco tensor transversal $D$ com $\partial D \subseteq \partial H_1$ .   | 117 |
| 5.11 | Após realizar a isotopia.   | 121 |
| 5.12 | A faixa $b_{\hat{e}}$ chegando sendo colada aos discos $D_{\hat{V}}$ .  | 129 |
| 5.13 | O grafo pode deixar de ser transversal às fibras de $N(\tau)$ perto de um vértice.  | 131 |