

# 1 Introdução

O estudo da dinâmica dos corpos no espaço é um tema clássico da Mecânica, reportando-se a grandes mentes como Galileu com seu estudo no movimento de pêndulos, Newton com suas leis de movimento, passando por Euler com sua descrição angular da orientação de corpos rígidos no espaço tridimensional e Lagrange com suas equações que combinam quantidade de movimento com a conservação de energia, chegando até os dias atuais com uma variedade de artigos baseados em todo esse conhecimento adquirido, valendo-se das ferramentas modernas de computação e visualização.

A ideia de transpassar os limites que a Terra impõe e alcançar o espaço sempre esteve no nosso cotidiano, começando na literatura do século 19 com Julio Verne contando as aventuras de Michel Ardan rumo à lua<sup>1</sup>, passando por uma série de TV dos anos 60 com as aventuras de James Kirk e sua tripulação explorando novos mundos “onde nenhum homem jamais foi”<sup>2</sup> e chegando aos dias atuais com um filme de Christopher Nolan na qual o protagonista vivido por Matthew McConaughey deixa o planeta Terra para trás e cruza um buraco de minhoca em busca de um novo planeta para a civilização<sup>3</sup>.

Pequenos detalhes físicos nos trabalhos de Hollywood nunca obedecem totalmente à realidade física dos fenômenos, mas isso foi quebrado num filme de 2013 do diretor Alfonso Cuarón chamado Gravidade, que prezou tanto pelos pequenos detalhes, como o movimento de dejetos no espaço, que foi elogiado não só pela crítica, como também pelo astronauta norte-americano Buzz Aldrin (o segundo homem a pisar na lua) e pelo renomado astrofísico Neil DeGrasse Tyson. Para pessoas comuns, esses detalhes podem não ser essenciais para serem mostrados na tela, mas para engenheiros e físicos esses detalhes são representações da realidade que instigam o “aprender mais” sobre o assunto.

---

<sup>1</sup> Referência ao best-seller Da Terra à Lua, publicado em 1865.

<sup>2</sup> Referência à clássica série de TV Jornada nas Estrelas, que estreou em 1966.

<sup>3</sup> Referência ao filme Interestelar, que estreou em 2015.

Foi no entre guerras do século passado que o uso de mísseis balísticos quebrou a barreira do espaço e ofereceu a tecnologia para a possibilidade de colocar um objeto em órbita, fator estratégico da Guerra Fria, resultando na tão falada Corrida Espacial. Mesmo cerca de 60 anos atrás, cientistas precisaram desenvolver formas de controlar objetos no espaço sem nunca ter estado lá, e para tal, usavam máquinas tão primitivas que nem se comparam a simples smartphones que utilizamos diariamente.

Hoje em dia, o comportamento de objetos no espaço (controle de atitude), a exemplo da dinâmica estudada na mecânica clássica, está cada vez mais presente no campo das ideias. É bastante comum a modelagem de satélites, sondas e veículos espaciais, projetos em que não são admitidas falhas, pois geralmente só possuem uma chance de funcionar, caso sejam lançados em órbita e assumam a atitude prevista. Perdendo-se esta chance, milhões (ou talvez bilhões) de dólares e anos de trabalho podem ser jogados no lixo num piscar de olhos, aumentando o desafio para os engenheiros aeroespaciais do presente.

É também oportuno lembrar que, dentre os países emergentes chamados BRICS, Rússia, China e Índia estão bem adiante no desenvolvimento deste setor quando comparados ao Brasil. A difusão do conhecimento científico neste setor por diversas instituições espalhadas pelo país seria um passo importante para resgatar este atraso.

Por isso, nesta área é necessário um estudo muito aprofundado dos problemas e tentativas de simular todas as condições de funcionamento do modelo elaborado, levando tudo que se puder considerar em questão, desde variações de temperatura até a poeira espacial.

Para entender o fenômeno de rotação, esta tese engloba o estudo de alguns sistemas pendulares baseados em modelos estudados na história, mas com o uso de controles para criar dinâmicas específicas. A tese também estuda o giroscópio de Magnus, que é similar a sistemas pendulares, porém com 3 ângulos interagindo entre si.

O autor desta tese também teve sua dissertação de mestrado baseada em rodas de reação num pêndulo planar, controladas por um controle PID e Fuzzy. Como um passo seguinte nesse estudo, esta tese expande o conhecimento de sistemas pendulares, e adiciona o conhecimento sobre controles não-lineares.



Figura 1.1 – Imagem do filme *Le Voyage Dans La Lune*, curta-metragem de 1902 de Georges Méliès, inspirado no livro de Julio Verne, *Da Terra À Lua*.

### 1.1. De satélites para pêndulos, de pêndulos para satélites

Para movimentar satélites e outros sistemas no espaço, são requeridas estratégias de controle que levem em conta o campo gravitacional existente no espaço, sendo importante então pensar também em outras maneiras de manobrar e rotacionar o corpo além daquelas através de jatos e outras soluções que levem a uma perda de massa. Para entender fenômenos complexos sempre é útil reduzir o sistema a formas mais elementares, como por exemplo um pêndulo.

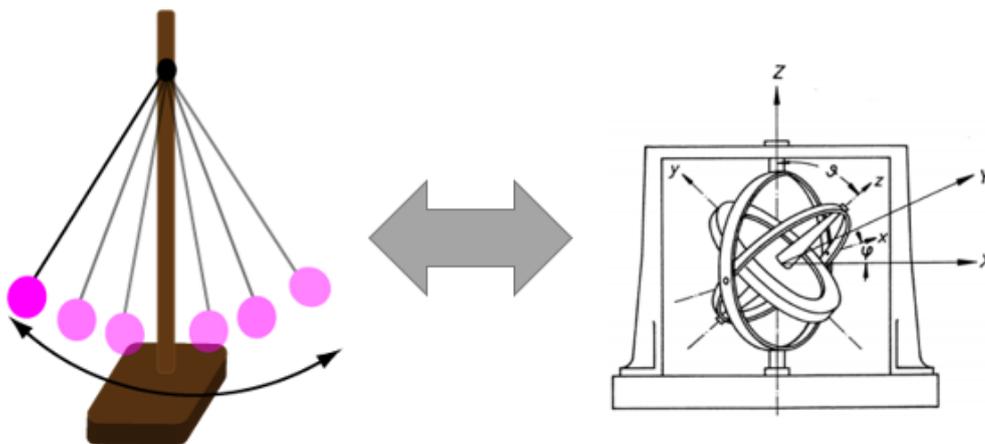


Figura 1.2 – De pêndulo para giroscópio e vice-versa

Na área de controle e automação, o pêndulo é com certeza um dos sistemas mais interessantes e com uma grande variedade de artigos publicados. A diversidade de montagens por composição de massas e hastes ou fios apenas aumenta o vasto universo de informação pesquisável acerca deste tema. O comportamento desses sistemas pendulares é influenciado pelas perturbações, não-linearidades, atritos e até falhas de construção.

Com projetos baseados em pêndulos, pode-se entender como funciona um sistema oscilatório. E entendendo o sistema base, pode-se adaptar esse conhecimento para entender como funcionam sistemas mais complexos, como o giroscópio, e assim adiante.

### **1.2.O que é o caos?**

Para lidar com sistemas pendulares e giroscópicos, deve se antes entender um princípio, o de conceito de caos e sistema caótico, que vem a ser usado nesse contexto.

A origem da palavra vem do latim, podendo significar confusão, desordem e separação. Se buscarmos atrás em épocas remotas como na mitologia grega, os poetas diziam que Caos foi o primeiro deus primordial a surgir no universo, pai-mãe de Eros. Diz-se pai-mãe, pois seu filho nasceu por um processo de mitose, nascendo então Eros como um pedaço de si mesmo. Esta condição remete ao significado do seu nome, separação.

A mitologia também diz que Caos era o contrário de Eros, e que o universo antes da criação de Eros vivia em desordem, cabendo a ele, ao surgir, um papel de coordenador dos elementos e unificador do cosmos. A partir daí Caos passou a ser reconhecido como deus da desordem.

Se sairmos da mitologia e entrarmos nos sistemas físicos, a primeira ideia que caos lembra é a teoria formulada pelo meteorologista norte-americano Edward Lorenz. As suas observações deram origem ao chamado Efeito Borboleta, devido a sua explicação sobre o que seria a Teoria do Caos. Segundo ele, o bater de asas de uma borboleta no Brasil poderia provocar uma sequência de eventos meteorológicos imprevisíveis que poderiam provocar um tornado nos Estados Unidos.

É neste contexto que exploramos este conceito. O caos físico de um sistema dinâmico está relacionado a uma pequena mudança de condições iniciais que causa um comportamento posterior totalmente diferente. Pode-se considerar as equações que regem o sistema como altamente sensíveis a essas condições iniciais. E é a partir dessa definição que o conceito de movimento caótico é citado nos capítulos seguintes da tese.

Matematicamente, o movimento caótico aparece a partir de três equações diferenciais de primeira ordem. Assim sendo, no movimento pendular, ele surge a partir do pêndulo duplo e se manifesta através de uma miríade de movimentos que se alteram totalmente ao mudar de forma insignificante as condições iniciais.

Denominamos de giroscópico o movimento de um corpo que, pelo fato de estar sendo sustentado pelo centro de massa, fica imune à ação da gravidade. Esta forma de sustentação é possível utilizando-se uma suspensão cardânica, ficando complementado o corpo por dois quadros cujos efeitos de inércia são pequenos face aos do corpo.

Tendo este corpo uma rotação própria que não afete os quadros (uma rotação de spin) o conjunto passa a ter uma quantidade de movimento angular inerente. Seu eixo de rotação é fixo no espaço. Sob ação de perturbações o sistema passa a apresentar movimentos de precessão e/ou nutação, essencialmente fazendo o eixo de rotação original do corpo a se movimentar conicamente, como se fora um lápis seguro entre as duas mãos que fazem pequenas rotações circulares, mas em sentidos opostos.

Aparentemente, como a quantidade de movimento angular enrijece o sistema, não se esperaria caos nesta estrutura. Mas, se este corpo não tiver axissimetria a coisa se complica. Se pretendermos que a rotação original seja em torno do eixo intermediário de inércia, o movimento é naturalmente instável, a energia armazenada na rotação do corpo é usada para gerar movimentos em outras direções e o eixo do corpo passa a pular de um hemisfério a outro.

Nas simulações analíticas (quando o ponto de equilíbrio instável não é abandonado) ínfimas variações de condições iniciais levam a órbitas totalmente distintas deste eixo. A parte mais interessante é que, mesmo que a rotação inicial não seja em torno do eixo intermediário de inércia, vai haver uma instabilização do movimento (seja em torno do eixo de menor ou de maior inércia) se houver uma perturbação grande o suficiente. E o resultado será um movimento caótico

envolvendo todas as coordenadas que descrevem a posição do corpo. O corpo não consegue voltar a girar em torno de um eixo fixo no espaço, como era na sua condição inicial.

O presente trabalho tem uma boa parte de sua metodologia ligada à “tentativa e erro” e apresenta os passos feitos para tentar encontrar uma maneira de “sair fora” do movimento caótico descrito acima, com um mínimo de perda de energia para o sistema.

### 1.3.Revisão Bibliográfica

Na literatura, poucos são os trabalhos que abordam uma forma completa de controle do sistema giroscópico, então a solução foi encontrar modelos similares de sistemas pendulares mais simples controlados por outros métodos, procurar sistemas controlados com controle não-linear e procurar modelos giroscópicos com ângulos cardânicos.

Para sistemas pendulares, o modelo clássico de pêndulo invertido de Åström & Furuta [1] e de rodas de reação de Spong et al [2] foram usados, em conjunto com o estudo das estratégias de controle de “swing-up” por controle de energia vistas em Bugeja [3] e Chung & Hauser [4].

Usando o modelo de rodas de reação de Pereira [5] construiu-se os modelos apresentados nessa tese, baseado no esquema de forças visto em Narayan [6] et al e Biswas [7].

Para controle dos sistemas, o controle não-linear desenvolvido na tese foi baseado em Magnus [8], e na implementação de “switching control” usado nos sistemas construídos em bancada, o trabalho de Zhai [9] foi usado como uma referência.

Optando por usar um sistema de controle não-linear, o trabalho de Strogatz [10] fundamentou a escolha, também apresentando um conceito que será abordado no trabalho como o controle do movimento caótico.

Ao se usar termos dissipativos, as estratégias e modelos de sistemas vistas em Brogliato et al [11] contribuíram para o trabalho.

Estudando sistemas inerciais em três dimensões, o trabalho referente a corpos rígidos no espaço de Weber [12] e o trabalho de sistemas espaciais de

Schaub [13] e Rimrott [14] contribuíram para a construção do formalismo nas equações.

Para modelagem matemática do sistema giroscópico e para o entendimento do funcionamento do giroscópio, foi usada como base a tese de doutorado de Carrera [15] e o artigo de Weber [16], junto com trabalhos que abordam sistemas caóticos em pêndulos, como Tusset et al [17] e Avanço et al [18].

O trabalho de Savi [19] do movimento caótico por falta de simetria também adicionou informações para a modelagem matemática proposta.

Para construir uma animação do sistema giroscópico, o trabalho de Carrera & Weber [20] e Carrera et al [21] ajudaram na visualização computacional do modelo.

Por fim, todos os artigos publicados ou aceitos para publicação submetidos pelo autor da tese e seu orientador foram usados massivamente para a construção desta tese, Pereira & Weber [22], Pereira & Weber [23], Pereira & Weber [24] e Pereira et al [25]. E os outros artigos também contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho.

## **1.4.Terminologia**

A Dinâmica exige uma nomenclatura muito específica e devido ao alto grau de divergência na literatura é imprescindível formalizar as terminologias que serão usadas nesta tese. Mesmo que por ventura essas denominações pareçam fáceis e intuitivas a priori, são necessárias para embasar contas mais complexas e nunca são demais.

### **1.4.1.Vetores e Matrizes**

Inicialmente, quando tratamos de um vetor ou matriz, este estará sempre em negrito. Seus componentes escalares, no entanto, estarão em letra comum. Além disso, quando tratamos de um vetor que conecta 2 pontos, estes são denominados nos cantos inferior esquerdo (como ponto inicial) e inferior direito (como ponto final). Ex.:

$${}^B\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{bmatrix}$$

Caso o ponto inicial seja o SR fixo, a letra no canto inferior esquerdo pode ser omitida na escrita.

### 1.4.2. Sistema de referencia

Quando se trata de sistemas rotacionais, é necessário que se faça entender sob qual Sistema de Referencia (ou simplesmente SR) grandezas vetoriais referentes ao corpo estão sendo representadas.

$${}^R\mathbf{A} = \begin{bmatrix} {}^R a_1 \\ {}^R a_2 \\ {}^R a_3 \end{bmatrix}$$

No exemplo, o expoente no canto superior esquerdo indica que a grandeza está medida apenas no SR (R).

### 1.4.3. Matriz de Transformação de Coordenadas

A fim de transferir de um SR para outro, é necessária a multiplicação pela matriz de transformação de coordenadas referente à rotação envolvida. Exemplificando com um SR (R) que sofre uma rotação  $\theta$  em torno do eixo (3) para ser o SR (S), define-se a matriz de transformação de coordenadas  ${}^R\mathbf{T}^S$  que permite obter os valores da grandeza  $\mathbf{A}$  no SR (R), que originalmente são conhecidos no SR (S):

$${}^R\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^R\mathbf{A} = {}^R\mathbf{T}^S \mathbf{A}$$

Analogamente, para voltar para o SR (S):

$${}^S \mathbf{A} = {}^S \mathbf{T}^R {}^R \mathbf{A}$$

A matriz de transformação de coordenadas é ortogonal:

$${}^S \mathbf{T}^R = ({}^R \mathbf{T}^S)^T$$

Para um problema onde há mais de uma rotação, ou seja, mais de uma matriz de transformação de coordenadas, do tipo:

$$F \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} S$$

$${}^F \mathbf{A} = {}^F \mathbf{T}^Q {}^Q \mathbf{A} = {}^F \mathbf{T}^Q {}^Q \mathbf{T}^R {}^R \mathbf{A} = {}^F \mathbf{T}^Q {}^Q \mathbf{T}^R {}^R \mathbf{T}^S {}^S \mathbf{A}$$

#### 1.4.4. Matriz de Orientação e Velocidade Angular

Na definição anterior podemos associar ao SR (S) um corpo rígido, o ponto B a à origem de (S) neste corpo e o ponto C a um ponto genérico do mesmo. A expressão

${}^F \mathbf{A}_C = {}^F \mathbf{T}_B^S {}^S \mathbf{A}_C$  representa a transformação de todas as coordenadas do corpo para o SR fixo (F). As coordenadas em (S) não variam pelo fato do corpo ser rígido e o movimento de rotação do corpo é caracterizado pela variação temporal da matriz  $\mathbf{T}$ . Esta matriz pode ser adequadamente denominada matriz de orientação. A translação não afeta a matriz, nascendo dela, portanto, o conceito de velocidade angular.

Ao derivar esta expressão:

$$\frac{d {}^F \mathbf{A}_C}{dt} = {}^F \dot{\mathbf{T}}_B^S {}^S \mathbf{A}_C = {}^F \dot{\mathbf{T}}_B^S \mathbf{T}_B^F {}^F \mathbf{A}_C$$

obtém-se uma relação entre a derivada de um vetor de coordenadas constantes em (S) e o próprio vetor, representado em (F). Pode-se mostrar que o

produto da derivada de uma matriz ortogonal pela transposta desta matriz é antissimétrica. Este produto leva à definição da velocidade angular do corpo:

$${}^F_F \tilde{\boldsymbol{\omega}}_S = {}^F \dot{\mathbf{T}}^S {}^S \mathbf{T}^F$$

Onde:

$${}^F \tilde{\boldsymbol{\omega}}_S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^F \boldsymbol{\omega}_S = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

A mudança de referência para uma matriz escrita em (F) em uma matriz escrita em (S) obedece:

$${}^S_F \tilde{\boldsymbol{\omega}}_S = {}^S \mathbf{T}^F {}^F \tilde{\boldsymbol{\omega}}_S {}^F \mathbf{T}^S$$

O que muda a expressão quando escrita no sistema embarcado para:

$${}^S_F \tilde{\boldsymbol{\omega}}_S = {}^S \mathbf{T}^F {}^F \dot{\mathbf{T}}^S$$

## 1.5. Motivação e objetivos

Como citado anteriormente, este trabalho começou a partir de um estudo anterior de pêndulos planares movidos a rodas de reação. Os resultados foram bem promissores, e no início desta pesquisa começou-se a estudar sistemas pendulares verticais (sob ação da força gravitacional). Por outro lado, abandonou-se a ideia de usar controle PID ou Fuzzy e tentou-se uma nova forma de controlar o sistema, usando um controle não-linear.

Para juntar os dois novos pensamentos em um projeto, bastou uma tarde no parque. Para usar propriamente o balanço, necessita-se um ajuste das pernas e do corpo para que o centro de massa do sistema balanço-pessoa mude e crie uma variação no momento de inércia do sistema. Além disso se as correntes fossem rígidas, seria bem possível aplicar esse ajuste das pernas para dar um ‘loop’. E

pensando nisso criou-se dois sistemas baseados em pêndulos para serem controlados por mudança no centro de massa do corpo. Com esses dois modelos em mãos, encontrou-se a motivação necessária para buscar modelos mais complexos, como é o giroscópio.

E trabalhando com um novo sistema mais complexo, busca-se usar todo o conhecimento de sistemas conhecidos e dar um passo adiante para entender sistemas reais como satélites.

Outro objetivo na área de montagem de modelos de bancada é não usar equipamentos muito caros, mas que reproduzissem os modelos criados na teoria. Entretanto, apenas como forma de visualização de resultados foi usado um Giroscópio de Magnus que já estava disponível no Laboratório de Dinâmica e Vibrações da PUC-Rio para comprovação dos efeitos caóticos observados na simulação computacional (Figura 1.3).



Figura 1.3 – Giroscópio de Magnus, da PHYWE

## 1.6. Descrição da tese

Esta tese está dividida em 6 capítulos. O capítulo 1 que foi apresentado agora, mostrou um pequeno fundo histórico sobre o tema, passando por questões mais específicas, apresenta uma terminologia padrão a ser usada na tese, com todo o formalismo e rigor matemático necessário para não haver dúvidas na definição

de equações, grandezas e resultados e finalizando com objetivos e motivações para esse trabalho.

O capítulo 2 apresenta os modelos de pêndulo estudados para construir as bases para o trabalho com o giroscópio. São três modelos de pêndulos estudados, e desenvolvidos no MATLAB. Também apresenta o método de controle que vai ser aplicado nos modelos práticos de pêndulo da tese. Mostra também os resultados obtidos com o modelo teórico, com gráficos e comparações.

O capítulo 3 mostra os projetos práticos de pêndulos construídos no Laboratório de Dinâmica e Vibrações da PUC-Rio e estudados no capítulo 2, com seus resultados práticos. Ao final, comparações entre o sistema teórico e prático são analisadas.

O capítulo 4 desenvolve os estudos vistos nos capítulos anteriores, criando um modelo de corpo livre no espaço com rotações cardânicas, e apresenta uma implementação com o controle usado nos pêndulos. O resultado da implementação é comparado com a dos capítulos anteriores e o uso dessa modelagem real é abordada.

Por fim, o capítulo 5 apresenta um pequeno resumo de todos os trabalhos realizados nesta tese, as conclusões do trabalho de mais de 4 anos, junto com o que foi esperado e inesperado nesse período, e possíveis trabalhos futuros.