

## 4 Rotações no espaço

Este capítulo apresenta uma abordagem sobre o tópico de controle de rotações no espaço, usando os conceitos aprendidos com pêndulos nos capítulos anteriores e aplicando a um giroscópio.

Um corpo livre no espaço tem 6 graus de liberdade, 3 de translação e 3 de rotação. Os fenômenos oriundos da rotação são muito mais interessantes e a suspensão cardânica do corpo permite eliminar a translação e interferir minimamente na rotação. O aparato utilizado o Giroscópio de Magnus é construído com essa finalidade, pois os dois quadros que apresenta têm inércia muito pequena comparado ao corpo, que é um rotor. Para abranger muitas possibilidades este corpo pode ser alongado ou achatado além de poder se transformar de axisimétrico em não axisimétrico.

Este dispositivo pode ser usado para visualizar os efeitos de movimento dos quadros e reproduzir os movimentos caóticos gerados pelo arranjo das massas extras do rotor e dos acessórios. Mas ele não permite modificações de maior porte sem comprometer o projeto. Mas, estando garantida a validação experimental do modelo, pode-se incluir nestes atuadores entre os quadros para estudar como se comporta o sistema na sua configuração ativa.

E assim como no caso do pêndulo, primeiramente foi modelado o giroscópio com equações de movimento para em seguida incluir o controle.

### 4.1. Equacionamento do corpo em suspensão cardânica

Eliminada a translação, são apenas três ângulos cardânicos a definir as rotações possíveis. A inclusão de quadros com inércias não aumenta o número de variáveis pois os primeiros dois ângulos cardânicos do rotor, são usados para descrever o movimento dos quadros chamados de interno e externo.

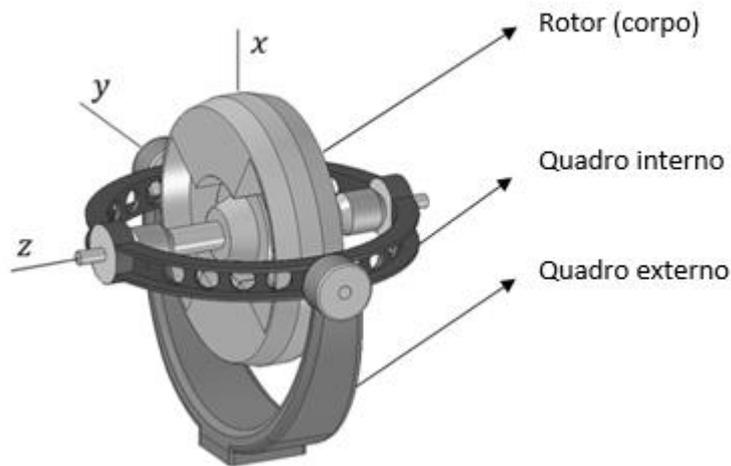


Figura 4.1 – Nome das partes do giroscópio

O quadro externo tem o eixo de rotação fixado na vertical nesta modelagem matemática. Uma maneira possível para obter as matrizes de orientação é defini-las com rotações sequenciais. Os ângulos cardânicos usam dois sistemas de referência intermediários. Em uma notação simplificada a sequência de rotações para o sistema é:

$$\begin{matrix}
 \mathbf{F} & \xrightarrow{\alpha(x)} & \mathbf{Q} & \xrightarrow{\beta(y')} & \mathbf{R} & \xrightarrow{\gamma(z'')} & \mathbf{S} \\
 (x, y, z) & & (x, y', z') & & (x'', y', z'') & & (x''', y''', z'')
 \end{matrix}$$

E conseqüentemente, as matrizes de rotação são:

$${}^F\mathbf{T}^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad {}^Q\mathbf{T}^R = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad {}^R\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema possui 3 partes, rotor, quadro interno e quadro externo, localizados de acordo com a Figura 4.1. Levando em conta atuadores entre os três corpos que compõem o sistema, eles agem nos eixos de rotação e podemos nomear cada torque como:

$T_{01}$  é o torque entre o quadro externo e o solo;

$T_{12}$  é o torque entre o quadro externo e o quadro interno;

$T_{23}$  é o torque entre o quadro interno e o rotor.

Além disso, quadros e o rotor possuem as seguintes matrizes de inércia, velocidades angulares, quantidades de movimento angular e torques aplicados.

Quadro externo (Corpo 1):

$${}^Q\mathbf{I}_0^{(1)} = I_x^{(1)} \quad {}^Q_F\boldsymbol{\omega}_Q = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^Q\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} T_{01} \\ -T_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^Q\mathbf{H}_O^{(1)} = {}^Q\mathbf{I}_0^{(1)} {}^Q_F\boldsymbol{\omega}_Q = I_x^{(1)} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

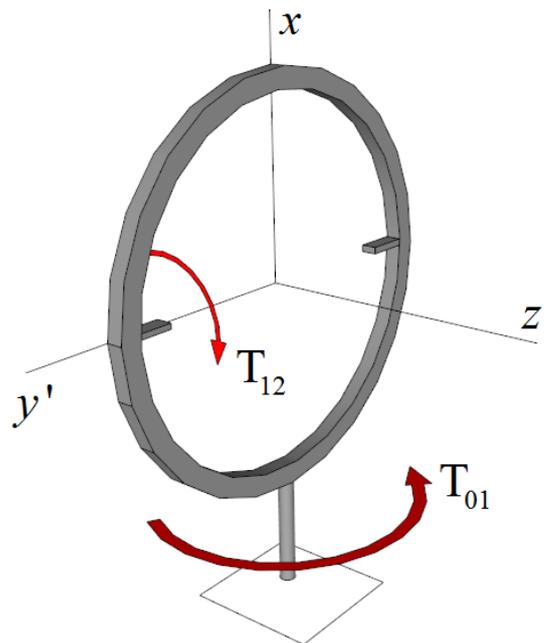


Figura 4.2 – Esquema de torques e o eixo do quadro externo

Quadro interno (Corpo 2), considerado axisimétrico em relação ao eixo x:

$${}^R\mathbf{I}_0^{(2)} = I_x^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad {}^R\boldsymbol{\omega}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^R\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{12} \\ -T_{23} \end{bmatrix}$$

$${}^R\boldsymbol{\omega}_R = {}^R\mathbf{T}_2 \cdot {}^Q\boldsymbol{\omega}_Q + {}^R\boldsymbol{\omega}_R = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (43)$$

$${}^R\mathbf{H}_O^{(2)} = {}^R\mathbf{I}_0^{(2)} {}^R\boldsymbol{\omega}_R = I_x^{(2)} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} / 2 \\ (\dot{\alpha} \sin \beta) / 2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

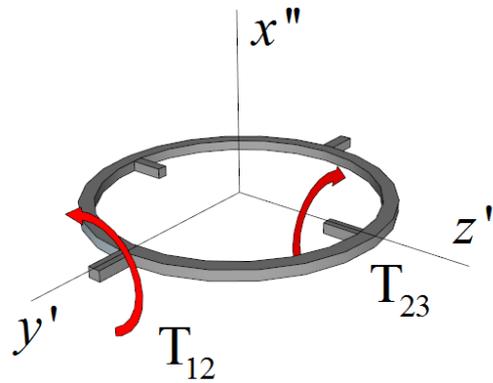


Figura 4.3 – Esquema dos torques e o eixo do quadro interno

Rotor (Corpo 3). Neste corpo considera-se a possibilidade de falta de axissimetria e do corpo ser alongado ou achatado:

$${}^S\mathbf{I}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} I_x^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & I_y^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & I_z^{(3)} \end{bmatrix} \quad {}^S\boldsymbol{\omega}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad {}^R\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{23} \end{bmatrix}$$

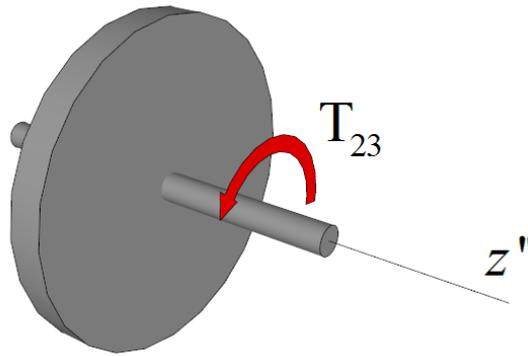


Figura 4.4 – Torque e eixo do rotor

As matrizes elementares de transformações de coordenadas  ${}^F\mathbf{T}^Q$ ,  ${}^Q\mathbf{T}^R$ ,  ${}^R\mathbf{T}^S$  são simples de escrever e por serem ortogonais, sua inversa é dada pela matriz transposta. Optamos por escrever o problema no SR (R) para toda a análise da dinâmica. As matrizes de inércia serão normalizadas pela inércia polar do rotor ( $I_z^{(3)}$ ) introduzindo-se para tanto os termos adimensionais:

$$\mu_E = \frac{I_x^{(1)}}{I_z^{(3)}} \quad \mu_A = \frac{I_x^{(2)}}{I_z^{(3)}} \quad \mu_1 = \frac{I_x^{(3)}}{I_z^{(3)}} \quad \mu_2 = \frac{I_y^{(3)}}{I_z^{(3)}}$$

$$\text{Bem como } \bar{T}_{01} = \frac{T_{01}}{I_z^{(3)}}, \bar{T}_{12} = \frac{T_{12}}{I_z^{(3)}} \text{ e } \bar{T}_{23} = \frac{T_{23}}{I_z^{(3)}}$$

A matriz de inércia do rotor calculada em (R) vale:

$${}^R\mathbf{I}_0 = {}^R\mathbf{T}^S {}^S\mathbf{I}_0 {}^S\mathbf{T}^R \quad (45)$$

$${}^R\mathbf{I}_0^{(3)} = I_z \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Onde:

$$A = \mu_1 \cos^2(\gamma) + \mu_2 \sin^2(\gamma) \quad (47)$$

$$B = (\mu_1 - \mu_2) \sin(\gamma) \cos(\gamma) \quad (48)$$

$$C = \mu_1 \sin^2(\gamma) + \mu_2 \cos^2(\gamma) \quad (49)$$

Por uma escolha adequada de eixos pode-se especificar que sempre  $\mu_1 \geq \mu_2$ .

Corpos axissimétricos se caracterizam por  $\mu_1 = \mu_2$  e corpos sem axissimetria por  $\mu_1 \neq \mu_2$ . O rotor será achatado quando  $1 > \mu_1 > \mu_2$  e alongado quando  $\mu_1 > \mu_2 > 1$ . A situação particular do corpo estar girando em torno do seu eixo intermediário de inércia corresponde a  $\mu_1 > 1 > \mu_2$  o que leva a uma instabilidade natural do movimento em um corpo rígido.

A velocidade angular absoluta do rotor no SR(R) é:

$${}^R\boldsymbol{\omega}_S = {}^R\mathbf{T}_{FQ}^Q \boldsymbol{\omega}_Q + {}^R\boldsymbol{\omega}_R + {}^R\boldsymbol{\omega}_S = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (50)$$

E a respectiva quantidade de movimento angular também em (R):

$${}^R\mathbf{H}_0^{(3)} = {}^R\mathbf{I}_0^{(3)} \cdot {}^R\boldsymbol{\omega}_S = I_z^{(3)} \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} = I_z^{(3)} \begin{bmatrix} A\dot{\alpha} \cos \beta + B\dot{\beta} \\ B\dot{\alpha} \cos \beta + C\dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (51)$$

As equações de Euler vão relacionar os torques ao movimento; além dos atuadores que são responsáveis pelos torques nos eixos de rotação teremos os momentos de reação em cada uma das ligações entre os 3 corpos. Cada corpo terá a sua equação de movimento. Seja A o ponto de contato entre a base e o quadro externo, e B/B' os pontos de apoio do quadro externo no interno:

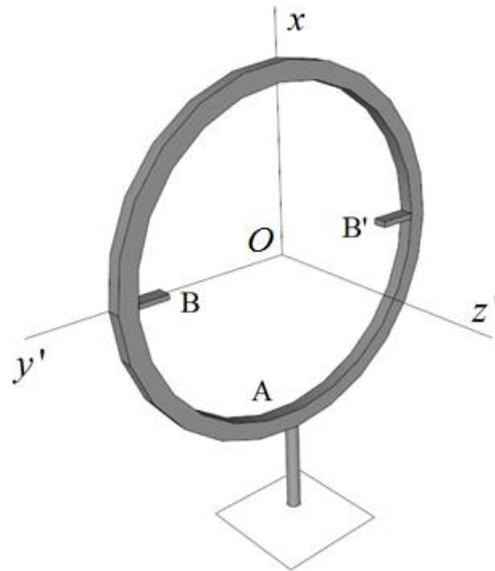


Figura 4.5 – Pontos do quadro externo

Os momentos que surgem em A:  $M_{Ay}, M_{Az}$

E os momentos em B/B':  $M_{Bx}, M_{Bz}$

Usando a Lei de Euler para o ponto fixo O escrita em SR(Q)

$${}^Q\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} T_{01} + M_{Bx} \\ -T_{12} + M_{Ay} \\ M_{Az} + M_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x^{(1)} \ddot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Quando consideramos o quadro interno e sendo C/C' o ponto de apoio do quadro interno no rotor:

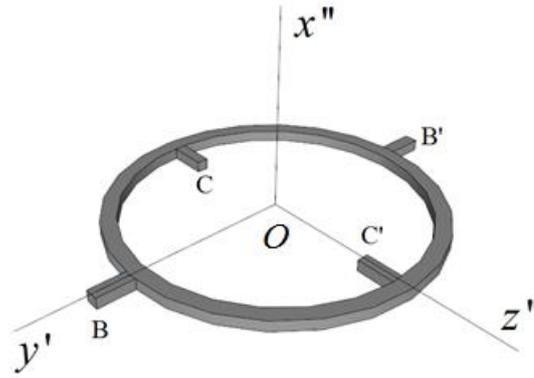


Figura 4.6 – Pontos do quadro interno

Assim, temos os momentos:

No SR(Q):  $M_{Bx}, M_{Bz}$

No SR(R):  $M_{Cx}, M_{Cy}$

E ao usar a Lei de Euler no SR(R), temos:

$${}^R \mathbf{M}_2 = {}^R \dot{\mathbf{H}}_O^{(2)} + {}^R \tilde{\boldsymbol{\omega}}_R {}^R \mathbf{H}_O^{(2)} \quad (53)$$

$${}^R \mathbf{M}_2 = {}^R \mathbf{T}^Q \begin{bmatrix} -M_{Bx} \\ T_{12} \\ -M_{Bz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Cx} \\ M_{Cy} \\ -T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{Bx} \cos \beta + M_{Bz} \sin \beta + M_{Cx} \\ T_{12} + M_{Cy} \\ -M_{Bx} \sin \beta - M_{Bz} \cos \beta - T_{23} \end{bmatrix} \quad (54)$$

$${}^R \dot{\mathbf{H}}_O^{(2)} = I_x^{(2)} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \\ \ddot{\beta} / 2 \\ (\ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta) / 2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$${}^R \tilde{\boldsymbol{\omega}}_R {}^R \mathbf{H}_O^{(2)} = I_x^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\alpha} \sin \beta & \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} \sin \beta & 0 & -\dot{\alpha} \cos \beta \\ -\dot{\beta} & \dot{\alpha} \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \frac{\dot{\beta}}{2} \\ \frac{(\dot{\alpha} \sin \beta)}{2} \end{bmatrix} = I_x^{(2)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta}{2} \\ -\frac{\dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta}{2} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
{}^R \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} -M_{Bx} \cos \beta + M_{Bz} \sin \beta + M_{Cx} \\ T_{12} + M_{Cy} \\ -M_{Bx} \sin \beta - M_{Bz} \cos \beta - T_{23} \end{bmatrix} = \\
&= I_x^{(2)} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \\ \ddot{\beta} / 2 \\ (\ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta) / 2 \end{bmatrix} + I_x^{(2)} \begin{bmatrix} 0 \\ (\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta) / 2 \\ -(\dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta) / 2 \end{bmatrix} = \\
&= I_x^{(2)} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \\ (\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta) / 2 \\ (\ddot{\alpha} \sin \beta) / 2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{57}$$

Finalmente no rotor, os torques atuantes são:

$${}^R \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} -M_{Cx} \\ -M_{Cy} \\ T_{23} \end{bmatrix} = {}^R \dot{\mathbf{H}}_O^{(3)} + {}^R \tilde{\boldsymbol{\omega}}_R {}^R \mathbf{H}_O^{(3)} \tag{58}$$

$${}^R \dot{\mathbf{H}}_O^{(3)} = I_z^{(3)} \begin{bmatrix} -2B\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta + A\ddot{\alpha} \cos \beta - A\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + (A-C)\dot{\beta}\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} \\ (A-C)\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta + B\ddot{\alpha} \cos \beta - B\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + 2B\dot{\beta}\dot{\gamma} + C\ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta + \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
{}^R \tilde{\boldsymbol{\omega}}_R {}^R \mathbf{H}_O^{(3)} &= I_z^{(3)} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\alpha} \sin \beta & \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} \sin \beta & 0 & -\dot{\alpha} \cos \beta \\ -\dot{\beta} & \dot{\alpha} \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\dot{\alpha} \cos \beta + B\dot{\beta} \\ B\dot{\alpha} \cos \beta + C\dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \\
&= I_z^{(3)} \begin{bmatrix} -B\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - C\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}\dot{\gamma} \\ A\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + B\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta - \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta \\ -A\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta - B\dot{\beta}^2 + B\dot{\alpha}^2 \cos \beta + C\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
{}^R \mathbf{M}_3 &= \begin{bmatrix} -M_{Cx} \\ -M_{Cy} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \\
&= I_z^{(3)} \begin{bmatrix} -2B\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta + A\ddot{\alpha} \cos \beta - A\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + (A-C)\dot{\beta}\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} \\ (A-C)\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta + B\ddot{\alpha} \cos \beta - B\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + 2B\dot{\beta}\dot{\gamma} + C\ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta + \ddot{\gamma} \end{bmatrix} + \\
&I_z^{(3)} \begin{bmatrix} -B\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - C\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}\dot{\gamma} \\ A\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + B\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta - \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta \\ -A\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta - B\dot{\beta}^2 + B\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + C\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (61)
\end{aligned}$$

Isso nos leva a um sistema com 9 equações (3 para cada sub sistema) com 3 variáveis (se controlarmos  $T_{01}$ ,  $T_{12}$  e  $T_{23}$ ).

No quadro externo:

$$T_{01} + M_{Bx} = I_x^{(1)} \ddot{\alpha} \quad (62)$$

$$-T_{12} + M_{Ay} = 0 \quad (63)$$

$$M_{Az} + M_{Bz} = 0 \quad (64)$$

Observe-se que os valores das componentes acima são todos escritos no SR (Q), lembrando que  $T_{12}$  é invariante entre (Q) e (R).

No quadro interno:

$$-M_{Bx} \cos \beta + M_{Bz} \sin \beta + M_{Cx} = I_x^{(2)} [\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta] \quad (65)$$

$$T_{12} + M_{Cy} = I_x^{(2)} [\ddot{\beta} / 2 + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta] \quad (66)$$

$$-M_{Bx} \sin \beta - M_{Bz} \cos \beta - T_{23} = I_x^{(2)} [\frac{1}{2} (\ddot{\alpha} \sin \beta)] \quad (67)$$

E no rotor:

$$\begin{aligned}
\frac{-M_{Cx}}{I_z^{(3)}} &= A\ddot{\alpha} \cos \beta + B\ddot{\beta} - (A+C-1)\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta - 2B\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta + \\
&(A-C+1)\dot{\beta}\dot{\gamma} - B\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\frac{-M_{Cy}}{I_z^{(3)}} = B\ddot{\alpha} \cos \beta + C\ddot{\beta} + (A - C - 1)\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta + 2B\dot{\beta}\dot{\gamma} + (A - 1)\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta \quad (69)$$

$$\frac{T_{23}}{I_z^{(3)}} = \ddot{\alpha} \sin \beta + \ddot{\gamma} + (C - A + 1)\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos^2 \beta - B\dot{\beta}^2 \quad (70)$$

Após um certo algebrismo, podemos simplificar essas 9 equações em 3 equações para os atuadores.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{01} = & [\mu_E + (\cos^2 \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \beta) \mu_A + A \cos^2 \beta + \sin^2 \beta] \ddot{\alpha} + B\ddot{\beta} \cos \beta + \ddot{\gamma} \sin \beta - \\ & [\mu_A + 2(A - 1)] \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - 2B\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos^2 \beta + (A - C + 1) \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta - B\dot{\beta}^2 \sin \beta \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{12} = & B\ddot{\alpha} \cos \beta + (C + \frac{\mu_A}{2}) \ddot{\beta} + (A - C - 1) \dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta + \\ & + 2B\dot{\beta}\dot{\gamma} + (A - 1 + \frac{\mu_A}{2}) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (72)$$

$$\bar{T}_{23} = \ddot{\alpha} \sin \beta + \ddot{\gamma} + (C - A + 1) \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta + B\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta - B\dot{\beta}^2 \quad (73)$$

Como forma de testar o sistema, ele foi simulado no MATLAB, com várias saídas de posição, velocidades e energias, e uma visualização em 3D do corpo em suspensão cardânica para comparação.

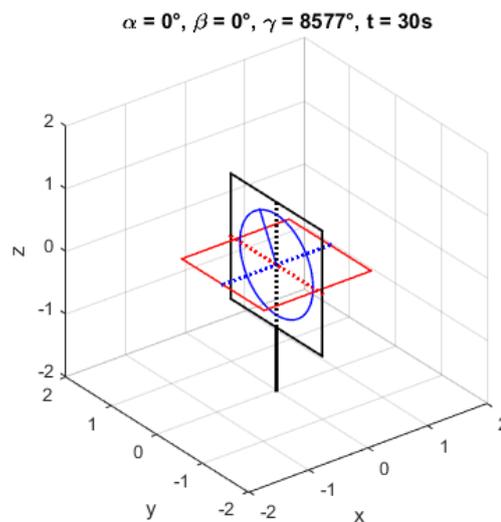


Figura 4.7 – Visualização do giroscópio criada no MATLAB

Na simulação foram atribuídos os seguintes valores para alguns parâmetros.

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>
$\mu_E$	0,25
$\mu_A$	0,12
$\dot{\gamma}_0$	5 [rad/s]

Tabela 4.1 – Parâmetros do modelo do giroscópio

Os demais valores de ângulos e velocidades iniciais foram mantidos em zero, e alterados em cada teste. Os valores de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  também são alterados de acordo com a composição da inércia do corpo em cada situação. Como o caso axissimétrico ( $\mu_1 = \mu_2$ ) é sempre bem comportado, fez-se as simulações de comparação com o corpo real de acordo com 3 casos não axissimétricos.

#### 4.1.1. Corpo achatado

O corpo achatado se caracteriza pela distribuição de inércias do rotor ser da forma  $1 > \mu_1 > \mu_2$ . Para este teste, a inércia do eixo z é maior que as outras inércias no rotor, escolhendo-se  $\mu_1 = 0,77$  e  $\mu_2 = 0,59$ .

Para todas condições iniciais nulas, exceto  $\dot{\gamma}_0$  que é igual, fez a simulação do sistema.

Sem condições iniciais, foi observada a estabilidade do sistema onde o rotor gira livremente (Figura 4.8), porém ao se aplicar uma pequena condição inicial de  $\dot{\beta}_0 = 0,1$  rad/s, os quadros do sistema passam a oscilar continuamente (Figura 4.9).

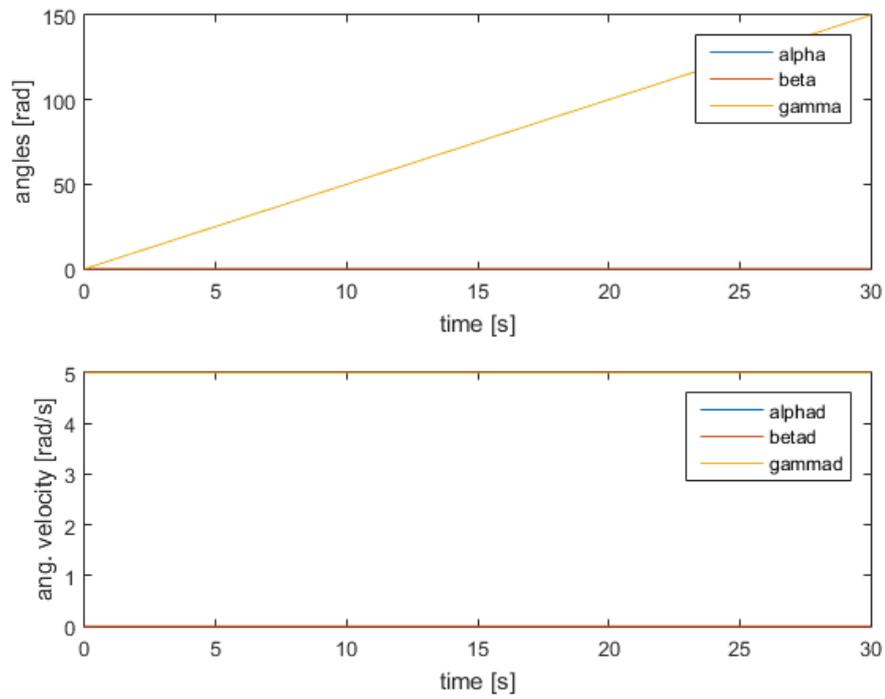


Figura 4.8 – Teste do corpo achatado com condições iniciais nulas, exceto a velocidade do rotor

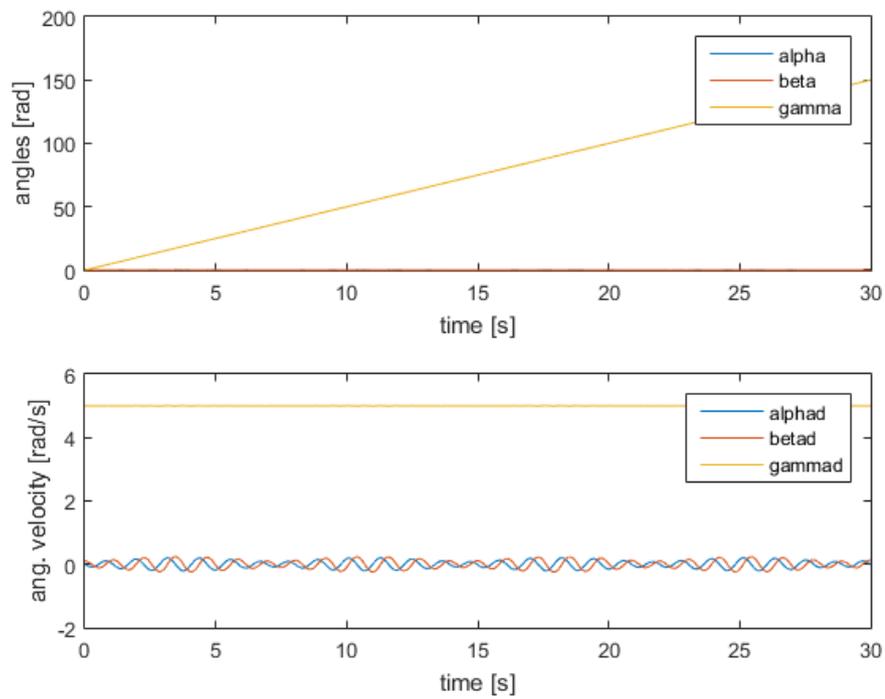


Figura 4.9 – Teste do corpo achatado com condição inicial de  $\dot{\beta}_0 = 0,1 \text{ rad/s}$

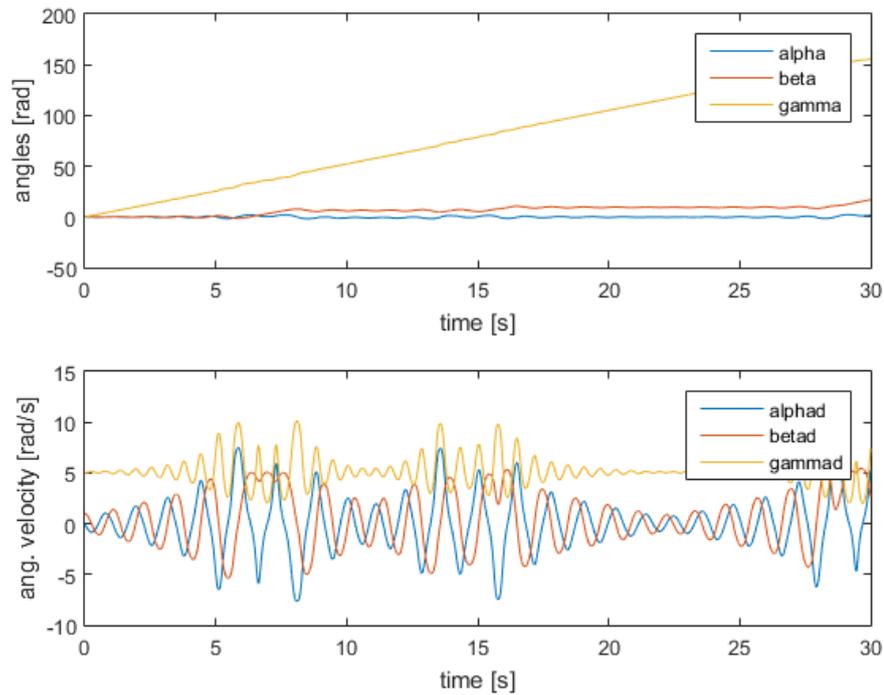


Figura 4.10 – Teste do corpo achatado com condição inicial de  $\dot{\beta}_0 = 1$  rad/s

O efeito mais surpreendente aparece quando a condição inicial é grande o suficiente para tirar o sistema da estabilidade e causar um movimento caótico, e isso foi feito com  $\dot{\beta}_0 = 1$  rad/s. Os três comportamentos vistos nos gráficos de fato já foram vistos ao usar o giroscópio real, confirmando o que se esperava.

#### 4.1.2. Corpo alongado

Neste caso em que a relação de inércias é  $\mu_1 > \mu_2 > 1$ , a inércia no eixo z é a menor das 3 inércias, no rotor, e para este teste foi escolhido  $\mu_1 = 1,23$  e  $\mu_2 = 1,09$ , e a condição inicial de  $\dot{\beta}_0 = 1$  rad/s.

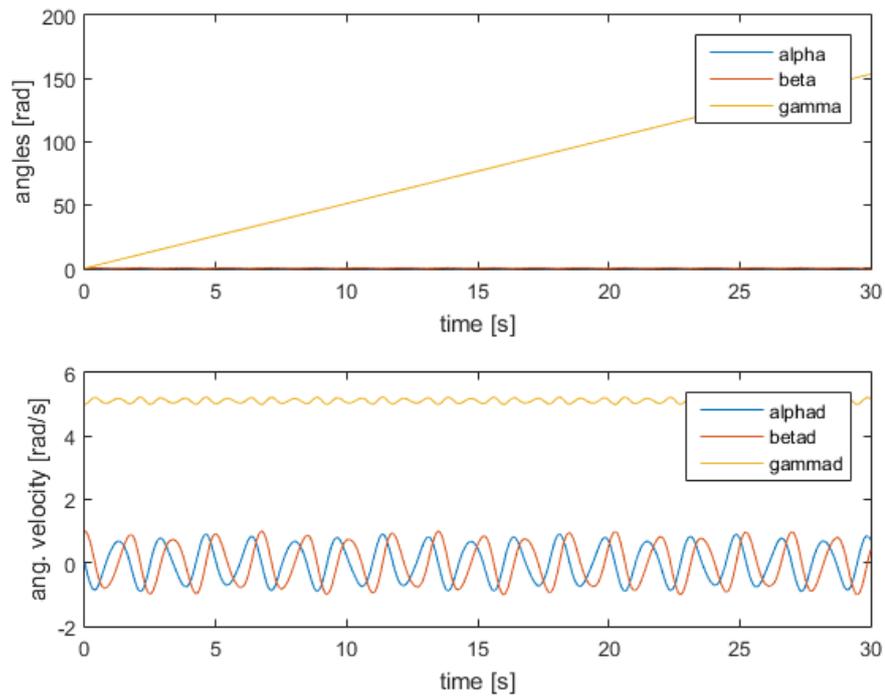


Figura 4.11 – Teste do corpo alongado com condição inicial  $\dot{\beta}_0 = 1$  rad/s.

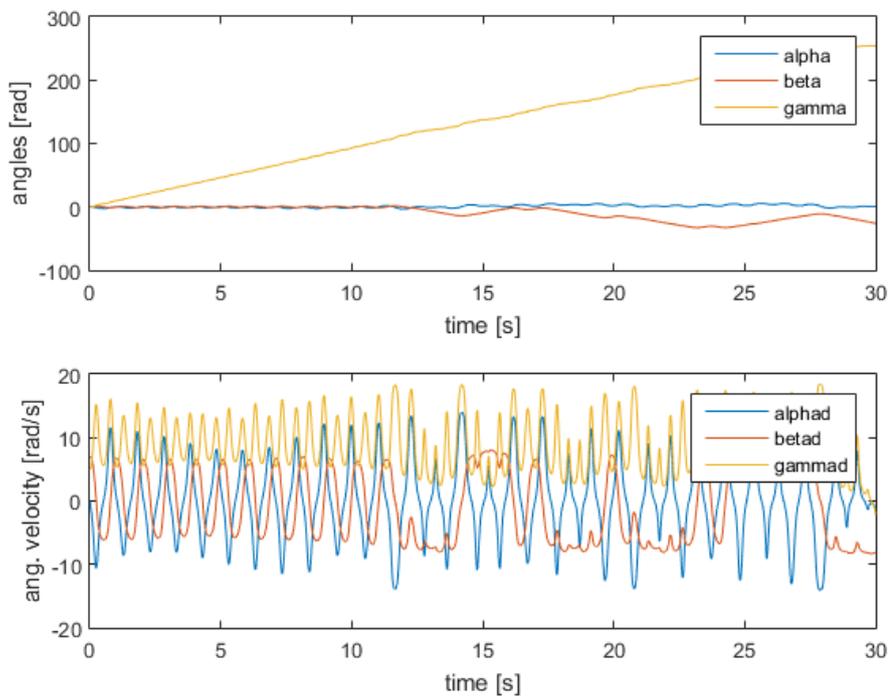


Figura 4.12 – Teste do corpo alongado com condição inicial  $\dot{\beta}_0 = 7$  rad/s.

Este caso é bem similar ao corpo achatado, porém é mais difícil de tirar o sistema da estabilidade, precisando de uma condição inicial bem maior para provocar um movimento caótico similar ao caso do corpo achatado.

No caso, uma condição inicial que tirou o sistema da estabilidade foi  $\dot{\beta}_0 = 7$  rad/s, que é bem superior ao valor do caso anterior. E mais uma vez o sistema se comportou de forma similar ao giroscópio real.

#### 4.1.3. Corpo com rotação instável

Para este caso onde a relação das inércias é  $\mu_1 > 1 > \mu_2$ , o momento de inércia no eixo z passa a ser um valor intermediário entre as outras duas, e foi escolhido os valores  $\mu_1 = 1,23$  e  $\mu_2 = 0,59$ , e a condição inicial de  $\dot{\beta}_0 = 0,1$  rad/s.

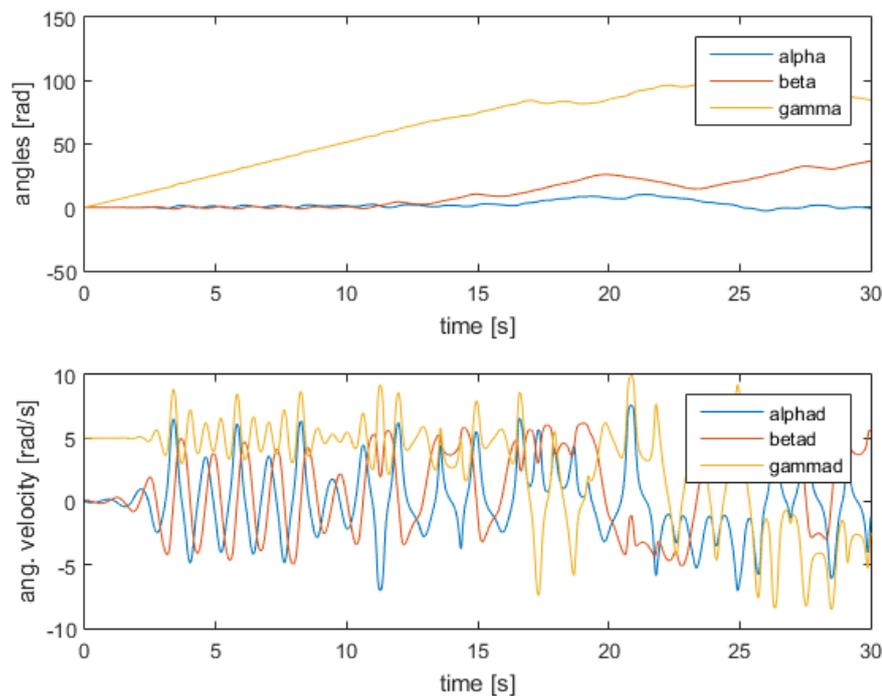


Figura 4.13 – Teste do corpo criticamente instável com condição inicial  $\dot{\beta}_0 = 0,1$  rad/s

Para esta simulação do corpo criticamente instável, a menor condição inicial que mova um dos quadros fora do estado estável nesse sistema (com as velocidades nulas) faz com que o sistema entre num movimento caótico. Outra

vez se observou a similaridade da simulação com o giroscópio de bancada, o que demonstra que o sistema está bem condizente com a realidade.

## 4.2. Controle desenvolvido

Nos capítulos anteriores foram estudados métodos de controle para sistemas pendulares de injeção e retirada de energia. No presente capítulo estuda-se o comportamento de um corpo no espaço, modelado como um Giroscópio de Magnus na forma de um corpo em suspensão cardânica, a partir de três equações diferenciais que descrevem a sua dinâmica, e testando esse modelo de acordo com as três composições de inércia possíveis do rotor.

Deseja se controlar os quadros do giroscópio a fim de cessar o movimento destes quadros, porém sem interferir muito no corpo mais interno, o rotor. Essa atuação será por meio de torques internos entre os elementos do giroscópio, chamados de  $T_{01}$  e  $T_{12}$ . O fato de usar forças internas do sistema faz a relação com a atuação nos pêndulos vistos nos casos anteriores, e é o ponto principal desta tese. Uma das principais vantagens de sistemas com atuação e medição embarcada é a possibilidade de monitoramento remoto, o que torna o acompanhamento de tarefas muito mais fáceis.

Levando-se em conta o caso não-axisimétrico, que é o caso em que acaba produzindo um efeito caótico na dinâmica do giroscópio, pensamos numa forma de controlar este movimento aplicando as mesmas leis de controle usadas anteriormente, guiando o sistema para a estabilidade. Propomos um caso onde um giroscópio tem o rotor não-axisimétrico rodando numa velocidade constante  $\Omega$  e é atingido por uma perturbação que gera uma mudança na dinâmica do sistema e conseqüentemente uma mudança nos ângulos. Nesse tempo após a perturbação aplicada, quer-se atuar apenas nos quadros de modo a reduzir a variação dos seus ângulos enquanto mantem-se a velocidade do rotor constante ou com uma variação mínima.

Neste caso, usam-se 2 atuadores elétricos que aplicam torques de controle em dois pontos, um entre o chão e o quadro externo, e outro entre o quadro externo e o interno.

Por tratarmos de dois ângulos ao mesmo tempo neste caso, a maneira como se atua nos quadros pode ser feita de várias formas, como no caso do controle

não-linear usar controlar um ângulo do quadro que se controla e a velocidade do outro.

Infelizmente, a aplicação do controle se restringe apenas ao modelo teórico, já que não há como implementar esses modelos de controle no giroscópio de real. Entretanto, como se trata de uma simulação, abre-se portas para descartar outras perturbações como o atrito entre os quadros e a resistência no ar, que aproxima o sistema de fato para um corpo solto no espaço.

#### 4.2.1. Primeiro controle desenvolvido – não linear simples

Como primeira forma de controlar o sistema com o rotor não-axisimétrico, propôs-se controlar apenas o quadro externo. Ou seja:

$$T_{01} = k_1 \cdot \alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (74)$$

$$T_{12} = 0 \quad (75)$$

Para isso, foram testadas as seguintes condições iniciais em todos os seguintes testes:

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>
$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$	0 [rad]
$\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$	varia nos testes
$\dot{\gamma}_0$	5 [rad/s]
$k_1$	1
$k_2$	1

Tabela 4.2 – Condições iniciais dos testes

Com  $\dot{\alpha}_0 = 1$  rad/s e  $\dot{\beta}_0 = 0$  rad/s:

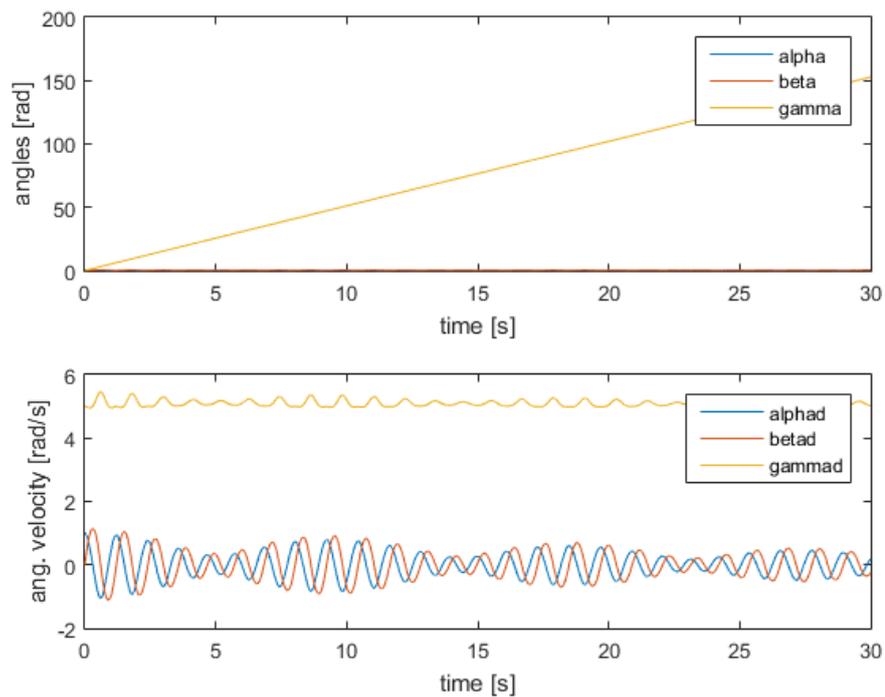


Figura 4.14 – Teste do controle em  $\alpha$  e condição inicial  $\dot{\alpha}_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\beta}_0 = 0 \text{ rad/s}$

Para este caso, pôde-se ver uma certa atenuação na oscilação das velocidades angulares dos quadros, enquanto a velocidade angular do rotor variou muito pouco.

Com  $\dot{\beta}_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\alpha}_0 = 0 \text{ rad/s}$ :

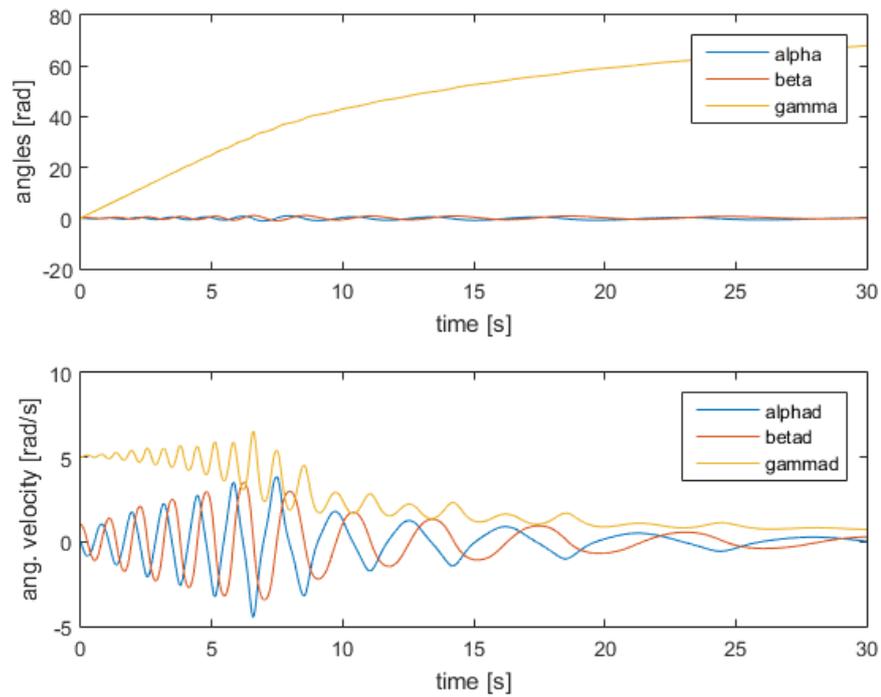


Figura 4.15 – Teste do controle em  $\alpha$  e condição inicial  $\dot{\beta}_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\alpha}_0 = 0 \text{ rad/s}$

E neste segundo caso, viu-se uma notória redução na velocidade de todos os ângulos, o que já descarta este controle da seleção que se quer fazer.

Para um teste seguinte pode-se atuar nos dois quadros, por  $T_{12}$ , lembrando que a reação do torque aplicado irá para o quadro externo:

$$T_{01} = 0 \quad (76)$$

$$T_{12} = k_2 \cdot \beta \cdot \dot{\beta} \quad (77)$$

Com  $\dot{\alpha}_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\beta}_0 = 0 \text{ rad/s}$ :

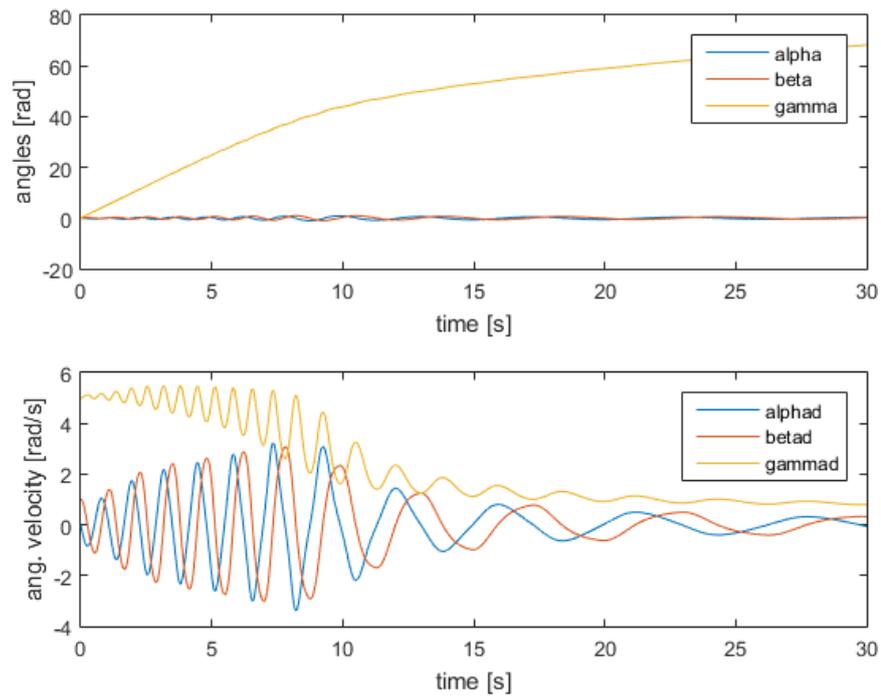


Figura 4.16 – Teste do controle em  $\beta$  e condição inicial  $\dot{\alpha}_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\beta}_0 = 0 \text{ rad/s}$

Da mesma forma que o segundo controle testado, este terceiro teste não se saiu bem por reduzir todos os ângulos.

Com  $\dot{\beta}_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\alpha}_0 = 0 \text{ rad/s}$ :

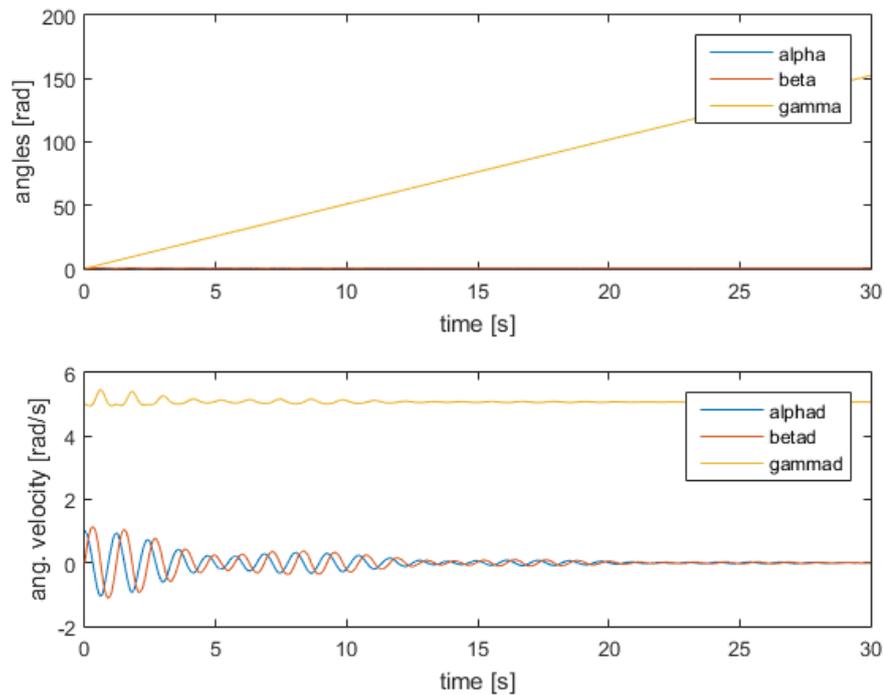


Figura 4.17 – Teste do controle em  $\beta$  e condição inicial  $\dot{\beta}_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\alpha}_0 = 0 \text{ rad/s}$

Finalmente, para este quarto e último teste o resultado foi similar ao primeiro, o que sugere que a atuação no ângulo em que ocorre a perturbação se mostrou bem mais eficiente.

Considerando as quatro simulações, pode-se ver que dependendo da condição inicial o resultado do controle pode ser bom ou não. O resultado ruim do controle seria quando ele reduz muito a velocidade do rotor, e analogamente, um resultado bom é quando a velocidade do rotor se reduz pouco e as outras velocidades dos quadros se reduzem a zero. E seguindo essa ideia, o melhor resultado obtido foi quando se teve uma condição inicial em um dos quadros, e a atuação do controle no mesmo quadro.

A princípio pode-se pensar que essa escolha já controla bem o sistema, porém isso pode ser verdade quando se conhece a condição inicial, e se consiga escolher em qual quadro atuar. Nos casos que não se conhece como o sistema iniciou, foi sugerida uma composição dos dois controles simples, chamado de controle não linear composto.

#### 4.2.2. Segundo controle desenvolvido – não linear composto

Saber a condição que tirou o sistema da estabilidade nem sempre é conhecida, então como forma de controlar o sistema independente disto foi proposta uma forma de controle que mescla os dois melhores resultados anteriores. Ou seja:

$$T_{01} = k_1 \cdot \alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (78)$$

$$T_{12} = k_2 \cdot \beta \cdot \dot{\beta} \quad (79)$$

Como condições iniciais, usou-se:

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>
$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$	0 [rad]
$\dot{\alpha}_0$	0 [rads/s]
$\dot{\beta}_0$	1 [rad/s]
$\dot{\gamma}_0$	5 [rad/s]

Tabela 4.3 – Condições iniciais dos testes

Além destes valores, foi considerado  $\mu_1 = 0,77$  e  $\mu_2 = 0,59$  para fazer esta simulação, e foram obtidos os gráficos de deslocamentos e velocidades:

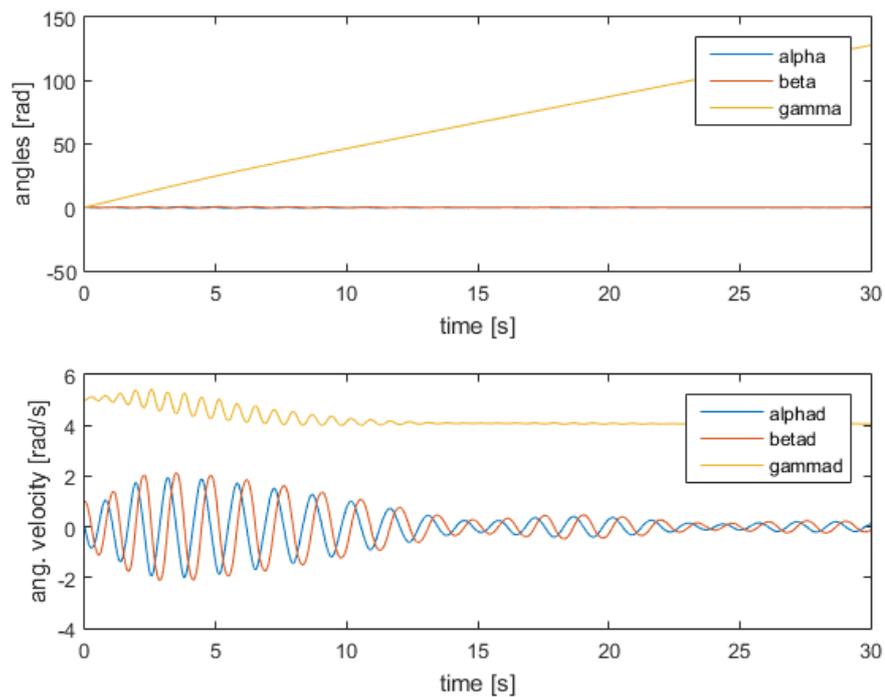


Figura 4.18 – Teste do controle não linear composto, atuando em 2 s

O controle com atuação em ambos quadros foi eficiente em reduzir seus movimentos, e reduziu em cerca de 20% da velocidade inicial do rotor. Porém esse ponto abriu questões para o instante de atuação do controle.

Por se tratar de um sistema dinâmico, a variação de energia no sistema ao longo do tempo é algo interessante e que se deve levar em conta. Para isso, foram testados outros instantes (que foram escolhidos aleatoriamente) de atuação do controle, como  $t = 8$  (Figura 4.19) s e  $t = 12$  s (Figura 4.20), por exemplo.

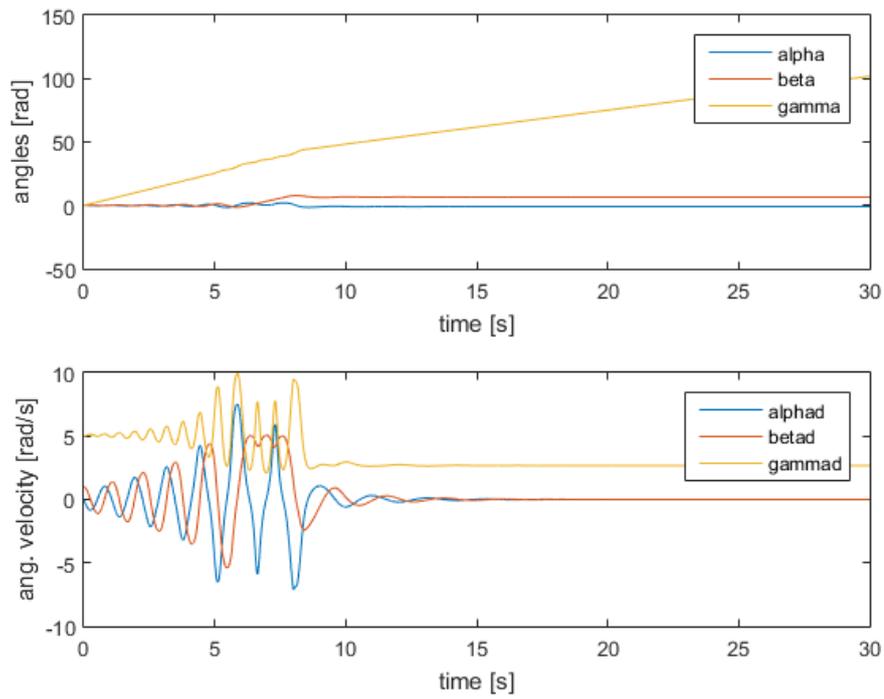


Figura 4.19 – Teste do controle não linear composto, atuando em 8 s

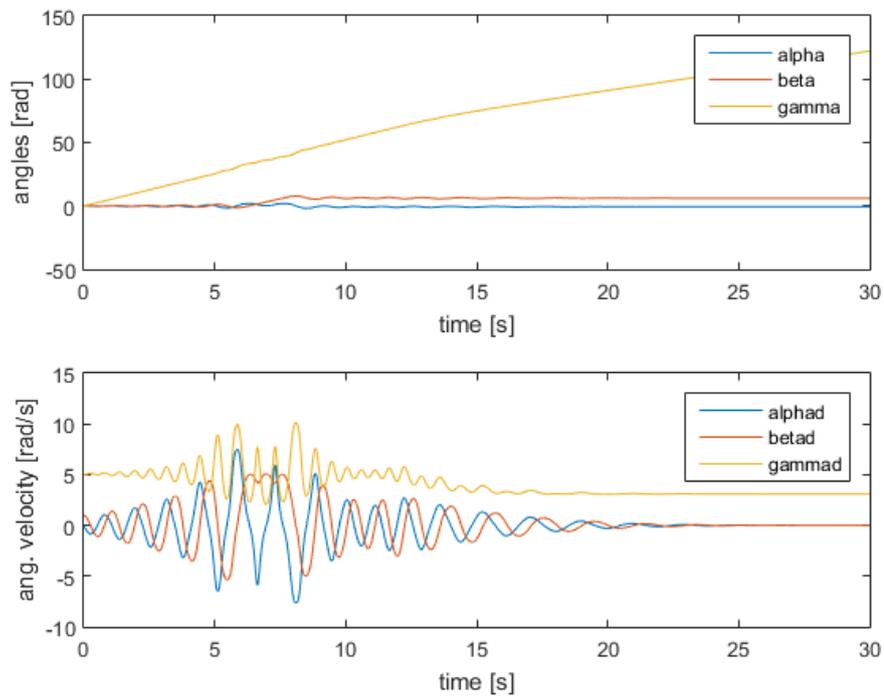


Figura 4.20 – Teste do controle não linear composto, atuando em 12 s

Quando se muda apenas o tempo em que se atua no controle para outros instantes como  $t = 8$  s e  $t = 12$  s segundos, houve uma redução de 48% e 40% respectivamente da velocidade inicial do rotor.

As reduções na velocidade do rotor levaram então a se analisar as energias do sistema ao longo do tempo. O sistema sem atuação tem uma interessante transferência das energias do rotor para os quadros e para o rotor de novo.

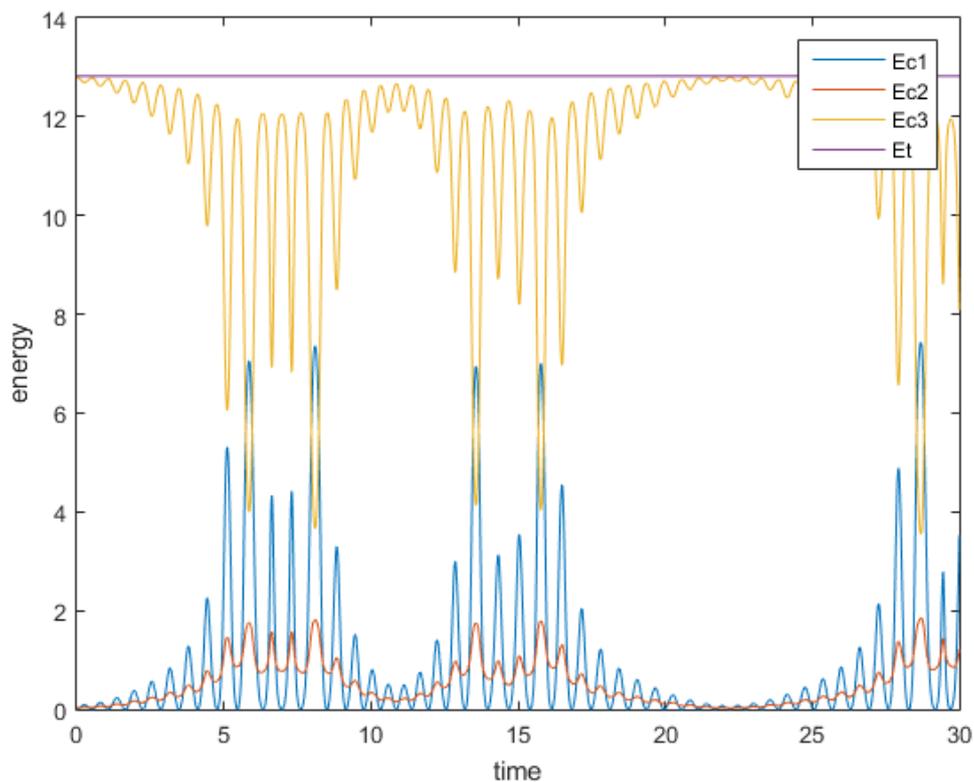


Figura 4.21 – Energias nos quadros e no rotor ao longo da simulação (sem atuação)

As energias se transferem entre os quadros, e é interessante ver que em aproximadamente  $t = 23$  s a energia está concentrada quase que integralmente no rotor. Os tempos simulados anteriormente de 2, 8 e 12 segundos a energia está distribuída entre o rotor e os quadros.

Para verificar o efeito do instante de atuação, foram feitas duas simulações que mostram a velocidade final do rotor e a energia final do rotor, ambos ao final da simulação (em  $t = 30$  s) de acordo com o instante da simulação em que se atuou no controle.

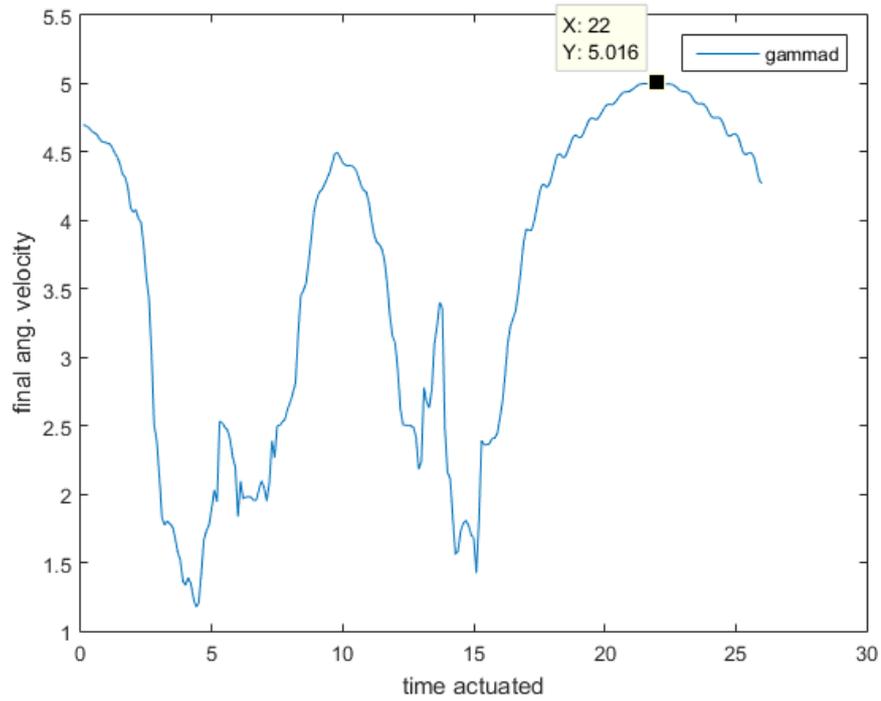


Figura 4.22 – Velocidade final do rotor atuando em um determinado instante

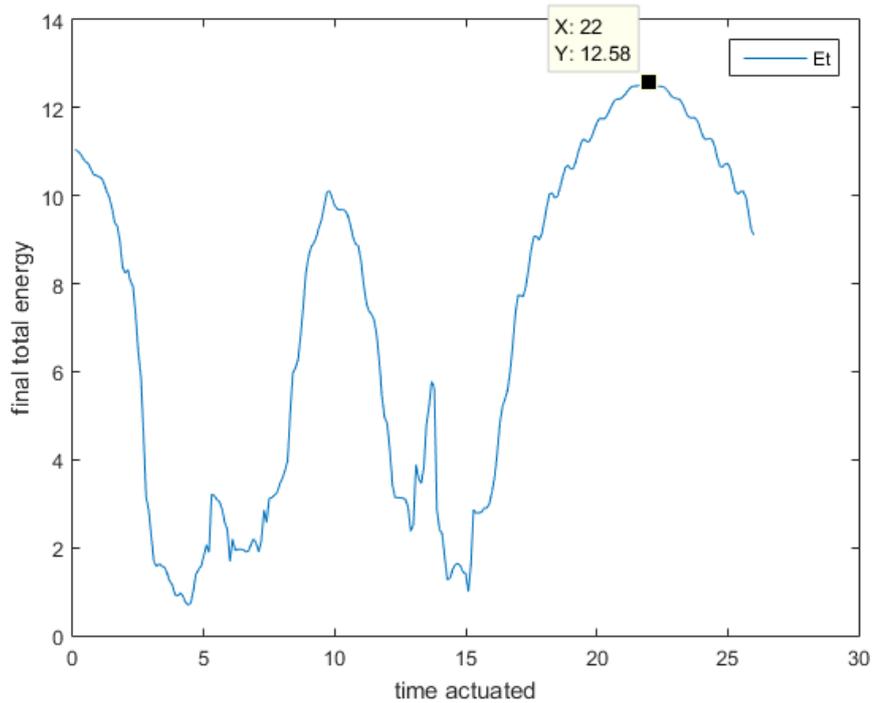


Figura 4.23 – Energia total do rotor atuando em um determinado instante

Observando os gráficos acima, é possível perceber que há uma leve similaridade entre o gráfico da energia ao longo do tempo e sem atuação visto na Figura 4.21 e a da energia final do rotor atuando em determinados instantes pela Figura 4.23. Atuando justamente no ponto de maior energia do rotor (visto como  $E_{c3}$  na Figura 4.21), resulta num pequeno ganho de velocidade final dele, aumentando de 5 rad/s para 5,016 rad/s (Figura 4.22).

Por cálculos, viu-se que a energia do sistema apenas com o rotor girando e sem condições iniciais é de 12,5 Nm, e aplicando a condição inicial a energia do sistema vai para 12,82 Nm. Atuando no controle em 22 s, além de anular a energia nos quadros do giroscópio, o controle transfere uma pequena parte dessa energia inicial para o rotor, aumentando consequentemente sua velocidade.

O trabalho dos atuadores é o responsável por diminuir a energia do sistema.

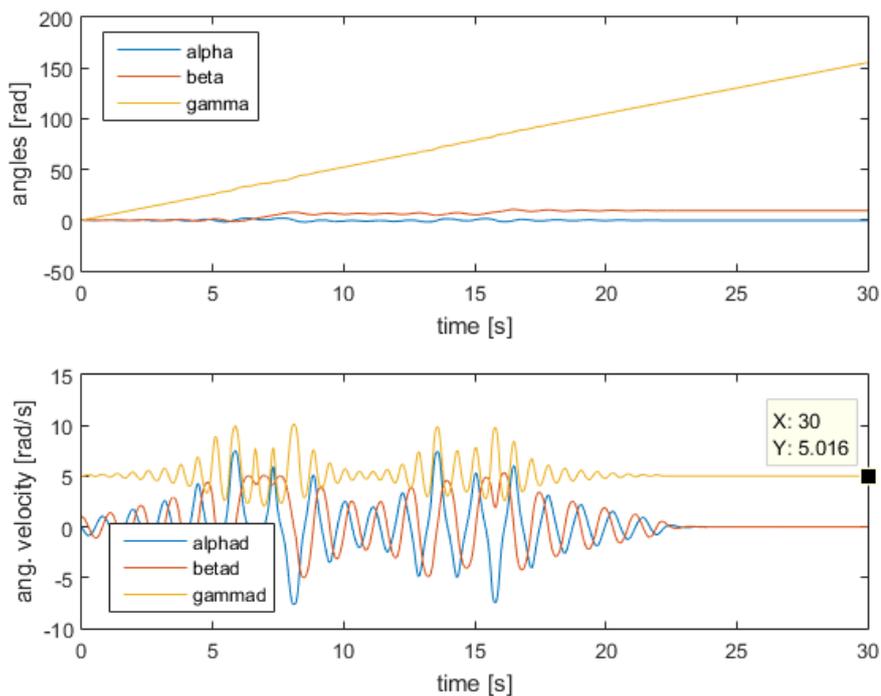


Figura 4.24 – Teste do controle não linear composto, atuando em 22 s

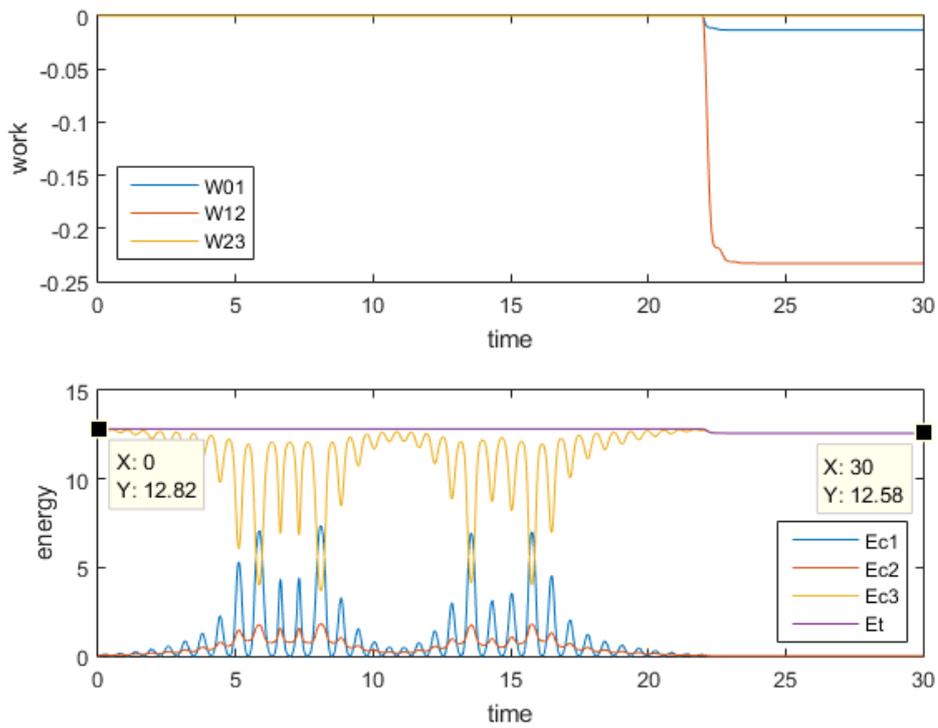


Figura 4.25 – Energia no sistema e trabalho dos atuadores, atuando em 22 s

Para provar a eficácia do controle, ele foi testado para outra condição inicial, como  $\dot{\alpha}_0 = 2$  rad/s.

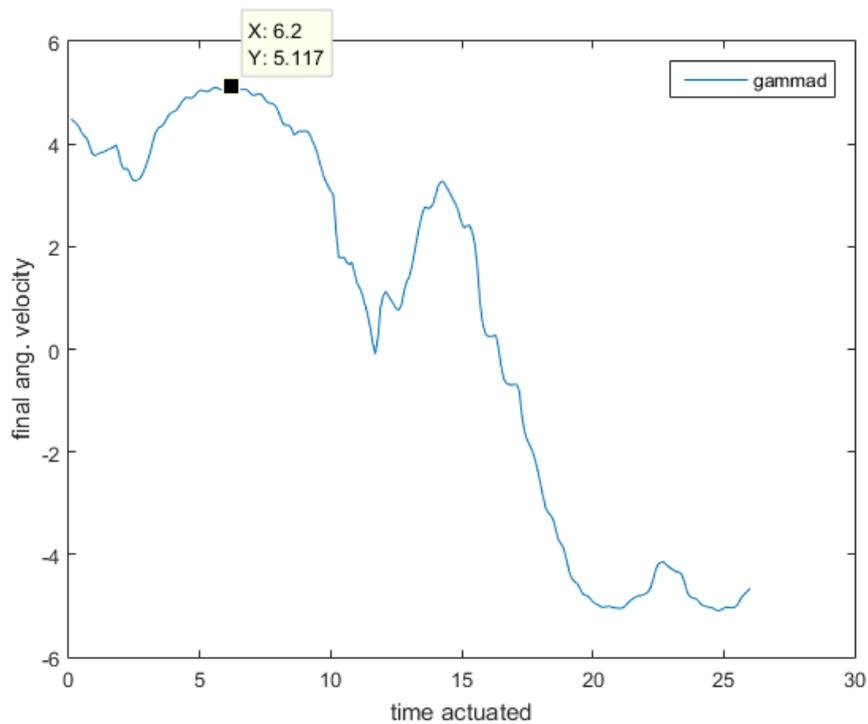


Figura 4.26 – Velocidade final do rotor atuando em um determinado instante, com  $\dot{\alpha}_0 = 2$  rad/s

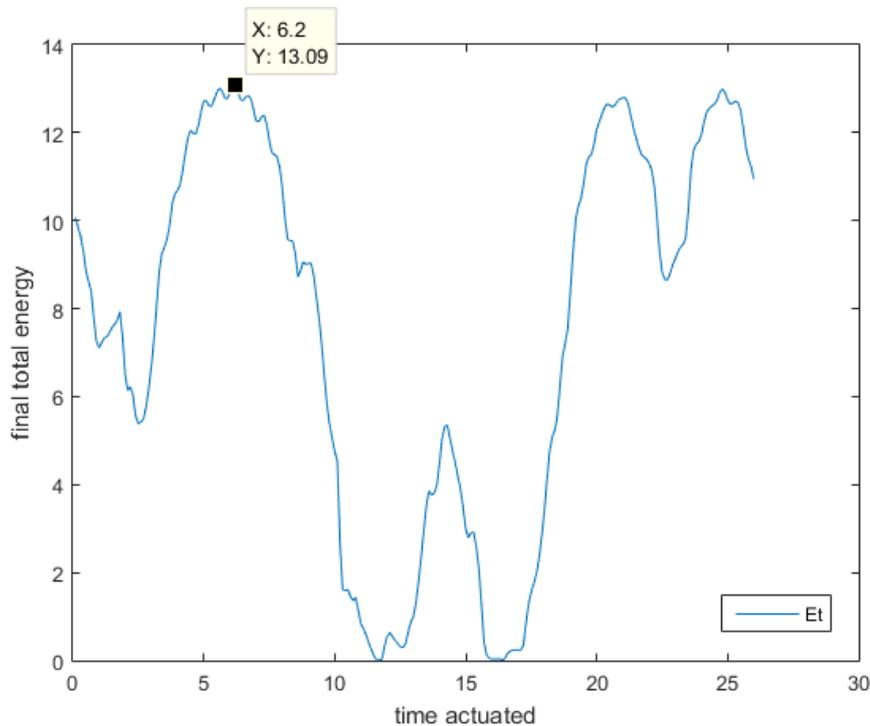


Figura 4.27 – Energia final do rotor atuando em um determinado instante, com  $\dot{\alpha}_0 = 2$  rad/s

E com esta outra condição inicial houve outro ganho de velocidade final do rotor. Porém isso não é uma regra, podem haver casos onde não há ganho na velocidade do rotor comparado com a velocidade inicial. Foram testadas outras condições onde não houve ganhos, mas os picos nos gráficos mostram o melhor momento para de atuar no controle de forma a perder menos energia.

Para o corpo alongado os resultados foram bem parecidos, e por isso não houve necessidade de mostrar os gráficos.

Para o corpo criticamente instável, o controle não-linear foi capaz de reduzir a velocidade dos quadros a zero, mas reduziu consequentemente a velocidade do rotor. Foram feitos vários testes também para este caso, e em todos o controle foi bem-sucedido. Para exemplificar este caso há os gráficos da

simulação com  $\dot{\beta}_0 = 0,1$ ,  $\mu_1 = 1,23$  e  $\mu_2 = 0,59$ , com a atuação do controle em  $t = 15$  s, que reduziu a velocidade de 5 rad/s para 4,369 rad/s.

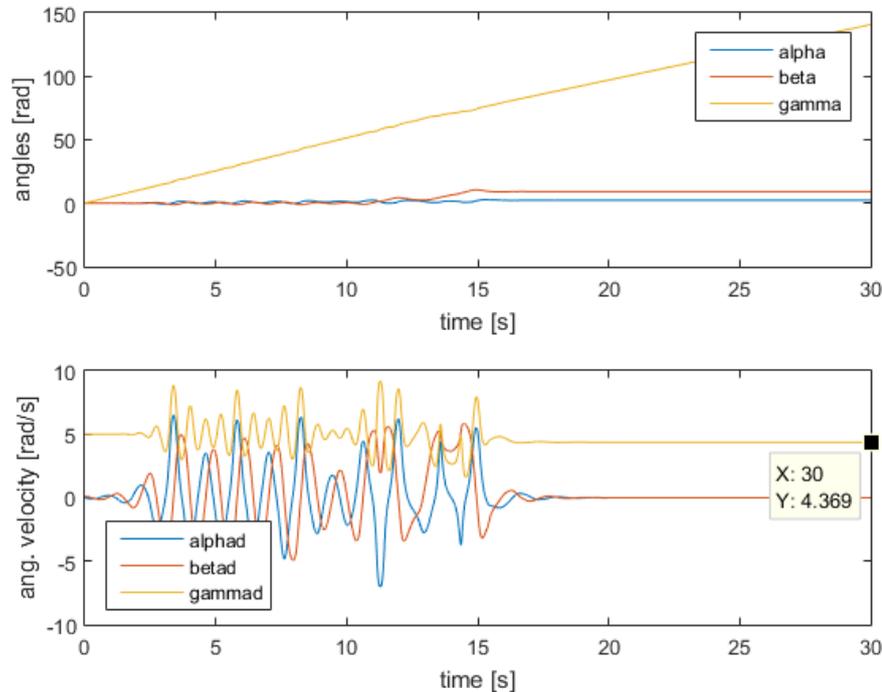


Figura 4.28 – Velocidade e ângulos no corpo criticamente instável com atuação em 15 s e condição inicial  $\dot{\beta}_0 = 0,1$

No geral, esse controle então não só foi bem-sucedido na tarefa de controlar o movimento dos quadros do giroscópio, zerando a velocidade, sem reduzir a velocidade do rotor como em alguns casos conseguiu aumentar essa velocidade comparando com a inicial.

#### 4.2.3. Terceiro controle desenvolvido – não linear cruzado

Como forma de explorar todas as opções de controle não linear, também foi proposta uma forma de controle em que se mesclam os ângulos e velocidades na atuação em determinado quadro. Como exemplo disso:

$$T_{01} = k_1 \cdot \beta \cdot \dot{\alpha} \quad (80)$$

$$T_{12} = k_2 \cdot \alpha \cdot \dot{\beta} \quad (81)$$

Esse tipo de controle não teve nenhum resultado satisfatório e que valha ser mostrado. Foram testadas todas as variações possíveis mudando os parâmetros de ângulo e velocidade em  $T_{01}$  e  $T_{12}$ , mas não foi encontrado nenhum resultado que de fato seja um sistema controlado.

No entanto, esse resultado também serve como indicativo de que o melhor controle deve ter apenas as componentes próprias de ângulo e velocidade na equação, ou seja, para controlar  $\alpha$ , deve-se ter  $\alpha$  e  $\dot{\alpha}$  na equação.

### 4.3. Análise dos resultados

Foram desenvolvidos 3 tipos de controle para o modelo de giroscópio. Os dois primeiros controles foram os que tiveram um resultado positivo em termos de mudança no sistema, e em especial o segundo controle mostrou algo que não se esperava que é injetar energia no rotor.

O primeiro teste realizado se mostrou eficiente nos casos onde se controla o mesmo ângulo que é usado como condição inicial. Num caso real, se eventualmente fosse construir um modelo real baseado nesse sistema estudado, pode-se não sabe qual foi o efeito que desencadeou o sistema a ser tornar caótico, o que torna controlar o sistema com essa proposta um golpe de sorte.

O segundo teste mostrou uma superioridade em relação ao primeiro, já que independente da condição inicial o resultado foi sempre a estabilidade dos quadros do giroscópio. A análise sobre o momento de atuação do controle contribuiu para otimizar o sistema de modo a não interferir tanto sobre a velocidade do rotor.

Ainda sobre este teste, a escolha do instante de atuação do controle levou a algo que não se esperava, que era a adição de energia no rotor. Viu-se que ao atuar nele no momento em que a energia dos quadros é mínima (e conseqüentemente a do rotor máxima) pode-se minimizar o trabalho mecânico dos atuadores. Esse efeito é interessante em casos que não se dispõe de atuadores muito potentes ou há uma fonte finita de energia.

Se considerarmos um corpo similar ao giroscópio, num ambiente sem efeito gravitacional (um satélite com anéis e atuadores, por exemplo) que possua uma velocidade angular constante e os quadros similares ao desse modelo, mas que

eventualmente é atingido por algo que tire da condição de equilíbrio (um meteorito, que seja, mas que não o danifique), se for identificada a força que atua sobre o corpo através de sensores, é possível gerar uma curva similar à que foi gerada na simulação e escolher automaticamente o melhor momento para atuar sobre o sistema para reestabilizar o corpo. Isto exige que sua ação interna dissipe energia procurando não afetar a condição de energia inicial do sistema

Porém, em todos os casos não se considerou uma questão. A posição em que o sistema fica ao final da estabilização não foi levada em conta em nenhum caso. Esse é um ponto importante, dependendo da situação, e que pode ser abordado melhor num futuro trabalho, pois de fato se o exemplo mostrado no parágrafo anterior for mesmo um satélite a posição final dele é um fator importantíssimo no resultado.