

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Felipe Poggi de Aragão Fraga

**Dinâmica Vertical De Motocicletas:
Modelagem e Análise**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de
Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro
Julho de 2018

Agradecimentos

Ao meu orientador Mauro Speranza Neto pela inspiração, auxílio e atenção na realização deste trabalho.

Aos meus pais, pelo apoio em todos os momentos e pela educação proporcionada.

À minha avó, que me recebeu em sua casa toda semana, ao decorrer de toda a minha graduação.

Ao meu colega e amigo João Pedro, que trabalhou comigo durante a disciplina na qual eu fui introduzido ao tema deste projeto.

A todos os professores e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e ambiente de qualidade.

A todos os amigos e familiares que de alguma forma me estimularam ou me ajudaram.

Resumo

Dinâmica Vertical De Motocicletas: Modelagem e Análise

A dinâmica vertical de uma motocicleta pode ser modelada a partir de um modelo físico que a represente, e a partir do modelo matemático gerado, é possível analisar o comportamento do sistema obtido de modo a compreender como a dinâmica vertical é dada e como alterações nos componentes responsáveis pela mesma afetam o comportamento do sistema. Assim, é relevante desenvolver um procedimento para realizar a modelagem do sistema físico, de forma em que seja possível realizar as análises pertinentes para verificar como a variação de determinados componentes influencia a dinâmica vertical. Este projeto propõe um método para equacionar o modelo matemático a partir de um grafo de ligação que represente o modelo físico, que conta ainda com transformações matriciais para chegar ao sistema na forma de variáveis Lagrangeanas, assim como análises das raízes e da resposta em frequência do sistema elaborado. Foram desenvolvidos, e adaptados, procedimentos para a obtenção de lugares geométricos das raízes e de diagramas de Bode, baseados nos conceitos de polinômios característicos e funções de transferência. Os procedimentos foram elaborados para estudar a variação de parâmetros de componentes do modelo de acordo com valores efetivamente encontrados em motocicletas. Os resultados obtidos para os procedimentos realizados, e para as variações de determinados parâmetros foram muito interessantes. Não só foi possível implementar com êxito os procedimentos desenvolvidos para executar a análise, como a partir dos resultados obtidos, um determinado nível de influência no sistema foi associado à variação de cada parâmetro.

Palavras chaves

Motocicleta; dinâmica vertical; sistema dinâmico; grafo de ligação; autovalores; polinômio característico; função de transferência; lugar geométrico das raízes; diagrama de Bode.

Abstract

A Motorcycle's Vertical Dynamics: Modelling and Analysis

A motorcycle's vertical dynamics can be modelled based on a physical model that represents it. From the generated mathematical model, it is possible to analyze the system's behavior in order to understand how the vertical dynamics are held and how a change in the components affect the system's behavior. Hence, it is relevant to develop a procedure to model the physical system in a way that relevant analysis may be carried out to verify how the vertical dynamics are influenced by variations on certain components. This project proposes a method to equate a mathematical model based on a bond graph, which represents the physical model, along with appropriate matrix transformations to reach the system in Lagrangian variables. Procedures based on the characteristic polynomial and the system's transfer functions were developed and adapted to obtain the Root Locus and the Bode diagrams, aiming to analyze the system's roots and frequency response. These procedures were elaborated aiming to study the variation of parameters associated with certain components, based on the real values encountered in motorcycles. The results for the carried-out procedures were promising, as were the results found for the change in parameters. Not only were the procedures successfully developed and implemented, but the results gathered also presented a certain level of influence on the system associated with each parameter's variation.

Keywords

Motorcycle; vertical dynamics; dynamic system; bond graph; eigenvalues; characteristic polynomial; transfer function; Root Locus; Bode diagram.

Sumário

1. Introdução.....	13
2. Descrição do Modelo.....	15
3. Desenvolvimento do Modelo Matemático.....	18
3.1. Equacionamento do modelo na forma de estado em Variáveis de Energia a partir do modelo de grafos de ligação.....	18
3.1 – Manipulação algébrica do modelo na forma de estado em Variáveis de Energia para chegar ao modelo na forma de estado em Variáveis Lagrangeanas.....	26
4. Análise Preliminar do Sistema.....	35
4.1. Análise em Regime Permanente.....	35
4.2. Análise dos Autovalores, Frequências Naturais e Fatores de Amortecimento.....	38
5. Análise do Lugar Geométrico das Raízes.....	42
5.1. Procedimento para a Obtenção do Lugar Geométrico das Raízes ...	42
5.2. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro b_d do Amortecedor Dianteiro.....	45
5.3. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro b_t do Amortecedor Traseiro.....	49
5.4. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro k_d da Mola Dianteira.....	52
5.5. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro k_d da Mola Traseira.....	56
5.6. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro m_d da Massa do Pneu Dianteiro.....	59
5.7. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro m_t da Massa do Pneu Traseiro.....	61
6. Análise dos Diagramas de Bode.....	62
6.1. Procedimento Analítico para a Obtenção dos Diagramas de Bode...	62
6.2. Obtenção dos Diagramas de Bode do Sistema Original.....	65
6.3. Obtenção dos Diagramas de Bode do Sistema com a Variação dos Parâmetros.....	70
6.4. Diagramas de Bode para a Variação do Amortecimento do Amortecedor da Suspensão Dianteira (b_d).....	71

6.5. Diagramas de Bode para a Variação do Amortecimento do Amortecedor da Suspensão Traseira (b_t).....	75
6.6. Diagramas de Bode para a Variação do Amortecimento dos Amortecedores de Ambas as Suspensões (b_d e b_t)	79
6.7. Diagramas de Bode para a Variação da Distância entre o Eixo Dianteiro e o Centro de Massa (l_d).....	83
6.8. Diagramas de Bode para a Variação da Distância entre o Eixo Traseiro e o Centro de Massa (l_t)	87
6.9. Diagramas de Bode para a Variação da Distância entre os Eixos (l)	91
6.10. Diagramas de Bode para a Variação da Massa Suspensa (m).....	95
6.11. Diagramas de Bode para a Variação da Rigidez da Mola da Suspensão Dianteira (k_d).....	99
6.12. Diagramas de Bode para a Variação da Rigidez da Mola da Suspensão Traseira (k_t)	103
6.13. Diagramas de Bode para a Variação da Rigidez das Molas de Ambas as Suspensões (k_d e k_t).....	107
6.14. Resumo dos Resultados Obtidos Para a Variação de cada Parâmetro na Resposta em Frequência	112
7. Conclusão	113
8. Referências Bibliográficas	115

Lista de Figuras

Figura 2-1: Elementos para análise da dinâmica vertical plana de uma motocicleta	15
Figura 2-2: Modelo físico para análise da dinâmica vertical plana de uma motocicleta	16
Figura 3-1: Modelo físico para a construção do grafo de ligação	18
Figura 3-2: Grafo de ligação para o modelo da dinâmica vertical de uma motocicleta	19
Figura 3-3: Grafo de ligação com ligações enumeradas	19
Figura 3-4: Grafo de ligação dividido em 3 segmentos	21
Figura 3-5: Segmento 1 do grafo de ligação	21
Figura 3-6: Segmento 2 do grafo de ligação	22
Figura 3-7: Segmento 3 do grafo de ligação	23
Figura 3-8: Representação física da dinâmica vertical de uma motocicleta, incluindo geometria	34
Figura 3-9: Modelo físico incluindo geometria para a dinâmica vertical de uma motocicleta	34
Figura 3-10: Grafo de ligação do modelo físico incluindo geometria para a motocicleta	34
Figura 5-1: LGR para o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	45
Figura 5-2: LGR considerando valores de 500 N/m/s até 2500 N/m/s para o parâmetro b_d	48
Figura 5-3: LGR para o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	49
Figura 5-4: LGR considerando valores de 500 N/m/s até 2500 N/m/s para o parâmetro b_t	51
Figura 5-5: LGR para o parâmetro k_d da mola dianteira	52
Figura 5-6: LGR de k_d com os pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara	52
Figura 5-7: LGR considerando valores de 5000 N/m até 25000 N/m para o parâmetro k_d	55
Figura 5-8: LGR de k_d com a parte imaginária positiva dos pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara	55
Figura 5-9: LGR para o parâmetro k_t da mola traseira	56
Figura 5-10: LGR de k_t com os pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara	56
Figura 5-11: LGR considerando valores de 5000 N/m até 25000 N/m para o parâmetro k_t	58
Figura 5-12: LGR de k_t com a parte imaginária positiva dos pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara	59
Figura 5-13: LGR para o parâmetro m_d , massa do pneu dianteiro	60
Figura 5-14: LGR considerando valores de 8 kg até 25 kg para o parâmetro m_d	60
Figura 5-15: LGR para o parâmetro m_t , massa do pneu traseiro	61
Figura 5-16: LGR considerando valores de 8 kg até 25 kg para o parâmetro m_t	61
Figura 6-1: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z , deslocamento da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)	66
Figura 6-2: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z , deslocamento da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)	67
Figura 6-3: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída θ , ângulo de guinada da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)	67
Figura 6-4: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída θ , ângulo de guinada da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)	68
Figura 6-5: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_d , deslocamento do pneu dianteiro, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)	68
Figura 6-6: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_d , deslocamento do pneu dianteiro, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)	69

Figura 6-7: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_t , deslocamento do pneu traseiro, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)	69
Figura 6-8: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_t , deslocamento do pneu traseiro, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)	70
Figura 6-9: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	71
Figura 6-10: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	72
Figura 6-11: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	72
Figura 6-12: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	73
Figura 6-13: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	73
Figura 6-14: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	74
Figura 6-15: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	74
Figura 6-16: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro	75
Figura 6-17: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	75
Figura 6-18: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	76
Figura 6-19: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	76
Figura 6-20: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	77
Figura 6-21: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	77
Figura 6-22: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	78
Figura 6-23: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	78
Figura 6-24: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro	79
Figura 6-25: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t	79
Figura 6-26: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t	80
Figura 6-27: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t	80
Figura 6-28: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t	81
Figura 6-29: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t	81
Figura 6-30: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t	82
Figura 6-31: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t	82
Figura 6-32: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t	83
Figura 6-33: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	83
Figura 6-34: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	84
Figura 6-35: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	84
Figura 6-36: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	85
Figura 6-37: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	85
Figura 6-38: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	86
Figura 6-39: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	86

Figura 6-40: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro	87
Figura 6-41: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	87
Figura 6-42: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	88
Figura 6-43: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	88
Figura 6-44: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	89
Figura 6-45: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	89
Figura 6-46: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	90
Figura 6-47: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	90
Figura 6-48: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro	91
Figura 6-49: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos	91
Figura 6-50: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos	92
Figura 6-51: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos	92
Figura 6-52: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos	93
Figura 6-53: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos	93
Figura 6-54: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos	94
Figura 6-55: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos	94
Figura 6-56: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos	95
Figura 6-57: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m	95
Figura 6-58: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m	96
Figura 6-59: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m	96
Figura 6-60: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m	97
Figura 6-61: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m	97
Figura 6-62: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m	98
Figura 6-63: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m	98
Figura 6-64: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m	99
Figura 6-65: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	99
Figura 6-66: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	100
Figura 6-67: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	100
Figura 6-68: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	101
Figura 6-69: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	101
Figura 6-70: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	102
Figura 6-71: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	102
Figura 6-72: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira	103
Figura 6-73: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	103
Figura 6-74: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	104
Figura 6-75: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	104
Figura 6-76: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	105
Figura 6-77: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	105

Figura 6-78: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	106
Figura 6-79: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	106
Figura 6-80: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira	107
Figura 6-81: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	107
Figura 6-82: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	108
Figura 6-83: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	108
Figura 6-84: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	109
Figura 6-85: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	109
Figura 6-86: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	110
Figura 6-87: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	110
Figura 6-88: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas	111

Lista de Tabelas

Tabela 2-1: Tabela com a descrição, símbolo usado, valor atribuído e unidade de medida para cada parâmetro	17
Tabela 4-1: Frequências naturais, fatores de amortecimento, constantes de tempo e tempos de estabilização para cada par de autovalores	41
Tabela 5-1: Parâmetros do sistema escolhidos para a análise do LGR, com a faixa de valores considerados coerentes para cada parâmetro	44
Tabela 5-2: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado b_d	46
Tabela 5-3: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado b_d	47
Tabela 5-4: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado b_t	49
Tabela 5-5: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado b_t	51
Tabela 5-6: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado k_d	53
Tabela 5-7: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado k_d	54
Tabela 5-8: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado k_t	57
Tabela 5-9: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado k_t	58
Tabela 6-1: Parâmetros do sistema escolhidos para a análise dos diagramas de Bode, com os valores considerados para a análise de cada parâmetro	71
Tabela 6-2: Influência da variação de cada parâmetro na resposta em frequência do sistema	112

Lista de Abreviaturas

FT – Função de Transferência

LGR – Lugar Geométrico das Raízes

FTMA – Função de Transferência de Malha Aberta

1. Introdução

Motocicletas são veículos em duas rodas, alinhadas, uma atrás da outra, o que faz com que o veículo apenas possua estabilidade em movimento. A dinâmica de uma motocicleta pode ser analisada por diversas perspectivas diferentes, a dinâmica longitudinal, a dinâmica vertical e a dinâmica lateral, que é a mais complexa de todas e inclui diferentes vertentes.

O trabalho propõe um estudo sobre a dinâmica vertical de uma motocicleta a partir de um modelo físico, que será usado para chegar a um sistema de equações que representa a dinâmica vertical, para assim, realizar as devidas análises necessárias para compreender e estudar o seu comportamento.

Este projeto de modelagem e análise consiste em desenvolver um modelo matemático para estudar como a variação dos componentes responsáveis pela dinâmica vertical de uma motocicleta pode influenciar o comportamento do sistema, tendo como referência um modelo simplificado para a dinâmica vertical de uma motocicleta, sem incluir a geometria do chassi.

O objetivo da pesquisa foi desenvolver um modelo matemático para modelar, e posteriormente analisar, a dinâmica vertical de uma motocicleta. Para o desenvolvimento foi utilizando a técnica de grafos de ligação [2], que toma como base o modelo físico da dinâmica vertical para construir um grafo de ligação, a partir do qual o modelo matemático com os parâmetros presentes no modelo físico é desenvolvido e adaptado para as devidas necessidades.

Para a análise, foi atribuído inicialmente um valor para cada parâmetro presente no modelo, com o objetivo de posteriormente variar os valores para determinados parâmetros de modo a estudar o efeito desta variação no comportamento do sistema montado para representar a dinâmica vertical da motocicleta. O estudo foi realizado através de uma série de análises, incluindo os autovalores do sistema, o comportamento no regime permanente, o Lugar Geométrico das Raízes (LGR) [4] e a resposta em frequência do sistema.

Na Descrição do Modelo, todos os elementos presentes no modelo físico utilizado são explicados, junto com uma definição de valores para cada parâmetro presente no mesmo.

No Desenvolvimento do Modelo Matemático, o grafo de ligação para o modelo físico é utilizado para obter as equações que regem a dinâmica do sistema, a partir do sistema de equações encontrado, é montado um sistema de matrizes, que são transformadas para a forma de estado em Variáveis Lagrangeanas e para a forma de estado em Equações de Movimento, para melhor análise do comportamento.

Na Análise Preliminar o Sistema são realizadas duas análises iniciais. A primeira é do comportamento obtido em regime permanente [6] para uma série de entradas diferentes, de modo a compreender como a motocicleta reage a elas. A outra análise realizada é a partir dos autovalores obtidos para o sistema, de modo em que são obtidas as frequências naturais, os fatores de amortecimento, as constantes de tempo e os tempos de estabilização para cada par de autovalor presente.

Na Análise do Lugar Geométrico das Raízes, é explicado o procedimento para a obtenção do LGR, adaptado para o caso de um sistema sem controle [1]. São demonstrados os resultados obtidos para cada LGR, assim como os

resultados observando apenas uma faixa de valores condizentes com os parâmetros reais de motocicletas.

Na Análise dos Diagramas de Bode, é explicitado o procedimento para desenhar um diagrama de Bode a partir das Funções de Transferência [4] relacionando as variáveis de entrada e de saída do sistema. São expostos os resultados obtidos para a variação de diversos parâmetros presentes no modelo, assim como uma tabela ao final indicando a intensidade com a qual a variação de cada parâmetro afeta a resposta em frequência do sistema.

2. Descrição do Modelo

Neste projeto, para representar a dinâmica vertical, no plano xz , de uma motocicleta, será considerado o modelo físico mostrado nas Figuras 2-1 e 2-2 [1]. O modelo foi proposto a partir de algumas hipóteses simplificadoras, primeiramente, a motocicleta está sob a influência de uma suspensão passiva (convencional) [5], além disso, assume-se que a motocicleta está se deslocando em uma estrada com pavimentação irregular, ondulações ou rugosidade.

Para compreender a dinâmica vertical da motocicleta, será necessário identificar os elementos utilizados para a análise da mesma, e estes são separados em 2 grupos principais, são eles as entradas, os graus de liberdade, que serão explicados a seguir.

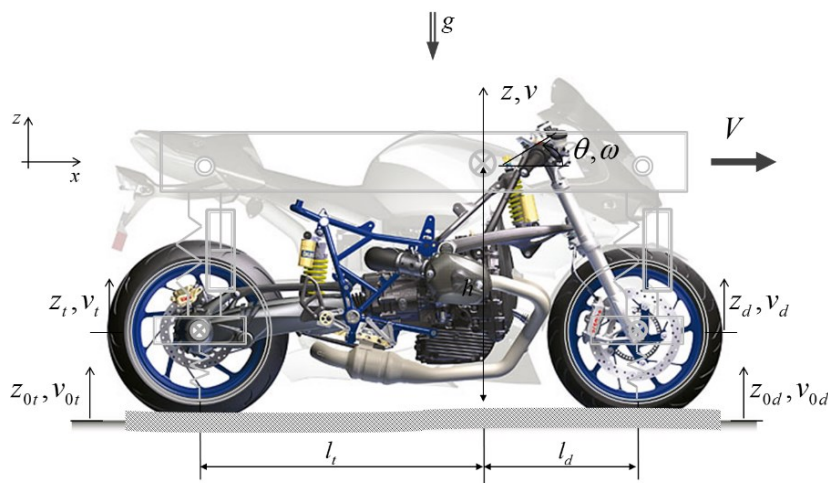


Figura 2-1: Elementos para análise da dinâmica vertical plana de uma motocicleta

Para realizar uma análise da dinâmica vertical plana de uma motocicleta, a mesma é dividida em 3 massas diferentes, de modo a simplificar o modelo, são elas:

- A massa suspensa (a massa do veículo + condutor)
- A massa não suspensa dianteira (roda e pneu dianteiros)
- A massa não suspensa traseira (roda e pneu traseiros)

Cada uma das massas tem seu centro de gravidade identificado no modelo, e vale ressaltar que o centro de gravidade da massa suspensa está posicionado a uma altura mais elevada devido a presença do condutor.

Tendo isso em mente, o modelo representado nas figuras 1 e 2, consiste de 4 graus de liberdade, são eles:

1. O deslocamento da massa suspensa (z)
2. O ângulo de guinada da massa suspensa, usando o centro de massa como referência (θ)
3. O deslocamento vertical da massa não suspensa dianteira (z_d)
4. O deslocamento vertical da massa não suspensa traseira (z_t)

Estes 4 graus de liberdade são representados por 8 variáveis de estado, cada grau de liberdade corresponde a 2 variáveis de estado, que são representadas pelos graus de liberdade e suas derivadas, para o caso de Variáveis Lagrangeanas. Assim, as variáveis de estado são representadas pelo seguinte vetor:

$$\vec{X} = [z \quad \theta \quad z_d \quad z_t \quad v \quad \omega \quad v_d \quad v_t]^T$$

Assim, os elementos que restam para compreender a dinâmica vertical da motocicleta são as entradas, que podem ser separadas em dois tipos. O primeiro tipo consiste nas forças atuando em cada grau de liberdade do sistema, ou seja:

- A força vertical exercida no centro de gravidade da massa suspensa (F_z)
- O momento aplicado no centro de gravidade da massa suspensa (M_y)
- A força vertical aplicada na massa não suspensa dianteira (F_d)
- A força vertical aplicada na massa não suspensa traseira (F_t)

O outro tipo de entradas presentes no sistema são as excitações de base, os deslocamentos e velocidades de base, oriundas do perfil da estrada na qual a motocicleta se locomove, no pneu dianteiro e no pneu traseiro, respectivamente denominadas por z_{0d} , v_{0d} e z_{0t} , v_{0t} . Assim, as entradas do sistema são representadas pelo seguinte vetor:

$$\vec{U} = [F_z \quad M_y \quad F_d \quad F_t \quad z_{0d} \quad z_{0t} \quad v_{0d} \quad v_{0t}]^T$$

Uma vez que as variáveis de estado e as entradas do sistema estão definidas, o próximo passo é representar a motocicleta com um modelo físico, figura 2-2, de modo em que o mesmo possa ser estudado e analisado para obter os resultados de interesse.

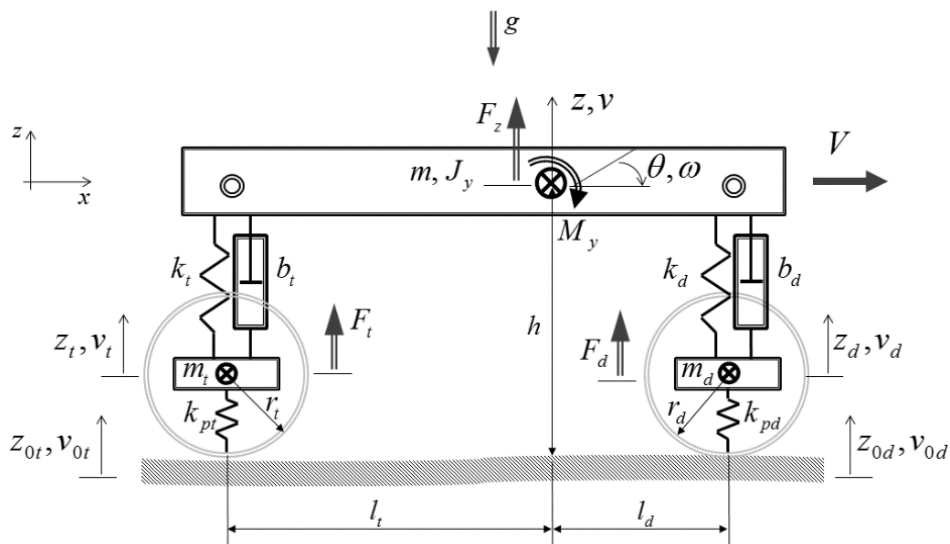


Figura 2-2: Modelo físico para análise da dinâmica vertical plana de uma motocicleta

Na figura 2-2 [1], aparecem novamente os mesmos elementos que foram citados anteriormente, as variáveis de estado e as entradas, mas desta vez com a relação entre cada elemento explicitada, por meio de componentes físicos e parâmetros associados aos mesmos.

A tabela 2-1 explica o que cada parâmetro representa, com o símbolo utilizado, e o valor adotado para o modelo de motocicleta a ser estudado. Os valores para cada parâmetro foram retirados da literatura [5], e foram pesquisados mais a fundo para verificar a coerência do valor estipulado.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Velocidade longitudinal	V	m/s (km/h)	50 (180)
Massa suspensa (veículo + condutor)	m	kg	250
Massas não suspensas (pneus e rodas)	m_d e m_t	kg	15
Momento de inércia de arfagem (veículo + condutor)	J_y	$kg.m^2$	45
Rigidez das molas das suspensões	k_d e k_t	N/m	15000
Amortecimento dos amortecedores das suspensões	b_d e b_t	N/m/s	1000
Rigidez dos pneus	k_{pd} e k_{pt}	N/m	150000
Distância do eixo dianteiro ao CM	l_d	m	0,7
Distância do eixo traseiro ao CM	l_t	m	0,8
Distância entre eixos	$l = l_d + l_t$	m	1,5
Altura do CM	h	m	0,6
Raios efetivos das rodas dianteira e traseira	r_d e r_t	m	0,25
Aceleração da gravidade	g	m/s^2	9,81

Tabela 2-1: Tabela com a descrição, símbolo usado, valor atribuído e unidade de medida para cada parâmetro

3. Desenvolvimento do Modelo Matemático

3.1. Equacionamento do modelo na forma de estado em Variáveis de Energia a partir do modelo de grafos de ligação

A partir do modelo físico estabelecido para modelar a dinâmica vertical da motocicleta, será realizado um procedimento para o desenvolvimento do modelo matemático do sistema dinâmico, baseado na técnica dos grafos de ligação [8]. Este procedimento permitirá a obtenção do modelo de estado representado pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem [4] expresso por:

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{U} \\ \vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U} \end{cases}$$

No qual:

- X é o vetor de variáveis de estado,
- A é a matriz de estado,
- U é o vetor de entradas,
- B é a matriz de entradas,
- Y é o vetor de saídas,
- C é a matriz que relaciona o estado com a saída
- D é a matriz que relaciona as entradas com a saída

A técnica dos grafos de ligação apresenta um procedimento consistente e bem estruturado para a formulação do modelo matemático, representado pelas equações de estado, e é desenvolvido a partir das equações constitutivas dos elementos componentes do grafo, manipuladas conveniente e ordenadamente até alcançar o resultado na forma de estado que for desejada.

O modelo físico para a dinâmica vertical simplificada da motocicleta é representado pelo modelo na figura 3-1.

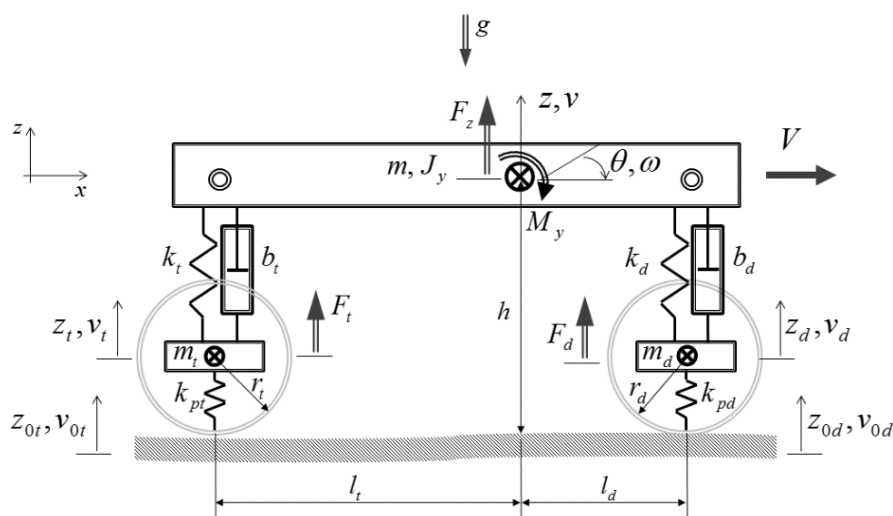


Figura 3-1: Modelo físico para a construção do grafo de ligação

O modelo físico para a dinâmica vertical com geometria simplificada da motocicleta pode ser representado pelo grafo de ligação na figura 3-2 [1], o mesmo

foi construído baseado nos componentes físicos presentes no modelo e como cada um se relaciona.

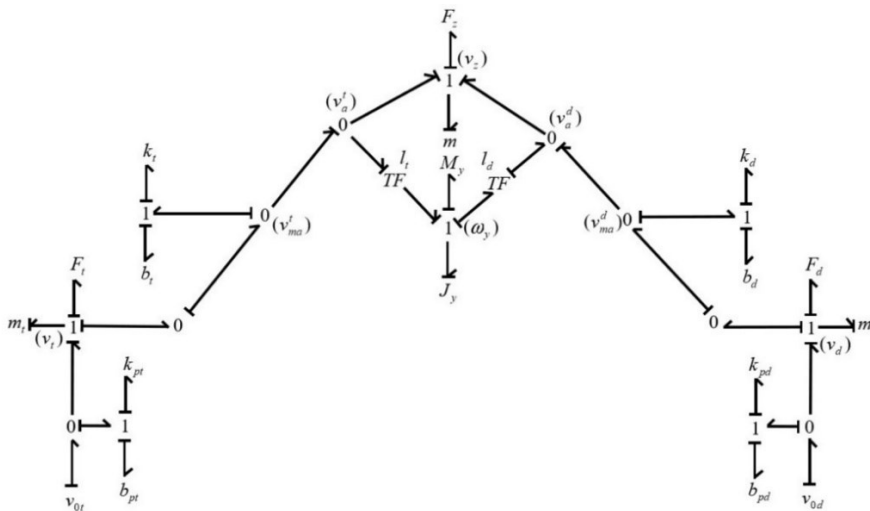


Figura 3-2: Grafo de ligação para o modelo da dinâmica vertical de uma motocicleta

Antes de escrever qualquer equação é necessário complementar o grafo de ligação na figura 3-2 com informações adicionais de modo a tornar o desenvolvimento do equacionamento ordenado (estruturado).

É necessário enumerar as ligações do grafo sequencialmente [8], na seguinte ordem:

- Ligações que conectam elementos armazenadores de energia (I e C) ao sistema
- Ligações referentes à elementos resistores presentes (R)
- Ligações com fontes de fluxo e fontes de esforço (respectivamente)
- Demais ligações entre elementos de restrição (0, 1 e Transformadores)

O resultado com as ligações enumeradas respeitando a ordem acima está representado na figura 3-3:

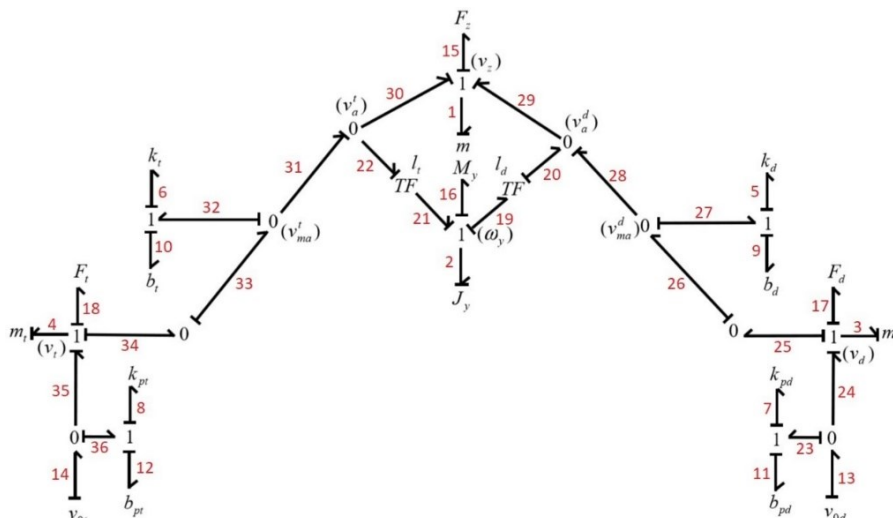


Figura 3-3: Grafo de ligação com ligações enumeradas

Uma vez enumeradas todas as ligações presentes, o grafo pode ser utilizado para o desenvolvimento do modelo matemático. Assim, o próximo passo é selecionar as entradas do sistema, de modo em que cada fonte presente no

grafo seja uma entrada. As fontes do sistema podem ser separadas em 2 tipos, fontes de esforço (e) e fontes de fluxo (f), com as fontes de esforço representando as forças atuando no sistema, e as fontes de fluxo representando as excitações de base presentes [8].

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z \\ M_y \\ F_d \\ F_t \\ v_{0d} \\ v_{0t} \end{bmatrix}$$

A partir do grafo de ligação com as ligações enumeradas, figura 3-3, de acordo com a causalidade e o sentido de potência e de esforço para cada componente, é possível obter as equações constitutivas de cada elemento assim como as equações de restrição [2].

Através das equações constitutivas de cada elemento e das equações de restrição, escritas de forma coerente com a causalidade, o próximo passo é formular o modelo matemático do sistema, esse sendo o conjunto inicial de equações algébricas e diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema e serão suficientes para a análise de seu comportamento [8].

As equações constitutivas a seguir são referentes aos elementos armazenadores de energia e elementos resistores:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = e_1 \\ f_1 = \frac{1}{I_1} p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = e_2 \\ f_2 = \frac{1}{I_2} p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_3 = e_3 \\ f_3 = \frac{1}{I_3} p_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_4 = e_4 \\ f_4 = \frac{1}{I_4} p_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_5 = f_5 \\ e_5 = \frac{1}{C_5} q_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_6 = f_6 \\ e_6 = \frac{1}{C_6} q_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_7 = f_7 \\ e_7 = \frac{1}{C_7} q_7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_8 = f_8 \\ e_8 = \frac{1}{C_8} q_8 \end{cases}$$

$$e_9 = R_9 f_9$$

$$e_{10} = R_{10} f_{10}$$

$$e_{11} = R_{11} f_{11}$$

$$e_{12} = R_{12} f_{12}$$

As demais equações do sistema são as equações constitutivas dos transformadores e as equações de restrição referentes às junções 0 e às junções 1 [8]. O equacionamento delas será separado em 3 segmentos, ilustrados na figura 3-4, feito com o intuito de facilitar a referência para cada equação.

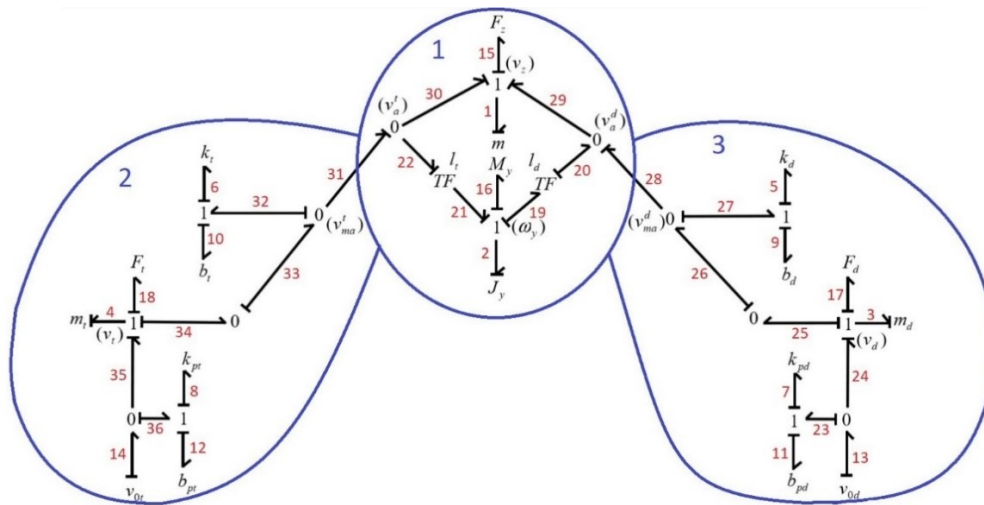


Figura 3-4: Grafo de ligação dividido em 3 segmentos

A seguir serão desenvolvidas as equações de restrição para as junções 0 e junções 1 [2], assim como as equações constitutivas dos transformadores.

Para o Segmento 1 do grafo de ligação, ilustrado na figura 3-5, as equações são as seguintes.

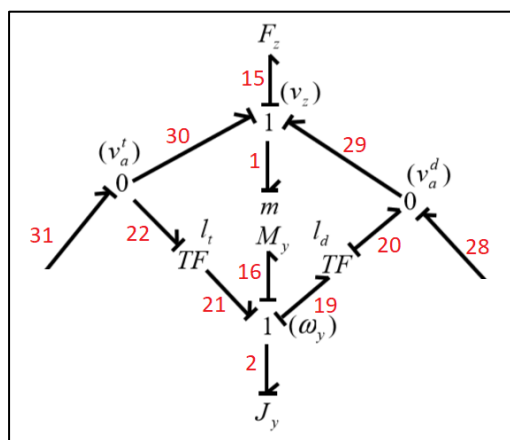


Figura 3-5: Segmento 1 do grafo de ligação

$$\begin{aligned} & 1 \left\{ \begin{array}{l} f_{15} = f_1 \\ f_{30} = f_1 \\ f_{29} = f_1 \\ e_1 = e_{30} + e_{29} - e_{15} \end{array} \right. \\ & 1 \left\{ \begin{array}{l} f_{16} = f_2 \\ f_{19} = f_2 \\ f_{21} = f_2 \\ e_2 = e_{21} - e_{19} - e_{16} \end{array} \right. \\ & TF \left\{ \begin{array}{l} f_{22} = l_t f_{21} \\ e_{21} = l_t e_{22} \end{array} \right. \\ & TF \left\{ \begin{array}{l} f_{20} = l_d f_{19} \\ e_{19} = l_d e_{20} \end{array} \right. \\ & 0 \left\{ \begin{array}{l} e_{30} = e_{31} \\ e_{22} = e_{31} \\ f_{31} = f_{22} + f_{30} \end{array} \right. \\ & 0 \left\{ \begin{array}{l} e_{29} = e_{28} \\ e_{20} = e_{28} \\ f_{28} = f_{29} - f_{20} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Para o Segmento 1 do grafo de ligação, ilustrado na figura 3-6 as equações são as seguintes:

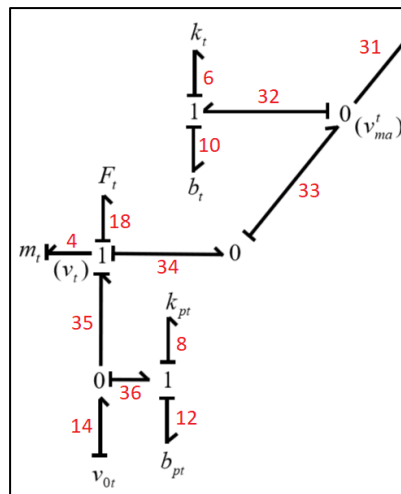


Figura 3-6: Segmento 2 do grafo de ligação

$$\begin{aligned} & 1 \left\{ \begin{array}{l} f_6 = f_{32} \\ f_{10} = f_{32} \\ e_{32} = e_6 + e_{10} \end{array} \right. \\ & 0 \left\{ \begin{array}{l} e_{33} = e_{32} \\ e_{31} = e_{32} \\ f_{32} = f_{33} - f_{31} \end{array} \right. \\ & 0 \left\{ \begin{array}{l} e_{34} = e_{33} \\ f_{33} = f_{34} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 f_{18} = f_4 \\
 f_{34} = f_4 \\
 f_{35} = f_4 \\
 e_4 = e_{35} - e_{34} - e_{18}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 e_{14} = e_{36} \\
 e_{35} = e_{36} \\
 f_{36} = f_{14} - f_{35}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 f_{12} = f_{36} \\
 f_8 = f_{36} \\
 e_{36} = e_8 + e_{12}
 \end{cases}$$

Para o Segmento 3 do grafo de ligação, ilustrado na figura 3-7 as equações são as seguintes:

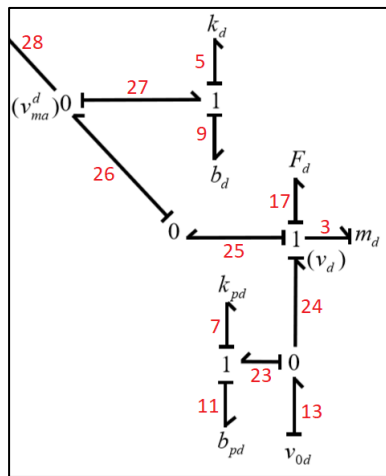


Figura 3-7: Segmento 3 do grafo de ligação

$$\begin{cases}
 e_{28} = e_{27} \\
 e_{26} = e_{27} \\
 f_{27} = f_{25} - f_{28}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 f_5 = f_{27} \\
 f_9 = f_{27} \\
 e_{27} = e_5 + e_9
 \end{cases}
 \begin{cases}
 e_{25} = e_{26} \\
 f_{26} = f_{25}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 f_{25} = f_3 \\
 f_{17} = f_3 \\
 f_{24} = f_3 \\
 e_3 = e_{24} - e_{25} - e_{17}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 f_7 = f_{23} \\
 f_{11} = f_{23} \\
 e_{23} = e_7 + e_{11}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 e_{13} = e_{23} \\
 e_{24} = e_{23} \\
 f_{23} = f_{13} - f_{24}
 \end{cases}$$

Uma vez que todas as equações foram definidas, é necessário selecionar quais serão as variáveis de estado. Essa seleção é feita a partir da determinação das variáveis de energia associadas aos elementos armazenadores. Quando a causalidade integral pode ser atribuída a todos os elementos C e I, tem-se que cada variável de energia associada a estes elementos é independente de todas as outras variáveis [8].

Portanto as variáveis que respeitam essa circunstância, e podem ser ditas como as variáveis de estado são:

$$\vec{X} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T$$

A partir do estabelecimento das variáveis de estado, é necessário manipular o conjunto inicial de equações de modo a obter um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, em função de cada variável de estado e das entradas, reduzindo o conjunto inicial de equações à forma de espaço de estado:

Variável de estado p_1 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= e_1 = e_{30} + e_{29} - e_{15} = e_{31} + e_{28} - e_{15} = e_{32} + e_{27} - e_{15} = e_6 + e_{10} + e_5 + e_9 - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= e_6 + R_{10}f_{10} + e_5 + R_9f_9 - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= e_6 + R_{10}f_{32} + e_5 + R_9f_{27} - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= e_6 + R_{10}(f_{34} - f_{31}) + e_5 + R_9(f_{25} - f_{28}) - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= e_6 + R_{10}(f_4 - (f_{22} + f_{30})) + e_5 + R_9(f_3 - (f_{29} - f_{20})) - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= e_6 + R_{10}(f_4 - (l_t f_{21} + f_1)) + e_5 + R_9(f_3 - (f_1 - l_d f_{19})) - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= e_6 + R_{10}f_4 - R_{10}(l_t f_2 + f_1) + e_5 q_5 + R_9 f_3 - R_9(f_1 - l_d f_2) - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= \frac{1}{C_6} q_6 + \frac{R_{10} p_4}{I_4} - \frac{R_{10} l_t p_2}{I_2} - \frac{R_{10} p_1}{I_1} + \frac{1}{C_5} q_5 + \frac{R_9 p_3}{I_3} - \frac{R_9 p_1}{I_1} + \frac{R_9 l_d p_2}{I_2} - e_{15} \\ \dot{p}_1 &= -\frac{R_{10} p_1}{I_1} - \frac{R_9 p_1}{I_1} - \frac{R_{10} l_t p_2}{I_2} + \frac{R_9 l_d p_2}{I_2} + \frac{R_9 p_3}{I_3} + \frac{R_{10} p_4}{I_4} + \frac{1}{C_5} q_5 + \frac{1}{C_6} q_6 - e_{15} \end{aligned}$$

Variável de estado p_2 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= e_2 = e_{21} - e_{19} - e_{16} = l_t e_{22} - l_d e_{20} - e_{16} = l_t e_{31} - l_d e_{28} - e_{16} = l_t e_{32} - l_d e_{27} - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= l_t(e_6 + e_{10}) - l_d(e_5 + e_9) - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= l_t(e_6 + R_{10}f_{10}) - l_d(e_5 + R_9f_9) - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= l_t(e_6 + R_{10}f_{32}) - l_d(e_5 + R_9f_{27}) - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= l_t(e_6 + R_{10}(f_{34} - f_{31})) - l_d(e_5 + R_9(f_{25} - f_{28})) - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= l_t(e_6 + R_{10}(f_4 - (f_{22} + f_{30}))) - l_d(e_5 + R_9(f_3 - (f_{29} - f_{20}))) - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= l_t(e_6 + R_{10}(f_4 - (l_t f_{21} + f_1))) - l_d(e_5 + R_9(f_3 - (f_1 - l_d f_{19}))) - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= l_t(e_6 + R_{10}f_4 - R_{10}(l_t f_2 + f_1)) - l_d(e_5 + R_9 f_3 - R_9(f_1 - l_d f_2)) - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= \frac{l_t}{C_6} q_6 + \frac{R_{10} l_t p_4}{I_4} - \frac{R_{10} l_t^2 p_2}{I_2} - \frac{R_{10} l_t p_1}{I_1} - \frac{l_d}{C_5} q_5 - \frac{R_9 l_d p_3}{I_3} + \frac{R_9 l_d p_1}{I_1} - \frac{R_9 l_d^2 p_2}{I_2} - e_{16} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{R_{10} l_t p_1}{I_1} + \frac{R_9 l_d p_1}{I_1} - \frac{R_{10} l_t^2 p_2}{I_2} - \frac{R_9 l_d^2 p_2}{I_2} - \frac{R_9 l_d p_3}{I_3} + \frac{R_{10} l_t p_4}{I_4} - \frac{l_d}{C_5} q_5 + \frac{l_t}{C_6} q_6 - e_{16} \end{aligned}$$

Variável de estado p_3 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 &= e_3 = e_{24} - e_{25} - e_{17} = e_{23} - e_{26} - e_{17} = e_{23} - e_{27} - e_{17} = (e_7 + e_{11}) - (e_5 + e_9) - e_{17} \\ \dot{p}_3 &= e_7 + R_{11}f_{11} - e_5 - R_9f_9 - e_{17} \\ \dot{p}_3 &= e_7 + R_{11}f_{23} - e_5 - R_9f_{27} - e_{17} \\ \dot{p}_3 &= e_7 + R_{11}(f_{13} - f_{24}) - e_5 - R_9(f_{25} - f_{28}) - e_{17} \\ \dot{p}_3 &= e_7 + R_{11}(f_{13} - f_3) - e_5 - R_9(f_3 - (f_{29} - f_{20})) - e_{17} \\ \dot{p}_3 &= e_7 + R_{11}f_{13} - R_{11}f_3 - e_5 - R_9f_3 - R_9(f_1 - l_d f_{19}) - e_{17} \\ \dot{p}_3 &= e_7 + R_{11}f_{13} - R_{11}f_3 - e_5 - R_9f_3 + R_9(f_1 - l_d f_2) - e_{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 &= \frac{q_7}{C_7} + R_{11}f_{13} - \frac{R_{11}p_3}{I_3} - \frac{q_5}{C_5} - \frac{R_9p_3}{I_3} + \frac{R_9p_1}{I_1} - \frac{R_9l_d p_2}{I_2} - e_{17} \\ \dot{p}_3 &= + \frac{R_9p_1}{I_1} - \frac{R_9l_d p_2}{I_2} - \frac{R_9p_3}{I_3} - \frac{R_{11}p_3}{I_3} - \frac{q_5}{C_5} + \frac{q_7}{C_7} - e_{17} + R_{11}f_{13} \end{aligned}$$

Variável de estado p_4 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_4 &= e_4 = e_{35} - e_{34} - e_{18} = e_{36} - e_{33} - e_{18} = e_{36} - e_{32} - e_{18} = (e_8 + e_{12}) - (e_6 + e_{10}) - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= e_8 + R_{12}f_{12} - e_6 - R_{10}f_{10} - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= e_8 + R_{12}f_{36} - e_6 - R_{10}f_{32} - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= e_8 + R_{12}(f_{14} - f_{35}) - e_6 - R_{10}(f_{34} - f_{31}) - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= e_8 + R_{12}(f_{14} - f_4) - e_6 - R_{10}(f_4 - (f_{22} + f_{30})) - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= e_8 + R_{12}f_{14} - R_{12}f_4 - e_6 - R_{10}f_4 - R_{10}(l_t f_{21} + f_1) - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= e_8 + R_{12}f_{14} - R_{12}f_4 - e_6 - R_{10}f_4 - R_{10}(l_t f_2 + f_1) - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= \frac{q_8}{C_8} + R_{12}f_{14} - \frac{R_{12}p_4}{I_4} - \frac{q_6}{C_6} - \frac{R_{10}p_4}{I_4} + \frac{R_{10}l_t p_2}{I_2} + \frac{R_{10}p_1}{I_1} - e_{18} \\ \dot{p}_4 &= + \frac{R_{10}p_1}{I_1} + \frac{R_{10}l_t p_2}{I_2} - \frac{R_{10}p_4}{I_4} - \frac{R_{12}p_4}{I_4} - \frac{q_6}{C_6} + \frac{q_8}{C_8} - e_{18} + R_{12}f_{14} \end{aligned}$$

Variável de estado q_5 :

$$\begin{aligned} \dot{q}_5 &= f_5 = f_{27} = f_{25} - f_{28} = f_3 - (f_{29} - f_{20}) = f_3 - (f_1 - l_d f_{19}) = f_3 - (f_1 - l_d f_2) \\ \dot{q}_5 &= \frac{p_3}{I_3} - \frac{p_1}{I_1} + \frac{l_d p_2}{I_2} \\ \dot{q}_5 &= -\frac{p_1}{I_1} + \frac{l_d p_2}{I_2} + \frac{p_3}{I_3} \end{aligned}$$

Variável de estado q_6 :

$$\begin{aligned} \dot{q}_6 &= f_6 = f_{32} = f_{34} - f_{31} = f_4 - (f_{22} + f_{30}) = f_4 - (l_t f_{21} + f_1) = f_4 - (l_t f_2 + f_1) \\ \dot{q}_6 &= \frac{p_4}{4} - \frac{l_t p_2}{I_2} - \frac{p_1}{I_1} \\ \dot{q}_6 &= -\frac{p_1}{I_1} - \frac{l_t p_2}{I_2} + \frac{p_4}{4} \end{aligned}$$

Variável de estado q_7 :

$$\begin{aligned} \dot{q}_7 &= f_7 = f_{23} = f_{13} - f_{24} = f_{13} - f_3 \\ \dot{q}_7 &= f_{13} - \frac{p_3}{I_3} \\ \dot{q}_7 &= -\frac{p_3}{I_3} + f_{13} \end{aligned}$$

Variável de estado q_8 :

$$\begin{aligned} \dot{q}_8 &= f_8 = f_{36} = f_{14} - f_{35} = f_{14} - f_4 \\ \dot{q}_8 &= f_{14} - \frac{p_4}{I_4} \\ \dot{q}_8 &= -\frac{p_4}{I_4} + f_{14} \end{aligned}$$

A partir da equação para cada variável de estado, é possível construir uma matriz para representar o sistema de equações, na qual cada linha corresponde a uma equação obtida, uma para a derivada de cada variável de estado [2].

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(R_9 + R_{10})}{I_1} & -\frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_2} & \frac{R_9}{I_3} & \frac{R_{10}}{I_4} & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & 0 & 0 \\ \frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_1} & -\frac{(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2)}{I_2} & -\frac{R_9l_d}{I_3} & \frac{R_{10}l_t}{I_4} & -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & 0 \\ \frac{R_9}{I_1} & -\frac{R_9l_d}{I_2} & -\frac{(R_9 + R_{11})}{I_3} & 0 & -\frac{1}{C_5} & 0 & \frac{1}{C_7} & 0 \\ \frac{R_{10}}{I_1} & \frac{R_{10}l_t}{I_2} & 0 & -\frac{(R_{10} + R_{12})}{I_4} & 0 & -\frac{1}{C_6} & 0 & \frac{1}{C_8} \\ -\frac{1}{I_1} & \frac{l_d}{I_2} & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{l_t}{I_2} & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{l_t}{I_2} & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & R_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix}$$

3.1 – Manipulação algébrica do modelo na forma de estado em Variáveis de Energia para chegar ao modelo na forma de estado em Variáveis Lagrangeanas

Para obter o modelo na forma de Variáveis Lagrangeanas, primeiramente, é necessário transformar o modelo na forma de Estado em Variáveis de Energia para Variáveis de Potência e Energia [2], de acordo com as substituições abaixo:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{I_1} p_1 \\
 f_2 &= \frac{1}{I_2} p_2 \\
 f_3 &= \frac{1}{I_3} p_3 \\
 f_4 &= \frac{1}{I_4} p_4 \\
 q_5 &= q_5 \\
 q_6 &= q_6 \\
 q_7 &= q_7 \\
 q_8 &= q_8
 \end{aligned}
 \rightarrow \vec{X}_{PE} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} = T \vec{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\vec{X}_{PE} = T\vec{X} \quad \rightarrow \quad \vec{X} = T^{-1}\vec{X}_{PE}$$

E substituindo na equação diferencial de primeira ordem para o vetor das variáveis de estado [2], obtém-se:

$$\vec{\dot{X}} = A\vec{X} + B\vec{U} \quad \rightarrow \quad T^{-1}\vec{\dot{X}}_{PE} = AT^{-1}\vec{X}_{PE} + B\vec{U} \quad \rightarrow \quad \vec{\dot{X}}_{PE} = TAT^{-1}\vec{X}_{PE} + TB\vec{U} = A_{PE}\vec{X}_{PE} + B_{PE}\vec{U}$$

Logo,

$$A_{PE} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{(R_9 + R_{10})}{I_1} & -\frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_2} & \frac{R_9}{I_3} & \frac{R_{10}}{I_4} & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & 0 & 0 \\ \frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_1} & -\frac{(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2)}{I_2} & -\frac{R_9l_d}{I_3} & \frac{R_{10}l_t}{I_4} & -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & 0 \\ \frac{R_9}{I_1} & -\frac{R_9l_d}{I_2} & -\frac{(R_9 + R_{11})}{I_3} & 0 & -\frac{1}{C_5} & 0 & \frac{1}{C_7} & 0 \\ \frac{R_{10}}{I_1} & \frac{R_{10}l_t}{I_2} & 0 & -\frac{(R_{10} + R_{12})}{I_4} & 0 & -\frac{1}{C_6} & 0 & \frac{1}{C_8} \\ -\frac{1}{I_1} & \frac{l_d}{I_2} & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{l_t}{I_2} & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -(R_9 + R_{10}) & -(R_{10}l_t - R_9l_d) & R_9 & R_{10} & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & 0 & 0 \\ -(R_{10}l_t - R_9l_d) & -(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2) & -R_9l_d & R_{10}l_t & -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & 0 \\ R_9 & -R_9l_d & -(R_9 + R_{11}) & 0 & -\frac{1}{C_5} & 0 & \frac{1}{C_7} & 0 \\ R_{10} & R_{10}l_t & 0 & -(R_{10} + R_{12}) & 0 & -\frac{1}{C_6} & 0 & \frac{1}{C_8} \\ -1 & l_d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -l_t & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{PE} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_9 + R_{10})}{I_1} & -\frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_1} & \frac{R_9}{I_1} & \frac{R_{10}}{I_1} & \frac{1}{I_1C_5} & \frac{1}{I_1C_6} & 0 & 0 \\ \frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_2} & -\frac{(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2)}{I_2} & -\frac{R_9l_d}{I_2} & \frac{R_{10}l_t}{I_2} & -\frac{l_d}{I_2C_5} & \frac{l_t}{I_2C_6} & 0 & 0 \\ \frac{R_9}{I_3} & -\frac{R_9l_d}{I_3} & -\frac{(R_9 + R_{11})}{I_3} & 0 & -\frac{1}{I_3C_5} & 0 & \frac{1}{I_3C_7} & 0 \\ \frac{R_{10}}{I_4} & \frac{R_{10}l_t}{I_4} & 0 & -\frac{(R_{10} + R_{12})}{I_4} & 0 & -\frac{1}{I_4C_6} & 0 & \frac{1}{I_4C_8} \\ -1 & l_d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -l_t & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{PE} = TB = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & R_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & R_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O modelo na forma de estado de variáveis de Potência e Energia, então, pode ser representado pelo sistema de equações a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \\ \dot{f}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_9 + R_{10})}{I_1} & -\frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_1} & \frac{R_9}{I_1} & \frac{R_{10}}{I_1} & \frac{1}{I_1C_5} & \frac{1}{I_1C_6} & 0 & 0 \\ \frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_2} & -\frac{(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2)}{I_2} & -\frac{R_9l_d}{I_2} & \frac{R_{10}l_t}{I_2} & -\frac{l_d}{I_2C_5} & \frac{l_t}{I_2C_6} & 0 & 0 \\ \frac{R_9}{I_3} & -\frac{R_9l_d}{I_3} & -\frac{(R_9 + R_{11})}{I_3} & 0 & -\frac{1}{I_3C_5} & 0 & \frac{1}{I_3C_7} & 0 \\ \frac{R_{10}}{I_4} & \frac{R_{10}l_t}{I_4} & 0 & -\frac{(R_{10} + R_{12})}{I_4} & 0 & -\frac{1}{I_4C_6} & 0 & \frac{1}{I_4C_8} \\ -1 & l_d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -l_t & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix}$$

Para possibilitar que o sistema seja transformado em Variáveis Lagrangeanas, o mesmo pode ser reescrito da seguinte maneira [2]:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \\ \dot{f}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(R_9 + R_{10}) & -(R_{10}l_t - R_9l_d) & R_9 & R_{10} \\ -(R_{10}l_t - R_9l_d) & -(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2) & -R_9l_d & R_{10}l_t \\ R_9 & -R_9l_d & -(R_9 + R_{11}) & 0 \\ R_{10} & R_{10}l_t & 0 & -(R_{10} + R_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & 0 & 0 \\ -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_5} & 0 & \frac{1}{C_7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_6} & 0 & \frac{1}{C_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [-1 & 0 & 0 & 0] \\ [0 & -1 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & -1 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & -1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-1 & l_d & 1 & 0] \\ [-1 & -l_t & 0 & 1] \\ [0 & 0 & -1 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & -1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix}$$

$$\text{Se sabe que } \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & l_d & 1 & 0 \\ -1 & -l_t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix}$$

Sendo

$$\begin{cases} v_1 = f_1 & \dot{x}_1 = v_1 \\ v_2 = f_2 & \dot{x}_2 = v_2 \\ v_3 = f_3 & \dot{x}_3 = v_3 \\ v_4 = f_4 & \dot{x}_4 = v_4 \\ V_1 = f_{13} & \dot{X}_1 = V_1 \\ V_2 = f_{14} & \dot{X}_2 = V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & l_d & 1 & 0 \\ -1 & -l_t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo } \begin{bmatrix} \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & 0 & 0 \\ -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_5} & 0 & \frac{1}{C_7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_6} & 0 & \frac{1}{C_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & 0 & 0 \\ -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_5} & 0 & \frac{1}{C_7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_6} & 0 & \frac{1}{C_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [-1 & l_d & 1 & 0] \\ [-1 & -l_t & 0 & 1] \\ [0 & 0 & -1 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & -1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_5} - \frac{1}{C_6} & \frac{l_d}{C_5} - \frac{l_t}{C_6} & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} \\ \frac{l_d}{C_5} - \frac{l_t}{C_6} & -\frac{l_d^2}{C_5} - \frac{l_t^2}{C_6} & -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} \\ \frac{1}{C_5} & -\frac{l_d}{C_5} & -\frac{1}{C_5} - \frac{1}{C_7} & 0 \\ \frac{1}{C_6} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & -\frac{1}{C_6} - \frac{1}{C_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{C_7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}\right) & -\left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} \\ -\left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & -\left(\frac{l_t^2}{C_6} + \frac{l_d^2}{C_5}\right) & -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} \\ \frac{1}{C_5} & -\frac{l_d}{C_5} & -\left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_7}\right) & 0 \\ \frac{1}{C_6} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & -\left(\frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{C_7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

O modelo na forma de Estado em Variáveis Lagrangeanas pode ser escrito da mesma maneira descrita acima, mas com as substituições apropriadas:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(R_9 + R_{10}) & -(R_{10}l_t - R_9l_d) & R_9 & R_{10} \\ -(R_{10}l_t - R_9l_d) & -(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2) & -R_9l_d & R_{10}l_t \\ R_9 & -R_9l_d & -(R_9 + R_{11}) & 0 \\ R_{10} & R_{10}l_t & 0 & -(R_{10} + R_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}\right) & -\left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} \\ -\left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & -\left(\frac{l_t^2}{C_6} + \frac{l_d^2}{C_5}\right) & -\frac{l_d}{C_5} & \frac{l_t}{C_6} \\ \frac{1}{C_5} & -\frac{l_d}{C_5} & -\left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_7}\right) & 0 \\ \frac{1}{C_6} & \frac{l_t}{C_6} & 0 & -\left(\frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ X_1 \\ X_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando as matrizes, encontra-se o modelo na forma de Estado em Variáveis Lagrangeanas, que é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_9 + R_{10})}{I_1} & -\frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_1} & \frac{R_9}{I_1} & \frac{R_{10}}{I_1} & -\frac{\left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}\right)}{I_1} & -\frac{\left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right)}{I_1} & \frac{1}{I_1 C_5} & \frac{1}{I_1 C_6} \\ -\frac{(R_{10}l_t - R_9l_d)}{I_2} & -\frac{(R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2)}{I_2} & -\frac{R_9l_d}{I_2} & \frac{R_{10}l_t}{I_2} & -\frac{\left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right)}{I_2} & -\frac{\left(\frac{l_t^2}{C_6} + \frac{l_d^2}{C_5}\right)}{I_2} & -\frac{l_d}{I_2 C_5} & \frac{l_t}{I_2 C_6} \\ \frac{R_9}{I_3} & \frac{R_9l_d}{I_3} & -\frac{(R_9 + R_{11})}{I_3} & 0 & \frac{1}{I_3 C_5} & -\frac{l_d}{I_3 C_5} & -\frac{\left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_7}\right)}{I_3} & 0 \\ \frac{R_{10}}{I_4} & \frac{R_{10}l_t}{I_4} & 0 & -\frac{(R_{10} + R_{12})}{I_4} & \frac{1}{I_4 C_6} & \frac{l_t}{I_4 C_6} & 0 & -\frac{\left(\frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_8}\right)}{I_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 & \frac{1}{I_3 C_5} & 0 & R_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_4} & 0 & \frac{1}{I_4 C_6} & 0 & R_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ X_1 \\ X_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo a representação de cada elemento com sua respectiva variável ou parâmetro [2], as seguintes matrizes para representar o modelo são obtidas.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \\ \dot{v}_d \\ \dot{v}_t \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z}_d \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(b_d + b_t)}{m} & -\frac{(b_t l_t - b_d l_d)}{m} & \frac{b_d}{m} & \frac{b_t}{m} & -\frac{(k_d + k_t)}{m} & -\frac{(l_t k_t - l_d k_d)}{m} & \frac{k_d}{m} & \frac{k_t}{m} \\ -\frac{(b_t l_t - b_d l_d)}{J} & -\frac{(b_t l_t^2 + b_d l_d^2)}{J} & -\frac{b_d l_d}{J} & \frac{b_t l_t}{J} & -\frac{(l_t k_t - l_d k_d)}{J} & -\frac{(l_t^2 k_t + l_d^2 k_d)}{J} & -\frac{l_d k_d}{J} & \frac{l_t k_t}{J} \\ \frac{b_d}{m_d} & -\frac{b_d l_d}{m_d} & -\frac{(b_d + b_{pd})}{m_d} & 0 & \frac{k_d}{m_d} & -\frac{l_d k_d}{m_d} & -\frac{(k_d + k_{pd})}{m_d} & 0 \\ \frac{b_t}{m_t} & \frac{b_t l_t}{m_t} & 0 & -\frac{(b_t + b_{pt})}{m_t} & \frac{k_t}{m_t} & \frac{l_t k_t}{m_t} & 0 & -\frac{(k_t + k_{pt})}{m_t} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ v_d \\ v_t \\ z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m_d} & 0 & \frac{k_d}{m_d} & 0 & b_{pd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_t} & 0 & \frac{k_t}{m_t} & 0 & b_{pt} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ M_y \\ F_d \\ F_t \\ z_{0d} \\ z_{0t} \\ v_{0d} \\ v_{0t} \end{bmatrix}$$

Uma vez determinada a equação diferencial de primeira ordem do vetor das variáveis de estado, é possível escrever o modelo de estado na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem [4], definido no início do capítulo:

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{U} \\ \vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U} \end{cases}$$

Onde a equação diferencial de primeira ordem do vetor de variáveis de estado já foi definida pelas matrizes acima:

$$\vec{X} = [v \ \omega \ v_d \ v_t \ z \ \theta \ z_d \ z_t]^{-T}$$

Desta forma, resta definir a equação diferencial de primeira ordem do vetor de saídas, composto pelas relações entre as matrizes C e D e os vetores de variáveis de estado e de entrada. Como as variáveis de saída de interesse são as próprias variáveis de estado, a matriz C será a matriz de identidade e a matriz D será nula.

$$\vec{Y} = \vec{X}$$

A partir do modelo na forma de Variáveis Lagrangeanas, é possível escrever o modelo na forma de Equações de Movimento [2]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\vec{v}} \\ \ddot{\vec{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-M^{-1}B] & [-M^{-1}K] \\ [I]_4 & [0]_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-M^{-1}] & [M^{-1}K_0] & [M^{-1}B_0] \\ [0]_{4 \times \dim \vec{F}} & [0]_{4 \times \dim \vec{X}_0} & [0]_{4 \times \dim \vec{V}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{X}_0 \\ \vec{V}_0 \end{bmatrix}$$

Onde,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} (R_9 + R_{10}) & (R_{10}l_t - R_9l_d) & -R_9 & -R_{10} \\ (R_{10}l_t - R_9l_d) & (R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2) & R_9l_d & -R_{10}l_t \\ -R_9 & R_9l_d & R_9 + R_{11} & 0 \\ -R_{10} & -R_{10}l_t & 0 & R_{10} + R_{12} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}\right) & \left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & -\frac{1}{C_5} & -\frac{1}{C_6} \\ \left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & \left(\frac{l_t^2}{C_6} + \frac{l_d^2}{C_5}\right) & \frac{l_d}{C_5} & -\frac{l_t}{C_6} \\ -\frac{1}{C_5} & \frac{l_d}{C_5} & \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_7}\right) & 0 \\ -\frac{1}{C_6} & -\frac{l_t}{C_6} & 0 & \left(\frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_8}\right) \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{C_7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_8} \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix}$$

O sistema pode ser escrito da seguinte forma [2]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_4 & [I]_4 \\ [-M^{-1}K] & [-M^{-1}B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0]_{4 \times \dim \vec{F}} & [0]_{4 \times \dim \vec{X}_0} & [0]_{4 \times \dim \vec{V}_0} \\ [M^{-1}] & [M^{-1}K_0] & [M^{-1}B_0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{X}_0 \\ \vec{V}_0 \end{bmatrix}$$

E a partir dele, o modelo na forma de Equações de Movimento é definido por [4]:

$$M\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F} + K_0\vec{X}_0 + B_0\vec{V}_0$$

Em forma matricial, o modelo na forma de Equações de Movimento fica da seguinte maneira.

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (R_9 + R_{10}) & (R_{10}l_t - R_9l_d) & -R_9 & -R_{10} \\ (R_{10}l_t - R_9l_d) & (R_{10}l_t^2 + R_9l_d^2) & R_9l_d & -R_{10}l_t \\ -R_9 & R_9l_d & R_9 + R_{11} & 0 \\ -R_{10} & -R_{10}l_t & 0 & R_{10} + R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}\right) & \left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & -\frac{1}{C_5} & -\frac{1}{C_6} \\ \left(\frac{l_t}{C_6} - \frac{l_d}{C_5}\right) & \left(\frac{l_t^2}{C_6} + \frac{l_d^2}{C_5}\right) & \frac{l_d}{C_5} & -\frac{l_t}{C_6} \\ -\frac{1}{C_5} & \frac{l_d}{C_5} & \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_7}\right) & 0 \\ -\frac{1}{C_6} & -\frac{l_t}{C_6} & 0 & \left(\frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{C_7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo os elementos do grafo de ligação pelos parâmetros do modelo, o resultado obtido para a forma de Equações de Movimento está apresentado a seguir.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{z}_d \\ \ddot{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_d + b_t) & (b_t l_t - b_d l_d) & -b_d & -d_t \\ (b_t l_t - b_d l_d) & (b_t l_t^2 + b_d l_d^2) & b_d l_d & -b_t l_t \\ -b_d & b_d l_d & b_d + b_{pd} & 0 \\ -b_t & -b_t l_t & 0 & b_t + b_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z}_d \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_d + k_t) & (l_t k_t - l_d k_d) & -k_d & -k_t \\ (l_t k_t - l_d k_d) & (l_t^2 k_t + l_d^2 k_d) & l_d k_d & -l_t k_t \\ -k_d & l_d k_d & k_d + k_{pd} & 0 \\ -k_t & -l_t k_t & 0 & k_t + k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ M_y \\ F_d \\ F_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{pd} & 0 \\ 0 & k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0d} \\ z_{0t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{pd} & 0 \\ 0 & b_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0d} \\ v_{0t} \end{bmatrix}$$

O equacionamento para o sistema foi elaborado a partir de um modelo físico para a dinâmica vertical simplificada de uma motocicleta, isso significa que o exato mesmo procedimento pode ser feito para um modelo físico para a dinâmica vertical incluindo geometria, que é representado pelas figuras 3-8 e 3-9 [1].

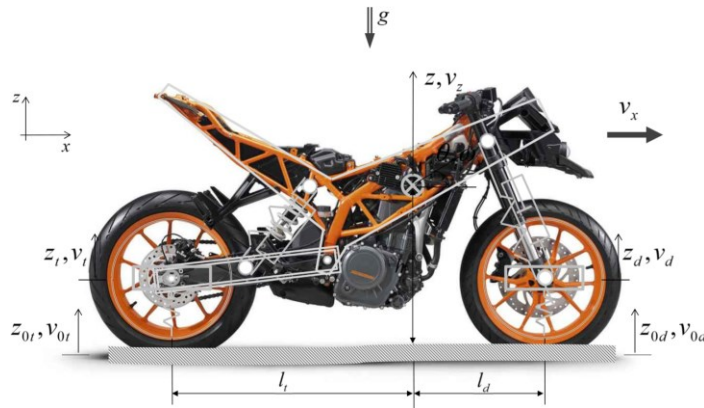


Figura 3-8: Representação física da dinâmica vertical de uma motocicleta, incluindo geometria

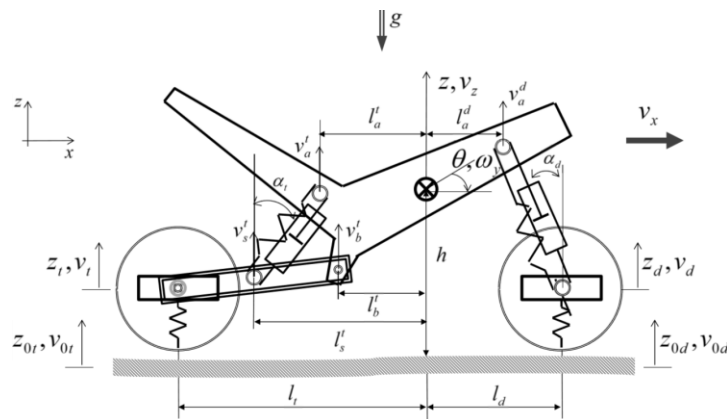


Figura 3-9: Modelo físico incluindo geometria para a dinâmica vertical de uma motocicleta

Do mesmo modo em que o modelo físico para a dinâmica vertical simplificada da motocicleta, o modelo físico para a dinâmica vertical com geometria também pode ser representado por um grafo de ligação [1], construído a partir dos sistemas mais complexos presentes no modelo.

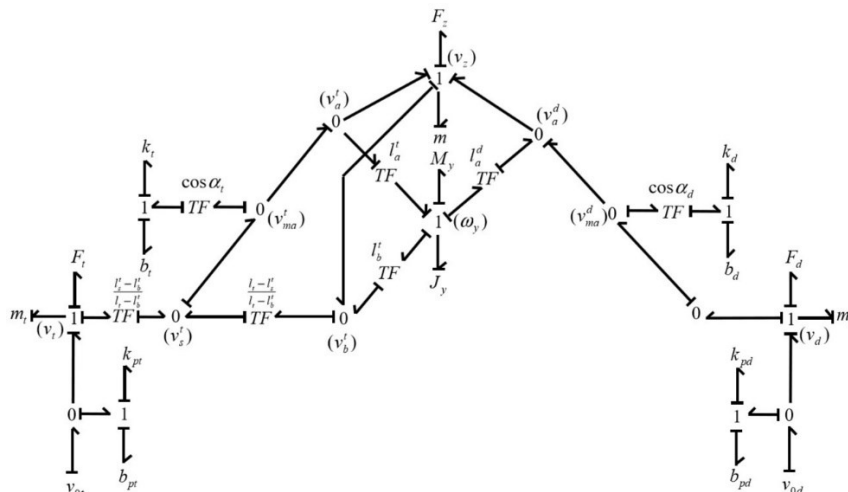


Figura 3-10: Grafo de ligação do modelo físico incluindo geometria para a motocicleta

A partir do grafo de ligação do modelo físico para a dinâmica vertical com geometria, o mesmo procedimento pode ser feito para chegar ao modelo na forma de Equações de Movimento. O desenvolvimento para o modelo físico para a dinâmica vertical com geometria fica como referência para futuros trabalhos a serem desenvolvidos.

4. Análise Preliminar do Sistema

A partir do modelo matemático obtido para a dinâmica vertical de uma motocicleta, é possível realizar algumas análises iniciais em relação ao comportamento da motocicleta, de acordo com os parâmetros associados ao sistema.

4.1. Análise em Regime Permanente

A partir do modelo em forma de Equações de Movimento é possível calcular como será o comportamento do sistema ao atingir o regime permanente. Esse comportamento será definido de acordo com as diferentes entradas que o sistema vai ser sujeito à.

$$M\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F} + K_0\vec{X}_0 + B_0\vec{V}_0$$

A partir da representação da dinâmica do modelo em forma de Equações de Movimento, o comportamento do sistema no regime permanente é encontrado ao analisar como o sistema vai estar quando o mesmo se estabilizar por completo. Quando um sistema se estabiliza por completo, é compreendido que não haverá nenhum componente de velocidade nem de aceleração presente na dinâmica [6], portanto os vetores $\ddot{\vec{x}}$ e $\dot{\vec{x}}$, que são referentes à aceleração e velocidade, respectivamente, serão nulos. Logo, o sistema em regime permanente é descrito pelo sistema a seguir.

$$K\vec{x} = \vec{F} + K_0\vec{X}_0 + B_0\vec{V}_0$$

Como a matriz B_0 é nula, o termo $B_0\vec{V}_0$ não será considerado.

Ao multiplicar ambos os lados pela matriz inversa de K :

$$K^{-1}K\vec{x} = K^{-1}\vec{F} + K^{-1}K_0\vec{X}_0$$

$$\vec{x} = K^{-1}\vec{F} + K^{-1}K_0\vec{X}_0$$

Portanto, para encontrar o comportamento do sistema em regime permanente, basta realizar as multiplicações matriciais descritas, atribuindo os valores desejados para cada uma das entradas de F e de X_0 .

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -F_z \\ -M_y \\ -F_d \\ -F_t \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} z_{0d} \\ z_{0t} \end{bmatrix}$$

Uma série de simulações foram feitas para o regime permanente, atribuindo alguns valores diferentes para o conjunto de entradas do sistema, a fim de analisar como o mesmo vai reagir a cada conjunto, para assim, compreender um pouco mais da sua dinâmica.

Lembrando que as respostas obtidas estão todas na forma do vetor de graus de liberdade do sistema (z, θ, z_d, z_t).

4.1.1. Simulação #1 para a dinâmica em regime permanente

O primeiro conjunto de entradas utilizado foi uma representação da força exercida pela gravidade atuando em cada uma das 3 massas presentes no sistema, e é dada pelos vetores a seguir:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -mg \\ 0 \\ -m_d g \\ -m_t g \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O resultado obtido para o regime permanente foi:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0913 \\ 0,0080 \\ -0,0097 \\ -0,0086 \end{bmatrix}$$

É possível observar que, como esperado, o sistema inteiro teve um movimento para baixo, devido a direção da aplicação das forças no mesmo sentido. Também se observa que o fato do centro de massa ser mais próximo ao eixo dianteiro do que ao eixo traseiro impacta a dinâmica do sistema, e de maneira lógica, com o ângulo de guinada recebendo um valor positivo. Percebe-se ainda que o sistema de suspensão executa bem o seu papel, ao fazer com que o peso do veículo e do condutor não impacte significativamente no deslocamento vertical das rodas. Impacto que pode ser percebido pelo fato do deslocamento vertical da roda dianteira ser maior que o deslocamento vertical da roda traseira, que ocorre também pelo fato do centro de massa ser mais próximo do eixo dianteiro.

4.1.2. Simulação #2 para a dinâmica em regime permanente

O segundo conjunto de entradas utilizado foi uma excitação de base em forma de degrau de 10cm no nível do chão da roda dianteira, e é dada pelos vetores a seguir:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O resultado obtido para o regime permanente foi:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0533 \\ -0,0667 \\ 0,1000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

A resposta do sistema nos mostra que apenas a roda dianteira se desloca devido a excitação de base de 10cm, e que o veículo e o condutor se deslocam para cima com uma distância um pouco acima da média da distância em que a roda dianteira e a roda traseira se deslocam. O fato da distância ser um pouco maior também pode ser explicada pelo fato do centro de massa ser mais próximo do eixo dianteiro. E por fim, a resposta do ângulo de guinada condiz com o degrau na roda dianteira, inclinando para trás.

4.1.3. Simulação #3 para a dinâmica em regime permanente

O terceiro conjunto de entradas utilizado foi uma excitação de base em forma de degrau de 10cm no nível do chão da roda traseira, e é dada pelos vetores a seguir:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

O resultado obtido para o regime permanente foi:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0467 \\ 0,0667 \\ 0,0000 \\ 0,1000 \end{bmatrix}$$

O resultado obtido é muito similar ao que foi apresentado para um degrau na roda dianteira, para o caso do degrau na roda traseira, apenas a roda traseira se desloca para cima, o veículo e o condutor se deslocam para cima com influência de ambas as rodas, mas um pouco mais de influência da roda dianteira, pelo fato do centro de massa ser mais próximo de tal. E novamente, a resposta do ângulo de guinada condiz com o degrau na roda traseira, inclinando para frente.

4.1.4. Simulação #4 para a dinâmica em regime permanente

O quarto conjunto de entradas utilizado foi uma representação da força exercida pela gravidade atuando em cada uma das 3 massas presentes no sistema, e um momento positivo exercido pelo condutor:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -mg \\ 0,18mg \\ -m_d g \\ -m_t g \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O resultado obtido para o regime permanente foi:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0927 \\ 0,0368 \\ -0,0117 \\ -0,0066 \end{bmatrix}$$

O resultado obtido para esse conjunto de entradas é parecido com o resultado que foi obtido apenas para a aplicação das forças exercidas pela gravidade em cada um dos componentes de massa, mas com pequenas variações em cada linha do vetor. O ângulo de guinada naturalmente aumenta, devido ao momento na mesma direção, e a roda dianteira se move para baixo para suportar o momento aplicado, de forma análoga a roda traseira que sobe um pouco para compensar a carga maior no eixo dianteiro.

4.2. Análise dos Autovalores, Frequências Naturais e Fatores de Amortecimento

Com o sistema físico representado em uma matriz de estado em Variáveis Lagrangeanas, e o valor para cada um dos parâmetros presentes no sistema definidos, é possível realizar uma análise inicial da dinâmica esperada para o sistema através dos seus autovalores, que por sua vez foram obtidos utilizando o MATLAB, e sua função **eig**, e estão representados a seguir.

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{1,2} = -33,9020 \pm 96,9278 j \\ \lambda_{3,4} = -33,9186 \pm 90,5292 j \\ \lambda_{5,6} = -3,4054 \pm 10,0733 j \\ \lambda_{7,8} = -11,9962 \pm 16,1229 j \end{cases}$$

É possível observar que todos os autovalores do sistema têm parte real negativa, o que representa que o sistema será estável e atingirá o regime permanente. Além disso, todos os autovalores pertencem a um par de autovalores complexos conjugados, de modo em que todos os pares de autovalores têm um comportamento de amortecimento subcrítico, ou seja, a dinâmica do sistema será oscilatória e ao atingir o regime permanente, vai possuir comportamento estável e estacionário.

A partir dos autovalores obtidos, ainda é possível calcular a frequência natural (ω_n), o fator de amortecimento (ζ), a constante de tempo (τ) e o tempo de estabilização (T_s) para cada par de autovalor do sistema o sistema.

Um par de autovalores complexo conjugado $i, i+1$ é representado pela equação a seguir [6].

$$\lambda_{i,i+1} = -\zeta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$$

De modo que,

$$Re(\lambda_i) = \zeta_i \omega_i$$

$$Im(\lambda_i) = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$$

Para cada par de autovalores $\lambda_{i,i+1}$ do sistema, o valor para a parte real e para a parte imaginária é conhecido, portanto o pequeno sistema acima na realidade é um sistema de 2 equações e 2 incógnitas, podendo ser resolvido algebricamente.

A partir da relação para a parte real do autovalor, tem-se que:

$$\zeta_i = \frac{Re(\lambda_i)}{\omega_i}$$

Substituindo na relação para a parte imaginária do autovalor.

$$Im(\lambda_i) = \omega_i \sqrt{1 - \left(\frac{Re(\lambda_i)}{\omega_i}\right)^2}$$

$$\frac{Im(\lambda_i)}{\omega_i} = \sqrt{1 - \left(\frac{Re(\lambda_i)}{\omega_i}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{Im(\lambda_i)}{\omega_i}\right)^2 &= 1 - \left(\frac{Re(\lambda_i)}{\omega_i}\right)^2 \\ \frac{Im(\lambda_i)^2}{\omega_i^2} &= \frac{\omega_i^2 - Re(\lambda_i)^2}{\omega_i^2} \\ Im(\lambda_i)^2 &= \omega_i^2 - Re(\lambda_i)^2 \\ \omega_i^2 &= Im(\lambda_i)^2 + Re(\lambda_i)^2 \\ \omega_i &= \sqrt{Im(\lambda_i)^2 + Re(\lambda_i)^2} \end{aligned}$$

Agora para encontrar o fator de amortecimento, basta substituir a expressão encontrada para a frequência natural (ω) na relação para o mesmo.

$$\zeta_i = \frac{Re(\lambda_i)}{\omega_i}$$

A frequência natural é encontrada em Hz, portanto para encontrar o valor em rad/s é necessário dividir o valor encontrado por 2π .

$$\omega_i(\text{rad/s}) = \frac{\sqrt{Im(\lambda_i)^2 + Re(\lambda_i)^2}}{2\pi}$$

A constante de tempo, τ , é dada por [6]:

$$\tau_i = \frac{1}{\zeta_i \omega_i} = \frac{1}{Re(\lambda_i)}$$

E o tempo de estabilização é geralmente entre 5 e 4 vezes a constante de tempo [6].

$$T_{s_i} = 4 \tau_i$$

Os autovalores do sistema estão expostos novamente, para melhor entendimento das contas realizadas.

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{1,2} = -33,9020 \pm 96,9278 j \\ \lambda_{3,4} = -33,9186 \pm 90,5292 j \\ \lambda_{5,6} = -3,4054 \pm 10,0733 j \\ \lambda_{7,8} = -11,9962 \pm 16,1229 j \end{cases}$$

As frequências naturais em Hz, obtidas para cada par de autovalores do sistema, estão representadas abaixo.

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{Im(\lambda_1)^2 + Re(\lambda_1)^2} = \sqrt{96,9278^2 + 33,9020^2} \rightarrow \omega_1 = 102,6857 \\ \omega_3 = \sqrt{Im(\lambda_3)^2 + Re(\lambda_3)^2} = \sqrt{90,5292^2 + 33,9186^2} \rightarrow \omega_3 = 96,6748 \\ \omega_5 = \sqrt{Im(\lambda_5)^2 + Re(\lambda_5)^2} = \sqrt{10,0733^2 + 3,4054^2} \rightarrow \omega_5 = 10,6334 \\ \omega_7 = \sqrt{Im(\lambda_7)^2 + Re(\lambda_7)^2} = \sqrt{16,1229^2 + 11,9962^2} \rightarrow \omega_7 = 20,0961 \end{cases}$$

Os fatores de amortecimento calculados para cada par de autovalores do sistema estão representados abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \frac{Re(\lambda_1)}{\omega_1} = \frac{33,9020}{102,6857} \rightarrow \zeta_1 = 0,3302 \\ \zeta_3 = \frac{Re(\lambda_3)}{\omega_3} = \frac{33,9186}{96,6748} \rightarrow \zeta_3 = 0,3509 \\ \zeta_5 = \frac{Re(\lambda_5)}{\omega_5} = \frac{3,4054}{10,6334} \rightarrow \zeta_5 = 0,3203 \\ \zeta_7 = \frac{Re(\lambda_7)}{\omega_7} = \frac{11,9962}{20,0961} \rightarrow \zeta_7 = 0,5969 \end{array} \right.$$

As frequências naturais em rad/s para par de autovalores do sistema estão representadas abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1(rad/s) = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{102,6857}{2\pi} \rightarrow \omega_1(rad/s) = 16,3429 \\ \omega_3(rad/s) = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{96,6748}{2\pi} \rightarrow \omega_3(rad/s) = 15,3863 \\ \omega_5(rad/s) = \frac{\omega_5}{2\pi} = \frac{10,6334}{2\pi} \rightarrow \omega_5(rad/s) = 1,6924 \\ \omega_7(rad/s) = \frac{\omega_7}{2\pi} = \frac{20,0961}{2\pi} \rightarrow \omega_7(rad/s) = 3,1984 \end{array} \right.$$

As constantes de tempo para cada par de autovalores do sistema estão representadas abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{Re(\lambda_1)} = \frac{1}{33,9020} \rightarrow \tau_1 = 0,0295 \\ \tau_3 = \frac{1}{Re(\lambda_3)} = \frac{1}{33,9186} \rightarrow \tau_3 = 0,0295 \\ \tau_5 = \frac{1}{Re(\lambda_5)} = \frac{1}{3,4054} \rightarrow \tau_5 = 0,2937 \\ \tau_7 = \frac{1}{Re(\lambda_7)} = \frac{1}{11,9962} \rightarrow \tau_7 = 0,0834 \end{array} \right.$$

Os tempos de estabilização para cada par de autovalores do sistema estão representados abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{s_1} = \frac{4}{Re(\lambda_1)} = 4 \tau_1 = 4 \times 0,0295 \rightarrow T_{s_1} = 0,1180 \\ T_{s_3} = \frac{4}{Re(\lambda_3)} = 4 \tau_3 = 4 \times 0,0295 \rightarrow T_{s_3} = 0,1179 \\ T_{s_5} = \frac{4}{Re(\lambda_5)} = 4 \tau_5 = 4 \times 0,2937 \rightarrow T_{s_5} = 1,1746 \\ T_{s_7} = \frac{4}{Re(\lambda_7)} = 4 \tau_7 = 4 \times 0,0834 \rightarrow T_{s_7} = 0,3334 \end{array} \right.$$

A partir dos resultados obtidos para as frequências naturais, fatores de amortecimento, constantes de tempo e tempo de estabilização, foi montada a tabela 4-1, que representa os valores obtidos para cada par de autovalores de forma mais organizada, para uma melhor compreensão dos resultados.

Par de Autovalores	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	$\lambda_{5,6}$	$\lambda_{7,8}$
Valor dos Autovalores, λ	$-33,902 \pm 96,928 j$	$-33,919 \pm 90,529 j$	$-3,405 \pm 10,073 j$	$-11,996 \pm 16,123 j$
Frequência Natural, ω_n (rad/s)	16,343	15,386	1,6924	3,198
Fator de amortecimento, ζ	0,3302	0,3509	0,3203	0,5969
Constante de tempo, τ	0,0295	0,0295	0,2937	0,0834
Tempo de Estabilização, T_s (s)	0,1180	0,1179	1,1746	0,3334

Tabela 4-1: Frequências naturais, fatores de amortecimento, constantes de tempo e tempos de estabilização para cada par de autovalores

Ao analisar os resultados obtidos para cada par de autovalores do sistema, percebe-se que todos os fatores de amortecimento são menores do que 1, como deveriam ser, pois isso significa que o sistema será sempre estável. Também é possível notar que o par de autovalores que mais demora para se estabilizar é o que possui menor parte real negativa, $\lambda_{5,6} = -3,405 \pm 10,073 j$. Essa influência da parte real negativa é observada pelo fato da constante de tempo ser inversamente proporcional à magnitude da parte real do autovalor, fazendo com que o tempo de estabilização também seja inversamente proporcional ao componente real do autovalor. Portanto, o autovalor de menor parte real negativa vai ser o autovalor que vai representar quanto tempo o sistema vai levar para entrar em regime permanente, que vai ser exatamente o seu tempo de estabilização, para o sistema em questão, esse tempo será de 1,175 segundos.

5. Análise do Lugar Geométrico das Raízes

5.1. Procedimento para a Obtenção do Lugar Geométrico das Raízes

O Lugar Geométrico das Raízes (LGR), conhecido também como “Root Locus”, consiste em um gráfico construído a partir das raízes da equação característica de um sistema [4], de modo em que essas raízes são colocadas em um gráfico para todos os valores de um parâmetro do sistema.

A técnica utilizada para obter o gráfico do LGR é uma função originalmente desenvolvida para um sistema com a presença de algum controle, de modo em que se obtém os polos de malha fechada a partir da Função de Transferência (FT) de Malha Aberta para um sistema com um controlador. Esse controlador possui determinado ganho K , e ao variar o valor para o mesmo, de 0 até $+\infty$, o LGR retorna todas as raízes do sistema para todos os ganhos possíveis [4].

O objetivo ao utilizar o Lugar Geométrico das Raízes é compreender como a variação dos parâmetros influencia a dinâmica do sistema, portanto, para este projeto, foi feita uma adaptação do procedimento natural para obter o LGR de um sistema com controle para conseguir obter o LGR de um sistema sem controle. O gráfico do LGR pelo Método de Evans é obtido a partir do polinômio característico do sistema, mas este tem que estar escrito de acordo com a forma padrão [4], que é em função da Função de Transferência de Malha Aberta (FTMA) de um sistema com controle, que nada mais é do que o polinômio característico escrito de uma forma em que o parâmetro controlado, esteja isolado e contido dentro do ganho K .

$$1 + K FTMA = 0$$

Para utilizar o LGR para um caso sem controle, um ajuste foi feito no polinômio característico do sistema para obter o equivalente a uma FTMA de um sistema com controle [1], escrito na forma padrão. O procedimento adotado consistiu em criar uma “FTMA” a partir do polinômio característico do sistema sem controle, ao adequar o denominador das funções de transferência do sistema ao procedimento utilizado para traçar o LGR.

A adaptação para o procedimento analítico usado para traçar o LGR, consiste em chegar até a forma padrão a partir do polinômio característico do sistema, e para fazer isso será necessário isolar um determinado parâmetro que será variado de 0 a $+\infty$. Como dito anteriormente, a variação deste parâmetro é feita através do ganho K , com o parâmetro isolado contido dentro do ganho K , e apenas no ganho K , em outras palavras, a FTMA não pode conter o parâmetro isolado.

$$K = cte \times (\text{parâmetro isolado})$$

Para chegar até a forma padrão necessária, a FTMA será escrita como uma fração, separada em num, representando o numerador e den, representando o denominador.

$$FTMA = \frac{num}{den}$$

Substituindo a equação para a FTMA na forma padrão, tem-se que:

$$1 + K \frac{num}{den} = 0$$

$$\frac{den}{den} + K \frac{num}{den} = 0$$

$$den + K num = 0$$

Como foi definido que o parâmetro isolado está contido em K, para escrever a equação característica do sistema de acordo com a forma padrão, basta escrever a equação característica do sistema separando os termos nos quais o parâmetro isolado está incluído dos termos nos quais o parâmetro isolado não está incluído [1]. Isso é feito de uma maneira em que os termos nos quais o parâmetro isolado aparece, serão parte do que foi determinado como num (numerador), que está multiplicado por K, que por sua vez contém o parâmetro isolado. Já os termos nos quais o parâmetro isolado não aparece, serão parte do que foi determinado como den (denominador) que obrigatoriamente não contém o parâmetro isolado, que só está presente em K.

Um detalhe que deve ser notado é que os termos com maior expoente, tanto no numerador quanto no denominador da FT tem que ser multiplicados por 1, e é a partir dessa relação que é definida a expressão de valor constante que multiplica o parâmetro isolado dentro do ganho K. Essa expressão será definida pela expressão que multiplica o termo de maior expoente no numerador dividida pela expressão que multiplica o termo de maior expoente no denominador.

Esse detalhe, no final das contas, não vai alterar o procedimento explicado, pois o ganho K está multiplicado pelo numerador dividido pelo denominador, então para a montagem do sistema, o resultado é o mesmo, a única diferença será quanto a obtenção do ganho K, que será utilizado mais à frente.

Uma vez que os termos sem a presença do parâmetro isolado (denominador) e os termos com a presença do parâmetro isolado (numerador) forem encontrados, basta dividir um pelo outro, que assim a equação característica do sistema estará escrita de acordo com a forma padrão e poderá ser usado na função **rlocus** do MATLAB com.

O procedimento analítico para obter a equação característica do sistema na forma necessária para a utilização da função **rlocus** e construir o gráfico do LGR foi definido, mas o sistema em questão tem um polinômio característico muito grande, com 9 expoentes diferentes. Com isso em mente, seria muito trabalhoso e ineficiente reorganizar o polinômio característico de modo a separar os termos que incluem o parâmetro a ser isolado dos que não o incluem, principalmente se a conta for feita para cada parâmetro a ser analisado.

Portanto uma adaptação do procedimento analítico foi feita, para resolver a separação dos termos que incluem e que não incluem o parâmetro isolado numericamente [1], através do MATLAB, e assim montar a equação característica de acordo com a forma padrão necessária para usar o **rlocus**.

O procedimento numérico para a obtenção da FTMA consiste em encontrar um jeito de separar numericamente os termos que contém o parâmetro isolado dos termos que não contém o parâmetro isolado, mesmo que em algum caso estes termos tenham o mesmo expoente, e para alcançar isso, o método realizado foi o seguinte:

Primeiramente, o polinômio característico do sistema foi calculado para o parâmetro isolado igual a 1 e para o parâmetro isolado igual a 2, desta forma, é possível obter o quanto o aumento do parâmetro isolado em uma unidade mudou o polinômio característico, fazendo a subtração do polinômio característico para o parâmetro igual a 2 menos o polinômio característico para o parâmetro igual a 1.

O quanto o polinômio característico mudou com a variação de uma unidade é exatamente o conjunto de todos os termos que contém o parâmetro isolado, porque essa mudança é o equivalente a cada termo que contém o parâmetro isolado multiplicado pelo próprio parâmetro isolado que está valendo 1 [1]. Todos os termos do polinômio característico que não contem o parâmetro isolado não vão mudar ao variar o parâmetro de 1 para 2, e conseqüentemente vão desaparecer quando a subtração for feita, porque o termo que não contem o parâmetro isolado será subtraído dele mesmo.

O resultado desta subtração será o equivalente ao que foi definido como num (numerador). E vale ressaltar que este procedimento só funciona se o parâmetro isolado aparecer de forma linear no sistema, devido ao fato de que é utilizada uma variação do parâmetro isolado de 1 para 2 para encontrar o valor pelo qual a variação de 1 unidade desse parâmetro é responsável.

O que restou a ser encontrado são os termos que não contém o parâmetro isolado, e para encontrar os mesmos, o procedimento é muito simples, basta encontrar o polinômio característico do sistema para o parâmetro isolado igual a 0. Assim, todos os termos que contém o parâmetro isolado vão ser nulos, e somente restarão os termos que não contém o parâmetro isolado [1].

O resultado para o polinômio característico com o parâmetro isolado valendo 0 é o equivalente ao que foi definido como den (denominador).

Agora com o os termos da equação característica separados em duas partes, os que contém o parâmetro isolado e os que não contém o parâmetro isolado, o que resta a ser feito é dividir uma parte pela outra, num/den, e montar o sistema na forma padrão para usar a função **rlocus**.

Este procedimento numérico foi realizado através do MATLAB para cada um dos parâmetros a serem analisados, traçando assim um LGR para todos os parâmetros isolados. Cada LGR obtido mostra o comportamento ao variar um parâmetro de 0 até $+\infty$, mas para obter uma representação mais relevante de como o parâmetro afeta o sistema, foi feita também uma análise considerando apenas uma faixa de valores convencionalmente encontrados em motocicletas para cada um dos parâmetros analisados. Assim, é possível obter uma informação que é condizente com os verdadeiros valores encontrados para cada parâmetro e entender o impacto de cada variação de maneira realista.

Essa variação é decorrente de uma variação do ganho K, evidenciada anteriormente, então para cada parâmetro analisado, não só foi definida uma faixa de valores para os parâmetros em questão, como também uma faixa de valores para o ganho K que foi utilizado para chegar aos valores de cada parâmetro. Esta conta será realizada para cada parâmetro variado, pois de acordo com cada FT obtida, o valor que modela o ganho K é diferente.

A tabela 5-1 mostra os parâmetros que foram analisados, seus símbolos, unidades de medida e as faixas de valores consideradas de modo a realizar análises condizentes com a realidade:

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Faixa de Valores
<i>Amortecimento do amortecedor da suspensão dianteira</i>	b_d	N/m/s	500 - 2500
<i>Amortecimento do amortecedor da suspensão traseira</i>	b_t	N/m/s	500 - 2500
<i>Rigidez da mola da suspensão dianteira</i>	k_d	N/m	5000 - 25000
<i>Rigidez da mola da suspensão traseira</i>	k_t	N/m	5000 - 25000
<i>Massas não suspensas (pneus e rodas)</i>	m_d e m_t	kg	8 - 25

Tabela 5-1: Parâmetros do sistema escolhidos para a análise do LGR, com a faixa de valores considerados coerentes para cada parâmetro

Vale mencionar que as distâncias entre o Centro de Massa e os eixos dianteiro (l_d) e traseiro (l_t) não foram analisadas com o LGR pois ambas contam com uma aparição no sistema que não é na forma linear.

5.2. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro b_d do Amortecedor Dianteiro

Para o amortecimento do amortecedor da suspensão dianteira, b_d , como o parâmetro isolado, o gráfico gerado a partir da FTMA é encontrado na figura 1.

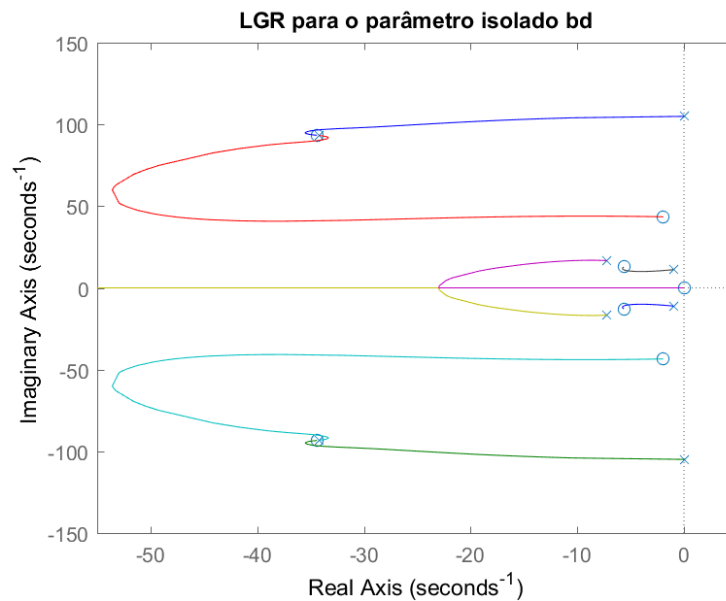


Figura 5-1: LGR para o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Ao observar a figura 5-1, é possível notar claramente a presença de todos os 4 pares de autovalores do sistema, cada autovalor está representado por uma cor diferente, e cada linha conta com um símbolo x e um círculo. O símbolo x denomina o início da variação, ou seja, a posição no eixo Real-Imaginário para o autovalor com o parâmetro isolado, b_d , igual a zero. Já o círculo representa o final da variação, ele denomina a posição para o mesmo autovalor quando o parâmetro isolado tende a infinito.

Tendo isso em mente, é possível afirmar que o sistema apresenta um comportamento estável a todo momento, para qualquer valor atribuído ao parâmetro b_d , pois todos os autovalores têm componentes de parte real sempre menores ou iguais a zero.

Quando o parâmetro isolado, b_d , é igual a zero, o sistema possui 3 pares de autovalores complexos conjugados, $\lambda_{3,4}$, $\lambda_{5,6}$ e $\lambda_{7,8}$ representados na tabela 5-2, e um par de autovalores imaginários puros, $\lambda_{1,2}$. Os autovalores complexos conjugados representam uma dinâmica de amortecimento com oscilação, já os autovalores imaginários puros são indicativos de um comportamento oscilatório puro [6], portanto nesse extremo, sem a presença de um amortecedor dianteiro, $b_d=0$, o sistema vai oscilar para sempre, pois no regime permanente a dinâmica será ditada pelo par de autovalores imaginários puros.

Polos de malha aberta (Autovalores para $b_d=0$)	Zeros de malha aberta (Autovalores para $b_d \rightarrow \infty$)
$\lambda_{1,2} = 0 \pm 104,98 j$	$\lambda_{1,2} = -34,41 \pm 93,38 j$
$\lambda_{3,4} = -34,20 \pm 93,23 j$	$\lambda_{3,4} = -1,95 \pm 43,50 j$
$\lambda_{5,6} = -1,00 \pm 11,12 j$	$\lambda_{5,6} = -5,65 \pm 12,81 j$
$\lambda_{7,8} = -7,24 \pm 16,72 j$	$\lambda_7 = 0 \quad \lambda_8 \rightarrow -\infty$

Tabela 5-2: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado b_d

Ao observar o comportamento dos autovalores com o aumento do parâmetro b_d , é possível notar que o par de autovalores imaginários puros ($\lambda_{1,2}$) passa a ser complexo conjugado, caminhando eventualmente para um valor muito próximo ao que os autovalores $\lambda_{3,4}$ possuem em $b_d=0$. Enquanto isso, esse par de autovalores tende a valor próximo de -2, com um valor muito alto de b_d , o que faria com que $\lambda_{3,4}$ fosse o par de autovalores responsável pelo maior tempo de estabilização do sistema. Em qualquer outra situação exceto ganhos muito altos, o par de autovalores que determina quanto tempo o sistema vai levar para atingir o regime permanente é $\lambda_{5,6}$, pois ele possui menor parte real negativa.

É possível ainda notar que o par de autovalores, $\lambda_{7,8}$, passa a ser real puro, o que representa um amortecimento crítico, e ainda mais que isso, quando o amortecedor assume valor infinito, um dos autovalores vai para zero.

5.2.2. Análise específica para a faixa de valores de 500 N/m/s até 2500 N/m/s

Uma vez analisado o comportamento dos autovalores para o sistema com a variação do amortecimento dianteiro de zero até infinito, é necessário olhar com mais atenção para a faixa de valores do parâmetro b_d que condiz com os valores que são convencionalmente encontrados para o amortecimento dianteiro em motocicletas [5]. O objetivo é observar o impacto que a variação palpável do valor do parâmetro b_d tem no sistema. E para chegar a isso, como explicado anteriormente, será feita uma análise voltada especificamente para a faixa de valores de amortecimento do amortecedor da suspensão dianteira definida de 500 N/m/s até 2500 N/m/s [5].

Para realizar tal análise, será necessário encontrar a faixa de valores para o ganho que está associado ao parâmetro isolado, b_d , na expressão usada para o traçado do LGR. Isso é feito visando calcular, através da FTMA, os autovalores para o limite inferior e para o limite superior dos valores considerados para o parâmetro b_d . E assim plotar os autovalores obtidos para cada limite junto com o LGR já mostrado.

Voltando um pouco, o ganho K é determinado a partir das expressões que multiplicam os termos com maior expoente do numerador e do denominador da FT usada para calcular/desenhar o LGR. O que tem que acontecer é que em ambos os casos, no numerador e no denominador, o termo com maior expoente tem que estar multiplicado por 1, portanto a partir disso é possível calcular a expressão que multiplica o parâmetro isolado b_d dentro do ganho K.

Também foi visto que para encontrar o numerador da FTMA basta observar a diferença entre os polinômios característicos para $b_d=1$ e $b_d=2$, e através do polinômio característico para $b_d=0$, podemos encontrar o denominador da FTMA.

Então partir disso, será possível encontrar um valor numérico para a expressão que simplifica o termo de maior expoente do numerador e do denominador da FTMA. No caso de b_d , temos que o denominador tem s^8 como termo de maior expoente, e o numerador tem $0,816 s^7$ como termo de maior expoente, portanto o ganho desse LGR em função de b_d pode ser encontrado da seguinte forma.

$$\text{Dado que: } 1 + K \text{ FTMA} = 0$$

$$1 + \frac{b_d (0,08156 s^7 + \dots)}{s^8 + \dots} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + (0,08156 b_d) \left(\frac{s^7 + \dots}{s^8 + \dots} \right) = 0$$

$$\text{Onde } K = 0,08156 b_d, \quad e \quad \text{FTMA} = \left(\frac{s^7 + \dots}{s^8 + \dots} \right)$$

Assim uma relação entre o ganho, K, e o parâmetro isolado em questão, b_d , é obtida, a partir da qual, será calculada a faixa de valores para o ganho K a partir dos valores para o limite inferior e superior do parâmetro b_d .

O intervalo a ser estudado para o amortecimento dianteiro, b_d , é entre $500(N/m/s)$ e $2500(N/m/s)$, logo, é possível encontrar os valores para o ganho K nos limites definidos, através da relação obtida.

$$\text{Limite inferior: } K_{inf} = 0,08156 \times 500 = 40,8$$

$$\text{Limite superior: } K_{sup} = 0,08156 \times 2500 = 203,9$$

Uma vez definido o intervalo em que o ganho K vai variar, de acordo com a variação definida para b_d , é possível calcular, através do MATLAB, os autovalores que representam os limites inferiores e superiores da variação de b_d , mostrados na tabela 5-3, e plotar os mesmos no gráfico do LGR, de modo a definir visualmente os limites e assim, enriquecer a análise ao tratar de um intervalo coerente com a realidade para os possíveis valores atribuídos ao parâmetro b_d .

Autovalores para $b_d=500 N/m/s$ (Limite inferior para a variação de b_d)	Autovalores para $b_d=2500 N/m/s$ (Limite superior para a variação de b_d)
$\lambda_{1,2} = -17,30 \pm 102,53 j$	$\lambda_{1,2} = -34,55 \pm 93,48 j$
$\lambda_{3,4} = -34,00 \pm 93,09 j$	$\lambda_{3,4} = -26,97 \pm 42,08 j$
$\lambda_{5,6} = -2,29 \pm 10,45 j$	$\lambda_{5,6} = -5,65 \pm 11,07 j$
$\lambda_{7,8} = -9,25 \pm 16,88 j$	$\lambda_7 = -8,01 \quad \lambda_8 = -146,4$

Tabela 5-3: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado b_d

O resultado obtido ao plotar no gráfico do LGR os autovalores calculados para o parâmetro b_d no seu limite inferior de $b_d=500 N/m/s$, representados por triângulos azuis apontando para baixo, e no seu limite superior de $b_d=2500 N/m/s$, representados por triângulos vermelhos apontando para cima, está representado na figura 5-2.

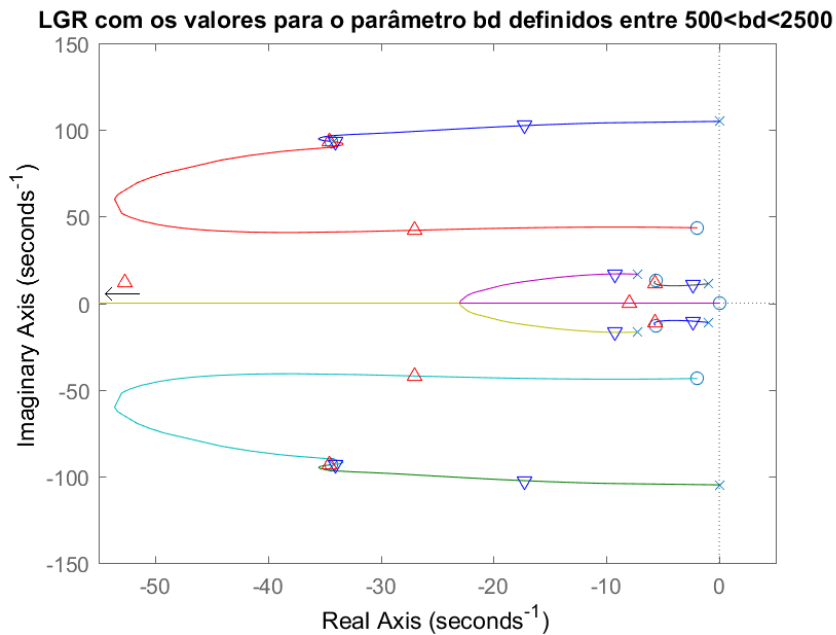


Figura 5-2: LGR considerando valores de 500 N/m/s até 2500 N/m/s para o parâmetro b_d

Ao analisar a figura 5-2 junto com a tabela 5-3, é possível notar que apenas um par de autovalores será responsável por definir o tempo que o sistema vai levar para se estabilizar e atingir o regime permanente, isso ocorre pois dentro de toda a variação desde $b_d=500$ N/m/s até $b_d=2500$ N/m/s, o mesmo par de autovalores $\lambda_{5,6}$ tem sempre a parte real negativa de menor módulo, e conseqüentemente será sempre o par com maior tempo de estabilização T_s do sistema.

Para meios de comparação, o tempo de estabilização T_s para $b_d=500$ N/m/s seria de 1,74 s e o tempo de estabilização T_s para $b_d=2500$ N/m/s seria de 0,71 s. Portanto, um amortecimento mais forte representaria um tempo de estabilização menor, como era de se esperar.

Ainda analisando a figura 5-2, também se percebe que o par de autovalores $\lambda_{7,8}$ no limite superior de $b_d=2500$, já possui uma característica de amortecimento crítico, contendo apenas com um componente de parte real. Os outros pares de autovalores seguem com comportamento parecido, alterando tanto a parte real quanto a parte imaginária, mas sem apresentar grande mudança em seus comportamentos.

5.3. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro b_t do Amortecedor Traseiro

Para o amortecimento do amortecedor da suspensão traseira, b_t , como o parâmetro isolado, o gráfico gerado a partir da FTMA é encontrado na figura 5-3.

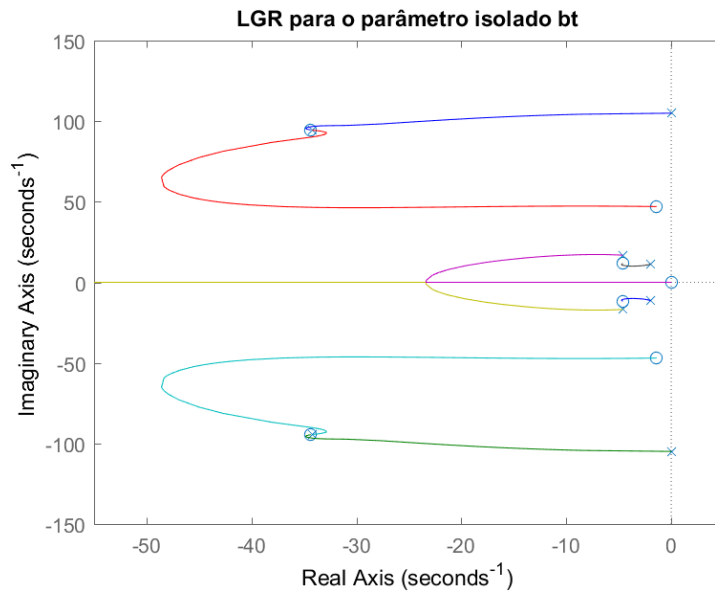


Figura 5-3: LGR para o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

O primeiro comentário que pode ser feito em relação ao LGR para o parâmetro b_t , amortecimento traseiro, é a semelhança gritante com o LGR para o parâmetro isolado b_d , amortecimento dianteiro. Assim como para o amortecimento dianteiro, é possível notar claramente todos os 4 pares de autovalores representados na figura 5-3. Novamente, o sistema apresenta um comportamento estável para qualquer valor atribuído ao parâmetro b_t , com parte real de todos os autovalores sempre menor ou igual a zero.

Quando o parâmetro isolado, b_t , é igual a zero, o sistema possui 3 pares de autovalores complexos conjugados, $\lambda_{3,4}$, $\lambda_{5,6}$ e $\lambda_{7,8}$ representados na tabela 5-4, e um par de autovalores imaginários puros, $\lambda_{1,2}$. Como dito anteriormente, os autovalores complexos conjugados representam uma dinâmica de amortecimento com oscilação e os autovalores imaginários puros indicam um comportamento puramente oscilatório, portanto nesse extremo sem a presença de um amortecedor traseiro, $b_t=0$, o sistema será estável e vai oscilar continuamente, com a dinâmica no regime permanente sendo ditada pelo par de autovalores imaginários puros.

Polos de malha aberta (Autovalores para $b_t=0$)	Zeros de malha aberta (Autovalores para $b_t \rightarrow \infty$)
$\lambda_{1,2} = 0 \pm 105,00 j$	$\lambda_{1,2} = -34,359 \pm 94,637 j$
$\lambda_{3,4} = -34,18 \pm 94,48 j$	$\lambda_{3,4} = -1,380 \pm 47,025 j$
$\lambda_{5,6} = -1,95 \pm 11,31 j$	$\lambda_{5,6} = -4,619 \pm 11,670 j$
$\lambda_{7,8} = -4,64 \pm 16,89 j$	$\lambda_7 = 0 \quad \lambda_8 \rightarrow -\infty$

Tabela 5-4: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado b_t

Ao observar o comportamento dos autovalores com o aumento do amortecimento traseiro, b_t , o mesmo comportamento observado com o

amortecimento dianteiro, b_d , é observado. O par de autovalores imaginários puros ($\lambda_{1,2}$) passa a ser complexo conjugado, o par de autovalores $\lambda_{3,4}$ se aproxima de 0 e o par $\lambda_{7,8}$ passa a ser real puro, se tornando responsável por um amortecimento crítico. Novamente, para situações de ganho não muito alto, o par de autovalores que determina quanto tempo o sistema vai levar para se estabilizar é $\lambda_{5,6}$, pois ele possui menor parte real negativa.

5.3.1. Análise específica para a faixa de valores de 500 N/m/s até 2500 N/m/s

Uma vez analisado o comportamento dos autovalores para o sistema com a variação do amortecimento traseiro de zero até infinito, novamente é necessário olhar com mais atenção para a faixa de valores do parâmetro b_t que condiz com os valores que são encontrados na vida real para o amortecimento traseiro em motocicletas, para observar o impacto que a variação palpável do valor do parâmetro b_t tem no sistema.

Assim como para a suspensão dianteira, será feita uma análise voltada especificamente para a faixa de valores de amortecimento do amortecedor da suspensão traseira definida de 500 N/m/s até 2500 N/m/s.

A faixa de ganho necessária para chegar até os valores definidos para o amortecimento traseiro, b_t , pode ser obtida através do mesmo procedimento realizado para o amortecimento dianteiro, b_d , ao analisar os termos de maior expoente na FTMA e encontrar um valor numérico para a expressão que faz com que esses termos de maior expoente do numerador e do denominador da FTMA estejam multiplicados por 1.

A partir da relação obtida para o ganho, K , e o parâmetro isolado, desta vez b_t , é possível calcular o valor para o ganho K no limite inferior e no limite superior do amortecimento traseiro, b_t , e assim, calcular os autovalores que representam esses limites, para posteriormente plotar os mesmos no gráfico do LGR.

A relação obtida entre o ganho, K , e o amortecimento traseiro, b_t , é de igual valor àquela obtida para o amortecimento dianteiro, b_d .

$$K = 0,08156 b_t$$

O intervalo a ser estudado para o amortecimento traseiro, b_t , é entre 500(N/m/s) e 2500(N/m/s), logo, através da relação obtida é possível encontrar os valores para o ganho K nos limites definidos, que serão os mesmos aos encontrados para o amortecimento dianteiro.

$$\text{Limite inferior: } K_{inf} = 0,08156 \times 500 = 40,8$$

$$\text{Limite superior: } K_{sup} = 0,08156 \times 2500 = 203,9$$

Uma vez definido o intervalo em que o ganho K vai variar, de acordo com a variação definida para b_d , é possível calcular os autovalores que representam os limites inferiores e superiores da variação de b_d , mostrados na tabela 5-5, e plotar os mesmos no gráfico do LGR, de modo a definir visualmente os limites e assim, enriquecer a análise ao tratar de um intervalo coerente com a realidade para os possíveis valores atribuídos ao parâmetro b_t .

Autovalores para $b_t=500 \text{ N/m/s}$ (Limite inferior para a variação de b_t)	Autovalores para $b_t=2500 \text{ N/m/s}$ (Limite superior para a variação de b_t)
$\lambda_{1,2} = -17,43 \pm 102,28 j$	$\lambda_{1,2} = -34,47 \pm 94,75 j$
$\lambda_{3,4} = -33,99 \pm 94,33 j$	$\lambda_{3,4} = -23,42 \pm 46,57 j$
$\lambda_{5,6} = -2,65 \pm 10,42 j$	$\lambda_{5,6} = -4,66 \pm 10,69 j$
$\lambda_{7,8} = -7,93 \pm 17,22 j$	$\lambda_7 = -7,43 \quad \lambda_8 = -161,25$

Tabela 5-5: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado b_t

O resultado obtido ao plotar no gráfico do LGR os autovalores calculados para o parâmetro b_t no seu limite inferior de $b_t=500 \text{ N/m/s}$, representados por triângulos azuis apontando para baixo, e no seu limite superior de $b_t=2500 \text{ N/m/s}$, representados por triângulos vermelhos apontando para cima, está representado na figura 4

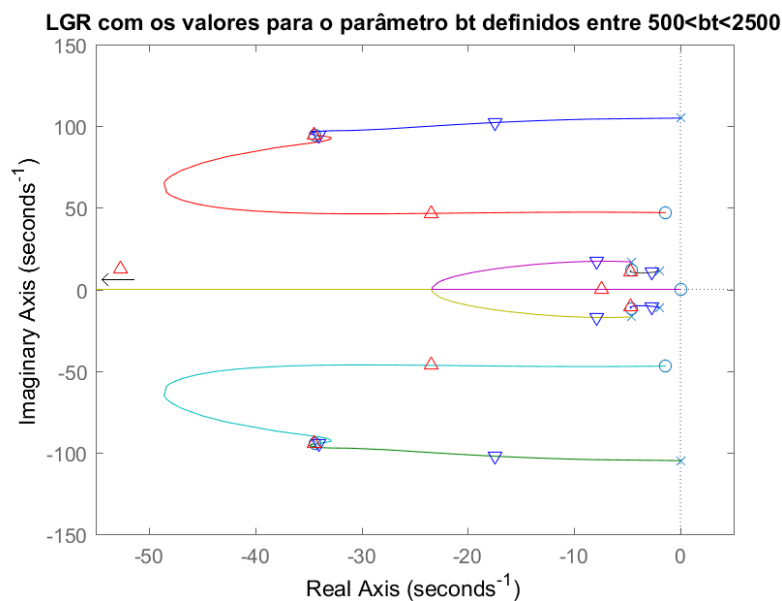


Figura 5-4: LGR considerando valores de 500 N/m/s até 2500 N/m/s para o parâmetro b_t

Ao analisar a figura 5-4 junto com a tabela 5-5, é possível notar que novamente, apenas um par de autovalores será responsável por definir o tempo que o sistema vai levar para se estabilizar e atingir o regime permanente, em todos os valores para b_t , de $b_t=500 \text{ N/m/s}$ até $b_t=2500 \text{ N/m/s}$, o mesmo par de autovalores, $\lambda_{5,6}$, tem a parte real negativa de menor módulo, e consequentemente o maior tempo de estabilização T_s do sistema.

Uma observação que pode ser feita ao comparar o efeito da variação de b_t com o efeito da variação de b_d é que o tempo de estabilização T_s é menos afetado pela variação do amortecimento traseiro b_t , pois a parte real negativa do par de autovalores $\lambda_{5,6}$ varia menos dentro da variação de b_t . Assim, o tempo de estabilização também é menos afetado, alcançando 1,51 s para $b_t=500 \text{ N/m/s}$ e 0,86 s para $b_t=2500 \text{ N/m/s}$.

E mais uma vez, também se nota que o par de autovalores $\lambda_{7,8}$ no limite superior de $b_t=2500$, só tem parte real negativa, e já possui uma característica de amortecimento crítico. Os outros pares de autovalores seguem com comportamento parecido, alterando tanto a parte real quanto a parte imaginária, mas sem apresentar grande mudança em seus comportamentos.

5.4. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro k_d da Mola Dianteira

Para a rigidez da mola da suspensão dianteira, k_d , como o parâmetro isolado, o gráfico gerado a partir da FTMA é encontrado na figura 5-5.

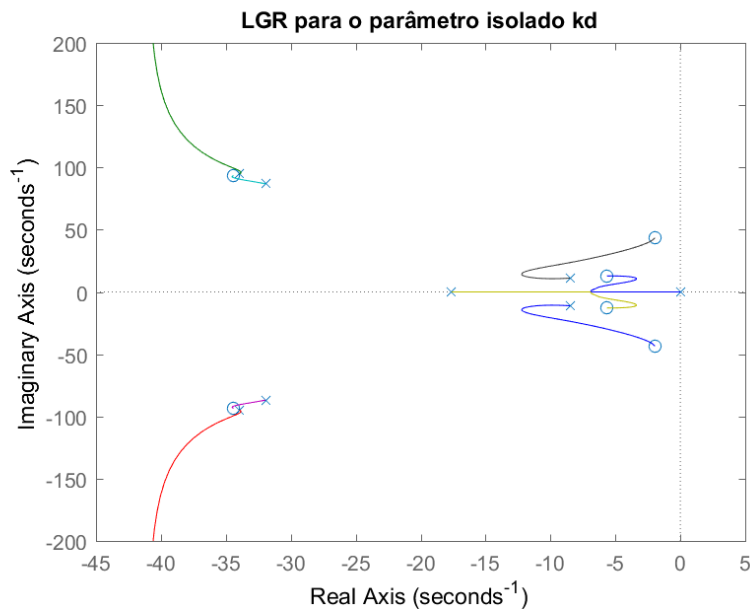


Figura 5-5: LGR para o parâmetro k_d da mola dianteira

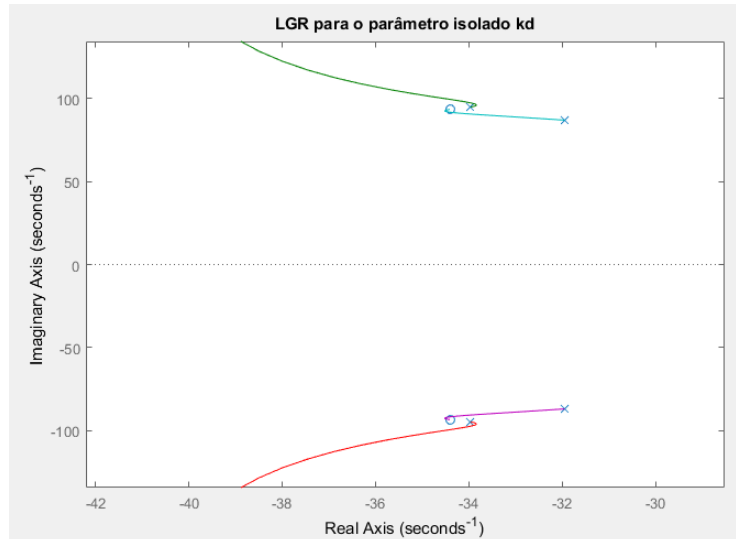


Figura 5-6: LGR de k_d com os pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara

Ao observar a figura 5-5, junto com o zoom na figura 5-6, é possível notar a presença de todos os 4 pares de autovalores do sistema, cada autovalor está representado por uma cor diferente, e cada linha conta com um símbolo x e um círculo. O símbolo x denomina o início da variação, $k_d=0$, e o círculo representa o final da variação, $k_d \rightarrow \infty$.

Nota-se que o sistema apresenta um comportamento estável a todo momento, para qualquer valor atribuído ao parâmetro k_d , pois os autovalores têm componentes de parte real sempre menores ou iguais a zero.

Quando o parâmetro isolado, k_d , é igual a zero, o sistema possui 3 pares de autovalores complexos conjugados, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{3,4}$ e $\lambda_{7,8}$ representados na tabela 5-6, e um par de autovalores reais negativos puros, $\lambda_{5,6}$. Os autovalores complexos conjugados representam uma dinâmica de amortecimento com oscilação, e os autovalores reais puros representam um amortecimento crítico. Nesse extremo sem a presença de uma rigidez na mola dianteira, $k_d=0$, o sistema vai possuir uma dinâmica oscilatória e ao atingir o regime permanente, vai possuir comportamento estável e estacionário.

Polos de malha aberta (Autovalores para $k_d=0$)	Zeros de malha aberta (Autovalores para $k_d \rightarrow \infty$)
$\lambda_{1,2} = -33,965 \pm 94,840 j$	$\lambda_1 \rightarrow \dots + j\infty \quad \lambda_2 \rightarrow \dots - j\infty$
$\lambda_{3,4} = -31,950 \pm 86,932 j$	$\lambda_{3,4} = -34,407 \pm 93,381 j$
$\lambda_5 = -17,624 \quad \lambda_6 = 0$	$\lambda_{5,6} = -5,648 \pm 12,807 j$
$\lambda_{7,8} = -8,496 \pm 11,107 j$	$\lambda_{7,8} = -1,953 \pm 43,498 j$

Tabela 5-6: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado k_d

Ao observar o comportamento dos autovalores com o aumento do parâmetro k_d , é possível notar que o par de autovalores reais puros ($\lambda_{5,6}$) passa a ser complexo conjugado, e com uma parte real bem pequena, que corresponde a um tempo de estabilização maior. O par de autovalores $\lambda_{7,8}$ continua sendo complexo conjugado, inicia aumentando sua parte real negativa, mas que começa a diminuir com o aumento de k_d chegando próxima de -2, o que representaria o par de autovalores responsável pelo maior tempo de estabilização. Ou seja, ao analisar somente o gráfico LGR sem os limites definidos para o valor do parâmetro k_d , não é possível determinar qual par de autovalores complexos conjugados será responsável por determinar o tempo de estabilização do sistema.

Ainda analisando o gráfico do LGR, o par de autovalores $\lambda_{3,4}$ basicamente não se altera, e o par de autovalores $\lambda_{1,2}$ tem um aumento do seu componente imaginário, que se aproxima a infinito quando k_d também tende a infinito, que representa uma frequência natural muito alta e um fator de amortecimento muito baixo [6].

5.4.1. Análise específica para a faixa de valores de 5000 N/m até 25000 N/m

Uma vez analisado o comportamento dos autovalores para o sistema com a variação da rigidez da mola dianteira de zero até infinito, novamente é necessário olhar mais profundamente para a faixa de valores do parâmetro em questão, k_d , que condiz com os valores que são encontrados para a rigidez da mola da suspensão dianteira em motocicletas na vida real. O intuito é de observar o impacto que a variação palpável do valor do parâmetro k_d tem no sistema. E mais uma vez, para alcançar este resultado, será feita uma análise voltada especificamente para a faixa de valores de rigidez da mola da suspensão dianteira definida de 5000 N/m até 25000 N/m.

A faixa de ganho necessária para chegar até os valores definidos para a rigidez da mola dianteira, k_d , pode ser obtida através do mesmo procedimento realizado para os amortecimentos dianteiro e traseiro, b_d e b_t . Que consiste em analisar os termos de maior expoente na FTMA e encontrar um valor numérico para a expressão que faz com que esses termos de maior expoente do numerador e do denominador da FTMA estejam multiplicados por 1.

No caso de k_d , temos que o denominador tem s^8 como termo de maior expoente, e o numerador tem $0,816 s^7$ como termo de maior expoente, portanto o ganho desse LGR em função de k_d pode ser encontrado da seguinte forma:

$$\text{Dado que: } 1 + K FTMA = 0$$

$$1 + \frac{k_d (0,08156 s^7 + \dots)}{s^8 + \dots} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + (0,08156 k_d) \left(\frac{s^7 + \dots}{s^8 + \dots} \right) = 0$$

$$\text{Onde } K = 0,08156 k_d, \quad e \quad FTMA = \left(\frac{s^7 + \dots}{s^8 + \dots} \right)$$

A partir da relação obtida para o ganho, K , e o parâmetro isolado, k_d , é possível calcular o valor para o ganho K no limite inferior e no limite superior da rigidez da mola dianteira, k_d . O intervalo a ser estudado para a rigidez da mola dianteira, k_d , é entre $5000(N/m)$ e $25000(N/m)$, portanto podemos encontrar os valores para o ganho K que representam os limites que queremos observar:

$$\text{Limite inferior: } K_{inf} = 0,08156 \times 5000 = 408$$

$$\text{Limite superior: } K_{sup} = 0,08156 \times 25000 = 2039$$

Uma vez definido o intervalo em que o ganho K vai variar, de acordo com a variação definida para k_d , é possível calcular os autovalores que representam os limites inferiores e superiores da variação de k_d , mostrados na tabela 5-7, e ainda plotar os mesmos no gráfico do LGR, de modo a definir visualmente os limites e assim, enriquecer a análise ao tratar de um intervalo coerente com a realidade para os possíveis valores atribuídos ao parâmetro k_d .

Autovalores para $k_d=5000 N/m$ (Limite inferior para a variação de k_d)	Autovalores para $k_d=25000 N/m$ (Limite superior para a variação de k_d)
$\lambda_{1,2} = -33,882 \pm 95,293 j$	$\lambda_{1,2} = -34,417 \pm 99,510 j$
$\lambda_{3,4} = -32,730 \pm 88,371 j$	$\lambda_{3,4} = -34,401 \pm 91,711 j$
$\lambda_{5,6} = -5,253 \pm 6,001 j$	$\lambda_{5,6} = -3,520 \pm 11,563 j$
$\lambda_{7,8} = -11,358 \pm 11,429 j$	$\lambda_{7,8} = -10,884 \pm 19,084 j$

Tabela 5-7: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado k_d

O resultado que é obtido ao plotar no gráfico do LGR os autovalores calculados para o parâmetro k_d no seu limite inferior de $k_d=5000$, representados por triângulos azuis apontando para baixo, e no seu limite superior de $k_d=25000$, representados por triângulos vermelhos apontando para cima, está representado na figura 5-7.

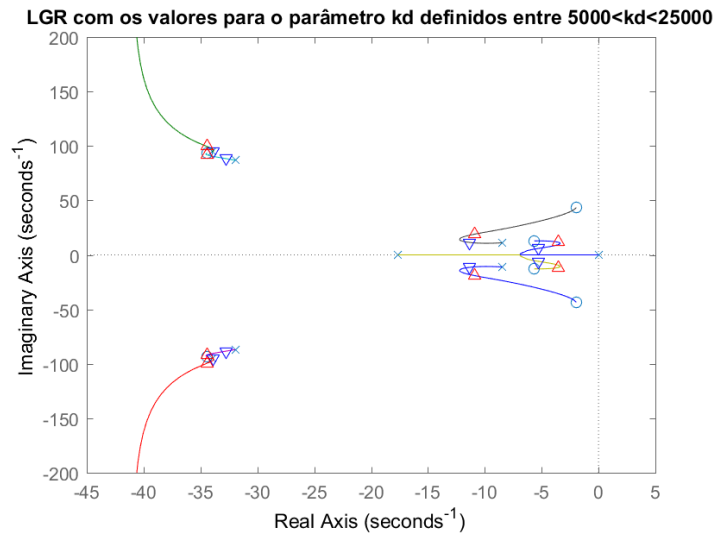


Figura 5-7: LGR considerando valores de 5000 N/m até 25000 N/m para o parâmetro k_d

Ao analisar a figura 5-7 junto com a tabela 5-7, é possível notar que o par de autovalores $\lambda_{5,6}$, no limite inferior de $k_d=5000$ N/m, já não possui mais uma característica de amortecimento crítico, pois já passa a ter parte imaginária, e não só passa a ser um par de autovalores complexos conjugados como terá sempre a menor parte real negativa. O par de autovalores $\lambda_{7,8}$ teria que ter um ganho muito maior para ter parte real negativa menor que a de $\lambda_{5,6}$, portanto nesse intervalo de rigidez da mola dianteira, o par de autovalores $\lambda_{5,6}$ será sempre o responsável por definir o tempo de estabilização final do sistema, $T_s=0,76$ s para $k_d=5000$ N/m e $T_s=1,14$ s para $k_d=25000$ N/m.

Assim, é possível afirmar que um aumento na rigidez da mola dianteira vai aumentar também o tempo de estabilização do sistema, analogamente ao que acontece com o aumento de qualquer um dos amortecedores, que diminui o tempo de estabilização do sistema.

De maneira geral, todos os autovalores do sistema apresentam uma mudança muito pequena dentro do intervalo de $k_d=5000$ até $k_d=25000$, variando muito pouco tanto as suas partes reais quanto as suas partes imaginárias. O zoom exibido na figura 5-8 nos mostra claramente a pequena variação que ocorre nos autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ do sistema.

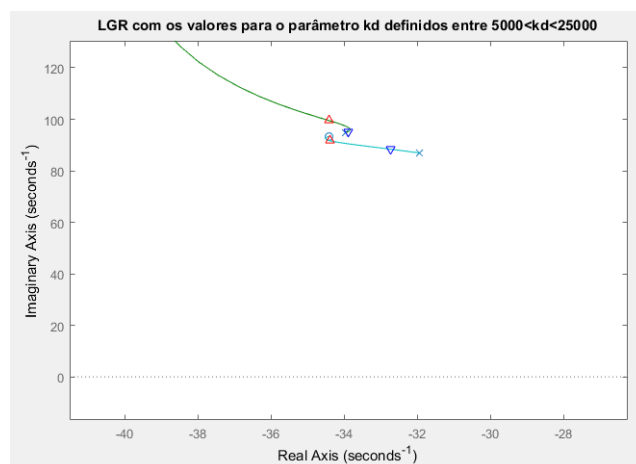


Figura 5-8: LGR de k_d com a parte imaginária positiva dos pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara

5.5. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro k_d da Mola Traseira

Para a rigidez da mola da suspensão traseira, k_t , como o parâmetro isolado, o gráfico gerado a partir da FTMA é encontrado na figura 5-9.

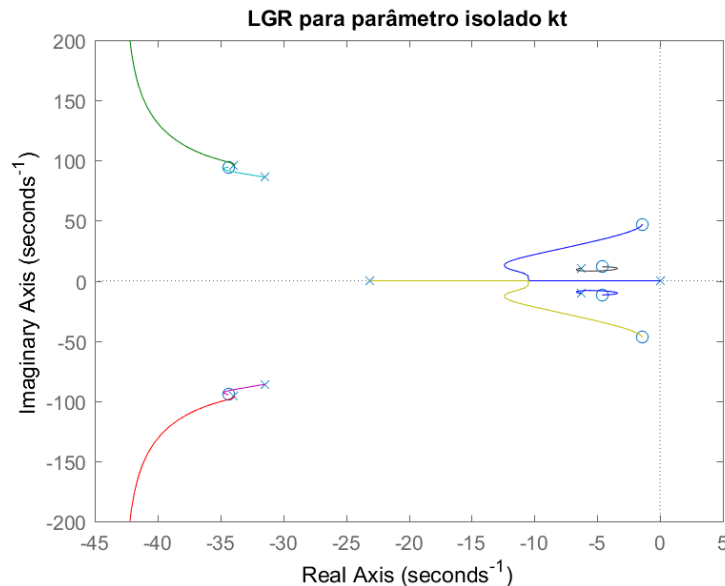


Figura 5-9: LGR para o parâmetro k_t da mola traseira

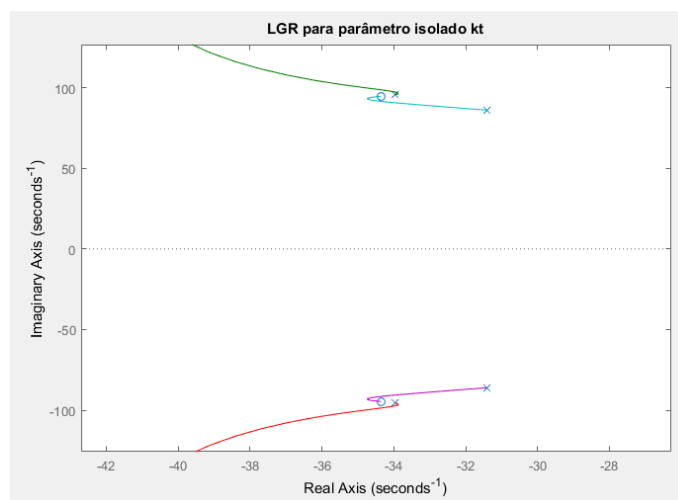


Figura 5-10: LGR de k_t com os pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara

Ao observar a figura 5-9, junto com o zoom na figura 5-10, fica nítida a semelhança com o LGR para o parâmetro isolado k_d , mas com uma alteração no que diz respeito ao par de autovalores que é puramente real negativo para valores muito pequenos para o ganho K.

Assim como para a rigidez da mola dianteira, é possível notar a presença de todos os 4 pares de autovalores do sistema representados na figura 5-9. Novamente, o sistema apresenta um comportamento estável a todo momento, para qualquer valor atribuído ao parâmetro k_t , pois os autovalores têm componentes de parte real sempre menores ou iguais a zero.

Quando o parâmetro isolado, k_d , é igual a zero, o sistema possui 3 pares de autovalores complexos conjugados, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{3,4}$ e $\lambda_{5,6}$ representados na tabela 5-8, e um par de autovalores reais negativos puros, $\lambda_{7,8}$, com um deles sendo igual à zero. Como dito anteriormente, os autovalores complexos conjugados representam uma dinâmica de amortecimento com oscilação, e os autovalores reais puros representam um amortecimento crítico. Nesse extremo sem a presença de uma rigidez na mola traseira, $k_t=0$, o sistema vai possuir uma dinâmica oscilatória e ao atingir o regime permanente, vai possuir comportamento estável e estacionário.

Polos de malha aberta (Autovalores para $k_t=0$)	Zeros de malha aberta (Autovalores para $k_t \rightarrow \infty$)
$\lambda_{1,2} = -33,969 \pm 95,643 j$	$\lambda_1 \rightarrow \dots \pm \infty j \quad \lambda_2 \rightarrow \dots \pm \infty j$
$\lambda_{3,4} = -31,420 \pm 86,096 j$	$\lambda_{3,4} = -34,359 \pm 94,637 j$
$\lambda_{5,6} = -6,285 \pm 10,517 j$	$\lambda_{5,6} = -4,619 \pm 11,670 j$
$\lambda_7 = -23,096 \quad \lambda_8 = 0$	$\lambda_{7,8} = -1,380 \pm 47,025 j$

Tabela 5-8: Polos e Zeros de malha aberta, autovalores para o início e fim da variação do parâmetro isolado k_t

Ao observar o comportamento dos autovalores com o aumento do parâmetro k_t , é possível notar que o par de autovalores reais puros ($\lambda_{7,8}$) passa a ser complexo conjugado. Novamente, ao analisar somente o gráfico LGR sem os limites definidos, desta vez para o valor do parâmetro k_t , não é possível determinar qual par de autovalores complexos conjugados será responsável por determinar o tempo de estabilização do sistema, $\lambda_{5,6}$ ou $\lambda_{7,8}$.

Ainda analisando o gráfico do LGR, o par de autovalores $\lambda_{3,4}$ é alterado muito levemente, e o par de autovalores $\lambda_{1,2}$ tem um aumento do seu componente imaginário, que se aproxima a infinito quando k_t também tende a infinito.

5.5.1. Análise específica para a faixa de valores de 500 N/m/s até 2500 N/m/s

Uma vez analisado o comportamento dos autovalores para o sistema com a variação do amortecimento traseiro de zero até infinito, novamente é necessário olhar com mais atenção para a faixa de valores do parâmetro k_t que condiz com os valores que são encontrados na vida real para a rigidez da mola traseira em motocicletas, para observar o impacto que a variação palpável do valor do parâmetro k_t tem no sistema.

Assim como para a rigidez da mola dianteira, será feita uma análise voltada especificamente para a faixa de valores de rigidez da mola da suspensão traseira definida de 5000 N/m até 25000 N/m.

A faixa de ganho necessária para chegar até os valores definidos para a rigidez da mola traseira, k_t , pode ser obtida através do mesmo procedimento realizado para a rigidez da mola dianteira, k_d . Que consiste em analisar os termos de maior expoente na FTMA e encontrar um valor numérico para a expressão que faz com que esses termos de maior expoente do numerador e do denominador da FTMA estejam multiplicados por 1.

A partir da relação obtida para o ganho, K , e o parâmetro isolado, k_t , é possível calcular o valor para o ganho K no limite inferior e no limite superior da rigidez da mola traseira, k_t , e assim, calcular os autovalores que representam esses limites, para posteriormente plotar os mesmos no gráfico do LGR

A relação obtida entre o ganho, K , e a rigidez da mola traseira, k_t , é de igual valor àquela obtida para a rigidez da mola dianteira, k_d .

$$K = 0,08156 k_t$$

O intervalo a ser estudado para a rigidez da mola traseira, k_t , é entre 500(N/m/s) e 2500(N/m/s), logo, através da relação obtida é possível encontrar os valores para o ganho K nos limites definidos, que serão os mesmos aos encontrados para a rigidez da mola dianteira.

$$\text{Limite inferior: } K_{inf} = 0,08156 \times 500 = 40,8$$

$$\text{Limite superior: } K_{sup} = 0,08156 \times 2500 = 203,9$$

Uma vez definido o intervalo em que o ganho K vai variar, de acordo com a variação definida para k_d , é possível calcular os autovalores que representam os limites inferiores e superiores da variação de k_d , mostrados na tabela 5-9, e plotar os mesmos no gráfico do LGR, de modo a definir visualmente os limites e assim, enriquecer a análise ao tratar de um intervalo coerente com a realidade para os possíveis valores atribuídos ao parâmetro k_t .

Autovalores para $k_t=5000$ N/m (Limite inferior para a variação de b_t)	Autovalores para $k_t=25000$ N/m (Limite superior para a variação de b_t)
$\lambda_{1,2} = -33,912 \pm 95,910 j$	$\lambda_{1,2} = -34,432 \pm 98,899 j$
$\lambda_{3,4} = -32,363 \pm 87,711 j$	$\lambda_{3,4} = -34,663 \pm 92,418 j$
$\lambda_{5,6} = -6,036 \pm 8,146 j$	$\lambda_{5,6} = -3,536 \pm 10,991 j$
$\lambda_{7,8} = -10,911 \pm 6,502 j$	$\lambda_{7,8} = -10,591 \pm 20,357 j$

Tabela 5-9: Autovalores para o início e fim da faixa de valores considerados para o parâmetro isolado k_t

O resultado que é obtido ao plotar no gráfico do LGR os autovalores calculados para o parâmetro k_t no seu limite inferior de $k_t=5000$, representados por triângulos azuis apontando para baixo, e no seu limite superior de $k_t=25000$, representados por triângulos vermelhos apontando para cima, está representado na figura 5-11.

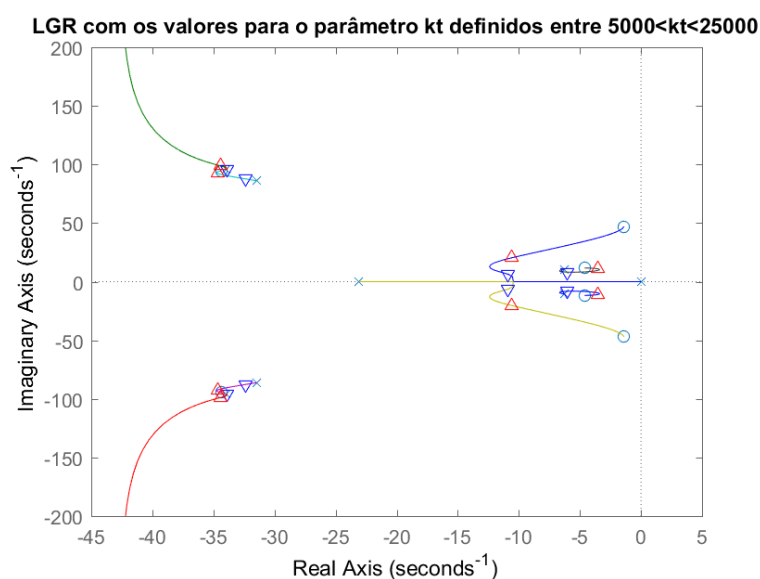


Figura 5-11: LGR considerando valores de 5000 N/m até 25000 N/m para o parâmetro k_t

Ao analisar a figura 5-11 junto com a tabela 5-9, é possível notar que o par de autovalores $\lambda_{7,8}$, no limite inferior de $k_d=5000 \text{ N/m}$, já não possui mais uma característica de amortecimento crítico, pois já passa a ter parte imaginária, e no limite superior de $k_d=25000 \text{ N/m}$, o par de autovalores $\lambda_{7,8}$ possui parte real negativa maior do que a do par de autovalores $\lambda_{5,6}$, portanto nesse intervalo de rigidez da mola traseira, o par de autovalores $\lambda_{5,6}$ será sempre o responsável por definir o tempo de estabilização final do sistema, $T_s=0,66 \text{ s}$ para $k_t=5000 \text{ N/m}$ e $T_s=1,13 \text{ s}$ para $k_t=25000 \text{ N/m}$.

De maneira geral, todos os autovalores do sistema apresentam uma mudança muito pequena dentro do intervalo de $k_t=5000$ até $k_t=25000$, variando muito pouco tanto as suas partes reais quanto as suas partes imaginárias. O zoom exibido na figura 5-12 nos mostra claramente a pequena variação que ocorre nos autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ do sistema.

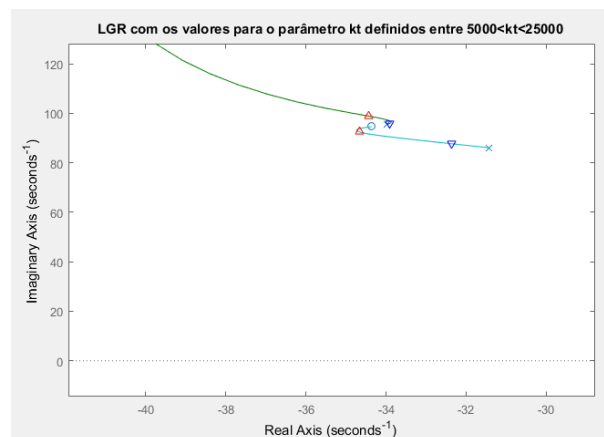


Figura 5-12: LGR de k_t com a parte imaginária positiva dos pares de autovalores $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{3,4}$ exibidos de maneira mais clara

5.6. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro m_d da Massa do Pneu Dianteiro

Para a massa do pneu dianteiro (e do pneu traseiro), foi realizado um procedimento numérico um pouco diferente daquele que foi utilizado com os outros parâmetros para obter o polinômio característico com uma separação dos termos que contém o parâmetro isolado daqueles que não contém o parâmetro isolado. Isso sucedeu devido ao fato da massa estar no denominador do polinômio característico, portanto não é possível igualar o parâmetro a zero para obter os termos que não contém o parâmetro característico, pois em vez de zerar os mesmos, eles tenderão a infinito.

Para a massa do pneu dianteiro m_d , como o parâmetro isolado, o gráfico gerado a partir da FTMA é encontrado na figura 5-13.

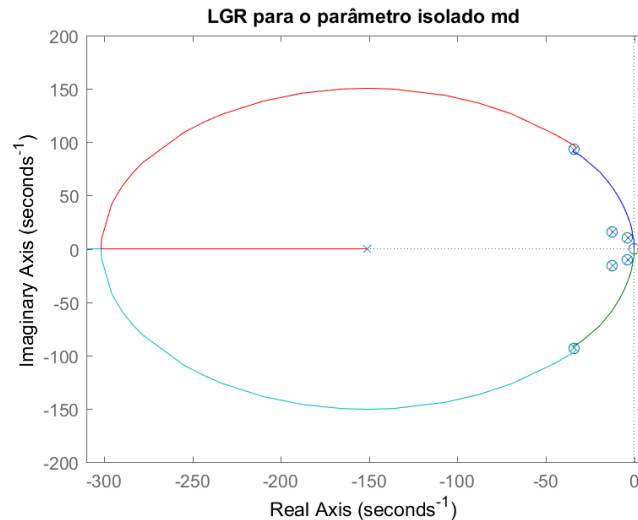


Figura 5-13: LGR para o parâmetro m_d , massa do pneu dianteiro

Ao observar a figura 5-13, é possível notar que existem dois pares de autovalores, $\lambda_{5,6}$ e $\lambda_{7,8}$, que não se alteram devido à variação da massa do pneu dianteiro. Enquanto isso, um dos pares de autovalores começa como números reais negativos e com o aumento do ganho, torna-se um par complexo conjugado, e o outro par começa como complexo conjugado e com o parâmetro isolado, m_d tendendo a infinito, assume valor nulo.

O resultado que é obtido ao plotar no gráfico do LGR os autovalores calculados para o parâmetro m_d no seu limite inferior de $m_d = 8$, representados por triângulos azuis apontando para baixo, e no seu limite superior de $m_d = 25$, representados por triângulos vermelhos apontando para cima, está representado na figura 5-14.

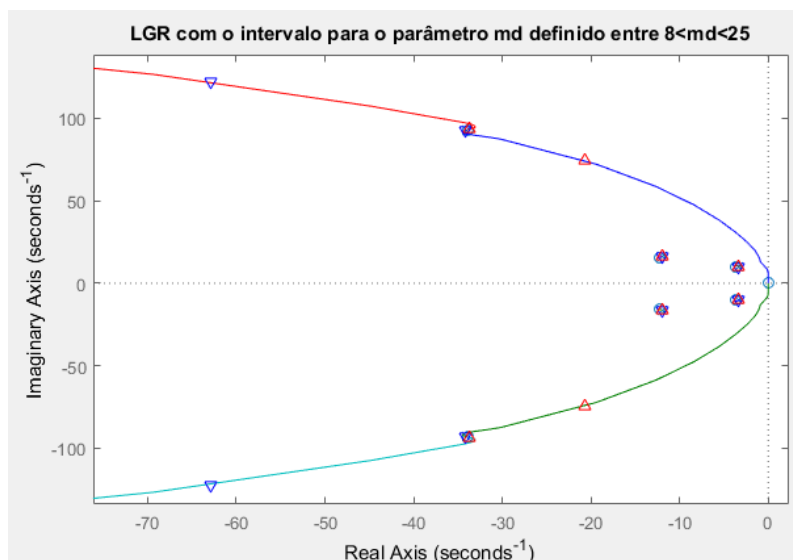


Figura 5-14: LGR considerando valores de 8 kg até 25 kg para o parâmetro m_d

Ao analisar a figura 5-14, é possível notar que o autovalor que vai determinar o tempo de estabilização para o sistema atingir o regime permanente não se altera com a variação do parâmetro m_d , portanto o par de autovalores $\lambda_{5,6}$ será sempre o responsável por definir o tempo de estabilização final do sistema.

5.7. Lugar Geométrico das Raízes para o Parâmetro m_t da Massa do Pneu Traseiro

Para a massa do pneu traseiro m_t , como o parâmetro isolado, o gráfico gerado a partir da FTMA é encontrado na figura 5-15.

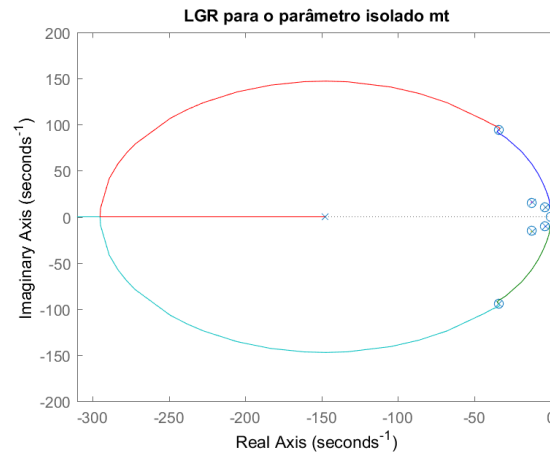


Figura 5-15: LGR para o parâmetro m_t , massa do pneu traseiro

Ao observar a figura 5-15, é possível notar o exato mesmo comportamento que ocorre para a variação da massa do pneu dianteiro, com dois pares de autovalores, $\lambda_{5,6}$ e $\lambda_{7,8}$, que não se alteram devido à variação um par de autovalores que passa de real negativo para um par complexo conjugado, e outro par que começa como complexo conjugado depois assume valor nulo.

O resultado que é obtido ao plotar no gráfico do LGR os autovalores calculados para o parâmetro m_d no seu limite inferior de $m_t = 8$, e no seu limite superior de $m_t = 25$, está representado na figura 5-14.

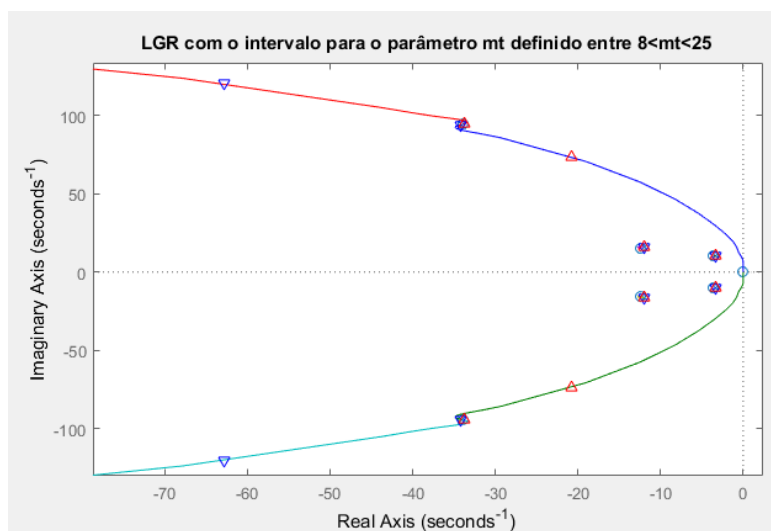


Figura 5-16: LGR considerando valores de 8 kg até 25 kg para o parâmetro m_t

Ao analisar a figura 5-16, é possível notar que, novamente, o autovalor que vai determinar o tempo de estabilização para o sistema atingir o regime permanente não se altera com a variação do parâmetro m_t , portanto o par de autovalores $\lambda_{5,6}$ será sempre o responsável por definir o tempo de estabilização final do sistema.

6. Análise dos Diagramas de Bode

O diagrama de Bode é uma ferramenta de análise usada em sistemas dinâmicos que estão sujeitos a excitações de base periódicas [6], é muito utilizado em circuitos elétricos e em problemas de vibração, que é exatamente o caso da dinâmica vertical da motocicleta. É uma técnica que permite analisar características do sistema como ressonâncias, defasagem, ampliações e atenuações, entre outras.

O diagrama de Bode é uma representação gráfica da resposta em frequência de um sistema dinâmico estável, ele mostra como o sinal de resposta de determinada variável de saída se comporta em função de algum determinado sinal de entrada senoidal [4]. O sinal de resposta é comparado com o sinal de entrada através da relação entre a amplitude e a fase de cada um, de forma que o ganho determina a relação entre as amplitudes, definindo quanto o sinal da entrada é atenuado ou amplificado, e a fase determina o nível de defasagem entre ambos os sinais [4]. O diagrama de Bode é composto de 2 partes, uma é referente ao ganho e outra é referente à fase, apresentados juntos em um único diagrama, de modo em que existem relações entre cada, e informações podem ser retiradas a partir da combinação de ambos, mas a parte de interesse para esse projeto vai ser predominantemente a relação exposta para o ganho.

O objetivo final de traçar os diagramas de Bode é identificar o efeito que a variação de determinados parâmetros tem na resposta em frequência do sistema, assim como foi feito com o Lugar Geométrico das Raízes.

6.1. Procedimento Analítico para a Obtenção dos Diagramas de Bode

Para determinar esta resposta em frequência de uma determinada variável de saída em relação a uma entrada, é necessário definir a Função de Transferência (FT) que relaciona as duas. Uma FT é a representação matemática da relação entre a entrada e a saída de um sistema, e pode ser obtida através de uma transformada de Laplace aplicada em cada uma [4].

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}$$

Onde, $H(s)$ é a FT, $Y(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de saída e $X(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de entrada. É possível determinar esta relação entre as transformadas de Laplace de cada sinal a partir do modelo na forma de Equação de Movimento [1].

$$M\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F} + K_0\vec{X}_0 + B_0\vec{V}_0$$

O modelo na forma de Equações de Movimento é dado pela relação acima e pode ser expandido para sua forma matricial, como demonstrado anteriormente. Como a matriz B_0 é nula, o termo B_0V_0 não será considerado.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{z}_d \\ \ddot{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_a + b_t) & (b_t l_t - b_a l_d) & -b_a & -d_t \\ (b_t l_t - b_a l_d) & (b_t l_t^2 + b_a l_d^2) & b_a l_d & -b_t l_t \\ -b_a & b_a l_d & b_a & 0 \\ -b_t & -b_t l_t & 0 & b_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z}_d \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} (k_d + k_t) & (l_t k_t - l_d k_d) & -k_d & -k_t \\ (l_t k_t - l_d k_d) & (l_t^2 k_t + l_d^2 k_d) & l_d k_d & -l_t k_t \\ -k_d & l_d k_d & k_d + k_{pd} & 0 \\ -k_t & -l_t k_t & 0 & k_t + k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ M_Y \\ F_d \\ F_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{pd} & 0 \\ 0 & k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0d} \\ z_{0t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ao aplicar a transformada de Laplace no modelo [1], obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 z \\ s^2 \theta \\ s^2 z_d \\ s^2 z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_a + b_t) & (b_t l_t - b_a l_d) & -b_a & -d_t \\ (b_t l_t - b_a l_d) & (b_t l_t^2 + b_a l_d^2) & b_a l_d & -b_t l_t \\ -b_a & b_a l_d & b_a & 0 \\ -b_t & -b_t l_t & 0 & b_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s z \\ s \theta \\ s z_d \\ s z_t \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} (k_d + k_t) & (l_t k_t - l_d k_d) & -k_d & -k_t \\ (l_t k_t - l_d k_d) & (l_t^2 k_t + l_d^2 k_d) & l_d k_d & -l_t k_t \\ -k_d & l_d k_d & k_d + k_{pd} & 0 \\ -k_t & -l_t k_t & 0 & k_t + k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ z_d \\ z_t \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ M_Y \\ F_d \\ F_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{pd} & 0 \\ 0 & k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0d} \\ z_{0t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Simplificando.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} ms^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Js^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_t s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_a + b_t)s & (b_t l_t - b_a l_d)s & -b_a s & -d_t s \\ (b_t l_t - b_a l_d)s & (b_t l_t^2 + b_a l_d^2)s & b_a l_d s & -b_t l_t s \\ -b_a s & b_a l_d s & b_a s & 0 \\ -b_t s & -b_t l_t s & 0 & b_t s \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z(s) \\ \theta(s) \\ z_d(s) \\ z_t(s) \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} (k_d + k_t) & (l_t k_t - l_d k_d) & -k_d & -k_t \\ (l_t k_t - l_d k_d) & (l_t^2 k_t + l_d^2 k_d) & l_d k_d & -l_t k_t \\ -k_d & l_d k_d & k_d + k_{pd} & 0 \\ -k_t & -l_t k_t & 0 & k_t + k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(s) \\ \theta(s) \\ z_d(s) \\ z_t(s) \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z(s) \\ M_Y(s) \\ F_d(s) \\ F_t(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{pd} & 0 \\ 0 & k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0d}(s) \\ z_{0t}(s) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Fazendo a soma dos componentes que multiplicam o vetor de saídas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} ms^2 + (b_a + b_t)s + (k_d + k_t) & (b_t l_t - b_a l_d)s + (l_t k_t - l_d k_d) & -(b_a s + k_d) & -(d_t s + k_t) \\ (b_t l_t - b_a l_d)s + (l_t k_t - l_d k_d) & Js^2 + (b_t l_t^2 + b_a l_d^2)s + (l_t^2 k_t + l_d^2 k_d) & b_a l_d s + l_d k_d & -(b_t l_t s + l_t k_t) \\ -b_a s - k_d & b_a l_d s + l_d k_d & m_d s^2 + b_a s + (k_d + k_{pd}) & 0 \\ -b_t s - k_t & -(b_t l_t s + l_t k_t) & 0 & m_t s^2 + b_t s + (k_t + k_{pt}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(s) \\ \theta(s) \\ z_d(s) \\ z_t(s) \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z(s) \\ M_Y(s) \\ F_d(s) \\ F_t(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{pd} & 0 \\ 0 & k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0d}(s) \\ z_{0t}(s) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados pela inversa da Matriz que foi obtida:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ \theta(s) \\ z_d(s) \\ z_t(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} ms^2 + (b_d + b_t)s + (k_d + k_t) & (b_t l_t - b_d l_d)s + (l_t k_t - l_d k_d) & -(b_d s + k_d) & -(d_t s + k_t) \\ (b_t l_t - b_d l_d)s + (l_t k_t - l_d k_d) & Js^2 + (b_t l_t^2 + b_d l_d^2)s + (l_t^2 k_t + l_d^2 k_d) & b_d l_d s + l_d k_d & -(b_t l_t s + l_t k_t) \\ -b_d s - k_d & b_d l_d s + l_d k_d & m_d s^2 + b_d s + (k_d + k_{pd}) & 0 \\ -b_t s - k_t & -(b_t l_t s + l_t k_t) & 0 & m_t s^2 + b_t s + (k_t + k_{pt}) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z(s) \\ M_Y(s) \\ F_d(s) \\ F_t(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{pd} & 0 \\ 0 & k_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0d}(s) \\ z_{0t}(s) \end{bmatrix} \right)$$

Onde, Δ representa o determinante da matriz que foi invertida.

Uma vez calculada a inversa da matriz em questão, a FT representada pela equação por $H(s)$, pode ser encontrada, para toda relação entre uma entrada $X(s)$ e uma saída $Y(s)$, basta escrever $Y(s)$ em função de $X(s)$ de acordo com o sistema obtido e depois dividir os dois lados por $X(s)$, que o resultado estará na forma de uma FT.

$$Y(s) = \frac{NUM}{\Delta} X(s)$$

Onde, NUM representa os termos do sistema montado, que multiplicam a entrada $X(s)$ para chegar até a saída $Y(s)$.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{NUM}{\Delta}$$

Ao escrever a FT desta maneira, é possível notar que o denominador da mesma será sempre igual ao determinante da matriz utilizada para determinar a relação entre a entrada e a saída. E este determinante representa os polos do sistema.

A partir disso, fica subentendido que a diferença entre cada FT será encontrada exclusivamente no numerador, definido como NUM, que vai ser composto pelos termos do sistema montado que multiplicam a entrada $X(s)$ para chegar até a saída $Y(s)$.

Uma vez que cada FT for obtida, o diagrama de Bode para cada uma delas pode ser plotado, e o resultado obtido representará como a variável de entrada afeta o resultado da variável de saída para cada faixa de frequência em rad/s, mostrando o efeito no ganho, em dB, e na fase, em $^\circ$, entre o sinal de saída e o sinal de entrada [4].

O procedimento analítico para obter cada uma das funções de transferência para o sistema montado foi definido, mas seria muito trabalhoso e ineficiente calcular analiticamente a inversa da matriz, o determinante da mesma e a relação entre cada variável de entrada e cada variável de saída analisada. Portanto, com isso em mente, tais contas foram feitas numericamente, através do MATLAB, onde existe um comando pronto para a obtenção das funções de transferência, e outro comando pronto para plotar o gráfico de Bode usando uma FT como entrada. Deste modo, o procedimento fica muito mais simples.

As funções de transferência que serão estudadas para o sistema proposto vão ser as funções de transferência entre todas as variáveis de saída, e as variáveis de entrada z_{0d} e z_{0t} , que são as excitações de base nos pneus da motocicleta, e muito importantemente, são entradas senoidais. Isso significa que uma relação de ganho e fase pode ser obtida entre o sinal de entrada e o sinal de saída, pois ambos estão no mesmo formato. Ao contrário do que acontece com as variáveis de entrada na forma de forças aplicadas pela força da gravidade, que

são constantes, naturalmente, pois a aceleração da gravidade assim o é. A partir de cada uma das relações entre variáveis de entrada e de saída escolhidas, será desenhado um diagrama de Bode, e como o objetivo é identificar o efeito que a variação de determinados parâmetros tem na resposta em frequência do sistema, cada diagrama de Bode será desenhado para cada parâmetro analisado, contendo a resposta em frequência para uma série de valores para cada parâmetro.

6.2. Obtenção dos Diagramas de Bode do Sistema Original

Para exemplificar como serão obtidos os diagramas de Bode para cada variação de valores para cada parâmetro analisado, será explicitado o procedimento realizado para obter o diagrama de Bode para o sistema com os valores originais, através da obtenção de cada FT de interesse.

O procedimento numérico, por meio do MATLAB, para obter as funções de transferência entre cada variável de entrada e as variáveis de saída de interesse consiste em utilizar o sistema de matrizes obtido, na forma de estado em Variáveis Lagrangeanas, para encontrar as referidas funções de transferência, através do comando **ss2tf** do MATLAB.

Esse comando retorna as funções de transferência entre uma determinada variável de entrada e cada variável de saída do sistema. Logo, como será analisado o efeito de 2 entradas diferentes, a excitação de base nos 2 pneus, esse comando será usado 2 vezes, selecionando a respectiva posição na qual a variável de entrada desejada se encontra no vetor de entradas.

O formato em que as funções de transferência são retornadas é de um vetor com o denominador das FTs e de uma matriz com os numeradores de cada FT, que são retornados em forma de matriz pois são diferentes para cada variável de saída. Cada coluna representa o termo que multiplica $s^{(n-i)}$, onde n é o número total de colunas, e i é o índice da coluna, tanto na matriz com os numeradores quanto no vetor com o denominador.

Para obter então a FT para cada relação entre entrada e saída, basta montar uma FT com a linha da matriz de numeradores correspondente com a variável de saída desejada, e o vetor com o denominador [1]. Vale ressaltar que é utilizado um comando do MATLAB chamado **zpk** para obter as funções de transferência no formato de zeros polos e ganho, que é mais vistoso e informativo. O resultado obtido para cada uma das funções de transferências está demonstrado abaixo.

$$FT_{(z \times z_{0d})} = \frac{40000 (s + 15)(s^2 + 25,72s + 433,5)(s^2 + 67,61s + 9227)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

$$FT_{(z \times z_{0t})} = \frac{40000 (s + 15)(s^2 + 21,95s + 368,9)(s^2 + 68,05s + 9488)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

$$FT_{(\theta \times z_{0d})} = \frac{-155560 (s + 15)(s^2 + 7,368s + 122,4)(s^2 + 67,87s + 10510)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

$$FT_{(\theta \times z_{0t})} = \frac{-177780 (s + 15)(s^2 + 6,412s + 106,4)(s^2 + 67,75s + 10570)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

$$FT_{(z_d \times z_{0d})} = \frac{10000 (s^2 + 7,467 + 116,9)(s^2 + 24,5s + 391,6)(s^2 + 67,81s + 9830)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

$$FT_{(z_d \times z_{0t})} = \frac{-5629600(s + 15)^2(s - 0,0000002863)(s + 0,0000002863)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

$$FT_{(z_t \times z_{0d})} = \frac{-5629600(s + 15)^2(s - 0,0000003735)(s + 0,0000003735)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

$$FT_{(z_t \times z_{0t})} = \frac{10000 (s^2 + 7,247 + 115,7)(s^2 + 24,72s + 386,5)(s^2 + 67,81s + 10060)}{(s^2 + 6,811s + 113,1)(s^2 + 23,99s + 403,9)(s^2 + 67,84s + 9346)(s^2 + 67,8s + 10540)}$$

Para cada FT obtida, um diagrama de Bode é plotado, utilizando o comando **bode** do MATLAB, e o resultado, junto com uma breve análise do comportamento obtido para cada diagrama, está apresentado a seguir.

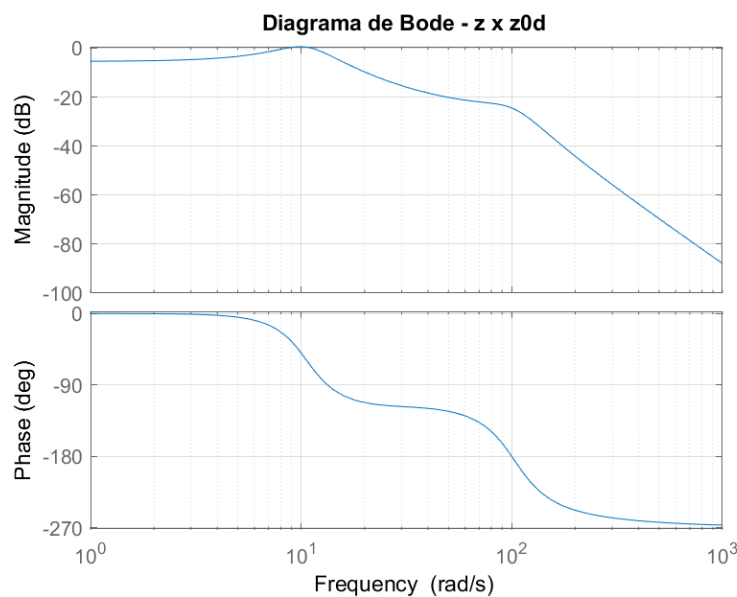


Figura 6-1: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z , deslocamento da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a resposta na variável de saída z , é possível notar que existem duas frequências de ressonância [4], em 10 rad/s e em 100 rad/s. Além disso, para o deslocamento da massa suspensa, z , o sistema atua sempre como um atenuador na resposta à variável de entrada z_{0d} .

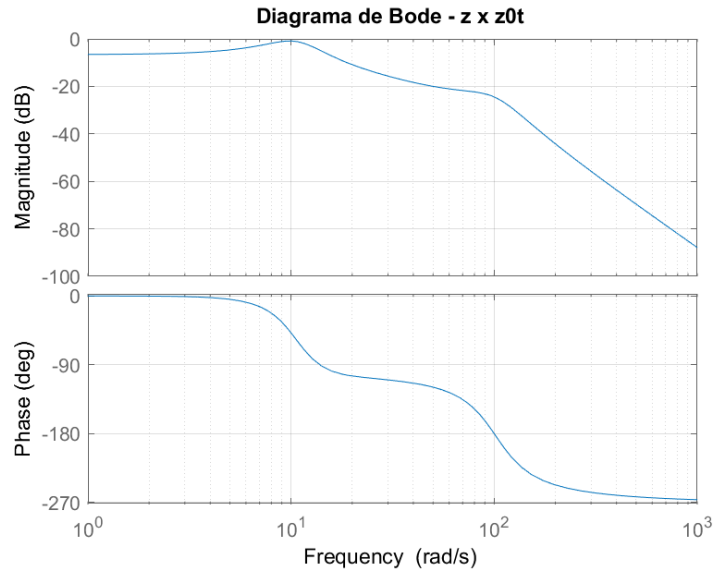


Figura 6-2: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z , deslocamento da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)

Novamente, ao observar o diagrama de Bode obtido para a resposta na variável de saída z , é possível notar que existem duas frequências de ressonância, em 10 rad/s e em 100 rad/s. E assim como para o caso anterior, o sistema atua sempre como um atenuador na resposta à variável de entrada z_{0t} .

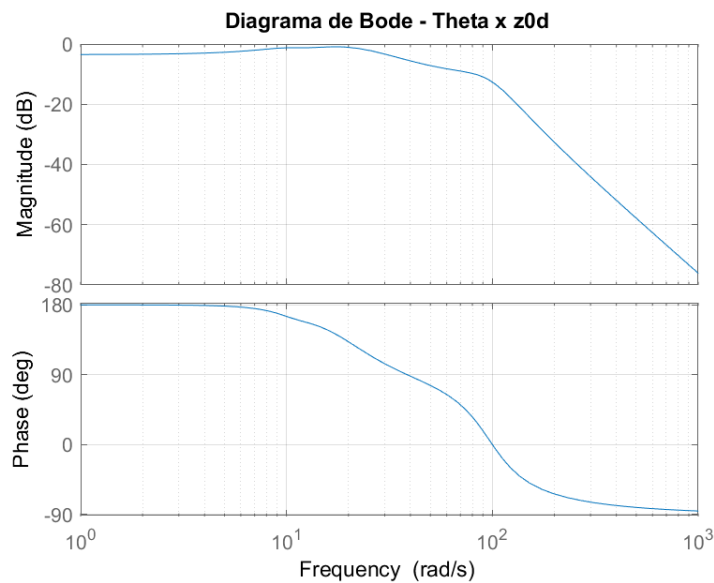


Figura 6-3: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída θ , ângulo de guinada da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)

Para o diagrama de Bode obtido para a resposta na variável de saída θ , também é possível notar duas frequências de ressonância, desta vez próximo à 20 rad/s e em 100 rad/s. E assim como nos casos para a resposta na variável z , o sistema sempre atua como atenuador para uma resposta à variável de entrada z_{0d} .

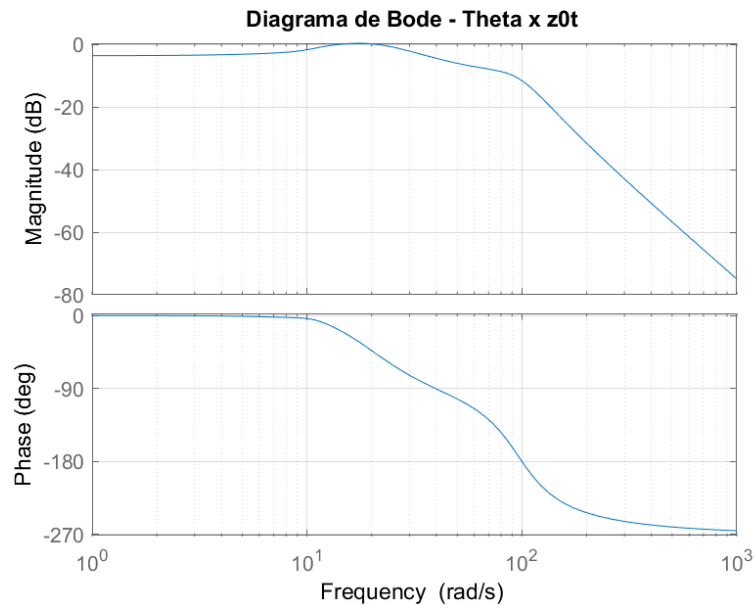


Figura 6-4: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída θ , ângulo de guinada da massa suspensa, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)

O diagrama de Bode obtido na resposta à variável de entrada z_{0t} é basicamente idêntico ao obtido para a variável de entrada z_{0d} , com duas frequências de ressonância, próximo à 20 rad/s e em 100 rad/s e com o sistema sempre atuando como atenuador.

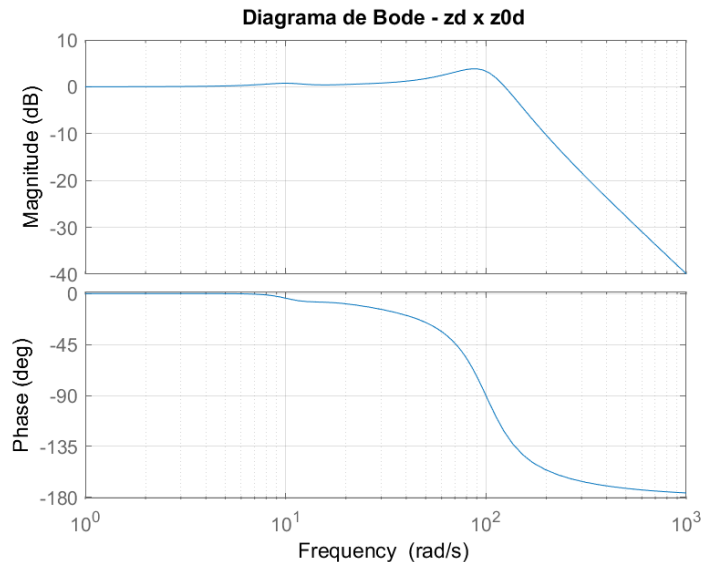


Figura 6-5: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_d , deslocamento do pneu dianteiro, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a resposta na variável de saída z_d em função da variável de entrada z_{0d} , nota-se uma frequência de ressonância de 100 rad/s, com a ressonância representada por um pico de ganho positivo para o sistema. Assim como no pico de ressonância, para uma frequência entre 10 rad/s e 103 rad/s, o sistema atua como um amplificador. Para frequências menores que 10, o ganho é nulo, e para frequências maiores que 103, o sistema atua como atenuador.

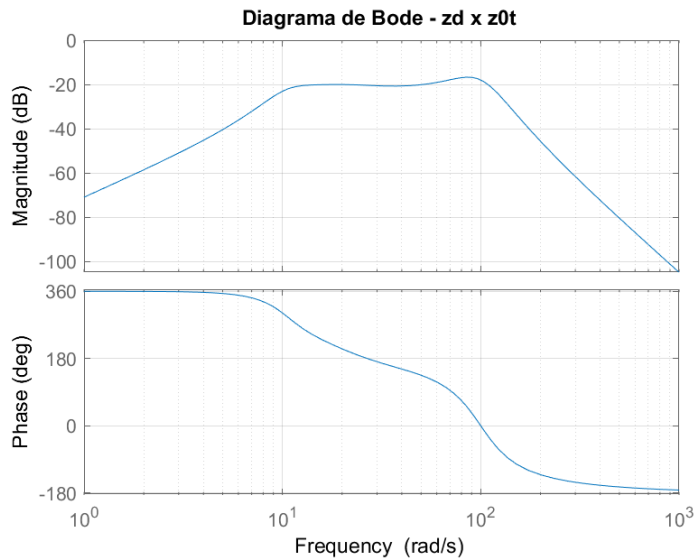


Figura 6-6: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_d , deslocamento do pneu dianteiro, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a resposta na variável de saída z_d , é possível notar que existem duas frequências de ressonância, em 10 rad/s e em 100 rad/s, nas quais inclusive ocorre uma atenuação. O sistema atua como atenuador em todos os instantes para uma resposta à variável de entrada z_{0t} , e conta com ganhos mais expressivos em frequências muito baixas ou muito altas.

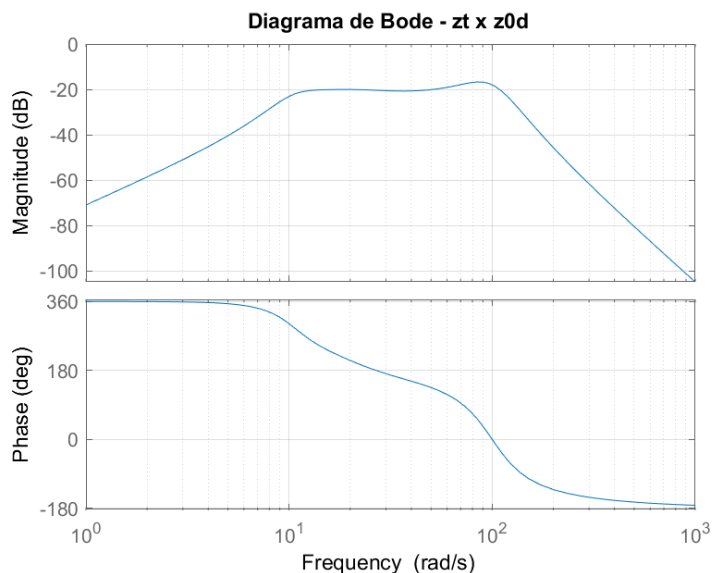


Figura 6-7: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_t , deslocamento do pneu traseiro, e a variável de entrada z_{0d} , deslocamento de base no pneu dianteiro – FT ($z \times z_{0d}$)

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a resposta na variável de saída z_t em função da variável de entrada z_{0d} , o comportamento é idêntico ao encontrado no caso anterior, com duas frequências de ressonância, em 10 rad/s e em 100 rad/s, com o sistema atua como atenuador em todos os instantes e com ganhos mais expressivos em frequências muito baixas ou muito altas.

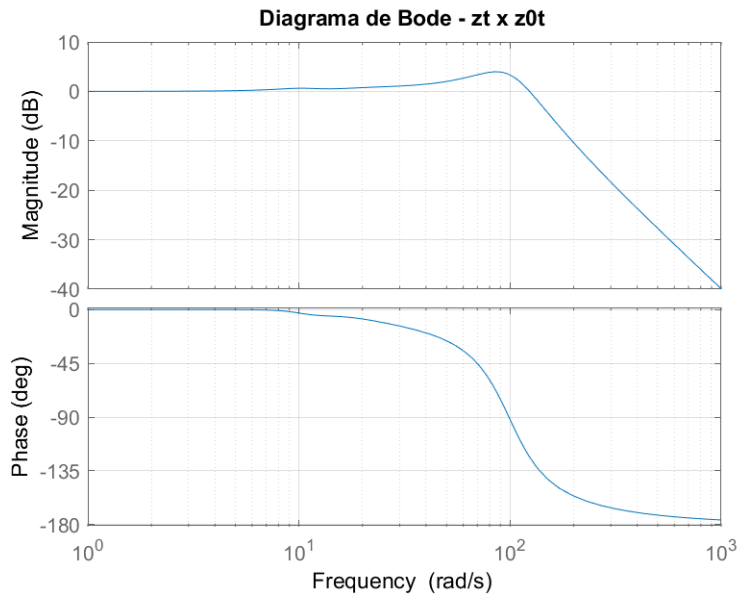


Figura 6-8: Diagrama de Bode para a FT entre a variável de saída z_t , deslocamento do pneu traseiro, e a variável de entrada z_{0t} , deslocamento de base no pneu traseiro – FT ($z \times z_{0t}$)

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a resposta na variável de saída z_t em função da variável de entrada z_{0d} , nota-se uma frequência de ressonância de 100 rad/s, com a ressonância representada por um pico de ganho positivo para o sistema, que atua como um amplificador para uma frequência entre 10 rad/s e 103 rad/s. Para frequências menores que 10, o ganho é nulo, e para frequências maiores que 103, o sistema atua como atenuador.

6.3. Obtenção dos Diagramas de Bode do Sistema com a Variação dos Parâmetros

Para desenhar os diagramas de Bode para a variação de determinado parâmetro o mesmo procedimento exemplificado para obter o diagrama de Bode [1] para o sistema com os valores originais, foi realizado também para uma série de sistemas, cada um com um valor diferente para o parâmetro variado, de modo a obter um diagrama de Bode para cada variação do parâmetro. Cada diagrama de Bode obtido para diferentes valores do mesmo parâmetro foi plotado em uma mesma figura, para melhor comparação dos resultados.

Este procedimento foi realizado para uma série de parâmetros, com o intuito de compreender melhor como a variação de cada um afeta a resposta do sistema às variáveis de entrada, z_{0d} e z_{0t} . Uma quantidade maior de parâmetros foi variada para a análise dos diagramas de Bode, quando comparado aos parâmetros variados na análise do Lugar Geométrico das Raízes, pois é um procedimento que pode ser feito com parâmetros que aparecem não linearmente no sistema, e também porque para desenhar o diagrama de Bode não é necessário realizar nenhum procedimento analítico específico com um parâmetro, então foi possível variar o valor para parâmetros de ambas as suspensões, dianteira e traseira, juntos, assim como a distância total entre os eixos.

A tabela 6-1 mostra os parâmetros que foram analisados, seus símbolos, unidades de medida e os valores para qual o procedimento foi feito.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valores de cada parâmetro usados para a análise
Amortecimento do amortecedor da suspensão dianteira	b_d	N/m/s	500, 1000, 1500, 2000, 2500
Amortecimento do amortecedor da suspensão traseira	b_t	N/m/s	500, 1000, 1500, 2000, 2500
Amortecimento dos amortecedores de ambas as suspensões	b_d e b_t	N/m/s	500, 1000, 1500, 2000, 2500
Distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa	l_d	m	0,467, 0,583, 0,7, 0,875, 1,05
Distância entre o eixo traseiro e o centro de massa	l_t	m	0,533, 0,667, 0,8, 1,0, 1,2
Distância entre os eixos	$l = l_d + l_t$	m	1, 1,25, 1,5, 1,875, 2,25
Massa suspensa (veículo + condutor)	m	kg	150, 200, 250, 300, 350, 400
Rigidez da mola da suspensão dianteira	k_d	N/m	5000, 10000, 15000, 20000, 25000
Rigidez da mola da suspensão traseira	k_t	N/m	5000, 10000, 15000, 20000, 25000
Rigidez das molas de ambas as suspensões	k_d e k_t	N/m	5000, 10000, 15000, 20000, 25000

Tabela 6-1: Parâmetros do sistema escolhidos para a análise dos diagramas de Bode, com os valores considerados para a análise de cada parâmetro

Para cada um dos parâmetros listados na tabela 6-1, as 8 funções de transferência utilizadas para a análise do sistema foram obtidas com os valores determinados para realizar a análise. A partir das mesmas, foram obtidas 8 figuras com a sobreposição dos diagramas de Bode para cada valor usado. Os gráficos resultantes estão apresentados a seguir, assim como uma tabela ao final, contendo um resumo de quanto cada variação influencia a resposta em frequência do sistema.

6.4. Diagramas de Bode para a Variação do Amortecimento do Amortecedor da Suspensão Dianteira (b_d)

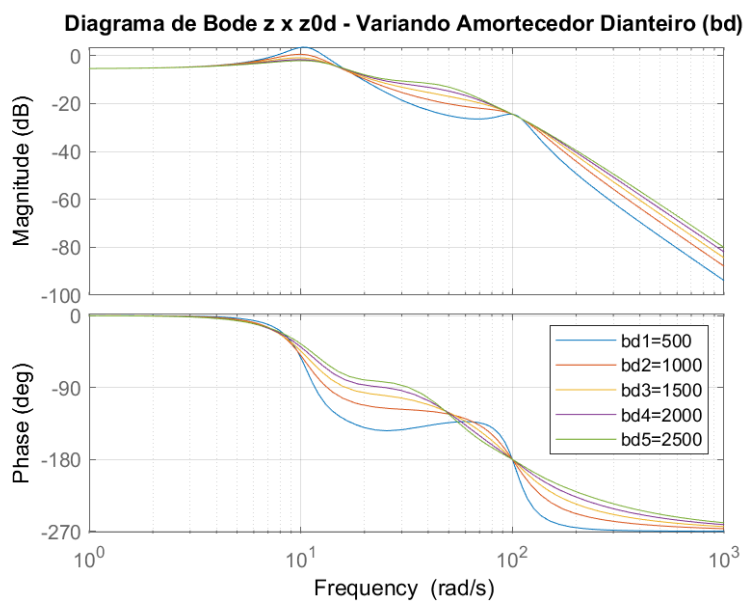


Figura 6-9: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, é possível notar que a variação no amortecedor dianteiro é responsável por modificar a frequência

de ressonância originalmente em 100 rad/s, com um amortecimento mais alto, a frequência de ressonância diminui. Além disso, a variação de b_d altera os ganhos da resposta, com um amortecimento mais baixo levando a um ganho positivo em 10 rad/s, comportamento amplificador, e gerando ganhos mais expressivos para frequências mais altas.

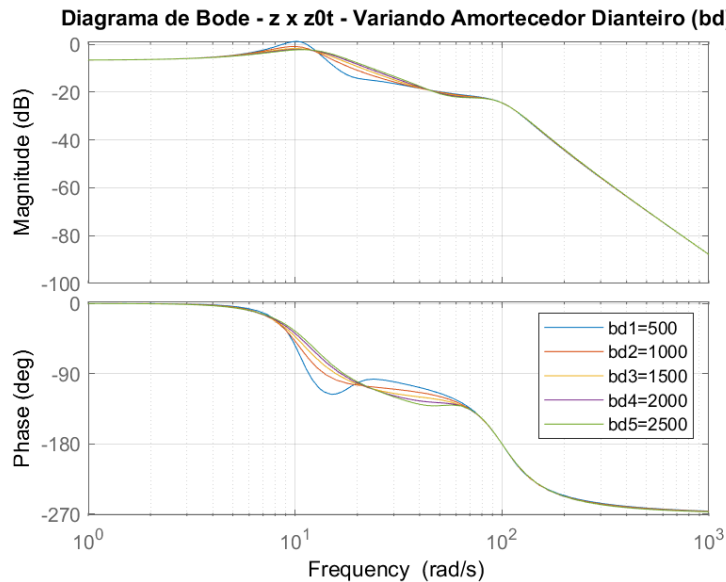


Figura 6-10: Diagrama de Bode para a $FT z \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Observando o diagrama de Bode obtido para a $FT z \times z_{0t}$, é possível notar que desta vez, a variação no amortecedor dianteiro é responsável por alterar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta, fora um ganho positivo muito pequeno em 10 rad/s.

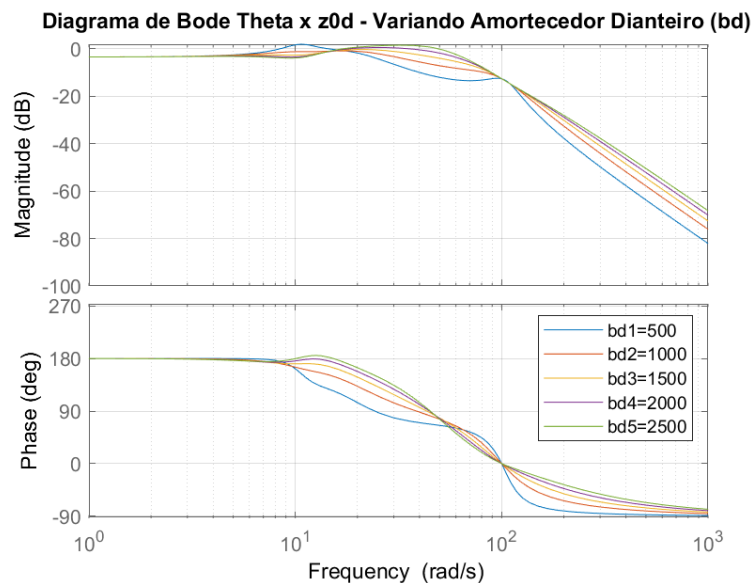


Figura 6-11: Diagrama de Bode para a $FT \theta \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, é possível notar que o aumento do valor no amortecedor dianteiro faz com que uma das ressonâncias deixe de existir, de modo em que a resposta do sistema apresenta uma única frequência de ressonância em aproximadamente 50 rad/s. Enquanto isso, a variação no amortecedor dianteiro também é responsável por modificar os ganhos da resposta em frequências mais altas, gerando ganhos mais expressivos em valores mais baixos de amortecimento.

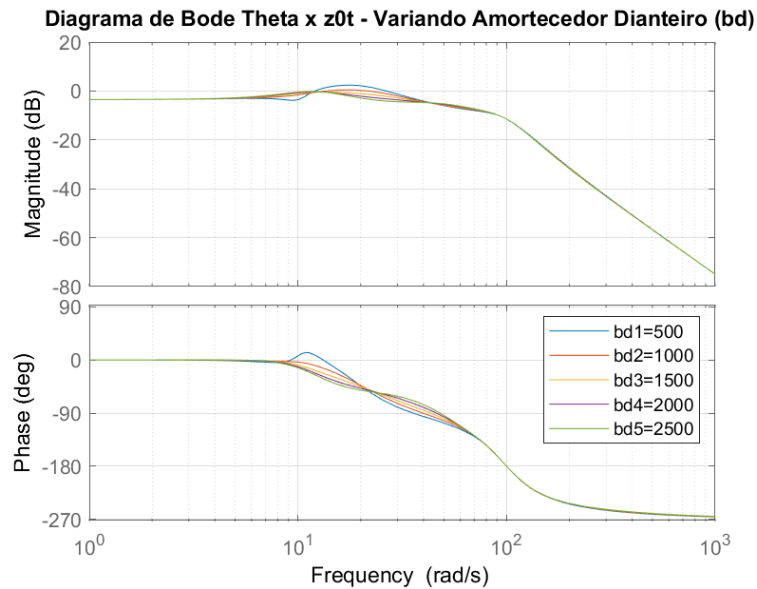


Figura 6-12: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, é possível notar que desta vez, a variação no amortecedor dianteiro é responsável por alterar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

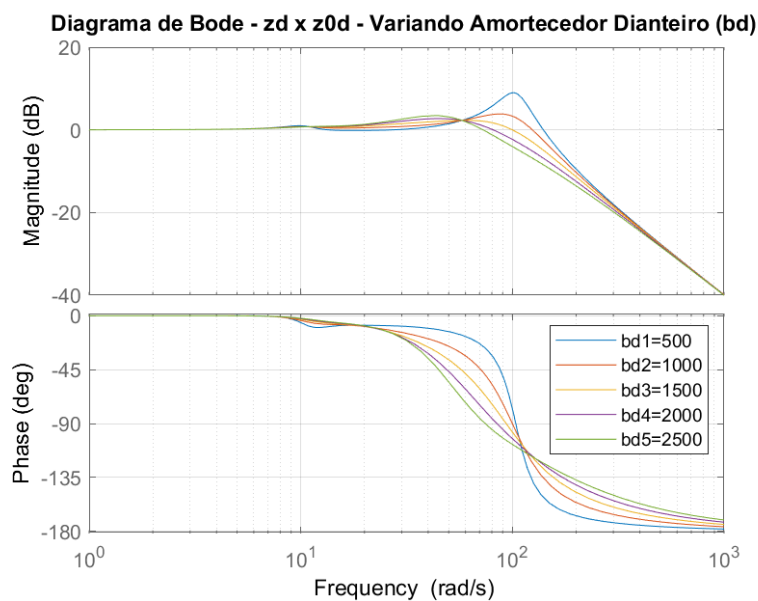


Figura 6-13: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, é possível observar que a variação no amortecedor dianteiro ameniza levemente o pico de ressonância com ganho positivo em 100 rad/s, e diminui a frequência de ressonância associada ao mesmo.

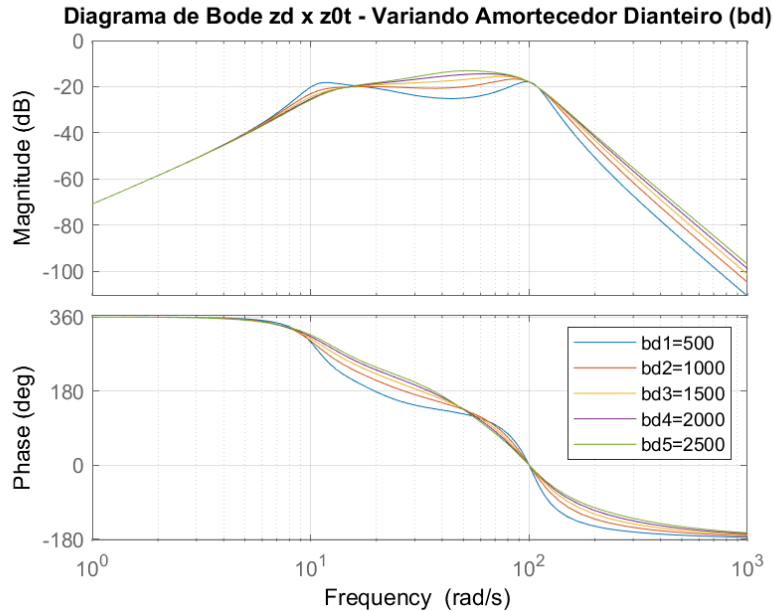


Figura 6-14: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, nota-se que o aumento do amortecimento dianteiro faz com que as frequências de ressonância em 10 rad/s e 100 rad/s aproximem-se uma das outras. Já a diminuição do amortecimento leva a ganhos mais expressivos.

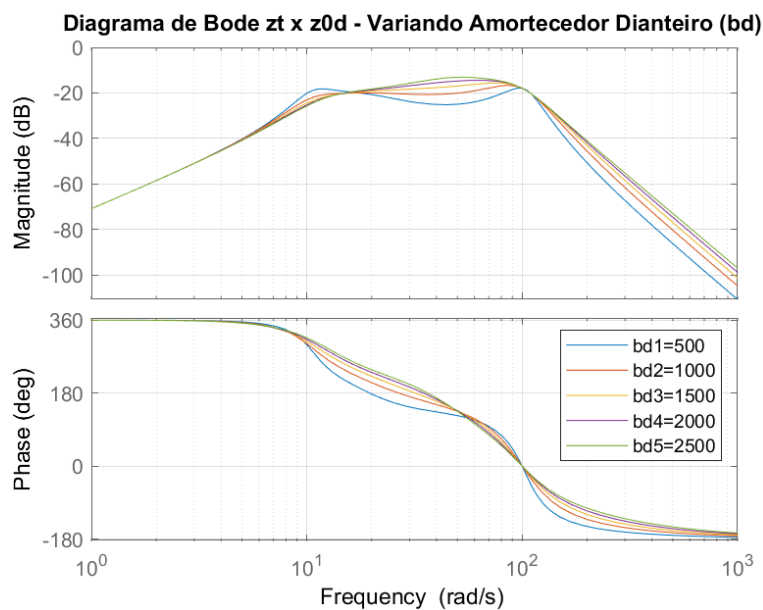


Figura 6-15: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, nota-se que o mesmo comportamento para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$,

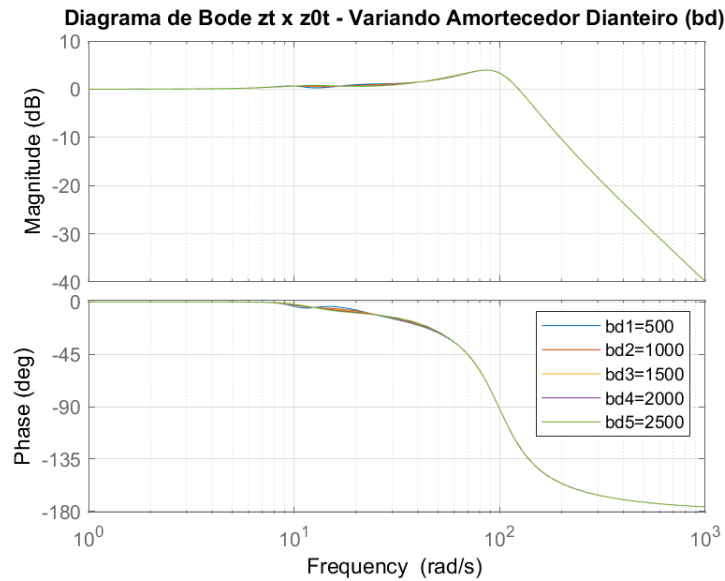


Figura 6-16: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_d do amortecedor dianteiro

Para a FT $z_t \times z_{0t}$ o diagrama de Bode não apresenta alteração devido à variação no amortecedor dianteiro.

6.5. Diagramas de Bode para a Variação do Amortecimento do Amortecedor da Suspensão Traseira (b_t)

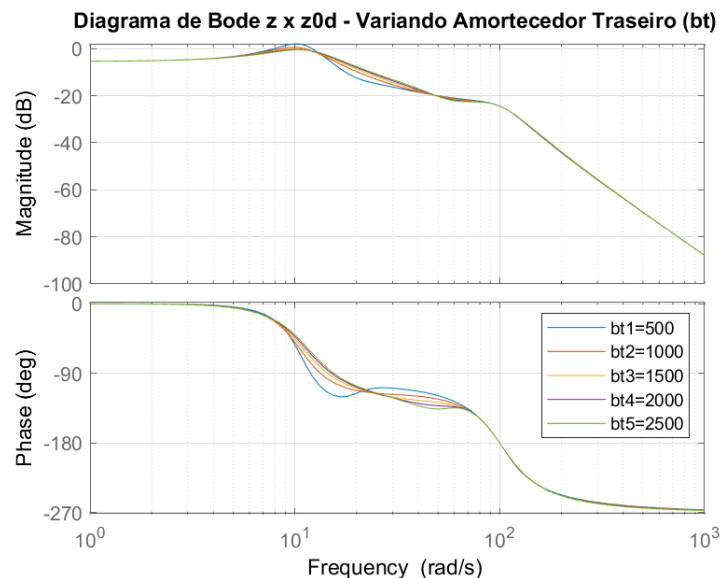


Figura 6-17: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, é possível notar que desta vez, a variação no amortecedor traseiro é responsável por alterar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e basicamente não apresenta variações no ganho da resposta.

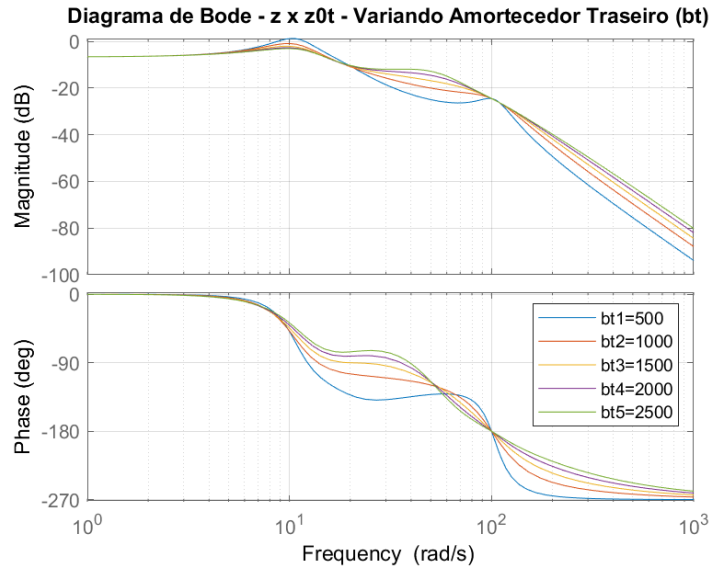


Figura 6-18: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0t}$, é possível notar que a variação no amortecedor traseiro é responsável por modificar a frequência de ressonância originalmente em 100 rad/s, diminuindo a frequência de ressonância com um amortecimento mais alto. A variação de b_t altera os ganhos da resposta, com um amortecimento mais baixo gerando ganhos mais expressivos para frequências mais altas.

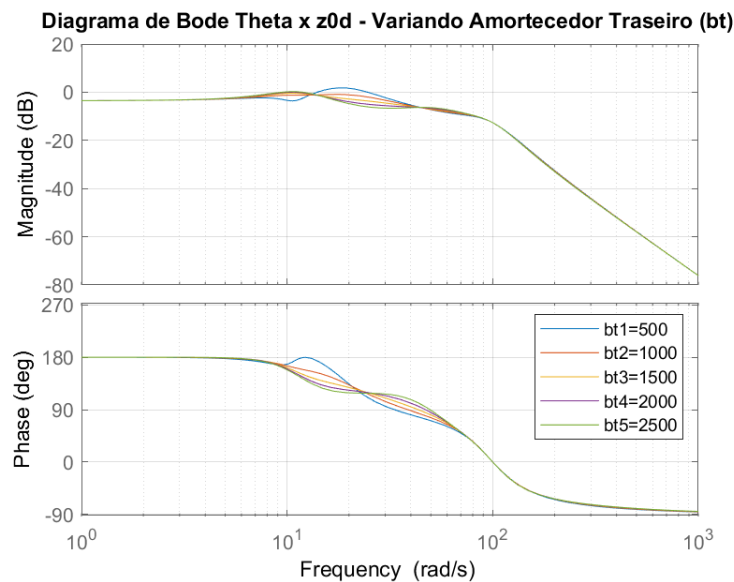


Figura 6-19: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, é possível notar que a variação no amortecedor traseiro é responsável por alterar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

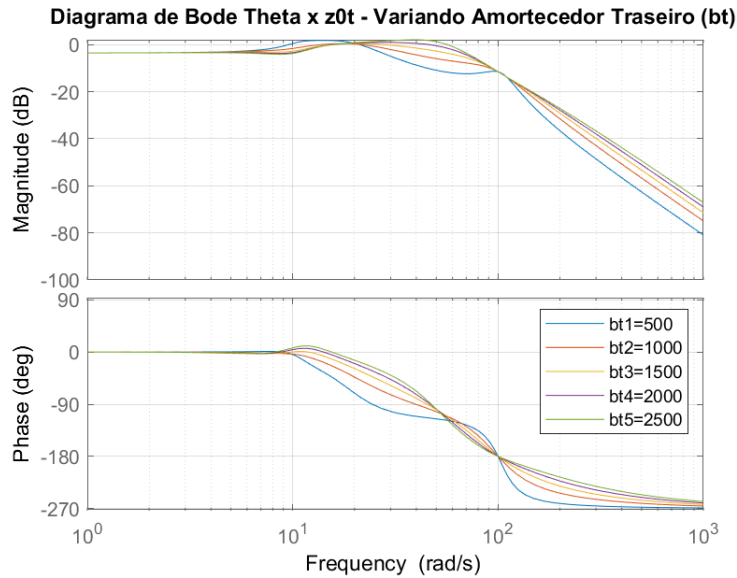


Figura 6-20: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, é possível notar que o aumento do amortecimento traseiro faz com que uma das ressonâncias deixe de existir, de modo em que a resposta do sistema apresenta uma única frequência de ressonância em aproximadamente 50 rad/s. A variação no amortecedor traseiro também gera ganhos mais expressivos em valores mais baixos de amortecimento.

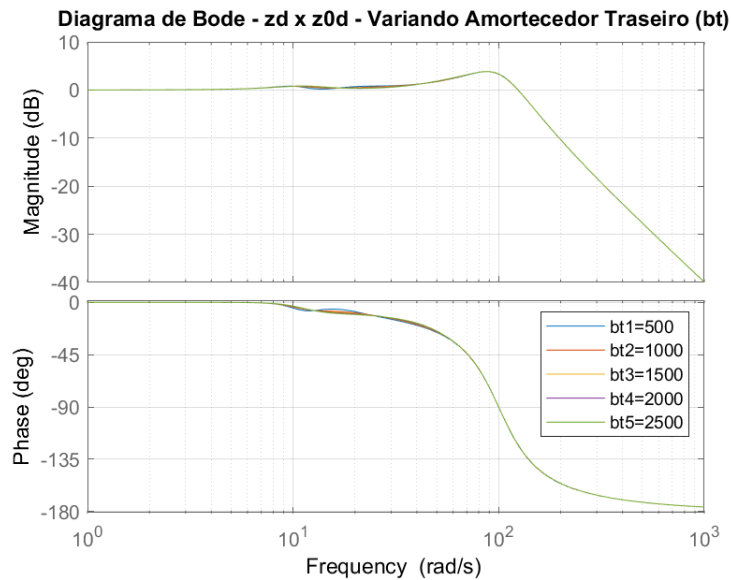


Figura 6-21: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

Para a FT $z_d \times z_{0d}$ o diagrama de Bode não apresenta alteração devido à variação no amortecedor traseiro.

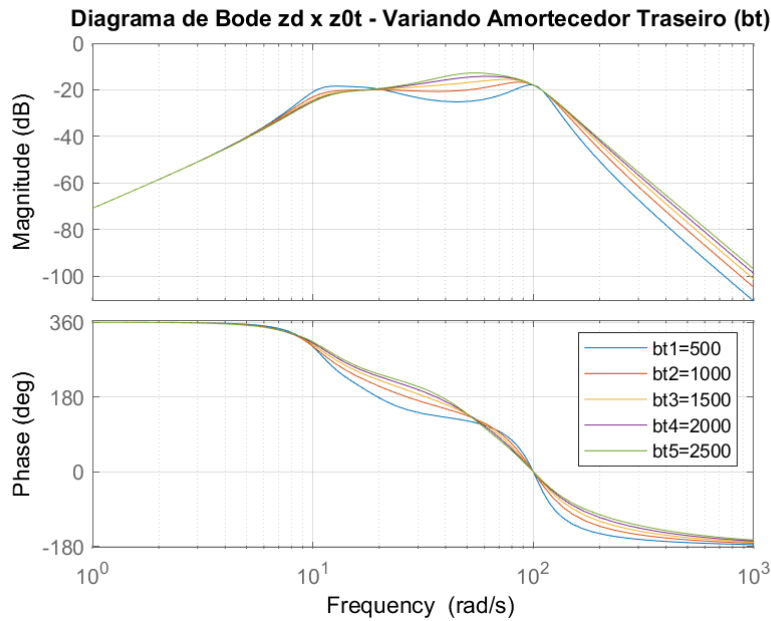


Figura 6-22: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

O diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$ apresenta o mesmo resultado obtido para a variação no amortecedor dianteiro, com um aumento do amortecimento aproximando as frequências de ressonância em 10 rad/s e 100 rad/s, e a diminuição do amortecimento gerando ganhos mais expressivos.

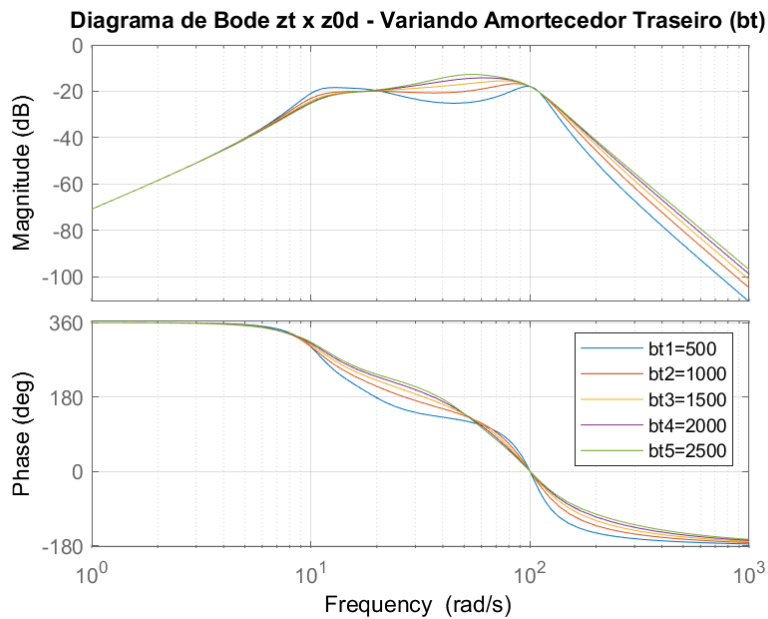


Figura 6-23: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, nota-se que ocorre o mesmo comportamento para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, com um aumento do amortecimento do amortecedor da suspensão traseira aproximando as frequências de ressonância em 10 rad/s e 100 rad/s.

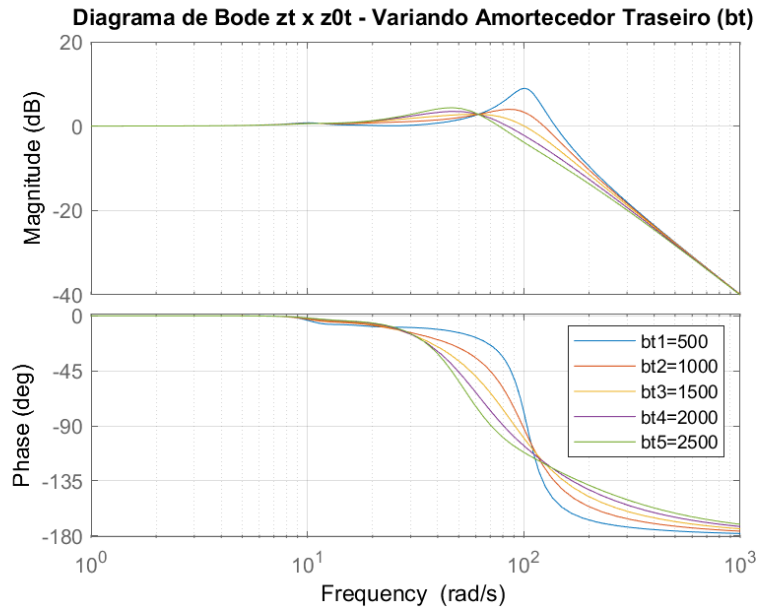


Figura 6-24: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro b_t do amortecedor traseiro

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0t}$, é possível observar que o aumento do amortecimento traseiro ameniza levemente o pico de ressonância com ganho positivo em 100 rad/s, e diminui a frequência de ressonância associada ao mesmo.

6.6. Diagramas de Bode para a Variação do Amortecimento dos Amortecedores de Ambas as Suspensões (b_d e b_t)

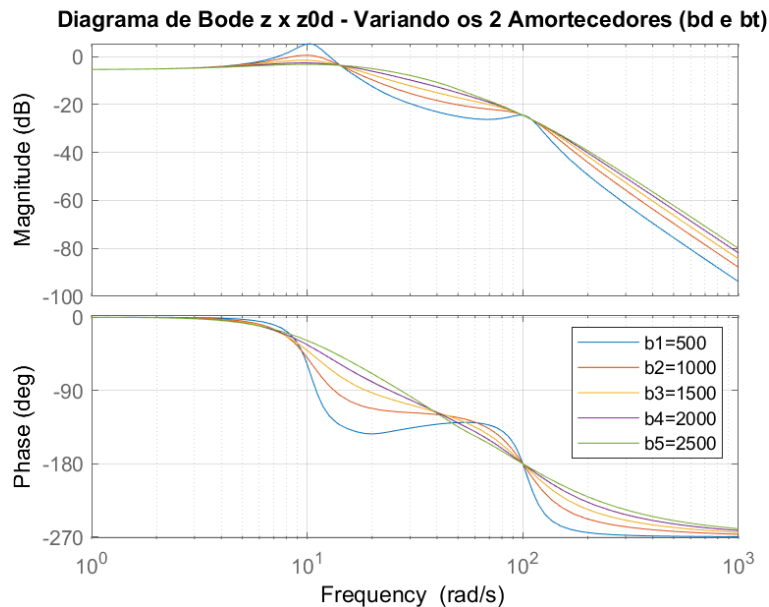


Figura 6-25: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, nota-se que um amortecimento mais alto em ambas as suspensões resulta em um sistema onde a frequência de ressonância em 100 rad/s deixa de existir, e a ressonância em 10

rad/s fica muito sutil. O aumento de amortecimento também ameniza os ganhos da resposta.

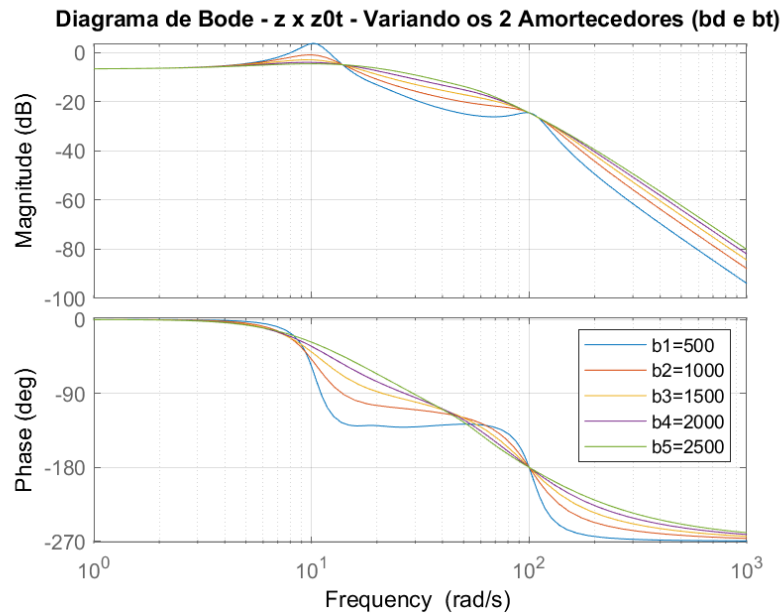


Figura 6-26: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0t}$, observa-se uma resposta em frequência idêntica àquela obtida para a FT $z \times z_0$.

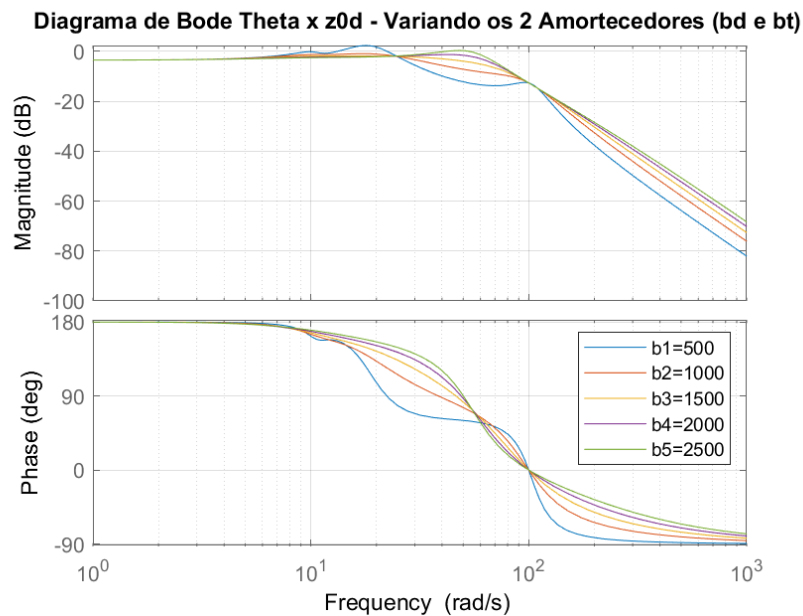


Figura 6-27: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, é possível notar que o aumento do valor do amortecimento faz com que uma das ressonâncias deixe de existir, de modo em que a resposta do sistema apresenta uma única frequência de ressonância em aproximadamente 60 rad/s. O aumento de amortecimento também ameniza os ganhos da resposta.

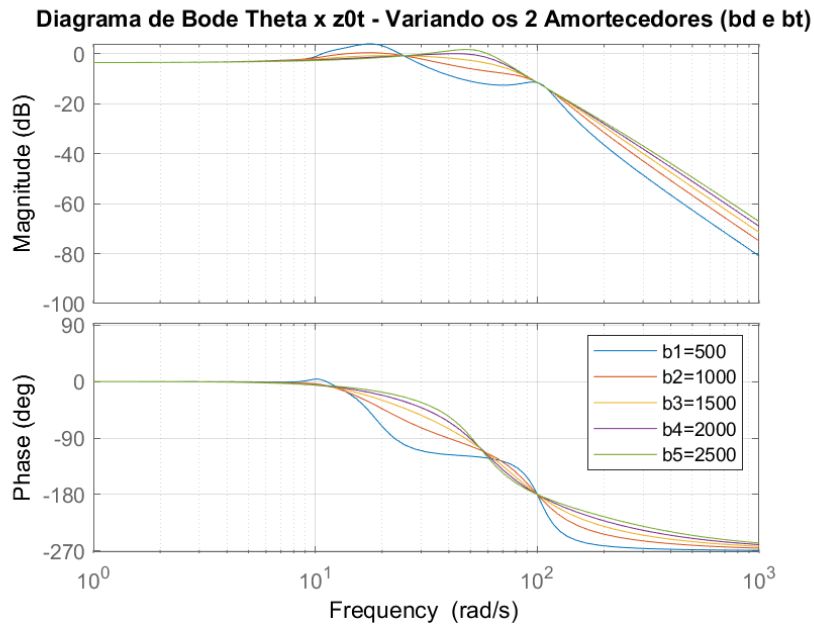


Figura 6-28: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t

O diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$ apresenta comportamento parecido com o diagrama para a FT $\theta \times z_{0d}$, com o aumento do valor do amortecimento resultando em uma única frequência de ressonância em aproximadamente 60 rad/s.

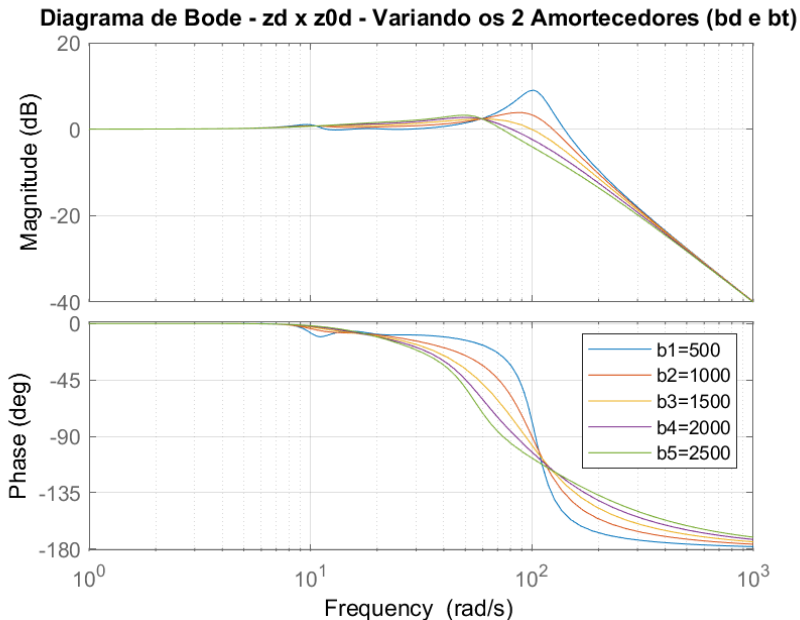


Figura 6-29: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, é possível observar que o aumento do amortecimento ameniza levemente o pico de ressonância com ganho positivo em 100 rad/s, e diminui a frequência de ressonância associada ao mesmo. Ainda é válido notar que o diagrama de Bode é idêntico ao obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$ com a variação do amortecedor dianteiro,

pois para a mesma FT, observa-se que a variação do amortecedor traseiro não influencia a resposta.

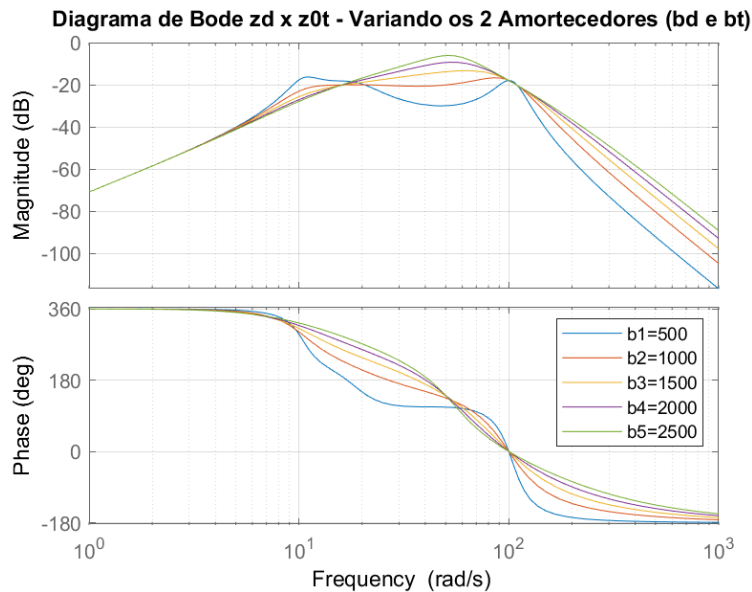


Figura 6-30: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, é possível notar que o aumento do valor de amortecimento aproxima as duas frequências de ressonância até que uma das ressonâncias deixe de existir, de modo em que a resposta do sistema apresenta uma única frequência de ressonância em aproximadamente 50 rad/s. O aumento de amortecimento também ameniza bastante os ganhos da resposta.

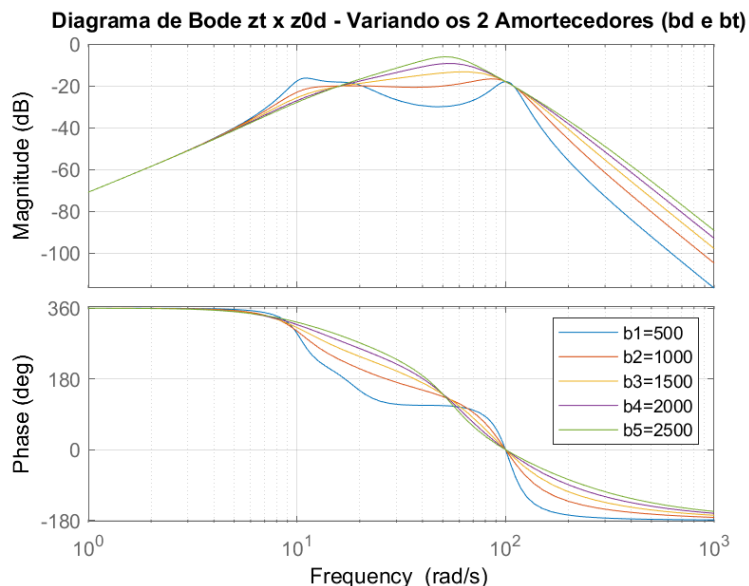


Figura 6-31: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando os parâmetros b_d e b_t

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, nota-se que ocorre o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$.

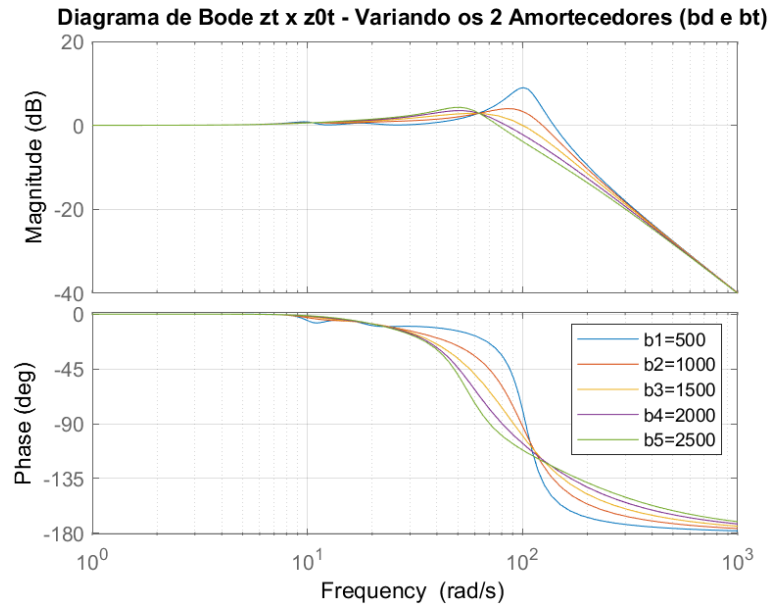


Figura 6-32: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando os parâmetros b_d e b_t

Para o caso do diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0t}$, é possível observar que o aumento do amortecimento ameniza levemente o pico de ressonância com ganho positivo em 100 rad/s, e diminui a frequência de ressonância associada ao mesmo.

6.7. Diagramas de Bode para a Variação da Distância entre o Eixo Dianteiro e o Centro de Massa (l_d)

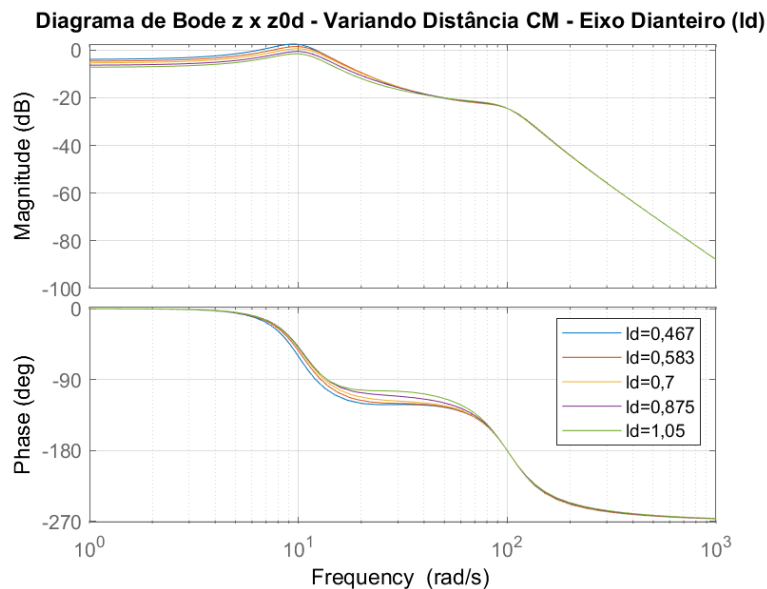


Figura 6-33: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, a variação da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa não afeta as frequências de ressonância e, quase não altera o ganho da resposta.

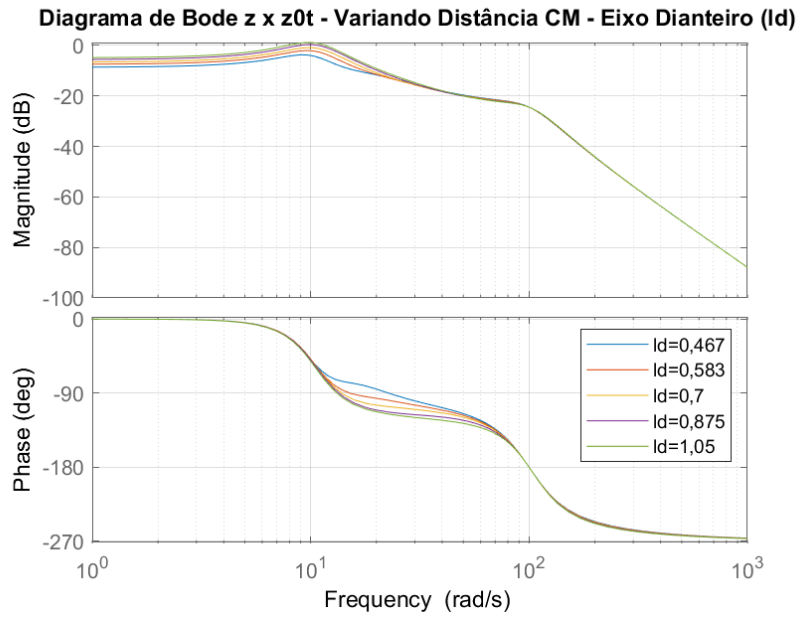


Figura 6-34: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0t}$, novamente observa-se que a variação da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa não afeta as frequências de ressonância e, quase não altera o ganho da resposta.

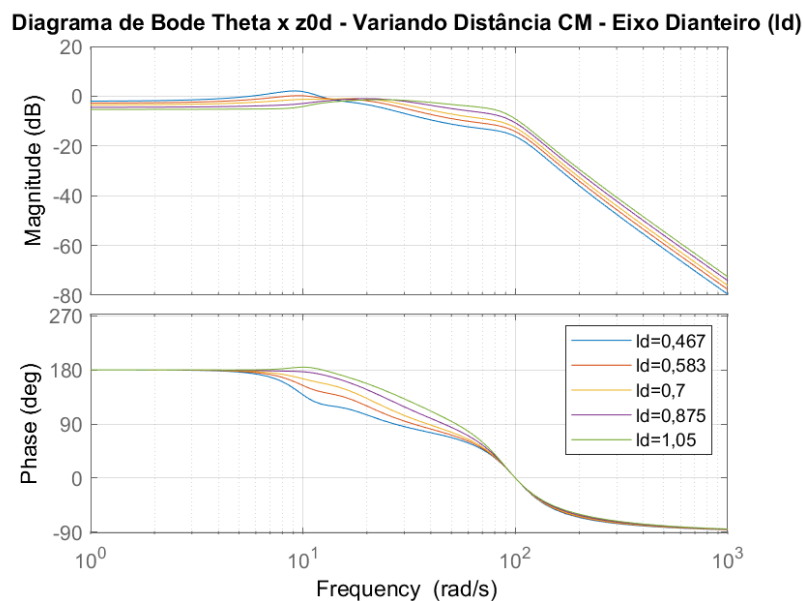


Figura 6-35: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, o aumento da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa faz com que as frequências de ressonância se aproximem uma das outras, além de modificar os ganhos da resposta em frequência.

Diagrama de Bode Theta x z0t - Variando Distância CM - Eixo Dianteiro (ld)

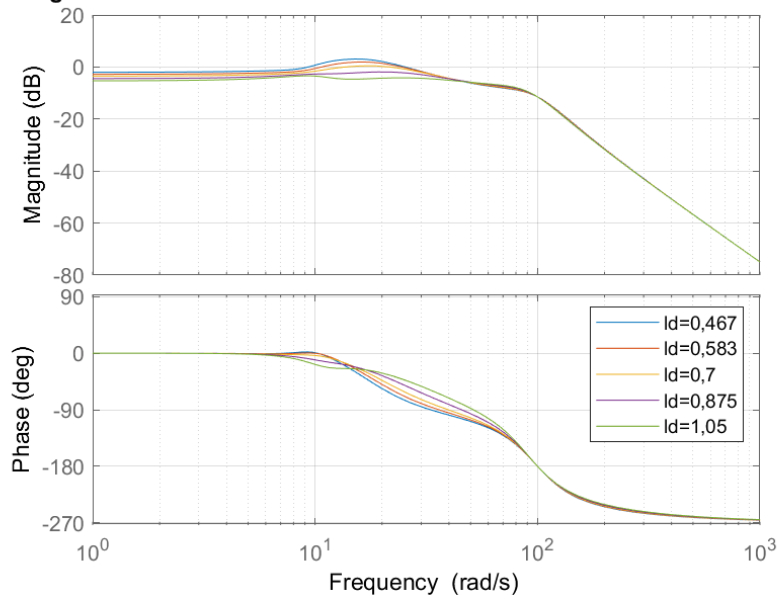


Figura 6-36: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, nota-se que a variação da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa quase não influencia as frequências de ressonância, e afeta pouco o ganho da resposta.

Diagrama de Bode zd x z0d - Variando Distância CM - Eixo Dianteiro (ld)

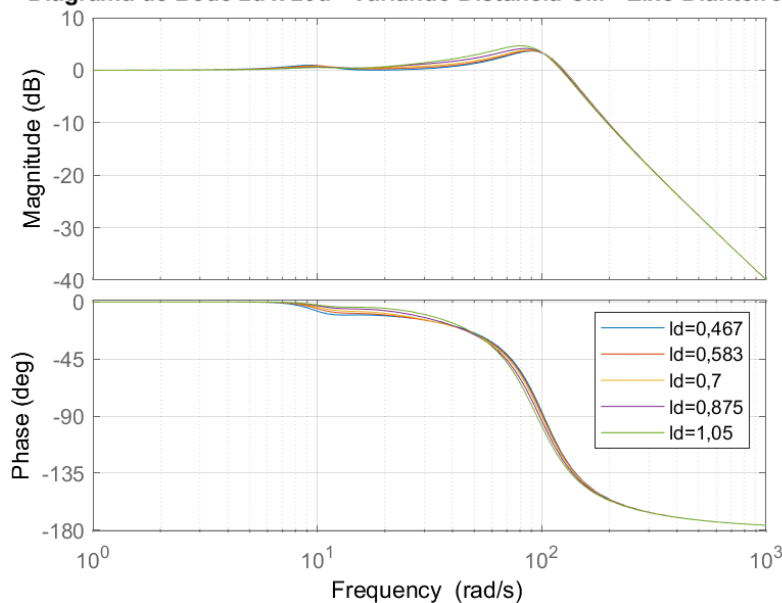


Figura 6-37: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, nota-se que a variação da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa basicamente não influencia a resposta em frequência.

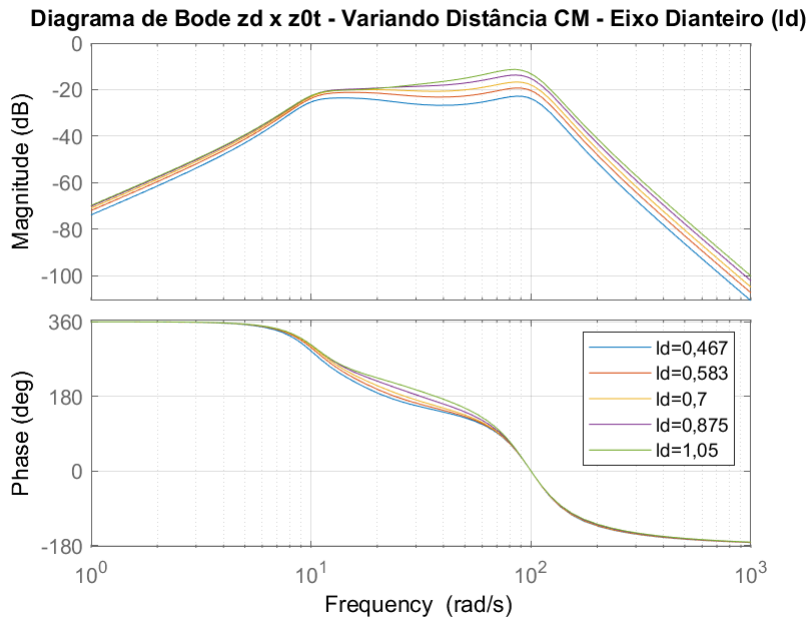


Figura 6-38: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, é possível observar que a variação da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa basicamente não influencia as frequências de ressonância, mas afeta o ganho da resposta em frequência.

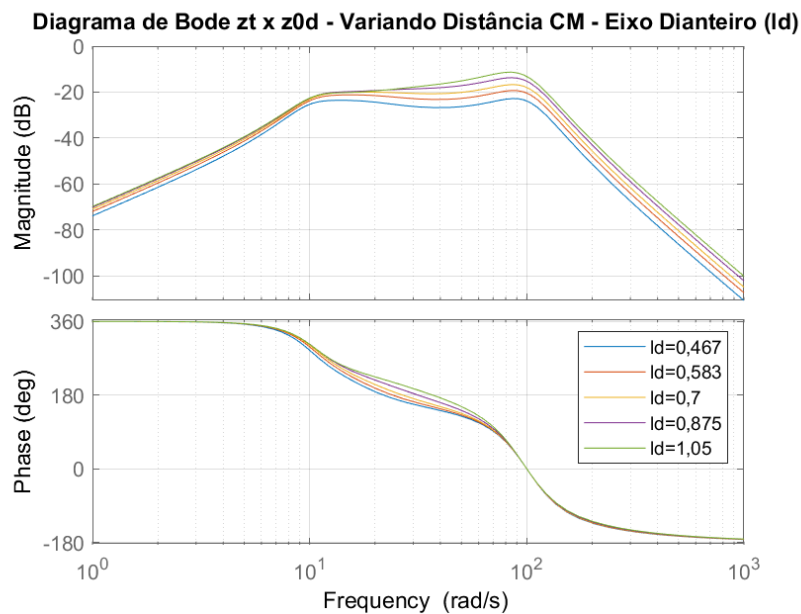


Figura 6-39: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, nota-se que ocorre o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$.

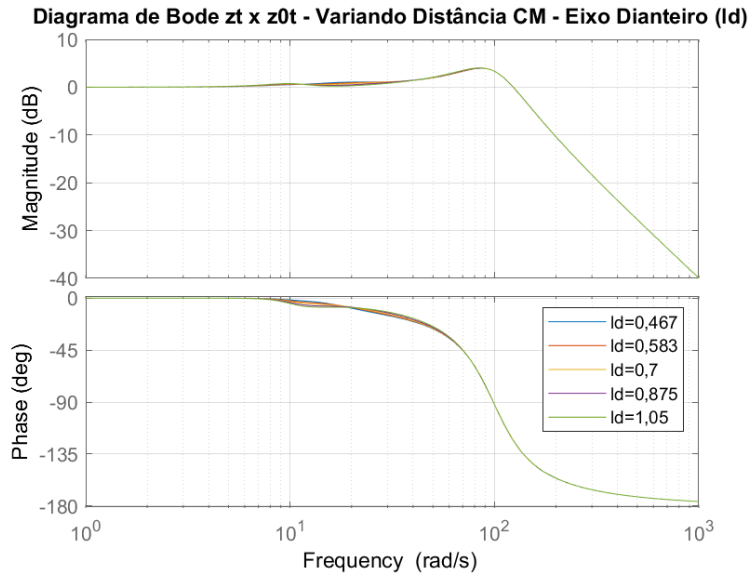


Figura 6-40: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a distância l_d do CM até o eixo dianteiro

Para a FT $z_t \times z_{0t}$ o diagrama de Bode não apresenta alteração devido à variação da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa.

6.8. Diagramas de Bode para a Variação da Distância entre o Eixo Traseiro e o Centro de Massa (l_t)

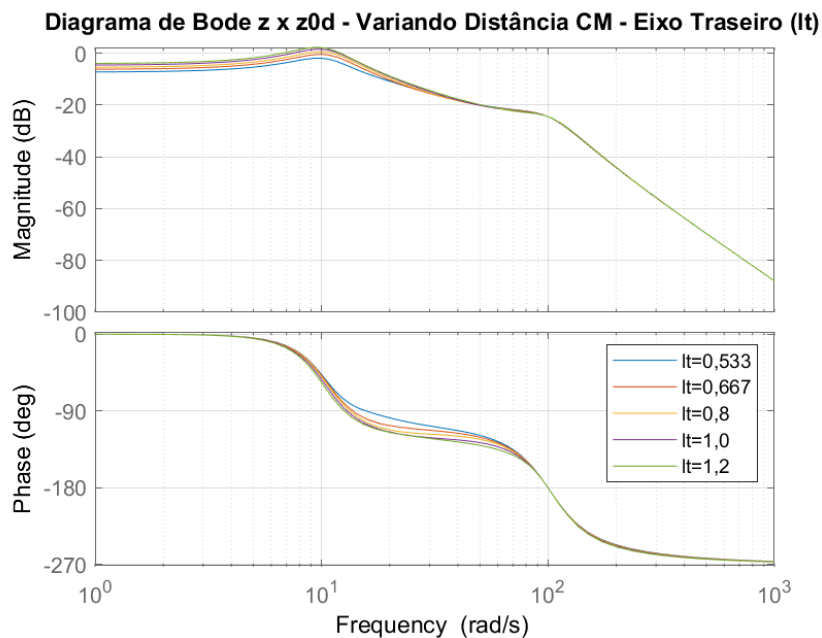


Figura 6-41: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, a variação da distância entre o eixo traseiro e o centro de massa não afeta as frequências de ressonância e, quase não altera o ganho da resposta.

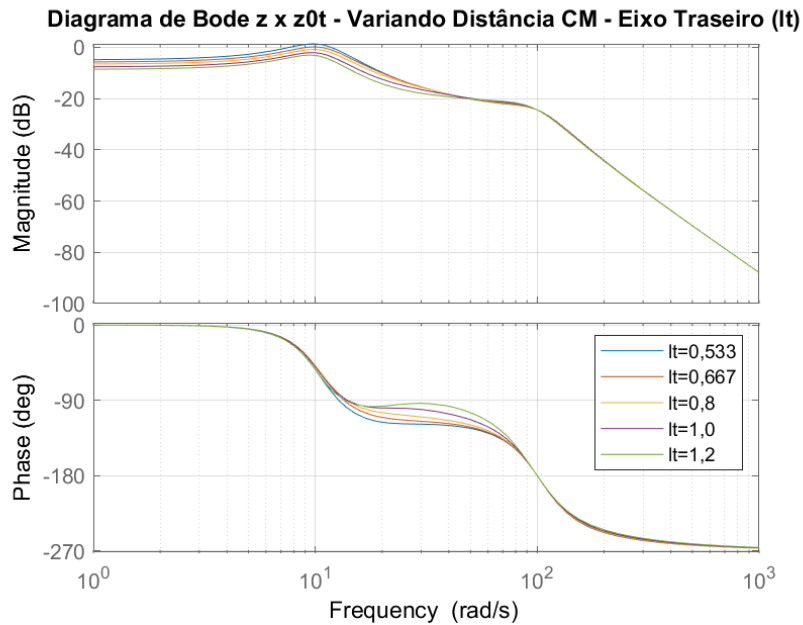


Figura 6-42: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0t}$, novamente observa-se que a variação da distância entre o eixo traseiro e o centro de massa não afeta as frequências de ressonância e, quase não altera o ganho da resposta.

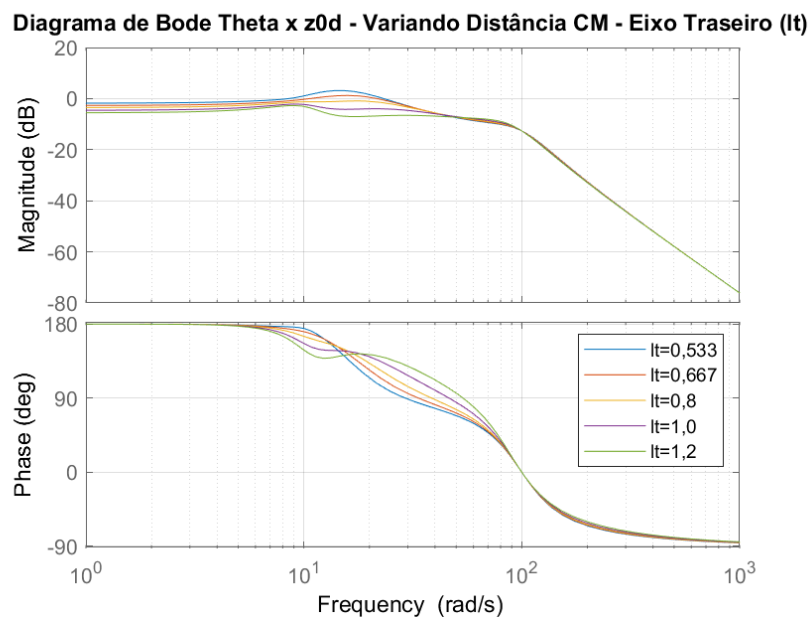


Figura 6-43: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Ao observar o diagrama de bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, nota-se que a variação da distância entre o eixo traseiro e o centro de massa quase não influencia as frequências de ressonância, e afeta muito pouco o ganho da resposta.

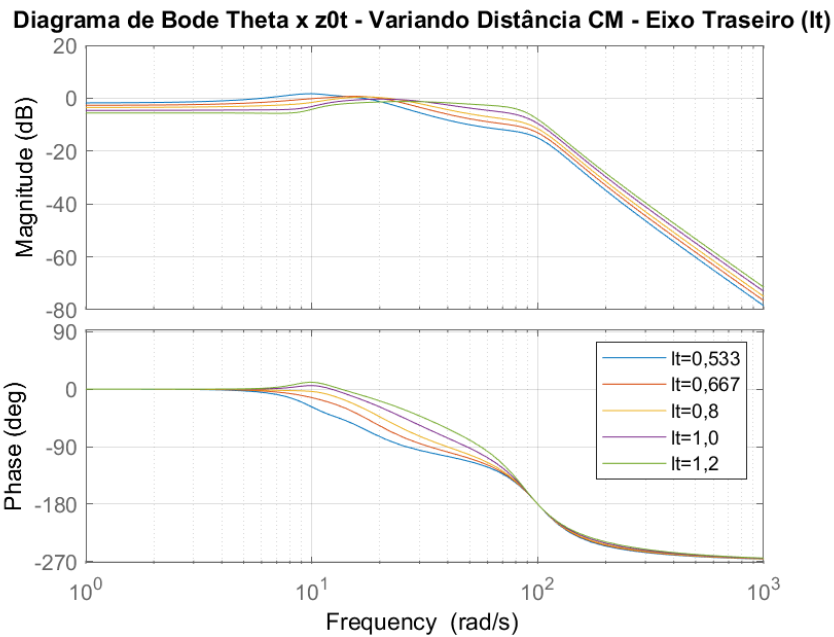


Figura 6-44: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, o aumento da distância entre o eixo traseiro e o centro de massa faz com que as frequências de ressonância se aproximem uma das outras, além de modificar os ganhos da resposta em frequência.

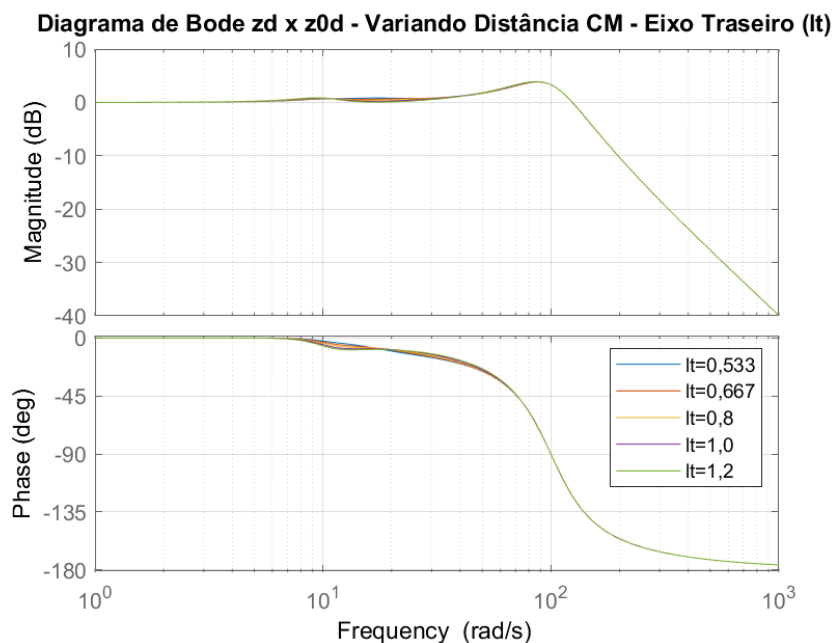


Figura 6-45: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Para a FT $z_d \times z_{0d}$ o diagrama de Bode não apresenta alteração devido à variação da distância entre o eixo traseiro e o centro de massa.

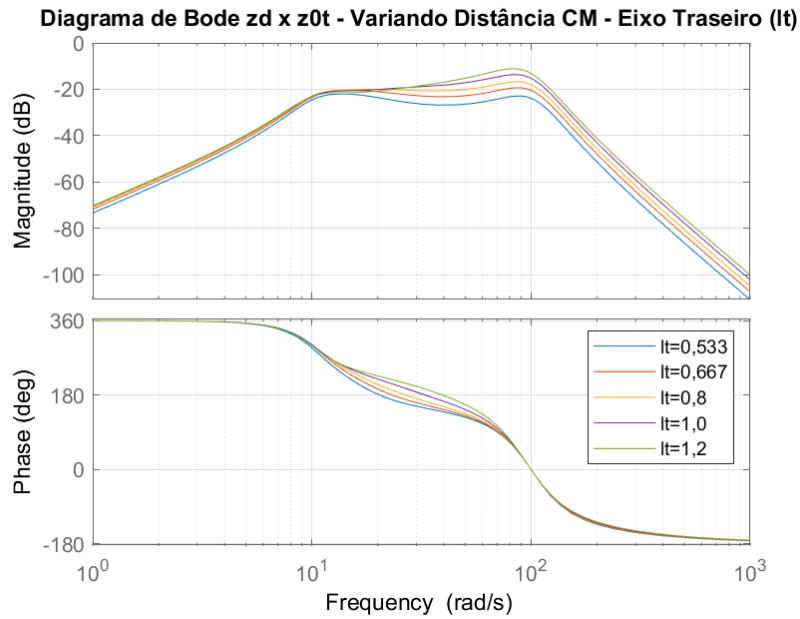


Figura 6-46: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Para o diagrama de bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, é possível observar que a variação da distância entre o eixo traseiro e o centro de massa basicamente não influencia as frequências de ressonância, mas afeta o ganho da resposta em frequência, assim como para a variação da distância entre o eixo dianteiro e o centro de massa.

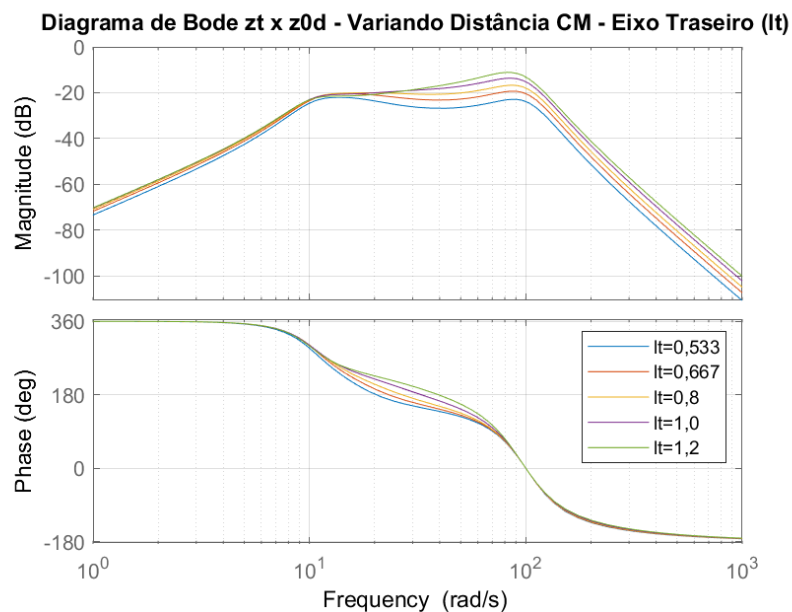


Figura 6-47: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, nota-se que ocorre o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$.

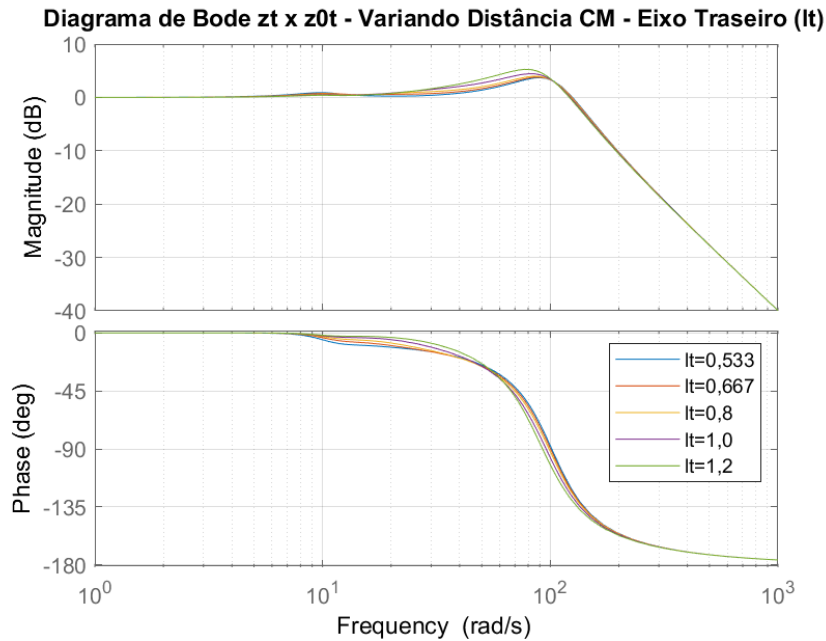


Figura 6-48: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a distância l_t do CM até o eixo traseiro

Ao observar o diagrama de bode obtido para a FT $z_t \times z_{0t}$, nota-se que a variação da distância entre o eixo traseiro e o centro de massa basicamente não influencia a resposta em frequência.

6.9. Diagramas de Bode para a Variação da Distância entre os Eixos (l)

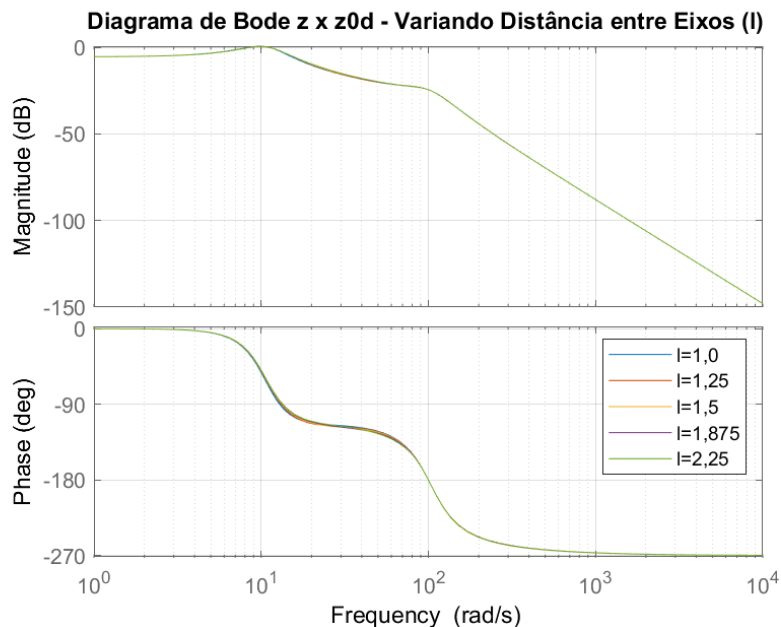


Figura 6-49: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos

Para a FT $z \times z_{0d}$ o diagrama de Bode não apresenta alteração devido à variação da distância entre os eixos.

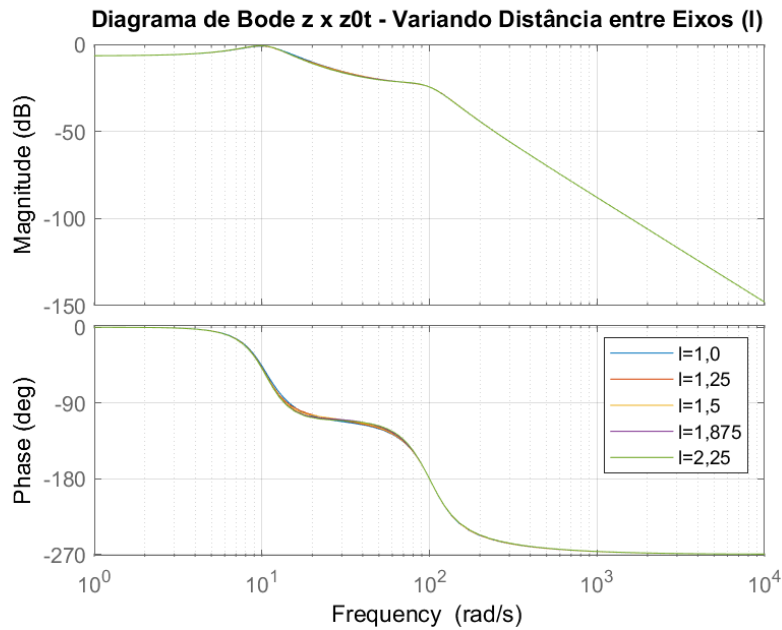


Figura 6-50: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos

Para a FT $z \times z_{0t}$ o diagrama de Bode não apresenta alteração devido à variação da distância entre os eixos, assim como para a FT $z \times z_{0d}$.

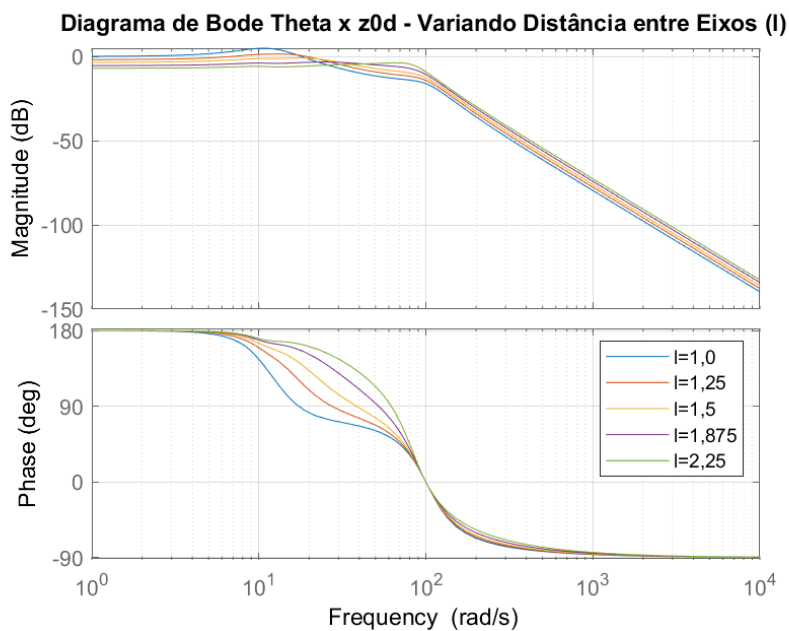


Figura 6-51: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, é possível observar que o aumento da distância entre os eixos faz com que as frequências de ressonância se aproximem uma da outra, e para uma distância de 1,875 m ou mais, a frequência de ressonância em aproximadamente 20 rad/s deixa de existir.

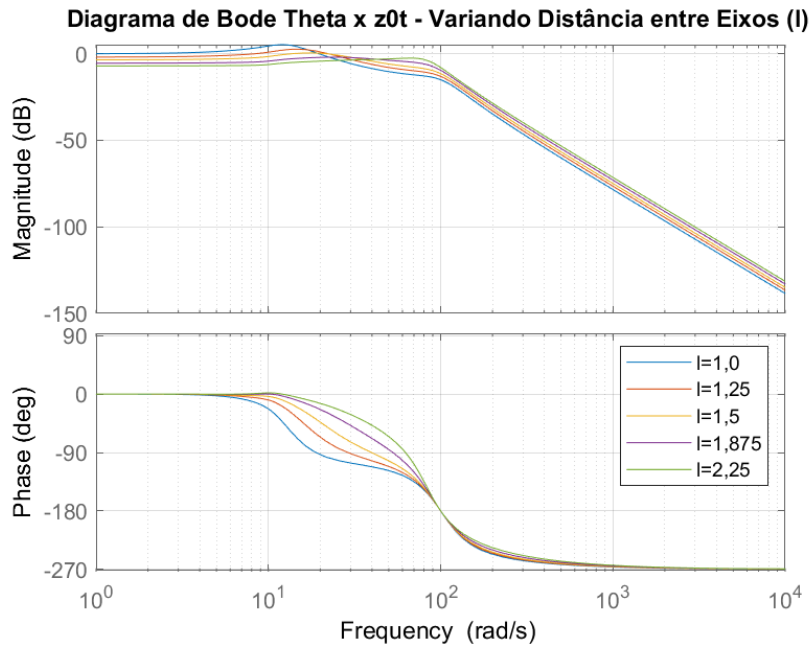


Figura 6-52: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, nota-se que ocorre o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$.

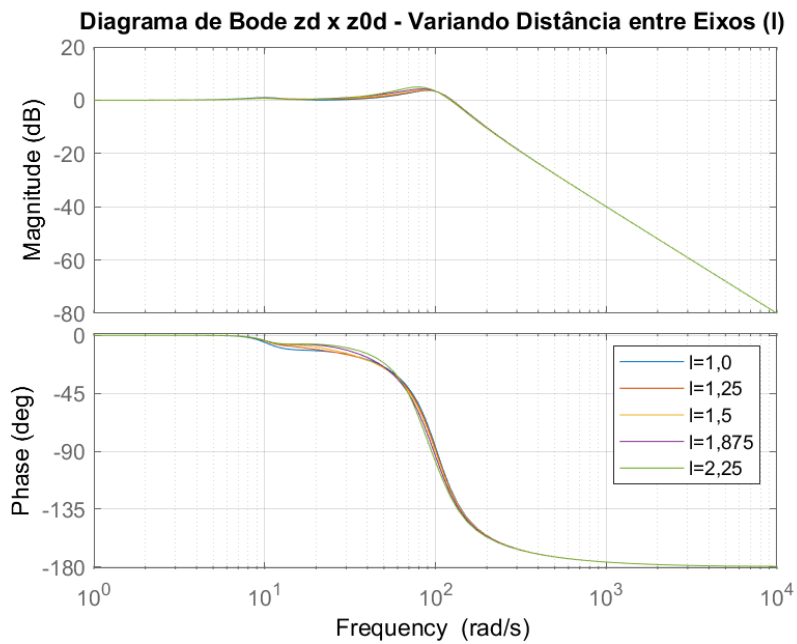


Figura 6-53: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos

Para a FT $z \times z_{0d}$ o diagrama de Bode basicamente não apresenta alteração devido à variação da distância entre os eixos.

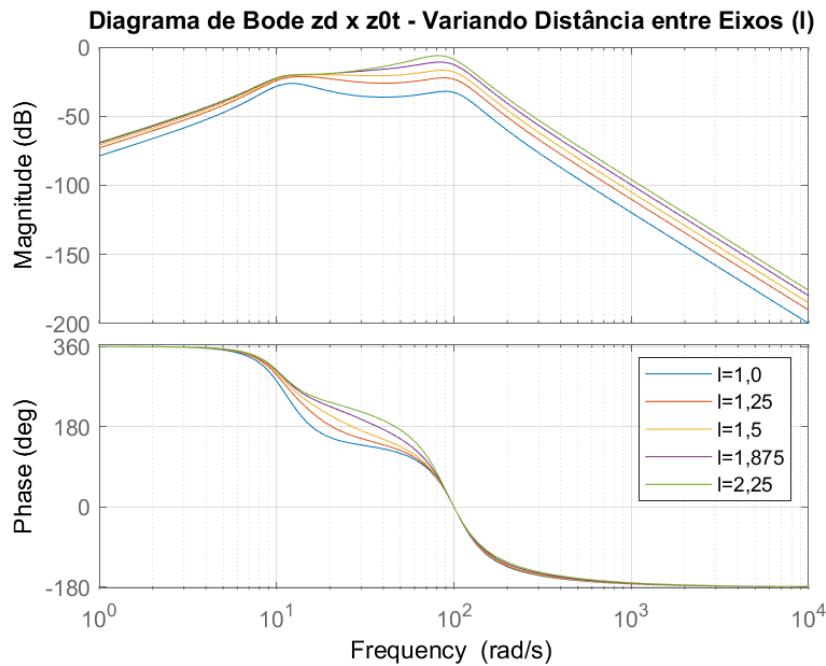


Figura 6-54: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, a variação da distância entre os eixos quase não afeta as frequências de ressonância, mas afeta os ganhos das respostas em frequência.

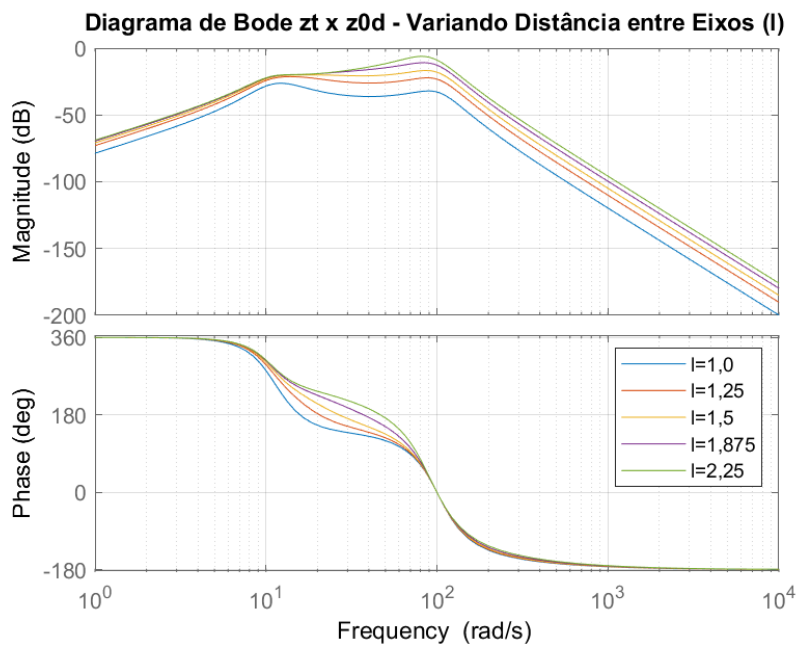


Figura 6-55: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a distância l entre os eixos

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, pode ser notado o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, as frequências de ressonância não se alteram, mas os ganhos das respostas em frequência são afetados.

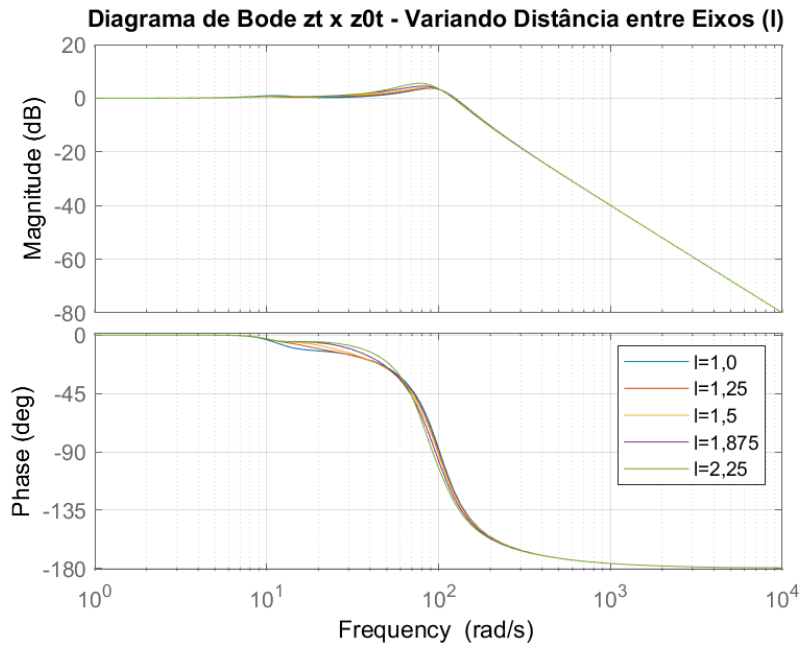


Figura 6-56: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a distância l entre os eixos

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0t}$, nota-se que a variação da distância entre os eixos basicamente não influencia a resposta em frequência.

6.10. Diagramas de Bode para a Variação da Massa Suspensa (m)

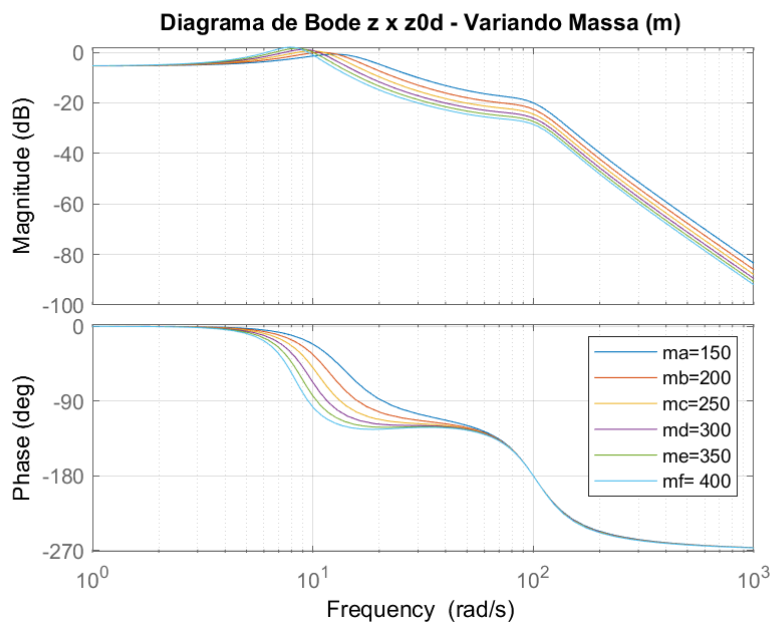


Figura 6-57: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, pode ser notado que com o aumento da massa suspensa a frequência de ressonância em 10 rad/s diminui, e o ganho se torna levemente mais expressivo.

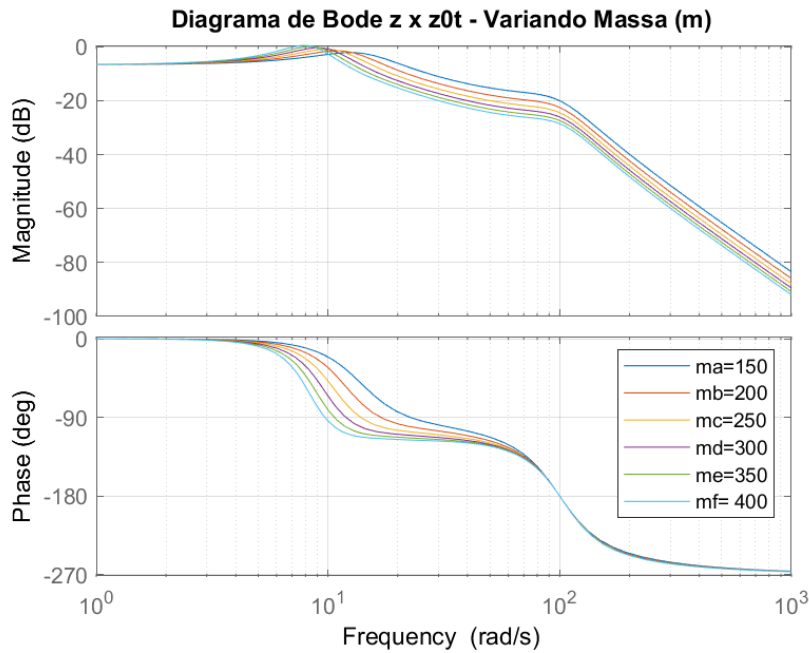


Figura 6-58: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0t}$, pode se notar que com o aumento da massa suspensa a frequência de ressonância em 10 rad/s diminui, e o ganho se torna levemente mais expressivo, assim como para a FT $z \times z_{0d}$.

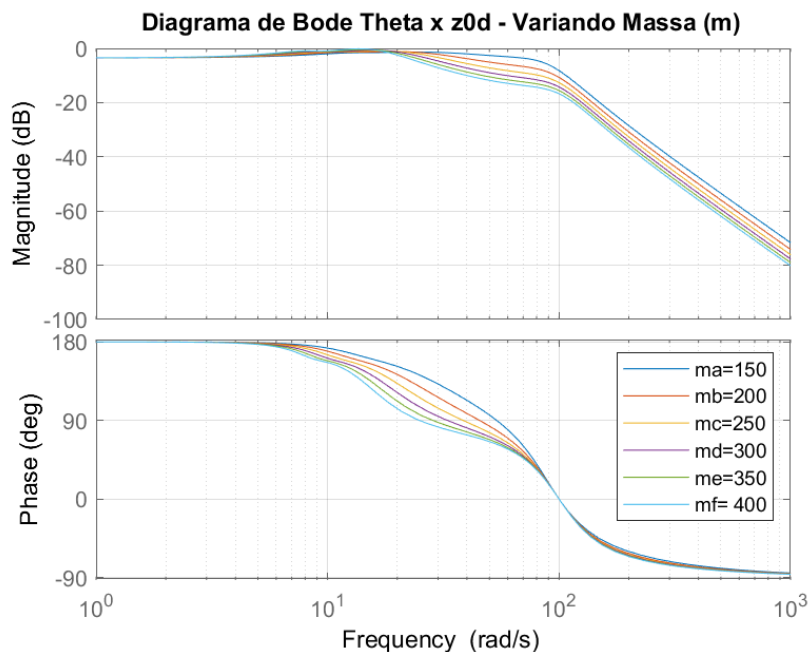


Figura 6-59: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m

Ao analisar o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, o aumento da massa suspensa faz com que a frequência de ressonância em 100 rad/s aumente, e o ganho se torna levemente mais expressivo.

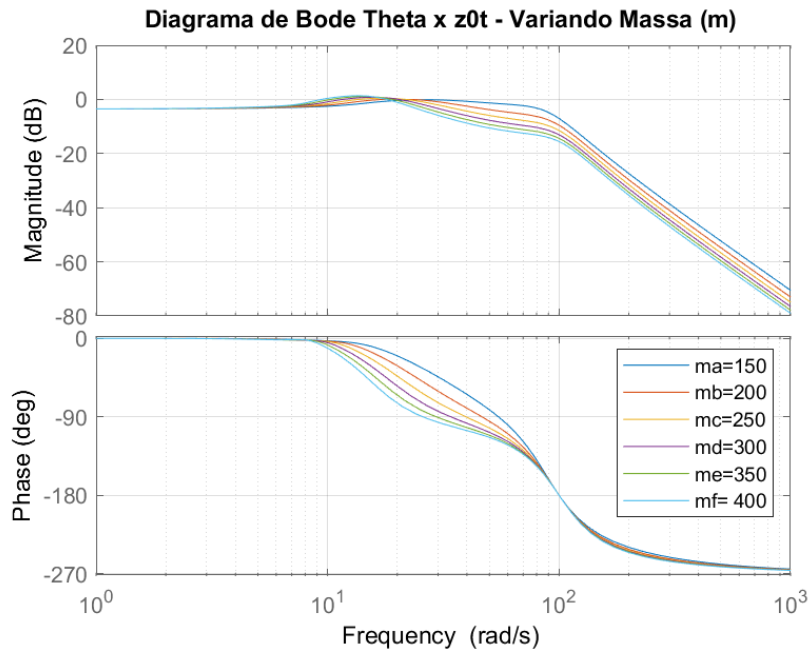


Figura 6-60: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m

Ao analisar o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, o aumento da massa suspensa faz com que a frequência de ressonância em 100 rad/s aumente, e o ganho se torna levemente mais expressivo.

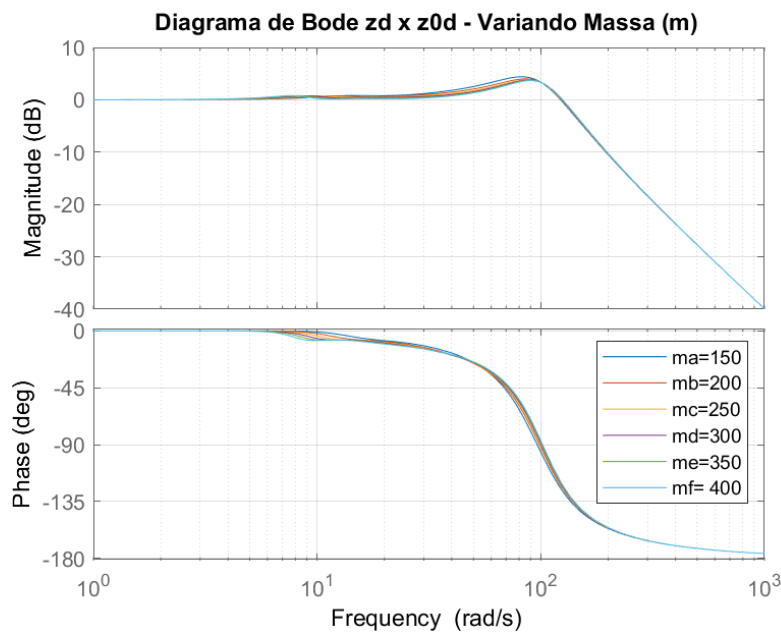


Figura 6-61: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, nota-se que a variação da distância entre os eixos basicamente não influencia a resposta em frequência.

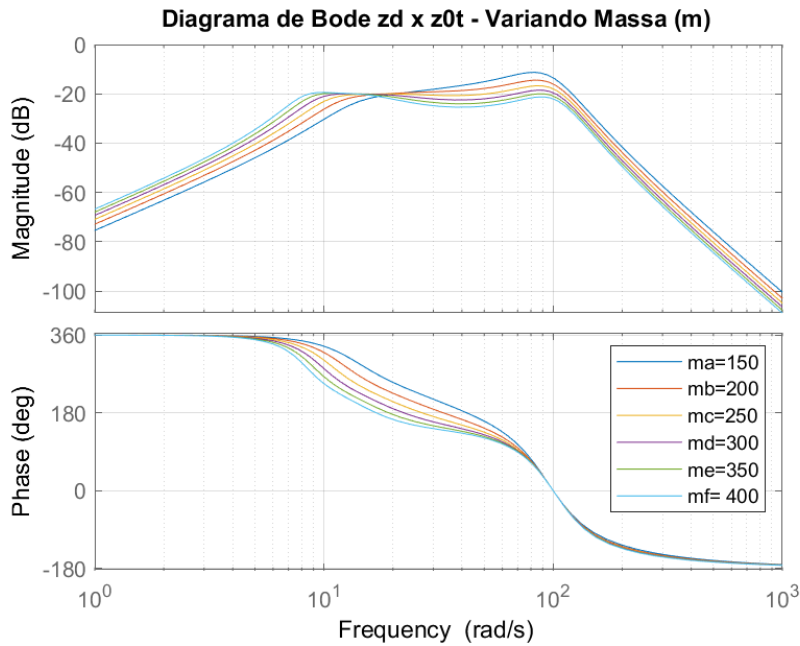


Figura 6-62: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, é possível observar que a frequência de ressonância originalmente em 10 rad/s diminui com o aumento da massa suspensa, aumento esse que afeta também o ganho da resposta, amenizando o mesmo antes da frequência de ressonância, e acentuando-os depois dela.

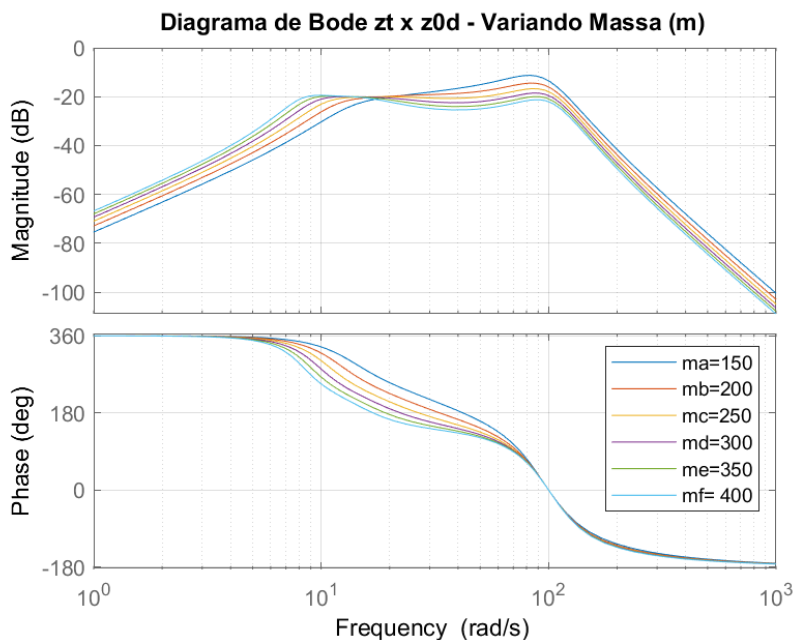


Figura 6-63: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando a massa suspensa, m

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, pode ser notado o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$.

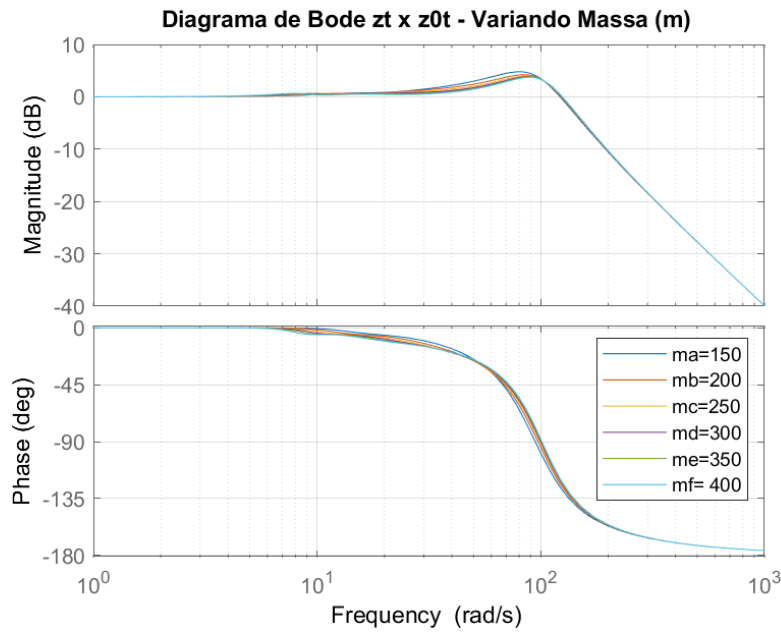


Figura 6-64: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando a massa suspensa, m

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0t}$, nota-se que a variação da distância entre os eixos basicamente não influencia a resposta em frequência.

6.11. Diagramas de Bode para a Variação da Rigidez da Mola da Suspensão Dianteira (k_d)

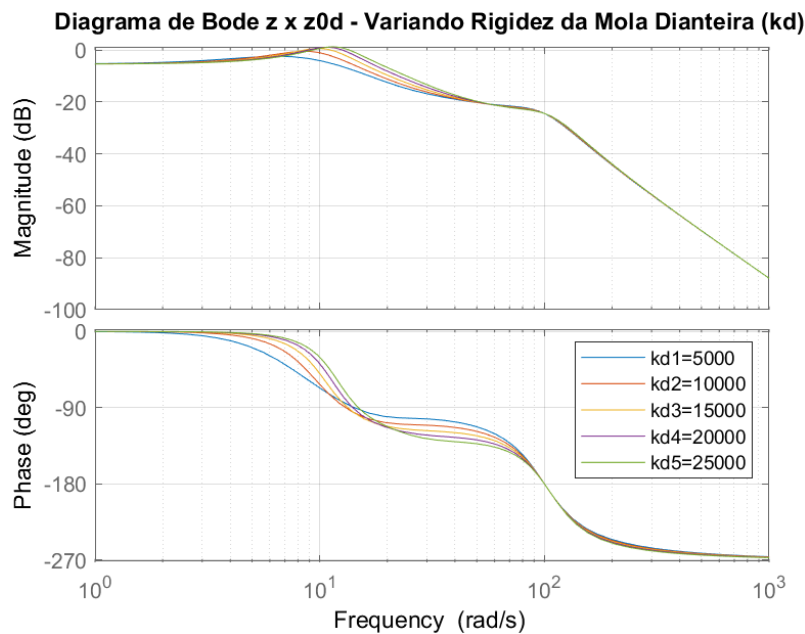


Figura 6-65: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, é possível notar que a variação na mola dianteira é responsável por variar a frequência de

ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

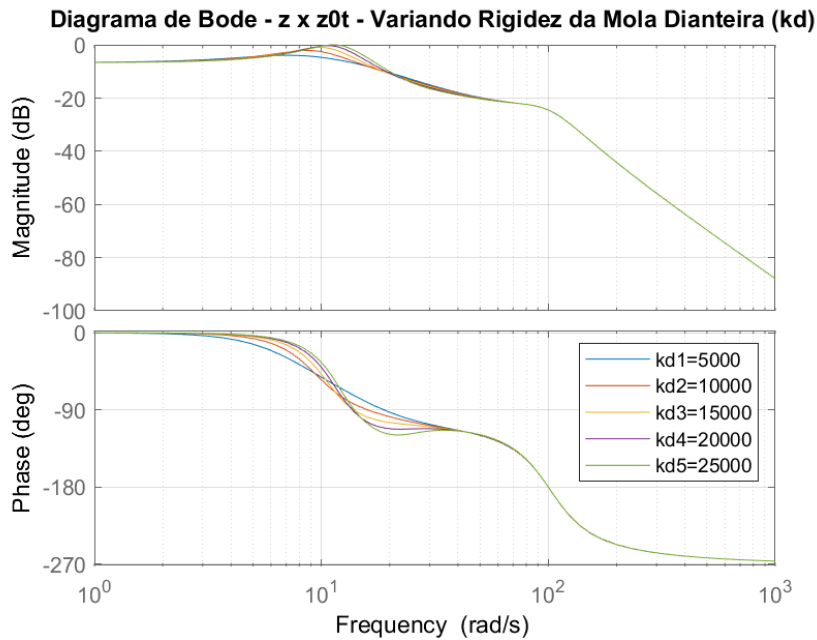


Figura 6-66: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0t}$, é possível notar que a variação na mola dianteira é responsável por variar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

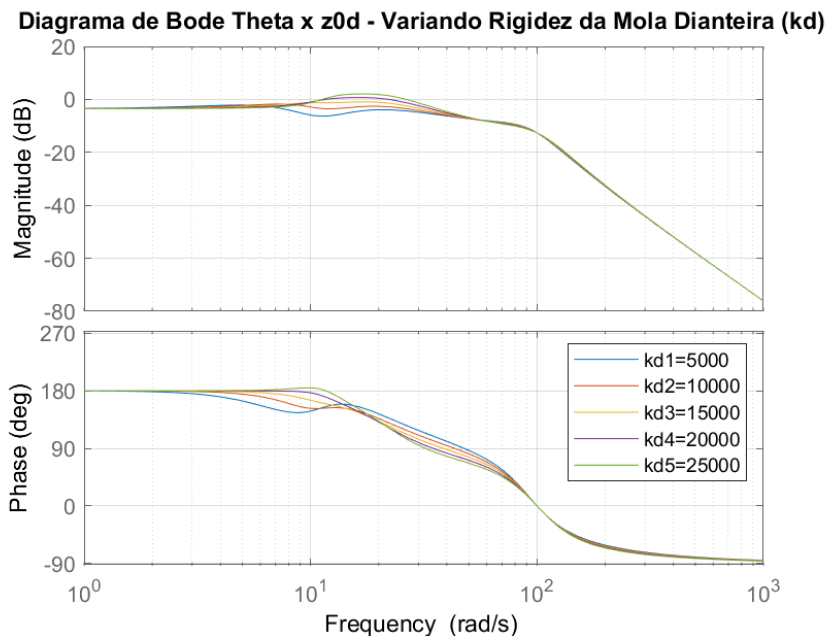


Figura 6-67: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Ao observar o diagrama de bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, nota-se que a variação da rigidez na mola dianteira quase influencia bem pouco as frequências de ressonância, e afeta muito pouco o ganho da resposta.

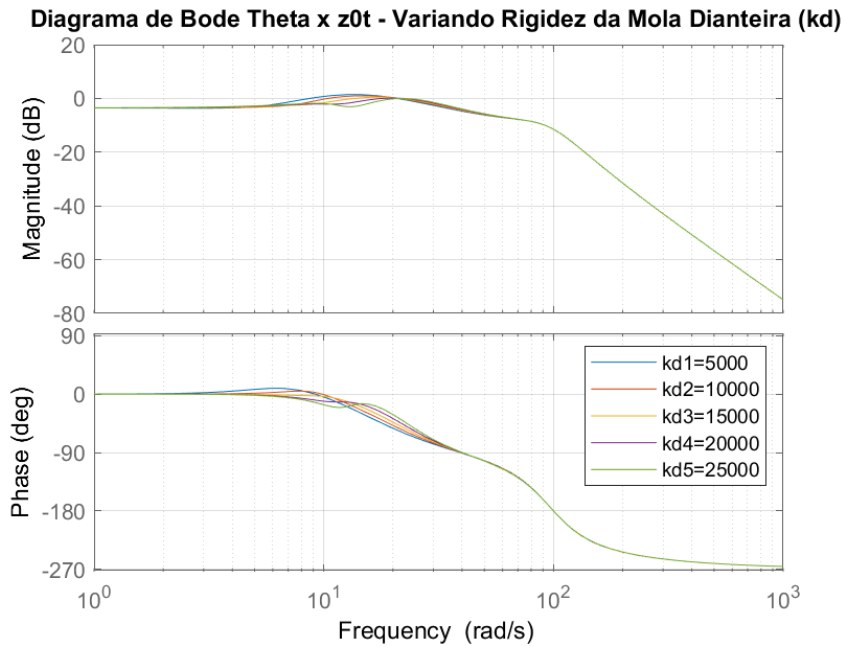


Figura 6-68: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Ao observar o diagrama de bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, nota-se que a variação da rigidez na mola dianteira quase não influencia as frequências de ressonância, e afeta muito pouco o ganho da resposta, assim como para a FT $\theta \times z_{0d}$.

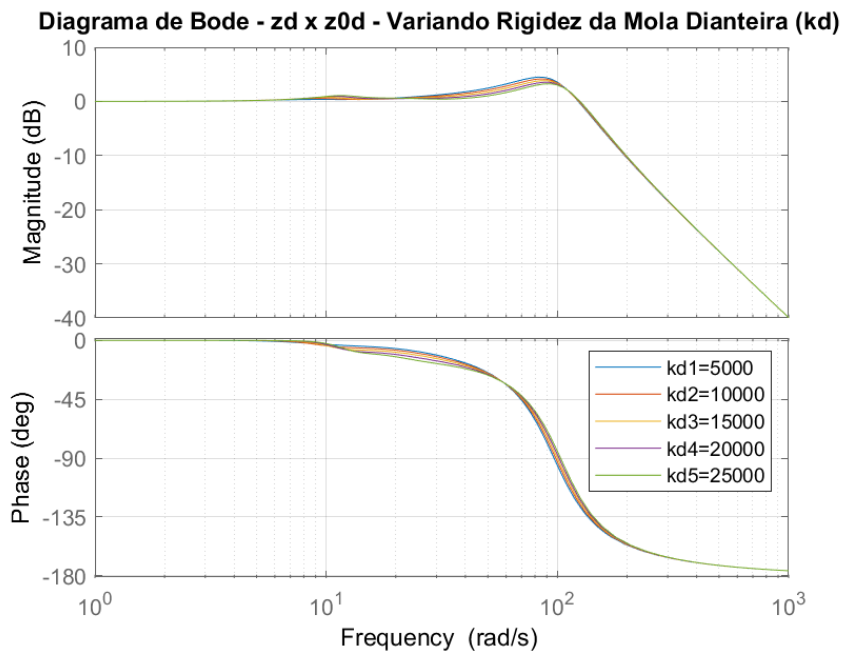


Figura 6-69: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, nota-se que a variação da rigidez na mola dianteira basicamente não influencia a resposta em frequência, e afeta muito pouco o ganho da resposta.

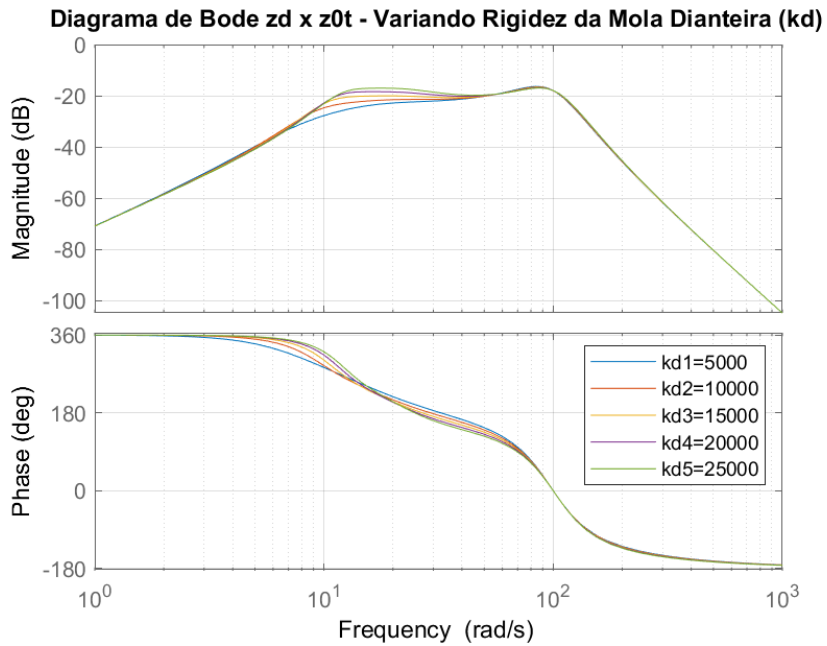


Figura 6-70: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, nota-se que a variação da rigidez na mola dianteira é responsável por variar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

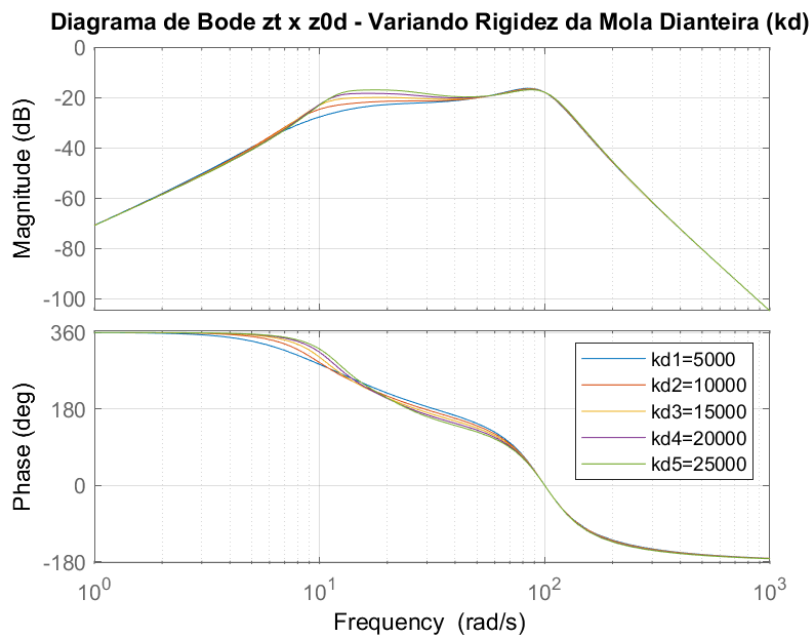


Figura 6-71: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, pode ser notado o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$.

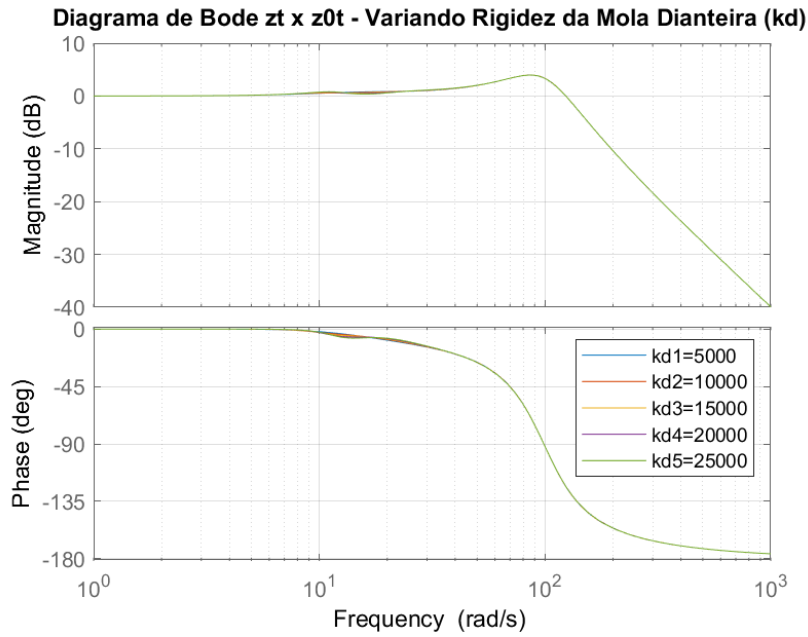


Figura 6-72: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_d da mola dianteira

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0t}$, nota-se que a variação da rigidez na mola dianteira não influencia a resposta em frequência.

6.12. Diagramas de Bode para a Variação da Rigidez da Mola da Suspensão Traseira (k_t)

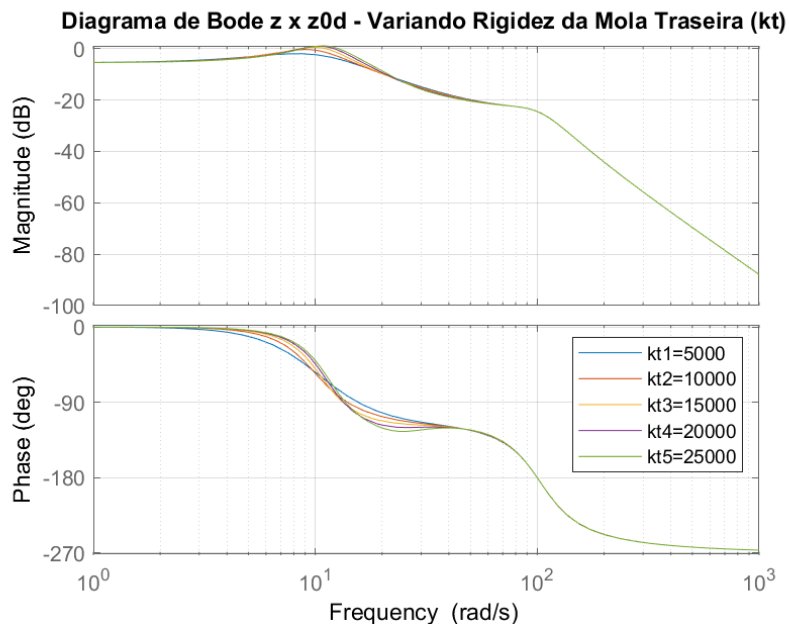


Figura 6-73: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, é possível notar que a variação na mola traseira é responsável por variar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

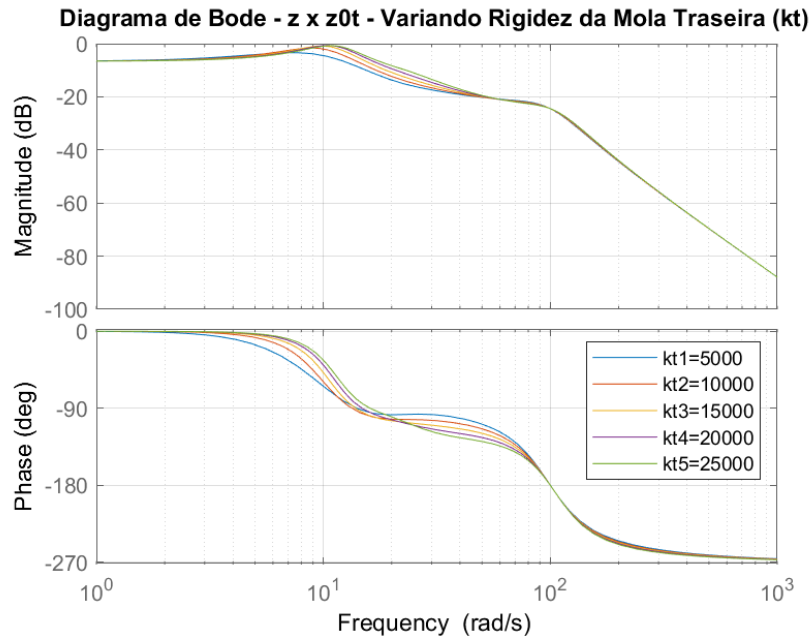


Figura 6-74: Diagrama de Bode para a FT z x z_{0t}, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT z x z_{0t}, é possível notar que a variação na mola traseira é responsável por variar a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

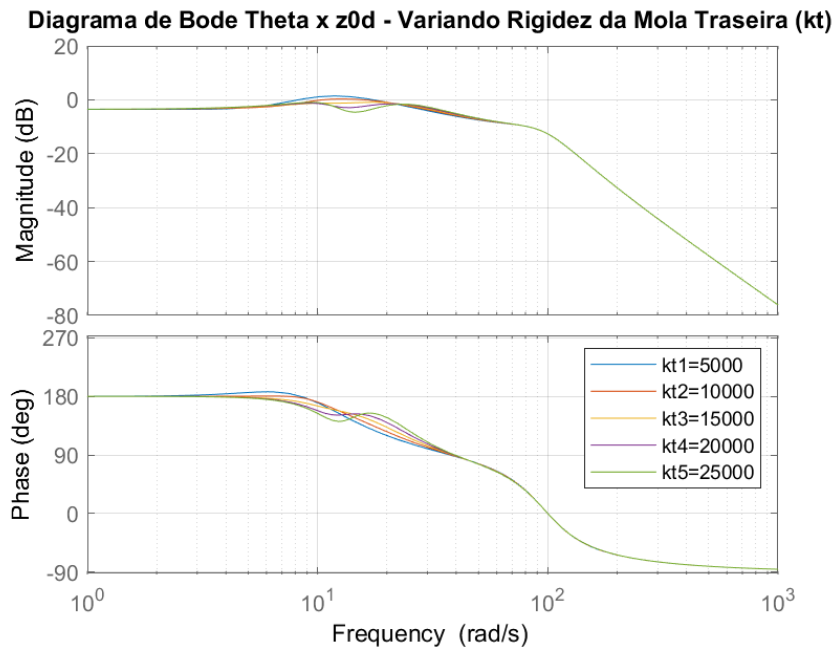


Figura 6-75: Diagrama de Bode para a FT θ x z_{0d}, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Ao observar o diagrama de bode obtido para a FT θ x z_{0d}, nota-se que a variação da rigidez na mola traseira quase não influencia as frequências de ressonância, e afeta muito pouco o ganho da resposta, assim como para a FT θ x z_{0d}.

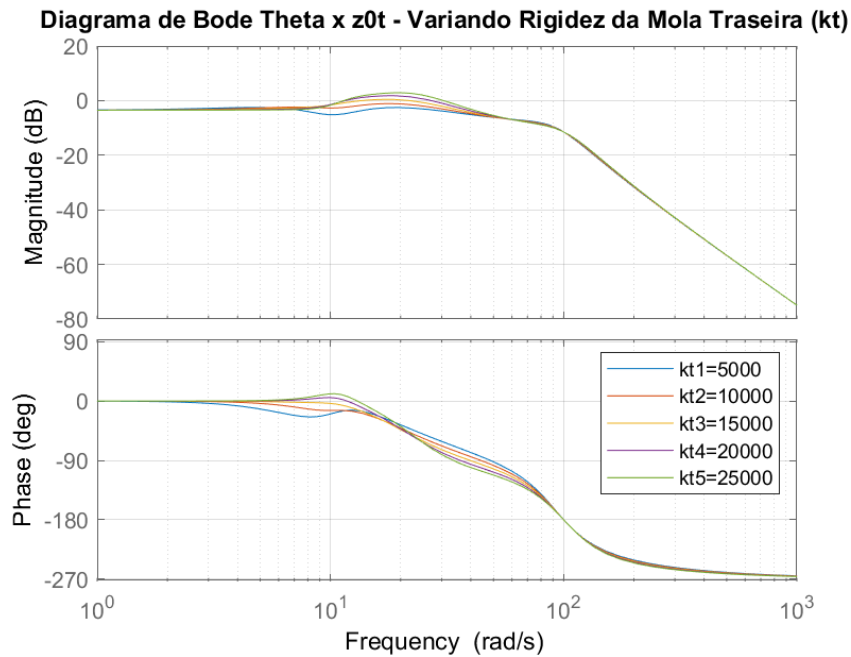


Figura 6-76: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Ao observar o diagrama de bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, nota-se que a variação na mola traseira influencia bem pouco as frequências de ressonância, e afeta muito pouco o ganho da resposta.

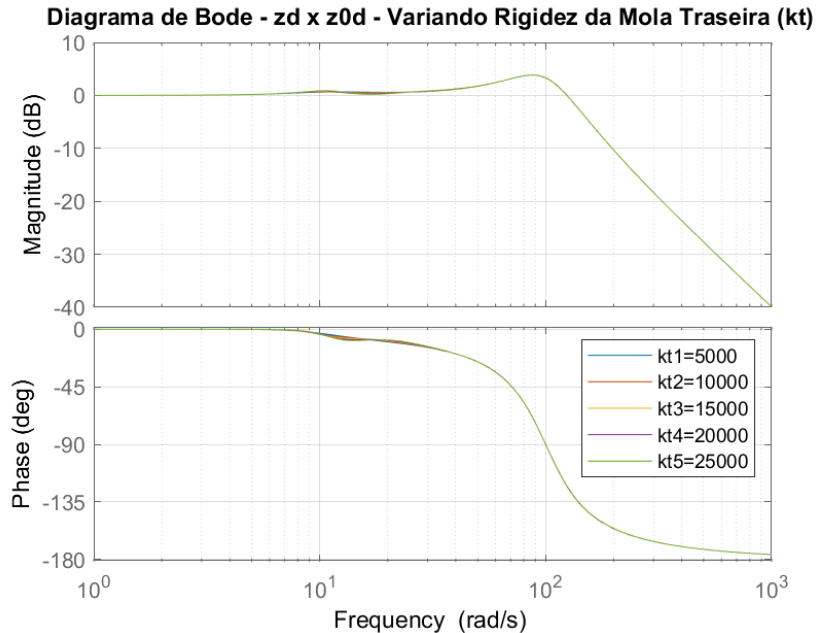


Figura 6-77: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, nota-se que a variação na mola traseira não influencia a resposta em frequência.

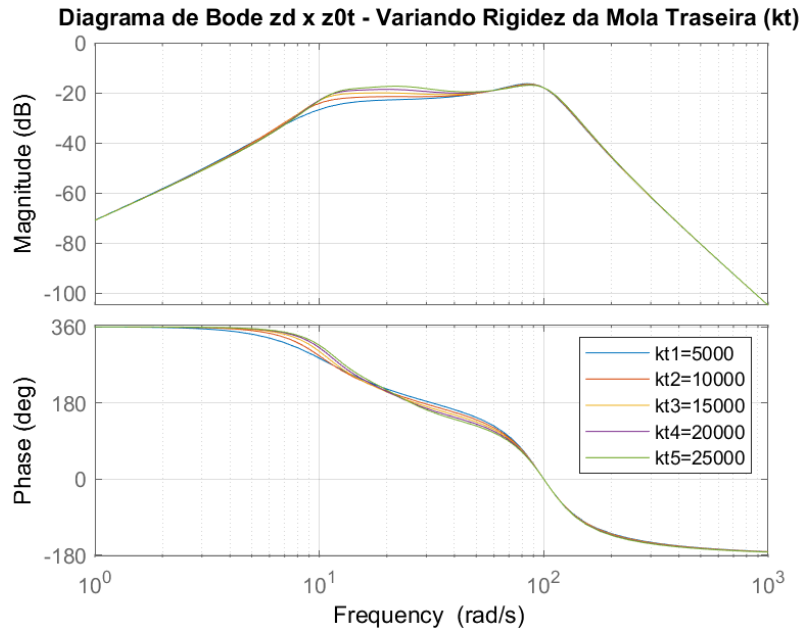


Figura 6-78: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, nota-se que a variação na mola traseira é responsável por variar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

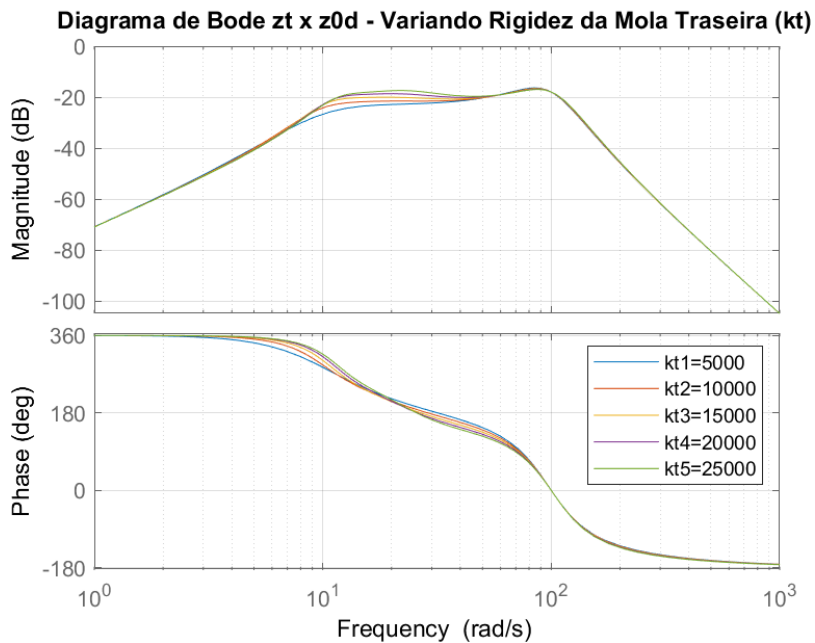


Figura 6-79: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, pode ser notado o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$.

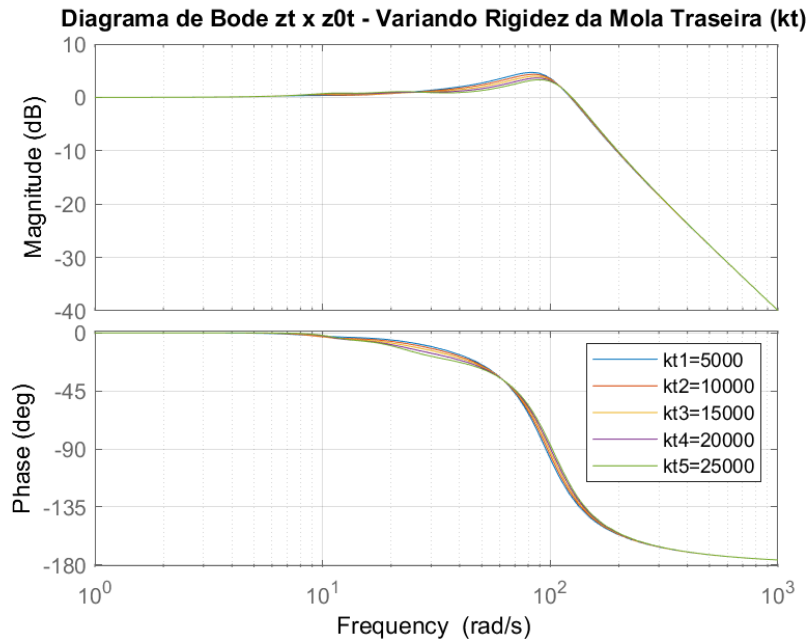


Figura 6-80: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando o parâmetro k_t da mola traseira

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, nota-se que a variação na mola traseira basicamente não influencia a resposta em frequência, e afeta muito pouco o ganho da resposta.

6.13. Diagramas de Bode para a Variação da Rigidez das Molas de Ambas as Suspensões (k_d e k_t)

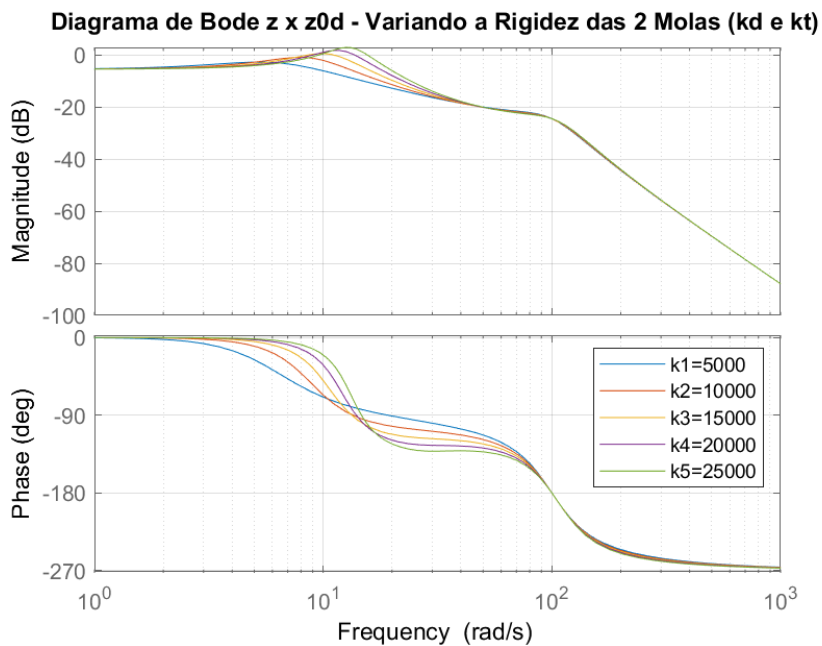


Figura 6-81: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0d}$, é possível notar que a variação da rigidez das molas é responsável por variar a frequência de

ressonância presente em 10 rad/s, assim como o ganho associado com a ressonância.

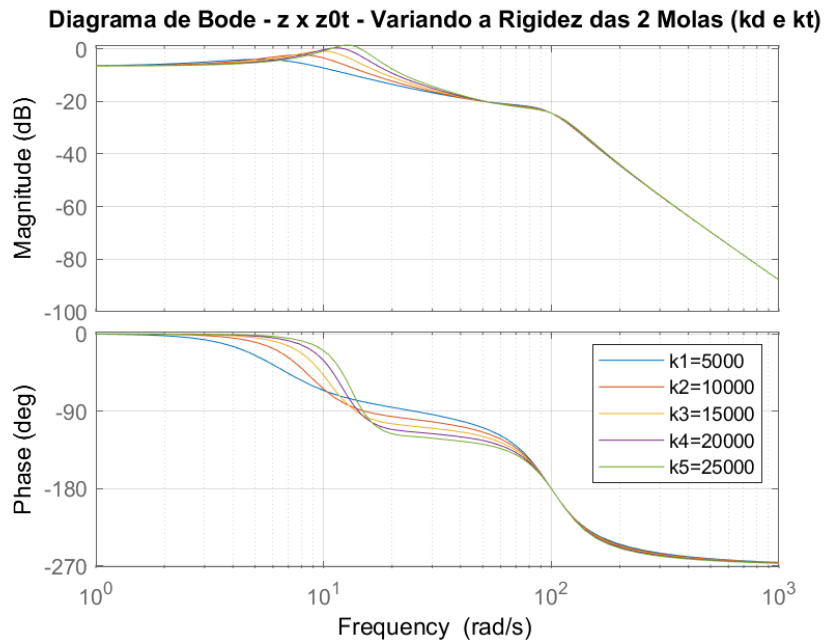


Figura 6-82: Diagrama de Bode para a FT $z \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z \times z_{0t}$, observa-se uma resposta em frequência idêntica àquela obtida para a FT $z \times z_0$.

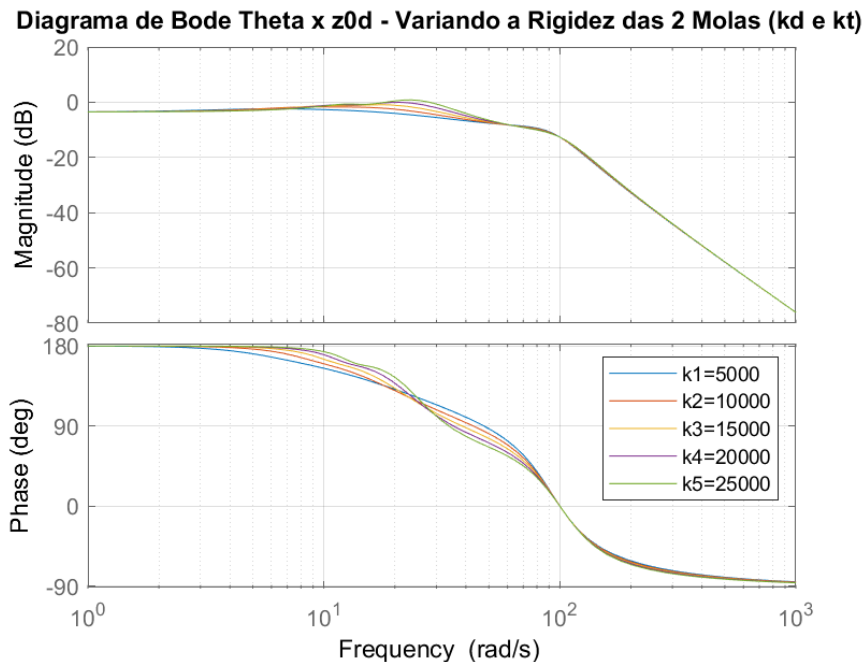


Figura 6-83: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0d}$, é possível notar que a variação da rigidez das molas é responsável por variar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta.

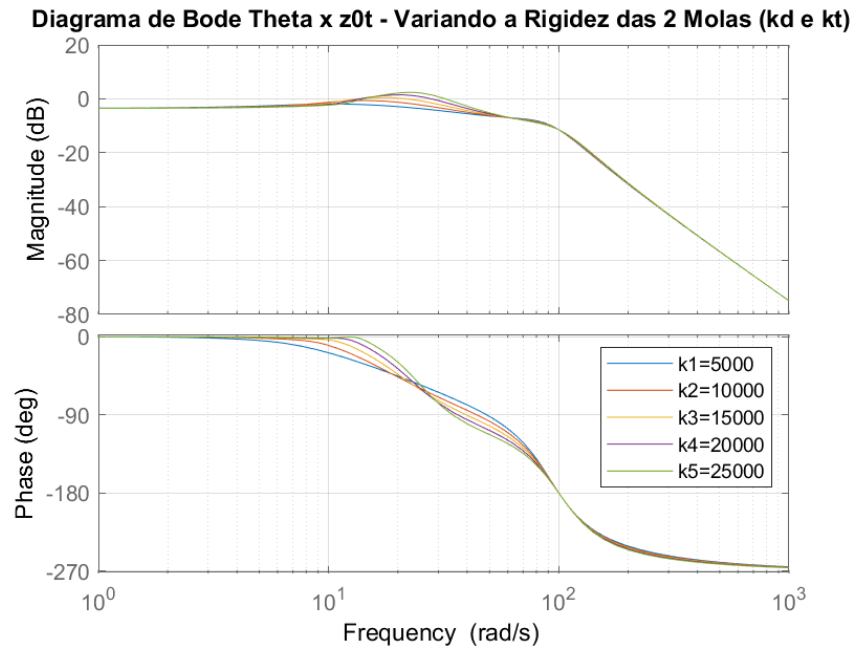


Figura 6-84: Diagrama de Bode para a FT $\theta \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Observando o diagrama de Bode obtido para a FT $\theta \times z_{0t}$, é possível notar que a variação da rigidez das molas é responsável por variar levemente a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, e não apresenta grandes variações no ganho da resposta, assim como para a FT $\theta \times z_{0d}$.

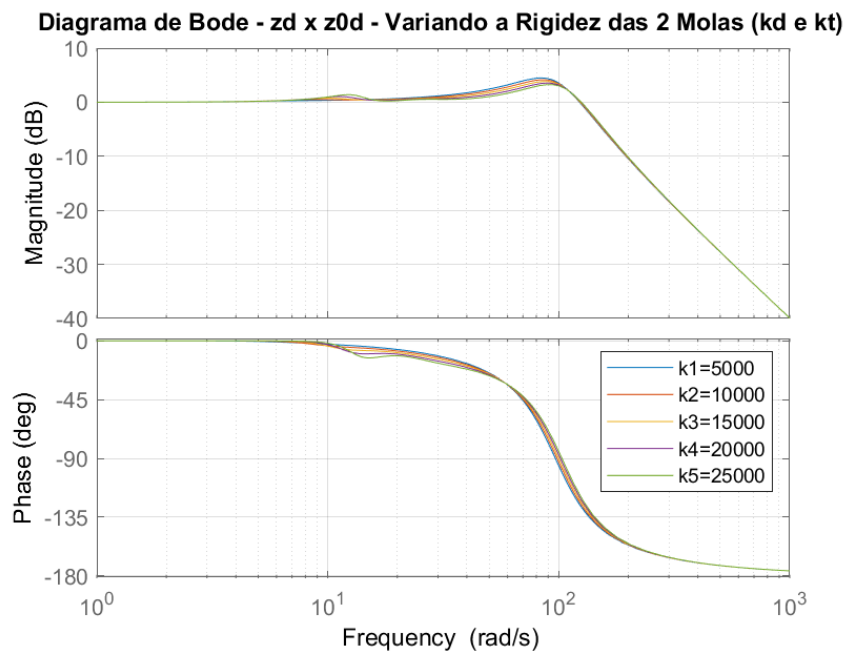


Figura 6-85: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0d}$, nota-se que a variação da rigidez das molas basicamente não influencia a resposta em frequência, e afeta muito pouco o ganho da resposta.

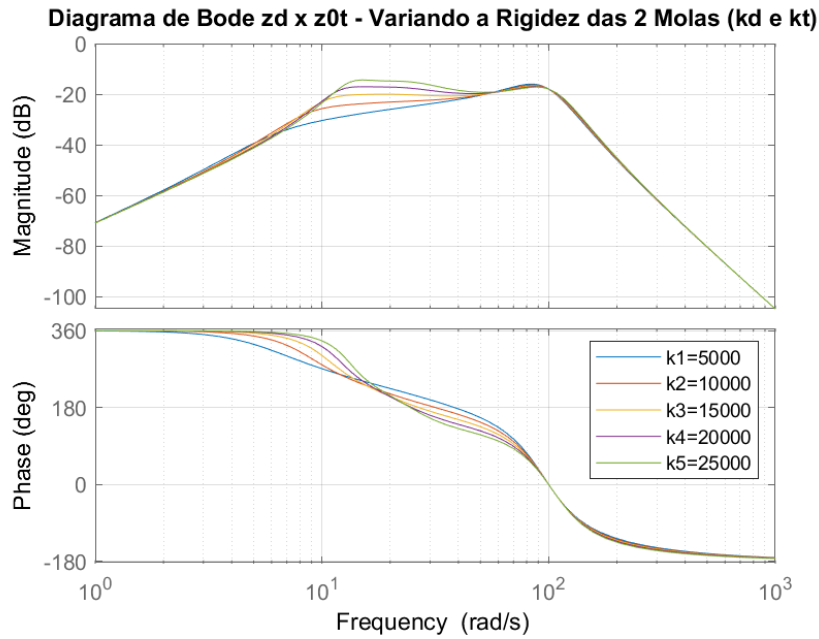


Figura 6-86: Diagrama de Bode para a FT $z_d \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$, nota-se que a variação da rigidez das molas é responsável por variar a frequência de ressonância presente em 10 rad/s, assim como o ganho associado com a ressonância.

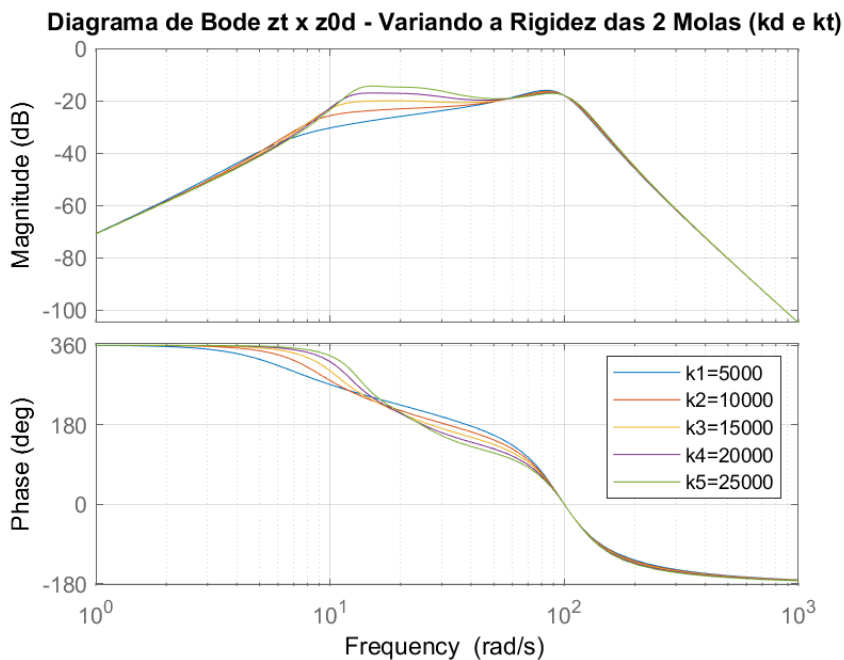


Figura 6-87: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0d}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0d}$, pode ser notado o mesmo comportamento descrito para o diagrama de Bode obtido para a FT $z_d \times z_{0t}$.

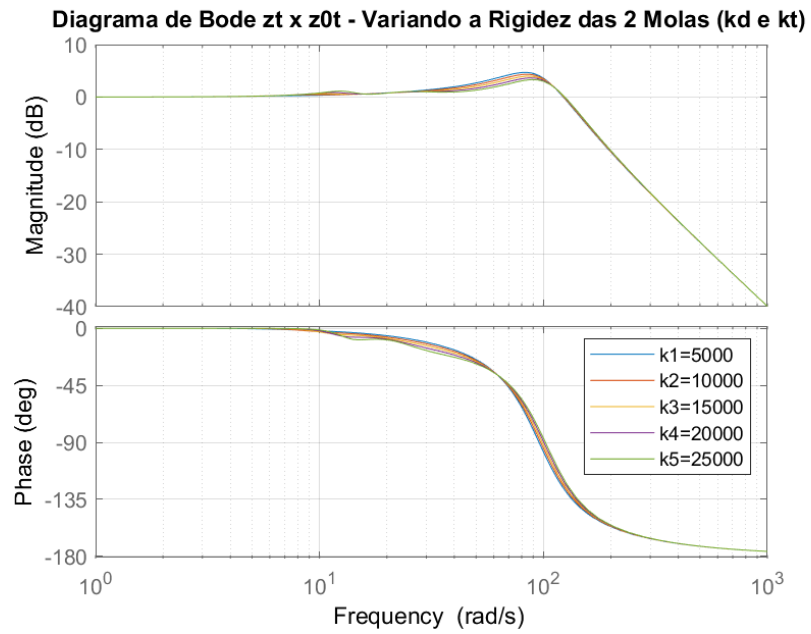


Figura 6-88: Diagrama de Bode para a FT $z_t \times z_{0t}$, variando os parâmetros k_d e k_t das molas

Ao observar o diagrama de Bode obtido para a FT $z_t \times z_{0t}$, nota-se que variação da rigidez das molas basicamente não influencia a resposta em frequência.

6.14. Resumo dos Resultados Obtidos Para a Variação de cada Parâmetro na Resposta em Frequência

De acordo com os diagramas de Bode apresentados nas figuras 6.9 até 6.88, a tabela 6-2 foi gerada para resumir a influência que a variação de cada parâmetro tem na resposta em frequência do sistema. A tabela foi montada atribuindo valores de 0 a 5 para a magnitude dessa influência, com 5 representando uma influência muito alta e 0 representando uma influência nula. Ao lado dos valores está apresentada uma média calculada para cada parâmetro para ter uma noção quantitativa de qual variação afetou mais a resposta em frequência do sistema. A linha ao final mostra a média de variação para cada FT, apenas por curiosidade.

Legenda: 0 - Influência nula; 1 - Influência muito baixa; 2 - Influência baixa; 3 - Influência média; 4 - Influência alta; 5 - Influência muito alta

Parâmetro	Função de Transferência								Média por Parâmetro
	Z X Z _{0d}	Z X Z _{0t}	θ X Z _{0d}	θ X Z _{0t}	Z _d X Z _{0d}	Z _d X Z _{0t}	Z _t X Z _{0d}	Z _t X Z _{0t}	
b_d	4	2	4	2	5	5	5	0	3,4
b_t	2	4	2	4	0	5	5	5	3,4
b_d & b_t	4	4	4	4	5	5	5	5	4,5
l	0	0	3	3	0	2	2	0	1,3
l_d	1	2	3	3	1	2	2	0	1,8
l_t	1	2	3	3	0	2	2	1	1,8
m	3	3	3	3	1	3	3	1	2,5
k_d	2	2	2	2	1	2	2	0	1,6
k_t	1	2	2	2	0	2	2	1	1,5
k_d & k_t	3	3	2	2	1	3	3	1	2,3
Média por FT	2,1	2,4	2,8	2,8	1,4	3,1	3,1	1,4	2,4

Tabela 6-2: Influência da variação de cada parâmetro na resposta em frequência do sistema

Ao analisar os resultados demonstrados pela tabela 6-2, e a análise de cada diagrama de Bode gerado, é possível notar com clareza que o parâmetro que mais afeta a resposta em frequência para o sistema escolhido é o amortecimento do amortecedor das suspensões. Tanto a variação do amortecimento de ambas as suspensões quanto a variação de apenas uma delas teve impacto significativo na resposta em frequência, portanto fica claro que o amortecimento é um parâmetro que tem que ser escolhido com cautela para dimensionar a motocicleta, pois o mesmo é diretamente responsável por alterar frequências de ressonância, que se ocorrerem, apresentarão desconforto ao condutor, portanto devem sempre ser evitadas. A escolha de parâmetro que apresentou a melhor resposta em frequência para os diagramas de Bode variando o amortecimento foram os valores mais altos, sugerindo que para evitar ressonâncias, seja escolhido um amortecedor com alta capacidade de amortecimento, o que faz sentido.

A massa da motocicleta também teve uma influência considerável na resposta em frequência, mas todas as variações do valor da massa apresentaram um desenho parecido, com as variações sendo responsáveis por deslocar a curva, para um lado ou para o outro e para cima ou para baixo.

Por fim, o que se pode concluir sobre esta análise é que a alteração das distancias e da rigidez das molas são as variações de parâmetros que menos afetam a resposta em frequência do sistema.

7. Conclusão

A partir do que foi proposto como objetivo para deste projeto, pode-se dizer que foi possível cumprir com os procedimentos estipulados para modelar o sistema físico proposto para a dinâmica vertical de uma motocicleta. Também foi possível executar os procedimentos para as análises escolhidas ao estudar como a variação dos componentes responsáveis pela dinâmica vertical de uma motocicleta pode influenciar o comportamento do sistema.

O equacionamento a partir de um grafo de ligação para o modelo físico da motocicleta junto com as transformações realizadas para transformar o modelo de estado em Variáveis de Energia para Variáveis Lagrangeanas foi um procedimento que se provou ser eficiente para chegar ao modelo matemático usado para as análises.

Ao realizar estas análises, foi possível notar que de maneira geral, tanto os amortecimentos quanto as molas executam um papel importante na dinâmica da motocicleta, ao afetar de forma significativa o tempo de estabilização do sistema, mas ao averiguar com mais cuidado, nota-se que o amortecedor cumpre um papel mais importante que o da mola no que diz respeito ao caráter do comportamento do sistema e à resposta em frequência do mesmo. Ainda foi possível notar que a massa suspensa, do veículo + condutor é importante para a dinâmica vertical da motocicleta, enquanto a massa dos pneus não afeta significativamente o comportamento do sistema, assim como as distâncias entre cada eixo e entre os eixos o centro de massa.

Ao comparar com demais trabalhos na mesma área, vale pontuar que é muito difícil de se encontrar na literatura a modelagem inteira para uma motocicleta, incluindo todos os passos do equacionamento, as equações constitutivas e de restrição do grafo de ligação, a simplificação das mesmas até chegar em um sistema na forma de Variáveis de Energia, a transformação para um sistema na forma de Variáveis Lagrangeanas, e depois para a forma de Equação de Movimento. Portanto, o equacionamento é um diferencial, e agora está pronto para qualquer um que possa querer vir a utilizar este modelo de modo a prosseguir com alguma análise.

Um outro ponto muito positivo do projeto foi o fato de que o procedimento do LGR adaptado para um sistema sem a presença de um controlador teve êxito. O sucesso em montar uma FTMA a partir de um sistema sem controlador é importante pois isso significa que qualquer polinômio, onde os parâmetros isolados estejam presentes de forma linear, pode ser utilizado para o procedimento do LGR, significando que o procedimento pode ser uma ferramenta poderosa para analisar a variação de determinado parâmetro em muitos tipos de sistemas.

Existem algumas frentes por onde o projeto pode ser continuado, de modo em que essas frentes podem servir como sugestão para futuros trabalhos. O modelo utilizado para o desenvolvimento do projeto foi o de uma dinâmica vertical simplificada de uma motocicleta, sem incluir a geometria do chassi, portanto a primeira sugestão para um futuro trabalho seria desenvolver o equacionamento para o grafo de ligação apresentado para a dinâmica vertical da motocicleta levando em conta a geometria do chassi, realizando o mesmo procedimento adotado neste projeto, para chegar a um sistema de equações que determine o comportamento do modelo, e posteriormente comparar o resultado com o obtido

neste projeto, para verificar se a aproximação de geometria realizada é válida, e realmente modela a dinâmica vertical de uma motocicleta de maneira apropriada.

Uma outra sugestão para futuros trabalhos seria trabalhar em cima das diferentes perspectivas para a análise da dinâmica da motocicleta, por exemplo, realizar análises da dinâmica longitudinal e da dinâmica lateral de uma motocicleta. Deste modo seria possível modelar diferentes comportamentos de uma motocicleta juntos, para chegar a um resultado unificado para a sua dinâmica.

8. Referências Bibliográficas

1. SPERANZA Neto, M. Modelagem de Sistemas de Dinâmico, Notas de Aula. DEM/PUC-Rio, 2017.
2. SPERANZA Neto, M. Dinâmica de Sistemas Mecânicos Massa-Mola-Amortecedor com 2 Graus de Liberdade. Modelagem via Grafos de Ligação e Análise empregando o MATLAB, Notas de Aula, DEM/PUC-Rio, 2018.
3. MARTINS, G.N., SPERANZA NETO, M., MEGGIOLARO, M.A., Dynamic Models of Bicycles and Motorcycles using Power Flow Approach, CONEM/ABCM, Fortaleza (CE), Brasil, 2016.
4. OGATA, K. Modern Control Engineering, Original English language edition, Prentice-Hall, Inc. 1997.
5. COSSALTER, V. Motorcycle Dynamics, 2nd English Edition, 2006.
6. INMAN, D.J. Vibration with Control, John Wiley e Sons, 2006.
7. KARNOPP, D.C., MARGOLIS, D.L. e ROSENBERG, R.C. System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems. 4th ed. John Wiley e Sons, 2006.
8. BORUTZKY, W. Bond Graph Methodology, Springer-Verlag, 2010