

2 Equação parabólica tridimensional

Neste capítulo, o modelo da equação parabólica vetorial tridimensional para o cálculo do campo eletromagnético na presença de um terreno irregular e sua implementação numérica e computacional serão desenvolvidos e apresentados.

2.1. Formulação

A Figura 2.1 mostra o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) , com a origem localizada no centro da Terra representada pela esfera azul de raio a . Acima desta esfera, se observa o terreno irregular descrito por sua função altura $h(\theta, \varphi)$, representado na Figura 2.1 pela cor marrom. A distância radial r associada a qualquer ponto situado acima do terreno irregular satisfaz a desigualdade $r > a + h$. O problema de propagação tridimensional é naturalmente formulado neste sistema de coordenadas.

Supondo uma dependência harmônica no tempo do tipo $e^{-i\omega t}$, meios sem fontes e admitindo que o índice de refração do ar varie apenas na direção radial $n(r)$, os campos vetoriais elétrico \vec{E} e magnético \vec{H} podem ser representados por meio de potenciais Hertzianos elétrico Π^e e magnético Π^m , como segue abaixo

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}^e + \vec{E}^m = \frac{1}{n^2} \nabla \times \nabla \times (n \Pi^e \hat{r}) + \frac{i\omega\mu_0}{n^2} \nabla \times (n^2 \Pi^m \hat{r}) \quad (2.1)$$

$$\vec{H}(r, \theta, \varphi) = \vec{H}^e + \vec{H}^m = \frac{k^2}{i\omega\mu_0} \nabla \times (n \Pi^e \hat{r}) + \nabla \times \left[\frac{1}{n^2} \nabla \times (n^2 \Pi^m \hat{r}) \right] \quad (2.2)$$

onde \vec{E}^e é o campo vetorial elétrico devido ao potencial escalar Hertziano elétrico Π^e , \vec{E}^m é o campo vetorial elétrico devido ao potencial escalar Hertziano magnético Π^m , \vec{H}^e é o campo vetorial magnético devido ao potencial escalar Hertziano elétrico Π^e , \vec{H}^m é o campo vetorial magnético devido ao potencial

escalar Hertziano magnético Π^m . Além disso, $n(r) = [\mu\varepsilon(r)/\mu_0\varepsilon_0]^{1/2}$ é o índice de refração e ω é a frequência angular, sendo μ a permeabilidade magnética (suposta constante), ε a permissividade elétrica, e μ_0 e ε_0 os valores desses parâmetros no vácuo. Nesta tese, será suposto que os meios de interesse não têm propriedades magnéticas, de modo que $\mu = \mu_0$. Por último, k é o número de onda modificado, apresentado pela Equação (2.6).

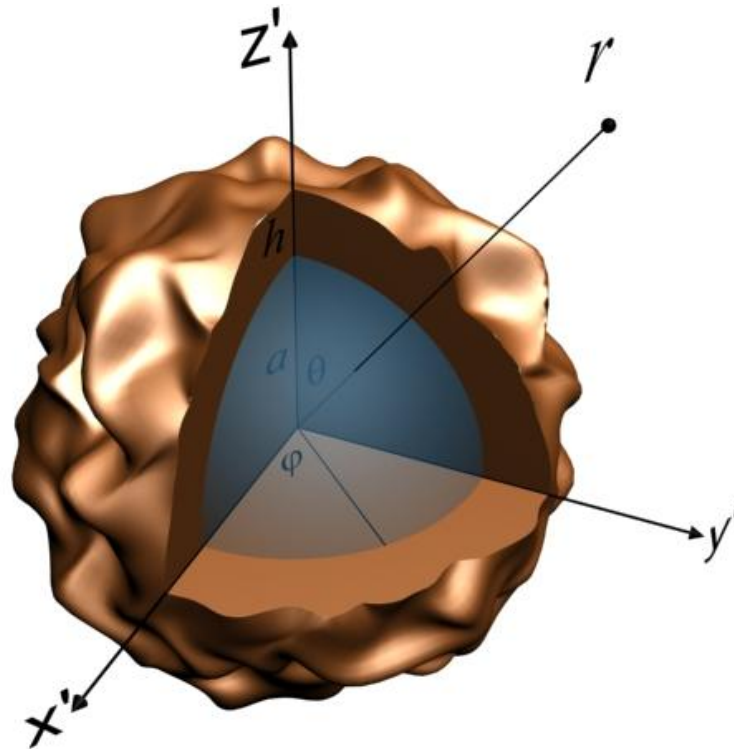


Figura 2.1 - Sistema de coordenadas esféricas com origem no centro da Terra

É possível mostrar que os campos elétrico (2.1) e magnético (2.2) satisfazem as equações de Maxwell apresentadas a seguir.

$$\nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E} = \frac{k_0^2 n^2}{i\omega\mu_0} \vec{E} \quad (2.6)$$

As duas primeiras equações de Maxwell são imediatamente satisfeitas pelas representações (2.1) e (2.2), garantindo-se assim, no regime contínuo, divergência nula dos campos em toda região de interesse.

Substituindo, separadamente, as soluções (\vec{E}^e, \vec{H}^e) e (\vec{E}^m, \vec{H}^m) das equações (2.1) e (2.2) nas equações de Maxwell, obtém-se que os potenciais escalares Hertzianos elétrico e magnético devem satisfazer a equação de Helmholtz escalar modificada, como segue

$$\nabla^2 \Pi^{e,m} + k^2 \Pi^{e,m} = 0 \quad (2.7)$$

onde

$$k^2 = \begin{cases} k_e^2 = k_0^2 n^2 - n \frac{d^2(1/n)}{dr^2} \\ k_m^2 = k_0^2 n^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

A solução para potencial escalar Hertziano elétrico representa a solução TM_r e a solução para potencial escalar Hertziano magnético representa a solução TE_r . É importante observar que essas soluções TE_r e TM_r não são válidas se o índice de refração n varia com θ ou φ , permanecendo válidas somente para $n(r)$. Como os efeitos do terreno são dominantes sobre os efeitos atmosféricos e os gradientes verticais de n tendem ser muito maiores do que os gradientes horizontais, a suposição acima pode ser considerada satisfatória [18].

Assim, os campos eletromagnéticos vetoriais são representados em termos de duas componentes dos potenciais escalares Hertzianos $\Pi^e(r, \theta, \varphi)$ e $\Pi^m(r, \theta, \varphi)$, que satisfazem uma equação de Helmholtz escalar homogênea (2.7). Os sobrescritos "e" e "m" identificam as fontes (elétrica ou magnética) que dão origem aos potenciais e aos campos. Os campos totais \vec{E} e \vec{H} são decompostos em termos dos modos TE_r e TM_r .

Deve-se observar que os modos TE_r e TM_r se propagam independentemente em alguns solos suaves (plano, esférico, etc.), porém estão acoplados na presença de terreno irregular. Nesta tese de doutorado, usa-se a condição de contorno de

impedância para representar a forma pela qual os campos elétricos e magnéticos estão relacionados sobre a superfície do terreno irregular. Para um terreno de condutividade σ finita, a condição de contorno de impedância é determinada por [50]

$$\hat{n}_t \times \vec{E} = Z_1 \hat{n}_t \times (\hat{n}_t \times \vec{H}) \quad (2.9)$$

onde \hat{n}_t é o vetor unitário normal externo à superfície do terreno e

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0/\varepsilon_0}{\varepsilon_t}} = \sqrt{\frac{\mu_0/\varepsilon_0}{\varepsilon_r + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}}} \quad (2.10)$$

Z_1 é a impedância do terreno, ε_t sua permissividade relativa complexa e ε_r sua permissividade relativa.

2.2. Aproximação parabólica

As equações (2.7) e (2.9), juntamente com uma condição de contorno de radiação no infinito, constituem um problema de valor de contorno exato. Contudo, sua solução numérica para problemas de propagação requer recursos computacionais dificilmente disponíveis. Respostas razoáveis para a perda de percurso podem ser obtidas supondo que a energia da onda eletromagnética se propaga predominantemente num sentido, desprezando o campo retroespalhado, ou seja, desprezando a energia que se propaga no sentido oposto. Isso é realizado, primeiramente, pela seleção apropriada do sentido de propagação. Essa suposição é boa para propagação em ângulos rasantes sobre terrenos relativamente suaves, onde a pequena componente de campo retroespalhado pode ser desprezada. Para a propagação na atmosfera acima da superfície do terreno, a escolha mais apropriada para o sentido é $\hat{\theta}$, de modo que a distância medida a partir da fonte no sentido do receptor é aproximadamente igual a $a\theta$.

Numa região sem fonte, a equação de Helmholtz escalar (2.7), que em coordenadas esféricas pode ser expressa por

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + k^2 \Pi = 0 \quad (2.11)$$

pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2ika}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left[\left(k^2 - k_0^2 \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4r^2 \sin^2 \theta} \right] u = 0 \quad (2.12)$$

onde empregou-se

$$\Pi(r, \theta, \varphi) = u(r, \theta, \varphi) \frac{e^{ika\theta}}{r\sqrt{\sin\theta}} \quad (2.13)$$

A Equação (2.13) representa a separação de $\Pi(r, \theta, \varphi)$ em duas parcelas: uma responsável pela rápida variação de fase; a outra, indicada pela amplitude complexa $u(r, \theta, \varphi)$.

A Equação (2.12) é uma equação diferencial de segunda ordem e, portanto, sua solução é formada pela combinação linear de duas possíveis soluções, sendo que uma delas representa o retroespalhamento. A componente de onda retroespalhada presente na Equação (2.12) é eliminada quando a derivada segunda de u em relação a θ é desprezada, com base na aproximação parabólica que considera

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right| \ll 2ka \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right| \quad (2.14)$$

Assim, a equação parabólica escalar para a amplitude complexa $u(r, \theta, \varphi)$ é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{r^2}{2ika} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left[\left(k^2 - k_0^2 \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4r^2 \sin^2 \theta} \right] u \right\} \quad (2.15)$$

A amplitude complexa u varia lentamente, em termos relativos, ao longo de direções próximas à horizontal. A grande vantagem da Equação (2.15) é que ela pode ser resolvida numericamente de forma recursiva, ou seja, conhecida a distribuição de campo num plano transversal inicial, os valores de campo em cada

plano transversal são calculados com base nos valores de campo no plano transversal anterior. A principal limitação da Equação (2.15), resultante da suposição (2.14), é a aproximação de ângulo estreito da equação parabólica, válida somente num cone paraxial de aproximadamente 15°. Em termos da ótica geométrica, isso significa que Equação (2.15) suporta raios que propagam dentro de um cone de 15° ao redor da direção axial [8], [19], [30], [31] e [39].

2.3. Modelo do Terreno

A presença do terreno irregular complica o problema de propagação tridimensional por acoplar as diferentes componentes de campo de acordo com a condição de contorno de impedância (2.9).

O modelo de propagação apresentado nesta tese de doutorado é baseado na modificação da Equação (2.12). Para tanto, o sistema de coordenadas original (r, θ, φ) é transformado por intermédio da mudança de variáveis apresentadas a seguir.

$$\Theta = \theta \quad (2.16)$$

$$\Phi = \varphi \quad (2.17)$$

$$z = r - a - h(\theta, \varphi) \quad (2.18)$$

A função $h(\theta, \varphi)$ introduzida na Equação (2.18) descreve a altura do terreno irregular acima do nível médio do mar. Será suposto que essa função é conhecida e continuamente diferenciável em qualquer ponto de interesse. Para tanto, seus valores serão especificados analiticamente ou nos vértices de uma grade regular. No segundo caso, valores e derivadas em pontos intermediários serão obtidos com base em interpolação apropriada. Adicionalmente, a amplitude complexa $u(r, \theta, \varphi)$ é representada no novo sistema de coordenadas (z, Θ, Φ) pela função

$$u(r, \theta, \varphi) = v(z, \Theta, \Phi) \quad (2.19)$$

Substituindo o lado direito da representação (2.19) na equação de Helmholtz (2.12) e fazendo-se uso das derivadas definidas abaixo (omitindo argumentos, por simplicidade)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.27)$$

obté-m-se

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} + \\ & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{2ika}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{2ika}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left[\left(k^2 - k_0^2 \frac{a^2}{r^2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4r^2 \text{sen}^2 \theta} \right] v = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Em seguida, aplica-se a aproximação parabólica à Equação (2.28). Esta aproximação despreza a segunda derivada de v em relação a θ quando comparada

a primeira derivada de v em relação a Θ , eliminando assim o retroespalhamento. Isto é,

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} \right| \ll 2ka \left| \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right| \quad (2.29)$$

Deste modo, a Equação (2.28) escrita de uma forma mais compacta, transforma-se em

$$\frac{\partial v}{\partial z} = a_{zz} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + a_{z\Theta} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Theta} + a_{z\Phi} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} + a_{\Phi\Phi} \frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} + a_z \frac{\partial v}{\partial z} + a_0 v \quad (2.30)$$

onde os coeficientes são definidos abaixo

$$a_{zz} = -\frac{r^2}{2ika} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \Theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \Theta} \left(\frac{\partial h}{\partial \Phi} \right)^2 \right] \quad (2.31)$$

$$a_{z\Theta} = \frac{r^2}{2ika} \frac{2}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \Theta} \quad (2.32)$$

$$a_{z\Phi} = \frac{r^2}{2ika} \frac{2}{r^2 \text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} \quad (2.33)$$

$$a_{\Phi\Phi} = -\frac{r^2}{2ika} \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \Theta} \quad (2.34)$$

$$a_z = \frac{r^2}{2ika} \left(\frac{2ika}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \Theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \Phi^2} \right) \quad (2.35)$$

$$a_0 = -\frac{r^2}{2ika} \left[\left(k^2 - k_0^2 \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4r^2 \text{sen}^2 \Theta} \right] \quad (2.36)$$

A Equação (2.30), resultante da aproximação parabólica tridimensional à equação de Helmholtz modificada, será utilizada para representar a propagação dos potenciais de Hertz elétrico e magnético e, conseqüentemente, dos campos eletromagnéticos vetoriais através das relações apresentadas nas equações (2.1) e (2.2).

2.4. Condição de contorno de impedância

Assim como realizado para a equação de Helmholtz escalar (2.7), a condição de contorno de impedância (2.9) deve também ser expressa no novo sistema de coordenadas. Procedendo-se dessa maneira, com auxílio das equações (2.1), (2.2) e (2.13), e usando a expressão definida na Equação (2.19) e suas correspondentes derivadas determinadas nas equações (2.20) a (2.27), pode-se escrever as componentes do campo elétrico e magnético no novo sistema de coordenadas, como feito a seguir.

$$E_z = E_z^e + E_z^m = \frac{r}{n} \left(\frac{\partial^2 v^e}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^e}{\partial z} + k_e^2 v^e \right) g(r, \Theta) \quad (2.37)$$

$$E_\theta = E_\theta^e + E_\theta^m = \left[\frac{1}{n} \left(\frac{\partial^2 v^e}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial^2 v^e}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{n} \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \right) \frac{\partial v^e}{\partial z} + \frac{1}{n^2} \frac{dn}{dr} \left(\frac{\partial v^e}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial v^e}{\partial z} \right) + \frac{1}{n^2} \frac{dn}{dr} \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \right) v^e + \frac{i\omega\mu_0}{\text{sen} \theta} \left(\frac{\partial v^m}{\partial \Phi} - \frac{\partial h}{\partial \Phi} \frac{\partial v^m}{\partial z} \right) \right] g(r, \Theta) \quad (2.38)$$

$$E_\Phi = E_\Phi^e + E_\Phi^m = \left\{ \frac{1}{n \text{sen} \theta} \left(\frac{\partial^2 v^e}{\partial z \partial \Phi} - \frac{\partial h}{\partial \Phi} \frac{\partial^2 v^e}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{n^2 \text{sen} \theta} \frac{dn}{dr} \left(\frac{\partial v^e}{\partial \Phi} - \frac{\partial h}{\partial \Phi} \frac{\partial v^e}{\partial z} \right) - i\omega\mu_0 \left[\left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \right) v^m + \frac{\partial v^m}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial v^m}{\partial z} \right] \right\} g(r, \Theta) \quad (2.39)$$

$$H_z = H_z^e + H_z^m = r \left(\frac{\partial^2 v^m}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^m}{\partial z} + k_m^2 v^m \right) g(r, \Theta) \quad (2.40)$$

$$H_\theta = H_\theta^e + H_\theta^m = \left[\frac{k_0^2 n}{i\omega\mu_0 \text{sen} \theta} \left(\frac{\partial v^e}{\partial \Phi} - \frac{\partial h}{\partial \Phi} \frac{\partial v^e}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v^m}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial^2 v^m}{\partial z^2} + \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \right) \frac{\partial v^m}{\partial z} \right] g(r, \Theta) \quad (2.41)$$

$$H_\Phi = H_\Phi^e + H_\Phi^m = \left\{ -\frac{k_0^2 n}{i\omega\mu_0} \left[\left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \right) v^e + \frac{\partial v^e}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial v^e}{\partial z} \right] + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \left(\frac{\partial^2 v^m}{\partial z \partial \Phi} - \frac{\partial h}{\partial \Phi} \frac{\partial^2 v^m}{\partial z^2} \right) \right\} g(r, \Theta) \quad (2.42)$$

onde

$$g(r, \Theta) = \frac{e^{ik_0 a \Theta}}{r \sqrt{\text{sen} \theta}} \quad (2.43)$$

Com ajuda dessas expressões, o lado esquerdo da Equação (2.9) pode ser escrito por

$$\hat{n}_t \times \vec{E} = (n_{t\Theta}E_\Phi - n_{t\Phi}E_\Theta)\hat{z} + (n_{t\Phi}E_z - n_{tz}E_\Phi)\hat{\Theta} + (n_{tz}E_\Theta - n_{t\Theta}E_z)\hat{\Phi} \quad (2.44)$$

Da mesma forma, pode-se escrever o lado direito da Equação (2.9) por

$$\hat{n}_t \times (\hat{n}_t \times \vec{H}) = [(n_{tz}^2 - 1)H_z + n_{tz}n_{t\Theta}H_\Theta + n_{tz}n_{t\Phi}H_\Phi]\hat{z} + [n_{t\Theta}n_{tz}H_z + (n_{t\Theta}^2 - 1)H_\Theta + n_{t\Theta}n_{t\Phi}H_\Phi]\hat{\Theta} + [n_{t\Phi}n_{tz}H_z + n_{t\Phi}n_{t\Theta}H_\Theta + (n_{t\Phi}^2 - 1)H_\Phi]\hat{\Phi} \quad (2.45)$$

Assim, cada componente da condição de contorno de impedância, Equação (2.9), é definida como segue

Componente z

$$(n_{t\Theta}E_\Phi - n_{t\Phi}E_\Theta) = Z_1[(n_{tz}^2 - 1)H_z + n_{tz}n_{t\Theta}H_\Theta + n_{tz}n_{t\Phi}H_\Phi] \quad (2.46)$$

Componente Θ

$$(n_{t\Phi}E_z - n_{tz}E_\Phi) = Z_1[n_{t\Theta}n_{tz}H_z + (n_{t\Theta}^2 - 1)H_\Theta + n_{t\Theta}n_{t\Phi}H_\Phi] \quad (2.47)$$

Componente Φ

$$(n_{tz}E_\Theta - n_{t\Theta}E_z) = Z_1[n_{t\Phi}n_{tz}H_z + n_{t\Phi}n_{t\Theta}H_\Theta + (n_{t\Phi}^2 - 1)H_\Phi] \quad (2.48)$$

Nas equações (2.46) a (2.48), n_{tz} , $n_{t\Theta}$ e $n_{t\Phi}$ representam as componentes do vetor unitário normal à superfície do terreno, ou seja

$$\hat{n}_t = n_{tz}\hat{z} + n_{t\Theta}\hat{\Theta} + n_{t\Phi}\hat{\Phi} \quad (2.49)$$

Pode-se mostrar também que

$$n_{tz} \left[\begin{matrix} LE \\ LD \end{matrix} Eq (2.59) \right] + n_{t\theta} \left[\begin{matrix} LE \\ LD \end{matrix} Eq (2.60) \right] + n_{t\phi} \left[\begin{matrix} LE \\ LD \end{matrix} Eq(2.61) \right] = 0 \quad (2.50)$$

são ambas identicamente nulas. Na Equação (2.50), *LE* significa "lado esquerdo da equação" e *LD* significa "lado direito da equação". Portanto, apenas duas das componentes da condição de contorno (2.46) a (2.48) necessitam ser impostas em cada ponto da superfície do terreno irregular em $z = 0$. Preferencialmente, devem ser selecionadas as componentes da condição de contorno associadas às duas menores componentes de \hat{n}_t .

Por simplicidade, as três componentes da condição de contorno, equações (2.46) a (2.48), podem ser escritas da seguinte forma genérica

$$\begin{aligned} a_{zz}^e \frac{\partial^2 v^e}{\partial z^2} + a_{z\theta}^e \frac{\partial^2 v^e}{\partial z \partial \theta} + a_{z\phi}^e \frac{\partial^2 v^e}{\partial z \partial \phi} + a_z^e \frac{\partial v^e}{\partial z} + a_\theta^e \frac{\partial v^e}{\partial \theta} + a_\phi^e \frac{\partial v^e}{\partial \phi} + a_0^e v^e = a_{zz}^m \frac{\partial^2 v^m}{\partial z^2} + \\ a_{z\theta}^m \frac{\partial^2 v^m}{\partial z \partial \theta} + a_{z\phi}^m \frac{\partial^2 v^m}{\partial z \partial \phi} + a_z^m \frac{\partial v^m}{\partial z} + a_\theta^m \frac{\partial v^m}{\partial \theta} + a_\phi^m \frac{\partial v^m}{\partial \phi} + a_0^m v^m \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde os coeficientes $a_{i,j}^{e,m}$ estão definidos nas tabela 2.1 e 2.2.

Observa-se que tanto a imposição das condições de contorno como a imposição da equação parabólica ficará totalmente restrita ao plano transversal sob análise e ao seu imediatamente anterior em cada passo da solução numérica do problema.

Coeficiente	componente z	componente Θ	componente Φ
a_{zz}^e	$\frac{1}{n} \left(n_{t\Phi} \frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{n_{t\Theta}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} \right)$	$\frac{1}{n} \left(rn_{t\Phi} + \frac{n_{tz}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} \right)$	$-\frac{1}{n} \left(rn_{t\Theta} + n_{tz} \frac{\partial h}{\partial \Theta} \right)$
$a_{z\Theta}^e$	$-\frac{n_{t\Phi}}{n}$	0	$\frac{n_{tz}}{n}$
$a_{z\Phi}^e$	$\frac{n_{t\Theta}}{n \text{sen}\Theta}$	$-\frac{n_{tz}}{n \text{sen}\Theta}$	0
a_z^e	$\frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n_{tz} n \left(\frac{n_{t\Theta}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} - n_{t\Phi} \frac{\partial h}{\partial \Theta} \right) +$ $\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \left(n_{t\Phi} \frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{n_{t\Theta}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} \right) -$ $\frac{n_{t\Phi}}{n} \left(ik_0 a - \frac{1 \cos\Theta}{2 \text{sen}\Theta} \right)$	$\frac{n_{t\Phi}}{n} + \frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n \left[\frac{(n_{t\Theta}^2 - 1)}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} - \right.$ $\left. n_{t\Theta} n_{t\Phi} \frac{\partial h}{\partial \Theta} \right] + \frac{n_{tz}}{n^2 \text{sen}\Theta} \frac{dn}{dr} \frac{\partial h}{\partial \Phi}$	$\frac{n_{tz}}{n} \left[\left(ik_0 a - \frac{1 \cos\Theta}{2 \text{sen}\Theta} \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial h}{\partial \Theta} \frac{dn}{dr} \right] -$ $\frac{n_{t\Theta}}{n} + \frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n \left[\frac{n_{t\Phi} n_{t\Theta}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} - \right.$ $\left. (n_{t\Phi}^2 - 1) \frac{\partial h}{\partial \Theta} \right]$
a_{Θ}^e	$n_{t\Phi} \left(\frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n_{tz} n - \frac{1}{n^2} \frac{dn}{dr} \right)$	$\frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n_{t\Theta} n_{t\Phi} n$	$\frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} (n_{t\Phi}^2 - 1)n + \frac{n_{tz}}{n^2} \frac{dn}{dr}$
a_{Φ}^e	$\frac{n_{t\Theta}}{\text{sen}\Theta} \left(\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dr} - \frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n_{tz} n \right)$	$-\frac{1}{\text{sen}\Theta} \left[\frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} (n_{t\Theta}^2 - 1) + \frac{n_{tz}}{n^2} \frac{dn}{dr} \right]$	$-\frac{k_0^2 Z_1 n_{t\Phi} n_{t\Theta} n}{i\omega\mu_0 \text{sen}\Theta}$
a_0^e	$n_{t\Phi} \left(\frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n_{tz} n - \frac{1}{n^2} \frac{dn}{dr} \right) \left(ik_0 a - \right.$ $\left. \frac{1 \cos\Theta}{2 \text{sen}\Theta} \right)$	$n_{t\Phi} \left[\frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} n_{t\Theta} n \left(ik_0 a - \frac{1 \cos\Theta}{2 \text{sen}\Theta} \right) + \right.$ $\left. \frac{rk_e^2}{n} \right]$	$\left[\frac{n_{tz}}{n^2} \frac{dn}{dr} + \frac{k_0^2 Z_1}{i\omega\mu_0} (n_{t\Phi}^2 - 1)n \right] \left(ik_0 a - \right.$ $\left. \frac{1 \cos\Theta}{2 \text{sen}\Theta} \right) - \frac{rn_{t\Theta} k_e^2}{n}$

Tabela 2.1 - Coeficientes elétricos para cada componente da condição de contorno de impedância

Coeficiente	componente z	componente Θ	componente Φ
a_{zz}^m	$Z_1 \left[(n_{tz}^2 - 1)r - n_{tz}n_{t\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{n_{tz}n_{t\Phi}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} \right]$	$Z_1 \left[n_{tz}n_{t\Theta}r - (n_{t\Theta}^2 - 1) \frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{n_{t\Theta}n_{t\Phi}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} \right]$	$Z_1 \left[n_{t\Phi} \left(n_{tz}r - n_{t\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Theta} \right) - \frac{(n_{t\Phi}^2 - 1)}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi} \right]$
$a_{z\Theta}^m$	$Z_1 n_{tz} n_{t\Theta}$	$Z_1 (n_{t\Theta}^2 - 1)$	$Z_1 n_{t\Theta} n_{t\Phi}$
$a_{z\Phi}^m$	$Z_1 \frac{n_{tz} n_{t\Phi}}{\text{sen}\Theta}$	$Z_1 \frac{n_{t\Theta} n_{t\Phi}}{\text{sen}\Theta}$	$Z_1 \frac{(n_{t\Phi}^2 - 1)}{\text{sen}\Theta}$
a_z^m	$Z_1 \left[(n_{tz}^2 - 1) - n_{tz}n_{t\Theta} \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos\Theta}{\text{sen}\Theta} \right) \right] - i\omega\mu_0 n_{t\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Theta} - i\omega\mu_0 \frac{n_{t\Phi}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi}$	$Z_1 \left[n_{tz}n_{t\Theta} + (n_{t\Theta}^2 - 1) \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos\Theta}{\text{sen}\Theta} \right) \right] + i\omega\mu_0 n_{tz} \frac{\partial h}{\partial \Theta}$	$Z_1 n_{t\Phi} \left[n_{tz} + n_{t\Theta} \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos\Theta}{\text{sen}\Theta} \right) \right] + i\omega\mu_0 \frac{n_{tz}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi}$
a_{Θ}^m	$i\omega\mu_0 n_{t\Theta}$	$-i\omega\mu_0 n_{tz}$	0
a_{Φ}^m	$\frac{i\omega\mu_0 n_{t\Phi}}{\text{sen}\Theta}$	0	$-\frac{i\omega\mu_0 n_{tz}}{\text{sen}\Theta}$
a_0^m	$Z_1 (n_{tz}^2 - 1) r k_m^2 + i\omega\mu_0 n_{t\Theta} \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos\Theta}{\text{sen}\Theta} \right)$	$n_{tz} \left[Z_1 n_{t\Theta} r k_m^2 - i\omega\mu_0 \left(ik_0 a - \frac{1}{2} \frac{\cos\Theta}{\text{sen}\Theta} \right) \right]$	$Z_1 n_{tz} n_{t\Phi} r k_m^2$

Tabela 2.2 - Coeficientes magnéticos para cada componente da condição de contorno de impedância

2.5. Implementação numérica

A Equação (2.30), em conjunto com as condições de contorno apropriadas, define um problema de valor inicial que pode ser resolvido usando esquemas numéricos que progridem ao longo da direção axial. Isto é, dada uma solução válida numa superfície inicial, a solução em qualquer superfície mais distante da fonte pode ser determinada numericamente [8], [40]. A Figura 2.2 apresenta superfícies consecutivas $(z, \Phi)_l$ correspondentes a valores constantes de $\Theta_l = l \Delta\Theta$, nas quais os potenciais serão determinados. A Figura 2.3 representa exemplos de distribuições do fator de propagação $FP_{aB} = 20 \log(|\vec{E}|/|\vec{E}_0|)$ em superfícies consecutivas $(z, \Phi)_l$ correspondentes a valores constantes de $x_l = l(a\Delta\Theta)$.

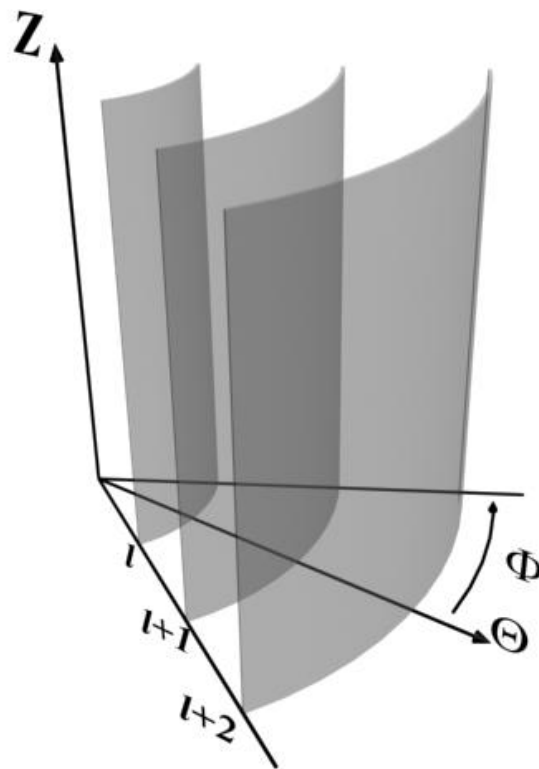


Figura 2.2 - Superfícies consecutivas utilizadas na determinação do campo a partir daquele definido inicialmente.

Usa-se uma implementação de diferenças finitas para discretizar a equação parabólica e as componentes da condição de contorno de impedância [16]-[23]. O espaçamento da grade, tanto no plano transversal $(z-\Phi)$ como no plano de

propagação ($z-\Theta$), pode variar para uma melhor representação do campo à medida que o plano de observação se afasta da antena transmissora. Isso é fundamental, principalmente na distância azimutal. Para as aplicações de longo alcance, passos na direção axial podem ser muito grandes comparados ao comprimento de onda [8], [16], [18], [20], [21] e [23].

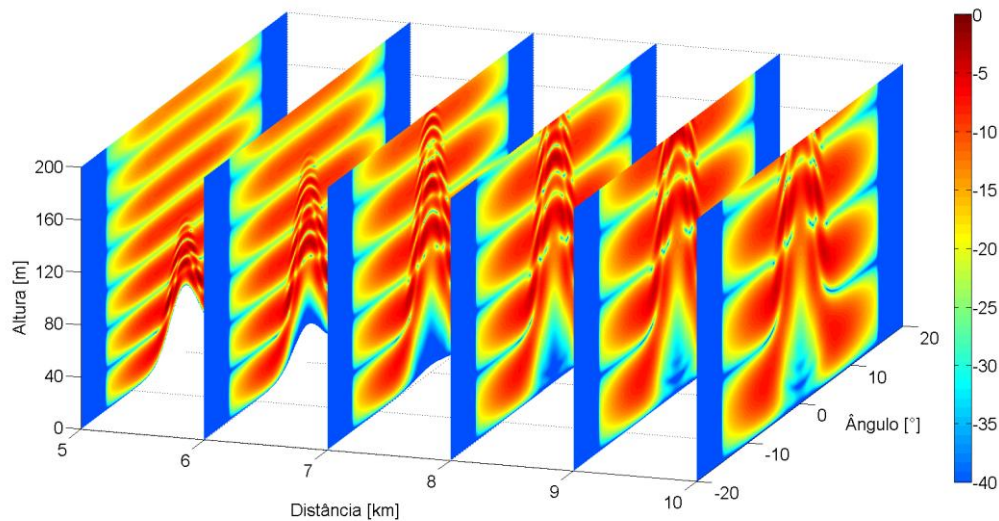


Figura 2.3 - Distribuição do fator de propagação em decibéis em superfícies consecutivas $x_l = l(a\Delta\Theta)$.

O esquema de Crank-Nicolson, onde as derivadas de segunda ordem são aproximadas como a média entre o valor da diferença central anterior e posterior, é frequentemente usado nas implementações de diferenças finitas da equação parabólica [17], [18], [20] e [22] e será adotado na discretização da Equação (2.30).

2.5.1. Discretização

Nesta seção, as discretizações da equação parabólica escalar (2.30) e das componentes da condição de contorno de impedância (2.51) são apresentadas usando a implementação de diferenças finitas centrais aplicadas num ponto médio entre dois planos sucessivos de pontos de campos. Um diagrama esquemático da discretização do espaço é mostrado na Figura 2.4.

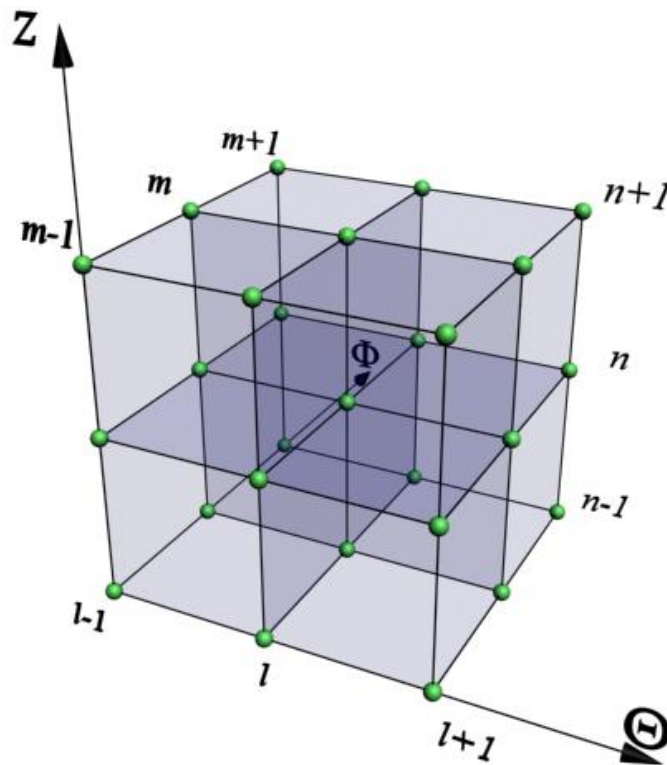


Figura 2.4 - Grade de discretização

Assim, a função reduzida v no ponto médio pode ser escrita como

$$v\left(l + \frac{1}{2}\right) = \frac{v_{m,n}^{l+1} + v_{m,n}^l}{2} \quad (2.52)$$

onde, os índices " l ", " m " e " n ", correspondem a valores discretos das coordenadas Θ , Φ e z , respectivamente.

Os valores correspondentes aos eixos em relação ao espaço discreto são escritos como

$$\Theta = \left(l + \frac{1}{2}\right) \Delta\Theta \quad (2.53)$$

$$\Phi = m\Delta\Phi \quad (2.54)$$

$$z = n\Delta r \quad (2.55)$$

A derivada de primeira ordem com respeito a Θ no ponto médio pode ser escrita como

$$\frac{\partial v}{\partial \Theta} \left(l + \frac{1}{2} \right) = \frac{v_{m,n}^{l+1} - v_{m,n}^l}{\Delta \Theta} \quad (2.56)$$

Outras derivadas necessárias para a discretização da equação parabólica escalar (2.30) através do esquema de Crank-Nicolson são apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial v}{\partial \Phi} \left(l + \frac{1}{2} \right) = \frac{v_{m+1,n}^{l+1} - v_{m-1,n}^{l+1}}{4\Delta\Phi} + \frac{v_{m+1,n}^l - v_{m-1,n}^l}{4\Delta\Phi} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \left(l + \frac{1}{2} \right) = \frac{v_{m,n+1}^{l+1} - v_{m,n-1}^{l+1}}{4\Delta z} + \frac{v_{m,n+1}^l - v_{m,n-1}^l}{4\Delta z} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} \left(l + \frac{1}{2} \right) = \frac{v_{m+1,n}^{l+1} - 2v_{m,n}^{l+1} + v_{m-1,n}^{l+1}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{v_{m+1,n}^l - 2v_{m,n}^l + v_{m-1,n}^l}{2(\Delta\Phi)^2} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \left(l + \frac{1}{2} \right) = \frac{v_{m,n+1}^{l+1} - 2v_{m,n}^{l+1} + v_{m,n-1}^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{m,n+1}^l - 2v_{m,n}^l + v_{m,n-1}^l}{2(\Delta z)^2} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} \left(l + \frac{1}{2} \right) = \\ \frac{v_{m+1,n+1}^{l+1} - v_{m-1,n+1}^{l+1} - v_{m+1,n-1}^{l+1} + v_{m-1,n-1}^{l+1}}{8\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{m+1,n+1}^l - v_{m-1,n+1}^l - v_{m+1,n-1}^l + v_{m-1,n-1}^l}{8\Delta z \Delta \Phi} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Theta} \left(l + \frac{1}{2} \right) = \frac{v_{m,n+1}^{l+1} - v_{m,n-1}^{l+1}}{2\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_{m,n+1}^l - v_{m,n-1}^l}{2\Delta z \Delta \Theta} \quad (2.62)$$

Introduzindo-se a numeração sequencial no plano transversal mostrada na Figura 2.5, onde cada par de índices (m,n) corresponde a um número k e, omitindo-se os argumentos por simplicidade, a Equação (2.52), juntamente com as equações (2.56) a (2.62), tornam-se

$$v = \frac{v_k^{l+1} + v_k^l}{2} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \Theta} = \frac{v_k^{l+1} - v_k^l}{\Delta \Theta} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{4\Delta z} + \frac{v_{k+M}^l - v_{k-M}^l}{4\Delta z} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} = \frac{v_{k+1}^{l+1} - 2v_k^{l+1} + v_{k-1}^{l+1}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{v_{k+1}^l - 2v_k^l + v_{k-1}^l}{2(\Delta\Phi)^2} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - 2v_k^{l+1} + v_{k-M}^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{k+M}^l - 2v_k^l + v_{k-M}^l}{2(\Delta z)^2} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_{k+M+1}^{l+1} - v_{k+M-1}^{l+1} - v_{k-M+1}^{l+1} + v_{k-M-1}^{l+1}}{8\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+M+1}^l - v_{k+M-1}^l - v_{k-M+1}^l + v_{k-M-1}^l}{8\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{2\Delta z \Delta \theta} - \frac{v_{k+M}^l - v_{k-M}^l}{2\Delta z \Delta \theta} \quad (2.69)$$

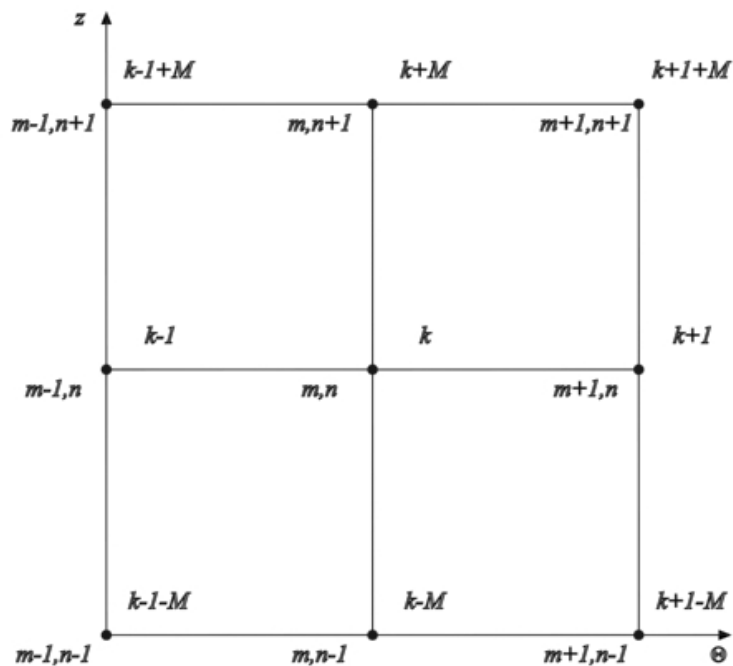


Figura 2.5 - Relação de k com o par de índices (m, n)

Logo, a versão discreta da equação parabólica escalar (2.30) pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned}
\frac{v_k^{l+1}-v_k^l}{\Delta\Theta} &= a_{zz} \left[\frac{v_{k+M}^{l+1}-2v_k^{l+1}+v_{k-M}^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{k+M}^l-2v_k^l+v_{k-M}^l}{2(\Delta z)^2} \right] + a_{z\Theta} \left(\frac{v_{k+M}^{l+1}-v_{k-M}^{l+1}}{2\Delta z\Delta\Theta} - \right. \\
&\left. \frac{v_{k+M}^l-v_{k-M}^l}{2\Delta z\Delta\Theta} \right) + a_{\Phi\Phi} \left[\frac{v_{k+1}^{l+1}-2v_k^{l+1}+v_{k-1}^{l+1}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{v_{k+1}^l-2v_k^l+v_{k-1}^l}{2(\Delta\Phi)^2} \right] + a_z \left(\frac{v_{k+M}^{l+1}-v_{k-M}^{l+1}}{4\Delta z} + \right. \\
&\left. \frac{v_{k+M}^l-v_{k-M}^l}{4\Delta z} \right) + a_0 \left(\frac{v_k^{l+1}+v_k^l}{2} \right) + \\
&a_{z\Phi} \left(\frac{v_{k+M+1}^{l+1}-v_{k+M-1}^{l+1}-v_{k-M+1}^{l+1}+v_{k-M-1}^{l+1}}{8\Delta z\Delta\Phi} + \frac{v_{k+M+1}^l-v_{k+M-1}^l-v_{k-M+1}^l+v_{k-M-1}^l}{8\Delta z\Delta\Phi} \right) \quad (2.70)
\end{aligned}$$

<i>Coeficiente</i>	<i>Plano l + 1</i>	<i>Plano l</i>
a_{k-M-1}	$-\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k-M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}}{2\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_z}{4\Delta z}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}}{2\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_z}{4\Delta z}$
a_{k-M+1}	$\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k-1}	$-\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$	$\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$
a_k	$\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2} - \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\Theta}$	$-\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2} + \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\Theta}$
a_{k+1}	$-\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$	$\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$
a_{k+M-1}	$\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k+M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}}{2\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_z}{4\Delta z}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}}{2\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_z}{4\Delta z}$
a_{k+M+1}	$-\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}}{8\Delta z\Delta\Phi}$

Tabela 2.3 - Coeficientes da equação parabólica no interior da região de interesse

Colocando os valores desconhecidos da função reduzida v do lado esquerdo e os valores conhecidos do lado direito, a Equação (2.70), escrita de uma forma mais compacta, fica

$$\begin{aligned}
& a_{k-M-1}^{l+1} v_{k-M-1}^{l+1} + a_{k-M}^{l+1} v_{k-M}^{l+1} + a_{k-M+1}^{l+1} v_{k-M+1}^{l+1} + a_{k-1}^{l+1} v_{k-1}^{l+1} + a_k^{l+1} v_k^{l+1} + \\
& a_{k+1}^{l+1} v_{k+1}^{l+1} + a_{k+M-1}^{l+1} v_{k+M-1}^{l+1} + a_{k+M}^{l+1} v_{k+M}^{l+1} + a_{k+M+1}^{l+1} v_{k+M+1}^{l+1} = a_{k-M-1}^l v_{k-M-1}^l + \\
& a_{k-M}^l v_{k-M}^l + a_{k-M+1}^l v_{k-M+1}^l + a_{k-1}^l v_{k-1}^l + a_k^l v_k^l + a_{k+1}^l v_{k+1}^l + \\
& a_{k+M-1}^l v_{k+M-1}^l + a_{k+M}^l v_{k+M}^l + a_{k+M+1}^l v_{k+M+1}^l
\end{aligned} \quad (2.71)$$

onde os coeficientes a_q^p estão definidos na Tabela 2.3.

Os coeficientes definidos na Tabela 2.3 são válidos somente no interior da região de interesse. Nos limites da grade de discretização ($m = 1$; $m = M$; $n = 1$; $n = N$), mostrada na Figura 2.6, deve-se definir todas derivadas usando somente pontos no interior da grade, assim como pontos que representam o limite da grade.

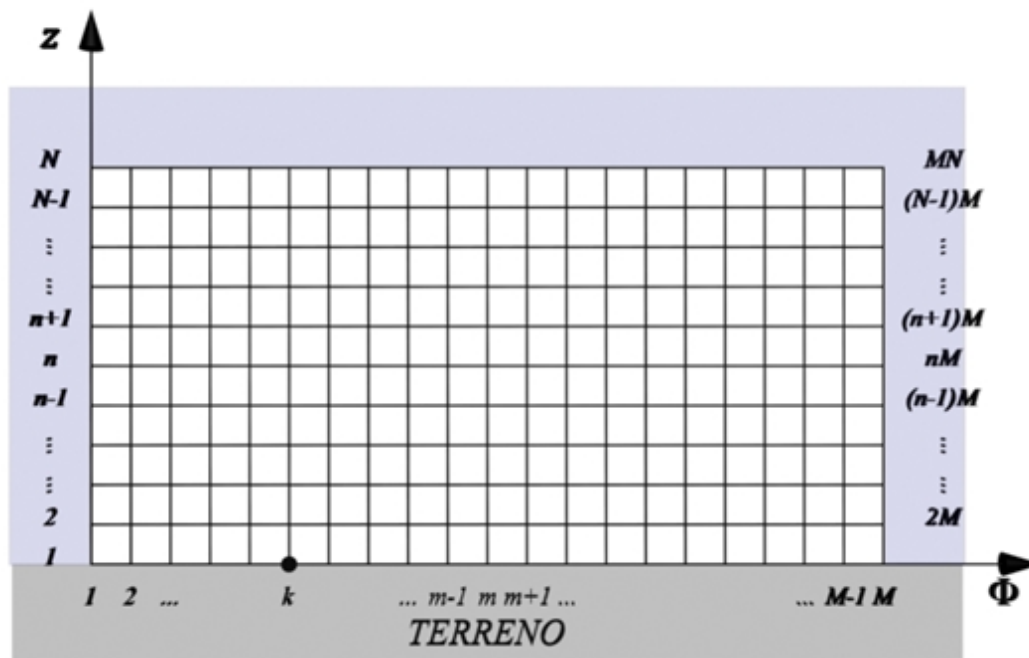


Figura 2.6 - Grade da região de interesse

Procedendo da mesma forma, devem-se redefinir as derivadas discretas para os seguintes casos especiais que representam os limites da grade de discretização:

- Limite esquerdo ($m = 1$ ou $k = 1 + (n - 1)M$; $n = [2, N-1]$)
- Limite direito ($m = M$ ou $k = M + (n - 1)M$; $n = [2, N-1]$)
- Limite superior ($n = N$ ou $k = m + (N - 1)M$; $m = [2, M-1]$)
- Limite superior esquerdo ($m = 1$; $n = N$ ou $k = 1 + (N - 1)M$)
- Limite superior direito ($m = M$; $n = N$ ou $k = M + (N - 1)M$)

- Limite interior ($n = 1$ ou $k = m$; $m = [2, M-1]$)
- Limite inferior esquerdo ($m = 1$; $n = 1$ ou $k = 1$)
- Limite inferior direito ($m = M$; $n = 1$ ou $k = M$)

onde o limite inferior corresponde à condição de contorno de impedância.

Para o limite esquerdo, do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas estão apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} = \frac{v_{k+2}^{l+1} - 2v_{k+1}^{l+1} + v_k^{l+1}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{v_{k+2}^l - 2v_{k+1}^l + v_k^l}{2(\Delta\Phi)^2} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_{k+M+1}^{l+1} - v_{k+M}^{l+1} - v_{k-M+1}^{l+1} + v_{k-M}^{l+1}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+M+1}^l - v_{k+M}^l - v_{k-M+1}^l + v_{k-M}^l}{4\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.73)$$

<i>Coefficiente</i>	<i>Plano l + 1</i>	<i>Plano l</i>
a_{k-M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z}{4\Delta z}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z}{4\Delta z}$
a_{k-M+1}	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$
a_k	$\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2} - \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\theta}$	$-\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\theta}$
a_{k+1}	$\frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2}$	$-\frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2}$
a_{k+2}	$-\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$	$\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$
a_{k+M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z}{4\Delta z}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z}{4\Delta z}$
a_{k+M+1}	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$

Tabela 2.4 - Coeficientes da equação parabólica no limite esquerdo da grade

A versão discreta da equação parabólica escalar (2.30) no limite esquerdo da grade de discretização pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$\begin{aligned}
& a_{k-M}^{l+1} v_{k-M}^{l+1} + a_{k-M+1}^{l+1} v_{k-M+1}^{l+1} + a_k^{l+1} v_k^{l+1} + a_{k+1}^{l+1} v_{k+1}^{l+1} + a_{k+2}^{l+1} v_{k+2}^{l+1} + \\
& a_{k+M}^{l+1} v_{k+M}^{l+1} + a_{k+M+1}^{l+1} v_{k+M+1}^{l+1} = a_{k-M}^l v_{k-M}^l + a_{k-M+1}^l v_{k-M+1}^l + a_k^l v_k^l + \\
& a_{k+1}^l v_{k+1}^l + a_{k+2}^l v_{k+2}^l + a_{k+M}^l v_{k+M}^l + a_{k+M+1}^l v_{k+M+1}^l
\end{aligned} \quad (2.74)$$

onde os coeficientes a_q^p estão definidos na Tabela 2.4.

Para o limite direito, do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas estão apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} = \frac{v_k^{l+1} - 2v_{k-1}^{l+1} + v_{k-2}^{l+1}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{v_k^l - 2v_{k-1}^l + v_{k-2}^l}{2(\Delta\Phi)^2} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_{k+M-1}^{l+1} - v_{k-M}^{l+1} + v_{k-M-1}^{l+1}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+M}^l - v_{k+M-1}^l - v_{k-M}^l + v_{k-M-1}^l}{4\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.76)$$

<i>Coeficiente</i>	<i>Plano l + 1</i>	<i>Plano l</i>
a_{k-M-1}	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$
a_{k-M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z}{4\Delta z}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z}{4\Delta z}$
a_{k-2}	$-\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$	$\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$
a_{k-1}	$\frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2}$	$-\frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2}$
a_k	$\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2} - \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\theta}$	$-\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\theta}$
a_{k+M-1}	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi}$
a_{k+M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z}{4\Delta z}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}}{2\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z}{4\Delta z}$

Tabela 2.5 - Coeficientes da equação parabólica no limite direito da grade

A versão discreta da equação parabólica escalar (2.30) no limite direito da grade de discretização pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$\begin{aligned}
& a_{k-M-1}^{l+1} v_{k-M-1}^{l+1} + a_{k-M}^{l+1} v_{k-M}^{l+1} + a_{k-2}^{l+1} v_{k-2}^{l+1} + a_{k-1}^{l+1} v_{k-1}^{l+1} + a_k^{l+1} v_k^{l+1} + \\
& a_{k+M-1}^{l+1} v_{k+M-1}^{l+1} + a_{k+M}^{l+1} v_{k+M}^{l+1} = a_{k-M-1}^l v_{k-M-1}^l + a_{k-M}^l v_{k-M}^l + a_{k-2}^l v_{k-2}^l + \\
& a_{k-1}^l v_{k-1}^l + a_k^l v_k^l + a_{k+M-1}^l v_{k+M-1}^l + a_{k+M}^l v_{k+M}^l
\end{aligned} \quad (2.77)$$

onde os coeficientes a_q^p estão definidos na Tabela 2.5.

Coeficiente	Plano $l + 1$	Plano l
a_{k-2M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2}$
a_{k-M-1}	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k-M}	$\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_z}{2\Delta z}$	$-\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_z}{2\Delta z}$
a_{k-M+1}	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k-1}	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$
a_k	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2} - \frac{a_z}{2\Delta z} -$ $\frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\Theta}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta\Phi)^2} + \frac{a_z}{2\Delta z} +$ $\frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta\Theta}$
a_{k+1}	$-\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$	$\frac{a_{z\Phi}}{4\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta\Phi)^2}$

Tabela 2.6 - Coeficientes da equação parabólica no limite superior da grade

Para o limite superior, do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas estão apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{v_k^l - v_{k-M}^l}{2\Delta z} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_k^{l+1} - 2v_{k-M}^{l+1} + v_{k-2M}^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_k^l - 2v_{k-M}^l + v_{k-2M}^l}{2(\Delta z)^2} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_{k+1}^{l+1} - v_{k-1}^{l+1} - v_{k-M+1}^{l+1} + v_{k-M-1}^{l+1}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+1}^l - v_{k-1}^l - v_{k-M+1}^l + v_{k-M-1}^l}{4\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Theta} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_k^l - v_{k-M}^l}{\Delta z \Delta \Theta} \quad (2.81)$$

A versão discreta da equação parabólica escalar (2.30) no limite superior da grade de discretização pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$\begin{aligned} & a_{k-2M}^{l+1} v_{k-2M}^{l+1} + a_{k-M-1}^{l+1} v_{k-M-1}^{l+1} + a_{k-M}^{l+1} v_{k-M}^{l+1} + a_{k-M+1}^{l+1} v_{k-M+1}^{l+1} + a_{k-1}^{l+1} v_{k-1}^{l+1} + \\ & a_k^{l+1} v_k^{l+1} + a_{k+1}^{l+1} v_{k+1}^{l+1} = a_{k-2M}^l v_{k-2M}^l + a_{k-M-1}^l v_{k-M-1}^l + a_{k-M}^l v_{k-M}^l + \\ & a_{k-M+1}^l v_{k-M+1}^l + a_{k-1}^l v_{k-1}^l + a_k^l v_k^l + a_{k+1}^l v_{k+1}^l \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde os coeficientes a_q^p estão definidos na Tabela 2.6.

Para o limite superior esquerdo, do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas estão apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{v_k^l - v_{k-M}^l}{2\Delta z} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} = \frac{v_{k+2}^{l+1} - 2v_{k+1}^{l+1} + v_k^{l+1}}{2(\Delta \Phi)^2} + \frac{v_{k+2}^l - 2v_{k+1}^l + v_k^l}{2(\Delta \Phi)^2} \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_k^{l+1} - 2v_{k-M}^{l+1} + v_{k-2M}^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_k^l - 2v_{k-M}^l + v_{k-2M}^l}{2(\Delta z)^2} \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_{k+1}^{l+1} - v_k^{l+1} - v_{k-M+1}^{l+1} + v_{k-M}^{l+1}}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+1}^l - v_k^l - v_{k-M+1}^l + v_{k-M}^l}{2\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Theta} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_k^l - v_{k-M}^l}{\Delta z \Delta \Theta} \quad (2.87)$$

A versão discreta da equação parabólica escalar (2.30) no limite superior esquerdo da grade de discretização pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$\begin{aligned}
& a_{k-2M}^{l+1} v_{k-2M}^{l+1} + a_{k-M}^{l+1} v_{k-M}^{l+1} + a_{k-M+1}^{l+1} v_{k-M+1}^{l+1} + a_k^{l+1} v_k^{l+1} + a_{k+1}^{l+1} v_{k+1}^{l+1} + \\
& a_{k+2}^{l+1} v_{k+2}^{l+1} = a_{k-2M}^l v_{k-2M}^l + a_{k-M}^l v_{k-M}^l + a_{k-M+1}^l v_{k-M+1}^l + a_k^l v_k^l + a_{k+1}^l v_{k+1}^l + \\
& a_{k+2}^l v_{k+2}^l
\end{aligned} \tag{2.88}$$

onde os coeficientes a_q^p estão definidos na Tabela 2.7.

Coeficiente	Plano $l + 1$	Plano l
a_{k-2M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2}$
a_{k-M}	$\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}}{\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi} + \frac{a_z}{2\Delta z}$	$-\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}}{\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi} - \frac{a_z}{2\Delta z}$
a_{k-M+1}	$\frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi}$	$-\frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi}$
a_k	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}}{\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi} - \frac{a_{\phi\phi}}{2(\Delta \phi)^2} - \frac{a_z}{2\Delta z} - \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta \theta}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}}{\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi} + \frac{a_{\phi\phi}}{2(\Delta \phi)^2} + \frac{a_z}{2\Delta z} + \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta \theta}$
a_{k+1}	$-\frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi} + \frac{a_{\phi\phi}}{(\Delta \phi)^2}$	$\frac{a_{z\phi}}{2\Delta z \Delta \phi} - \frac{a_{\phi\phi}}{(\Delta \phi)^2}$
a_{k+2}	$-\frac{a_{\phi\phi}}{2(\Delta \phi)^2}$	$\frac{a_{\phi\phi}}{2(\Delta \phi)^2}$

Tabela 2.7 - Coeficientes da equação parabólica no limite superior esquerdo da grade

Para o limite superior direito, do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas estão apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{v_k^l - v_{k-M}^l}{2\Delta z} \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = \frac{v_k^{l+1} - 2v_{k-1}^{l+1} + v_{k-2}^{l+1}}{2(\Delta \phi)^2} + \frac{v_k^l - 2v_{k-1}^l + v_{k-2}^l}{2(\Delta \phi)^2} \tag{2.90}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_k^{l+1} - 2v_{k-M}^{l+1} + v_{k-2M}^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_k^l - 2v_{k-M}^l + v_{k-2M}^l}{2(\Delta z)^2} \tag{2.91}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-1}^{l+1} - v_{k-M}^{l+1} + v_{k-M-1}^{l+1}}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_k^l - v_{k-1}^l - v_{k-M}^l + v_{k-M-1}^l}{2\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Theta} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-M}^{l+1}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_k^l - v_{k-M}^l}{\Delta z \Delta \Theta} \quad (2.93)$$

A versão discreta da equação parabólica escalar (2.30) no limite superior direito da grade de discretização pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$\begin{aligned} & a_{k-2M}^{l+1} v_{k-2M}^{l+1} + a_{k-M-1}^{l+1} v_{k-M-1}^{l+1} + a_{k-M}^{l+1} v_{k-M}^{l+1} + a_{k-2}^{l+1} v_{k-2}^{l+1} + a_{k-1}^{l+1} v_{k-1}^{l+1} + \\ & a_k^{l+1} v_k^{l+1} = a_{k-2M}^l v_{k-2M}^l + a_{k-M-1}^l v_{k-M-1}^l + a_{k-M}^l v_{k-M}^l + a_{k-2}^l v_{k-2}^l + \\ & a_{k-1}^l v_{k-1}^l + a_k^l v_k^l \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde os coeficientes a_q^p estão definidos na Tabela 2.8.

<i>Coefficiente</i>	<i>Plano l + 1</i>	<i>Plano l</i>
a_{k-2M}	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2}$
a_{k-M-1}	$-\frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi}$
a_{k-M}	$\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z \Delta \Theta} + \frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z}{2\Delta z}$	$-\frac{a_{zz}}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z}{2\Delta z}$
a_{k-2}	$-\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta \Phi)^2}$	$\frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta \Phi)^2}$
a_{k-1}	$\frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta \Phi)^2}$	$-\frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{(\Delta \Phi)^2}$
a_k	$-\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta \Phi)^2} - \frac{a_z}{2\Delta z} - \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta \Theta}$	$\frac{a_{zz}}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}}{\Delta z \Delta \Theta} + \frac{a_{z\Phi}}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_{\Phi\Phi}}{2(\Delta \Phi)^2} + \frac{a_z}{2\Delta z} + \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\Delta \Theta}$

Tabela 2.8 - Coeficientes da equação parabólica no limite superior direito da grade

Para o limite inferior, que corresponde à condição de contorno de impedância (2.9), do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas são as apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial v}{\partial \Phi} = \frac{v_{k+1}^{l+1} - v_{k-1}^{l+1}}{4\Delta\Phi} + \frac{v_{k+1}^l - v_{k-1}^l}{4\Delta\Phi} \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_k^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{v_{k+M}^l - v_k^l}{2\Delta z} \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_{k+2M}^{l+1} - 2v_{k+M}^{l+1} + v_k^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{k+2M}^l - 2v_{k+M}^l + v_k^l}{2(\Delta z)^2} \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_{k+M+1}^{l+1} - v_{k+M-1}^{l+1} - v_{k+1}^{l+1} + v_{k-1}^{l+1}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+M+1}^l - v_{k+M-1}^l - v_{k+1}^l + v_{k-1}^l}{4\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Theta} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_k^{l+1}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_{k+M}^l - v_k^l}{\Delta z \Delta \Theta} \quad (2.99)$$

Logo, a versão discretizada de cada componente da condição de contorno de impedância (2.51) pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned} & a_{zz}^e \left[\frac{v_{k+2M}^{e,l+1} - 2v_{k+M}^{e,l+1} + v_k^{e,l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{k+2M}^{e,l} - 2v_{k+M}^{e,l} + v_k^{e,l}}{2(\Delta z)^2} \right] + a_{z\Theta}^e \left[\frac{v_{k+M}^{e,l+1} - v_k^{e,l+1}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_{k+M}^{e,l} - v_k^{e,l}}{\Delta z \Delta \Theta} \right] + \\ & a_{z\Phi}^e \left[\frac{v_{k+M+1}^{e,l+1} - v_{k+M-1}^{e,l+1} - v_{k+1}^{e,l+1} + v_{k-1}^{e,l+1}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+M+1}^{e,l} - v_{k+M-1}^{e,l} - v_{k+1}^{e,l} + v_{k-1}^{e,l}}{4\Delta z \Delta \Phi} \right] + a_z^e \left[\frac{v_{k+M}^{e,l+1} - v_k^{e,l+1}}{2\Delta z} + \right. \\ & \left. \frac{v_{k+M}^{e,l} - v_k^{e,l}}{2\Delta z} \right] + a_\Theta^e \left[\frac{v_k^{e,l+1} - v_k^{e,l}}{\Delta \Theta} \right] + a_\Phi^e \left[\frac{v_{k+1}^{e,l+1} - v_{k-1}^{e,l+1}}{4\Delta \Phi} + \frac{v_{k+1}^{e,l} - v_{k-1}^{e,l}}{4\Delta \Phi} \right] + a_0^e \left[\frac{v_k^{e,l+1} + v_k^{e,l}}{2} \right] = \\ & a_{zz}^m \left[\frac{v_{k+2M}^{m,l+1} - 2v_{k+M}^{m,l+1} + v_k^{m,l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{k+2M}^{m,l} - 2v_{k+M}^{m,l} + v_k^{m,l}}{2(\Delta z)^2} \right] + a_{z\Theta}^m \left[\frac{v_{k+M}^{m,l+1} - v_k^{m,l+1}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_{k+M}^{m,l} - v_k^{m,l}}{\Delta z \Delta \Theta} \right] + \\ & a_{z\Phi}^m \left[\frac{v_{k+M+1}^{m,l+1} - v_{k+M-1}^{m,l+1} - v_{k+1}^{m,l+1} + v_{k-1}^{m,l+1}}{4\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+M+1}^{m,l} - v_{k+M-1}^{m,l} - v_{k+1}^{m,l} + v_{k-1}^{m,l}}{4\Delta z \Delta \Phi} \right] + \\ & a_z^m \left[\frac{v_{k+M}^{m,l+1} - v_k^{m,l+1}}{2\Delta z} + \frac{v_{k+M}^{m,l} - v_k^{m,l}}{2\Delta z} \right] + a_\Theta^m \left[\frac{v_k^{m,l+1} - v_k^{m,l}}{\Delta \Theta} \right] + a_\Phi^m \left[\frac{v_{k+1}^{m,l+1} - v_{k-1}^{m,l+1}}{4\Delta \Phi} + \right. \\ & \left. \frac{v_{k+1}^{m,l} - v_{k-1}^{m,l}}{4\Delta \Phi} \right] + a_0^m \left[\frac{v_k^{m,l+1} + v_k^{m,l}}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.100)$$

Colocando os valores desconhecidos da função reduzida v do lado esquerdo e os valores conhecidos do lado direito, a Equação (2.100) escrita de uma forma mais compacta, fica

$$\begin{aligned}
& a_{k+2M}^{e,l+1} v_{k+2M}^{e,l+1} + a_{k+M+1}^{e,l+1} v_{k+M+1}^{e,l+1} + a_{k+M}^{e,l+1} v_{k+M}^{e,l+1} + a_{k+M-1}^{e,l+1} v_{k+M-1}^{e,l+1} + a_{k+1}^{e,l+1} v_{k+1}^{e,l+1} + \\
& a_k^{e,l+1} v_k^{e,l+1} + a_{k-1}^{e,l+1} v_{k-1}^{e,l+1} + a_{k+2M}^{m,l+1} v_{k+2M}^{m,l+1} + a_{k+M+1}^{m,l+1} v_{k+M+1}^{m,l+1} + a_{k+M}^{m,l+1} v_{k+M}^{m,l+1} + \\
& a_{k+M-1}^{m,l+1} v_{k+M-1}^{m,l+1} + a_{k+1}^{m,l+1} v_{k+1}^{m,l+1} + a_k^{m,l+1} v_k^{m,l+1} + a_{k-1}^{m,l+1} v_{k-1}^{m,l+1} = \\
& a_{k+2M}^{e,l} v_{k+2M}^{e,l} + a_{k+M+1}^{e,l} v_{k+M+1}^{e,l} + a_{k+M}^{e,l} v_{k+M}^{e,l} + a_{k+M-1}^{e,l} v_{k+M-1}^{e,l} + a_{k+1}^{e,l} v_{k+1}^{e,l} + \\
& a_k^{e,l} v_k^{e,l} + a_{k-1}^{e,l} v_{k-1}^{e,l} + a_{k+2M}^{m,l} v_{k+2M}^{m,l} + a_{k+M+1}^{m,l} v_{k+M+1}^{m,l} + a_{k+M}^{m,l} v_{k+M}^{m,l} + \\
& a_{k+M-1}^{m,l} v_{k+M-1}^{m,l} + a_{k+1}^{m,l} v_{k+1}^{m,l} + a_k^{m,l} v_k^{m,l} + a_{k-1}^{m,l} v_{k-1}^{m,l} \quad (2.101)
\end{aligned}$$

onde os coeficientes a estão definidos nas tabelas 2.9 e 2.10.

Coeficiente	Plano $l+1$	
	Elétrico	Magnético
a_{k-1}	$\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_{\Phi}^e}{4\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_{\Phi}^m}{4\Delta\Phi}$
a_k	$\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_z^e}{2\Delta z} + \frac{a_{\Theta}^e}{\Delta\Theta} + \frac{a_0^e}{2}$	$-\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_z^m}{2\Delta z} - \frac{a_{\Theta}^m}{\Delta\Theta} - \frac{a_0^m}{2}$
a_{k+1}	$-\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_{\Phi}^e}{4\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_{\Phi}^m}{4\Delta\Phi}$
a_{k+M-1}	$-\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k+M}	$-\frac{a_{zz}^e}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_z^e}{2\Delta z}$	$\frac{a_{zz}^m}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_z^m}{2\Delta z}$
a_{k+M+1}	$\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k+2M}	$\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2}$	$-\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2}$

Tabela 2.9 - Coeficientes da condição de contorno de impedância no plano I (limite inferior)

Coeficiente	Plano l	
	Potencial Elétrico	Potencial Magnético
a_{k-1}	$-\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_{\Phi}^e}{4\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_{\Phi}^m}{4\Delta\Phi}$
a_k	$-\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_z^e}{2\Delta z} + \frac{a_{\Theta}^e}{\Delta\Theta} - \frac{a_0^e}{2}$	$\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_z^m}{2\Delta z} - \frac{a_{\Theta}^m}{\Delta\Theta} + \frac{a_0^m}{2}$
a_{k+1}	$\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_{\Phi}^e}{4\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_{\Phi}^m}{4\Delta\Phi}$
a_{k+M-1}	$\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k+M}	$\frac{a_{zz}^e}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_z^e}{2\Delta z}$	$-\frac{a_{zz}^m}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_z^m}{2\Delta z}$
a_{k+M+1}	$-\frac{a_{z\Phi}^e}{4\Delta z\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}^m}{4\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k+2M}	$-\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2}$	$\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2}$

Tabela 2.10 - Coeficientes da condição de contorno de impedância no plano l (limite inferior)

Para o limite inferior esquerdo, do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas são as apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial v}{\partial \Phi} = \frac{v_{k+1}^{l+1} - v_k^{l+1}}{2\Delta\Phi} + \frac{v_{k+1}^l - v_k^l}{2\Delta\Phi} \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_k^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{v_{k+M}^l - v_k^l}{2\Delta z} \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Phi^2} = \frac{v_{k+2}^{l+1} - 2v_{k+1}^{l+1} + v_k^{l+1}}{2(\Delta\Phi)^2} + \frac{v_{k+2}^l - 2v_{k+1}^l + v_k^l}{2(\Delta\Phi)^2} \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_{k+2M}^{l+1} - 2v_{k+M}^{l+1} + v_k^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{k+2M}^l - 2v_{k+M}^l + v_k^l}{2(\Delta z)^2} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Phi} = \frac{v_{k+M+1}^{l+1} - v_{k+M}^{l+1} - v_{k+1}^{l+1} + v_k^{l+1}}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{v_{k+M+1}^l - v_{k+M}^l - v_{k+1}^l + v_k^l}{2\Delta z \Delta \Phi} \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \Theta} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_k^{l+1}}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{v_{k+M}^l - v_k^l}{\Delta z \Delta \Theta} \quad (2.107)$$

A versão discreta de cada componente da condição de contorno de impedância (2.51) no limite inferior esquerdo da grade de discretização pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$\begin{aligned} & a_{k+2M}^{e,l+1} v_{k+2M}^{e,l+1} + a_{k+M+1}^{e,l+1} v_{k+M+1}^{e,l+1} + a_{k+M}^{e,l+1} v_{k+M}^{e,l+1} + a_{k+1}^{e,l+1} v_{k+1}^{e,l+1} + a_k^{e,l+1} v_k^{e,l+1} + \\ & a_{k+2M}^{m,l+1} v_{k+2M}^{m,l+1} + a_{k+M+1}^{m,l+1} v_{k+M+1}^{m,l+1} + a_{k+M}^{m,l+1} v_{k+M}^{m,l+1} + a_{k+1}^{m,l+1} v_{k+1}^{m,l+1} + \\ & a_k^{m,l+1} v_k^{m,l+1} = a_{k+2M}^{e,l} v_{k+2M}^{e,l} + a_{k+M+1}^{e,l} v_{k+M+1}^{e,l} + a_{k+M}^{e,l} v_{k+M}^{e,l} + a_{k+1}^{e,l} v_{k+1}^{e,l} + \\ & a_k^{e,l} v_k^{e,l} + a_{k+2M}^{m,l} v_{k+2M}^{m,l} + a_{k+M+1}^{m,l} v_{k+M+1}^{m,l} + a_{k+M}^{m,l} v_{k+M}^{m,l} + a_{k+1}^{m,l} v_{k+1}^{m,l} + a_k^{m,l} v_k^{m,l} \end{aligned} \quad (2.108)$$

onde os coeficientes a estão definidos nas tabelas 2.11 e 2.12.

Coeficientes	Plano $l+1$	
	Elétrico	Magnético
a_k	$\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z \Delta \Theta} + \frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z^e}{2\Delta z} +$ $\frac{a_{\Theta}^e}{\Delta \Theta} - \frac{a_{\Phi}^e}{2\Delta \Phi} + \frac{a_0^e}{2}$	$-\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z^m}{2\Delta z} -$ $\frac{a_{\Theta}^m}{\Delta \Theta} + \frac{a_{\Phi}^m}{2\Delta \Phi} - \frac{a_0^m}{2}$
a_{k+1}	$-\frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_{\Phi}^e}{2\Delta \Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_{\Phi}^m}{2\Delta \Phi}$
a_{k+M}	$-\frac{a_{zz}^e}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z \Delta \Theta} - \frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z^e}{2\Delta z}$	$\frac{a_{zz}^m}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z \Delta \Theta} + \frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z^m}{2\Delta z}$
a_{k+M+1}	$\frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi}$
a_{k+2M}	$\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2}$	$-\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2}$

Tabela 2.11 - Coeficientes da condição de contorno de impedância no plano $l+1$ (limite inferior esquerdo)

Coeficientes	Plano l	
	Elétrico	Magnético
a_k	$-\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}^e}{\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\phi}^e}{2\Delta z \Delta \phi} + \frac{a_z^e}{2\Delta z} + \frac{a_\theta^e}{\Delta \theta} + \frac{a_\phi^e}{2\Delta \phi} - \frac{a_0^e}{2}$	$\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}^m}{\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\phi}^m}{2\Delta z \Delta \phi} - \frac{a_z^m}{2\Delta z} - \frac{a_\theta^m}{\Delta \theta} - \frac{a_\phi^m}{2\Delta \phi} + \frac{a_0^m}{2}$
a_{k+1}	$\frac{a_{z\phi}^e}{2\Delta z \Delta \phi} - \frac{a_\phi^e}{2\Delta \phi}$	$-\frac{a_{z\phi}^m}{2\Delta z \Delta \phi} + \frac{a_\phi^m}{2\Delta \phi}$
a_{k+M}	$\frac{a_{zz}^e}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}^e}{\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\phi}^e}{2\Delta z \Delta \phi} - \frac{a_z^e}{2\Delta z}$	$-\frac{a_{zz}^m}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}^m}{\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\phi}^m}{2\Delta z \Delta \phi} + \frac{a_z^m}{2\Delta z}$
a_{k+M+1}	$-\frac{a_{z\phi}^e}{2\Delta z \Delta \phi}$	$\frac{a_{z\phi}^m}{2\Delta z \Delta \phi}$
a_{k+2M}	$-\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2}$	$\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2}$

Tabela 2.12 - Coeficientes da condição de contorno de impedância no plano l (limite inferior esquerdo)

Para o limite inferior direito, do conjunto de equações de (2.63) a (2.69), as únicas derivadas que serão redefinidas são as apresentadas abaixo.

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = \frac{v_k^{l+1} - v_{k-1}^{l+1}}{2\Delta \phi} + \frac{v_k^l - v_{k-1}^l}{2\Delta \phi} \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_k^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{v_{k+M}^l - v_k^l}{2\Delta z} \quad (2.110)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = \frac{v_k^{l+1} - 2v_{k-1}^{l+1} + v_{k-2}^{l+1}}{2(\Delta \phi)^2} + \frac{v_k^l - 2v_{k-1}^l + v_{k-2}^l}{2(\Delta \phi)^2} \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_{k+2M}^{l+1} - 2v_{k+M}^{l+1} + v_k^{l+1}}{2(\Delta z)^2} + \frac{v_{k+2M}^l - 2v_{k+M}^l + v_k^l}{2(\Delta z)^2} \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \phi} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_{k+M-1}^{l+1} - v_k^{l+1} + v_{k-1}^{l+1}}{2\Delta z \Delta \phi} + \frac{v_{k+M}^l - v_{k+M-1}^l - v_k^l + v_{k-1}^l}{2\Delta z \Delta \phi} \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} = \frac{v_{k+M}^{l+1} - v_k^{l+1}}{\Delta z \Delta \theta} - \frac{v_{k+M}^l - v_k^l}{\Delta z \Delta \theta} \quad (2.114)$$

A versão discreta de cada componente da condição de contorno de impedância (2.51) no limite inferior direito da grade de discretização pode ser escrita na seguinte forma compacta

$$\begin{aligned} & a_{k+2M}^{e,l+1} v_{k+2M}^{e,l+1} + a_{k+M}^{e,l+1} v_{k+M}^{e,l+1} + a_{k+M-1}^{e,l+1} v_{k+M-1}^{e,l+1} + a_k^{e,l+1} v_k^{e,l+1} + a_{k-1}^{e,l+1} v_{k-1}^{e,l+1} + \\ & a_{k+2M}^{m,l+1} v_{k+2M}^{m,l+1} + a_{k+M}^{m,l+1} v_{k+M}^{m,l+1} + a_{k+M-1}^{m,l+1} v_{k+M-1}^{m,l+1} + a_k^{m,l+1} v_k^{m,l+1} + \\ & a_{k-1}^{m,l+1} v_{k-1}^{m,l+1} = a_{k+2M}^{e,l} v_{k+2M}^{e,l} + a_{k+M}^{e,l} v_{k+M}^{e,l} + a_{k+M-1}^{e,l} v_{k+M-1}^{e,l} + a_k^{e,l} v_k^{e,l} + \\ & a_{k-1}^{e,l} v_{k-1}^{e,l} + a_{k+2M}^{m,l} v_{k+2M}^{m,l} + a_{k+M}^{m,l} v_{k+M}^{m,l} + a_{k+M-1}^{m,l} v_{k+M-1}^{m,l} + a_k^{m,l} v_k^{m,l} + \\ & a_{k-1}^{m,l} v_{k-1}^{m,l} \end{aligned} \quad (2.115)$$

onde os coeficientes a estão definidos nas tabelas 2.13 e 2.14.

Coeficientes	Plano $l+1$	
	Elétrico	Magnético
a_{k-1}	$\frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_{\Phi}^e}{2\Delta \Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_{\Phi}^m}{2\Delta \Phi}$
a_k	$\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}^e}{\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z^e}{2\Delta z} +$ $\frac{a_{\theta}^e}{\Delta \theta} + \frac{a_{\Phi}^e}{2\Delta \Phi} + \frac{a_0^e}{2}$	$-\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}^m}{\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z^m}{2\Delta z} -$ $\frac{a_{\theta}^m}{\Delta \theta} - \frac{a_{\Phi}^m}{2\Delta \Phi} - \frac{a_0^m}{2}$
a_{k+M-1}	$-\frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi}$
a_{k+M}	$-\frac{a_{zz}^e}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\theta}^e}{\Delta z \Delta \theta} + \frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z \Delta \Phi} + \frac{a_z^e}{2\Delta z}$	$\frac{a_{zz}^m}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\theta}^m}{\Delta z \Delta \theta} - \frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z \Delta \Phi} - \frac{a_z^m}{2\Delta z}$
a_{k+2M}	$\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2}$	$-\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2}$

Tabela 2.13 - Coeficientes da condição de contorno de impedância no plano $l+1$ (limite inferior direito)

Coeficientes	Plano l	
	Elétrico	Magnético
a_{k-1}	$-\frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_{\Phi}^e}{2\Delta\Phi}$	$\frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_{\Phi}^m}{2\Delta\Phi}$
a_k	$-\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_z^e}{2\Delta z} + \frac{a_{\Theta}^e}{\Delta\Theta} - \frac{a_{\Phi}^e}{2\Delta\Phi} - \frac{a_0^e}{2}$	$\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_z^m}{2\Delta z} - \frac{a_{\Theta}^m}{\Delta\Theta} + \frac{a_{\Phi}^m}{2\Delta\Phi} + \frac{a_0^m}{2}$
a_{k+M-1}	$\frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z\Delta\Phi}$	$-\frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z\Delta\Phi}$
a_{k+M}	$\frac{a_{zz}^e}{(\Delta z)^2} + \frac{a_{z\Theta}^e}{\Delta z\Delta\Theta} - \frac{a_{z\Phi}^e}{2\Delta z\Delta\Phi} - \frac{a_z^e}{2\Delta z}$	$-\frac{a_{zz}^m}{(\Delta z)^2} - \frac{a_{z\Theta}^m}{\Delta z\Delta\Theta} + \frac{a_{z\Phi}^m}{2\Delta z\Delta\Phi} + \frac{a_z^m}{2\Delta z}$
a_{k+2M}	$-\frac{a_{zz}^e}{2(\Delta z)^2}$	$\frac{a_{zz}^m}{2(\Delta z)^2}$

Tabela 2.14 - Coeficientes da condição de contorno de impedância no plano l (limite inferior direito)

2.5.2. Matriz esparsa

Após discretizar tanto a equação parabólica (2.30) quanto as componentes da condição de contorno impedância (2.51), observa-se que as derivadas parciais ao longo das coordenadas transversais estão acopladas, de forma que elementos não nulos estão presentes fora da diagonal principal do sistema esparsa de equações da forma

$$\bar{\bar{A}}_{l+1}\bar{v}_{l+1} = \bar{\bar{B}}_l\bar{v}_l = \bar{b}_l \quad (2.116)$$

Observa-se aqui que as matrizes $\bar{\bar{A}}_{l+1}$ e $\bar{\bar{B}}_l$ compartilham da mesma estrutura. Entretanto, as tabelas anteriores indicam, claramente, que $\bar{\bar{A}}_l \neq \bar{\bar{B}}_l$.

Lembrando que a função reduzida v está dividida em duas parcelas, uma correspondente ao potencial de Hertz elétrico v^e e a outra ao magnético v^m , a Equação (2.116), pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} [A_{11}^e]_{MN \times MN} & [A_{12}^m]_{MN \times MN} \\ [A_{21}^e]_{MN \times MN} & [A_{22}^m]_{MN \times MN} \end{bmatrix}_{2MN \times 2MN}^{l+1} \times \begin{bmatrix} [v^e]_{MN \times 1} \\ [v^m]_{MN \times 1} \end{bmatrix}_{2MN \times 1}^{l+1} = \begin{bmatrix} [b^e]_{MN \times 1} \\ [b^m]_{MN \times 1} \end{bmatrix}_{2MN \times 1} \quad (2.117)$$

onde cada submatriz \bar{A}_{ij} representa um quadrante da matriz \bar{A}_{l+1}

Assim, os coeficientes não nulos da matriz \bar{A} se distribuem de acordo com a Figura 2.7. Os conjuntos das M linhas iniciais em cada quadrante correspondem a pontos da grade localizados no solo ($z = 0$ ou $n = 1$), resultando das duas componentes da condição de contorno de impedância, associadas às duas menores componente do vetor \hat{n}_t , exibindo quatorze coeficientes assimetricamente distribuídos ao redor da diagonal principal. Nota-se que as sete diagonais mais afastadas da diagonal principal (2º e 3º quadrantes: A_{12}^m e A_{21}^e) são responsáveis pelo acoplamento entre as funções reduzidas v^e e v^m , e conseqüentemente pelo acoplamento entre os campos elétricos e magnéticos. Por outro lado, as linhas correspondendo a pontos da grade localizados inteiramente na atmosfera, resultante de equação parabólica, exibem nove coeficientes distribuídos simetricamente ao redor da diagonal principal, salvo as M linhas finais em cada quadrante que correspondem a pontos da grade localizados no limite superior ($n = N$), resultando em sete coeficientes assimetricamente distribuídos ao redor da diagonal principal. Observa-se também que em cada conjunto de M linhas, a primeira linha ($m = 1$) corresponde ao limite esquerdo da grade de discretização e a m-ésima linha ($m = M$) corresponde ao limite direito da grade de discretização.

Deve-se observar que, como a matriz dos coeficientes \bar{A} é esparsa, somente os elementos não nulos de \bar{A} precisam ser armazenados.

A Equação (2.116) pode ser resolvida para a função reduzida $v(r, \theta, \varphi)$ desconhecida em $x + \Delta x = a(\theta + \Delta\theta)$ por um procedimento iterativo de matriz esparsa ou por método direto robusto.

Por causa do acoplamento das componentes escalares do campo através da condição de contorno de impedância, os efeitos da despolarização são completamente tratados pelo modelo proposto.

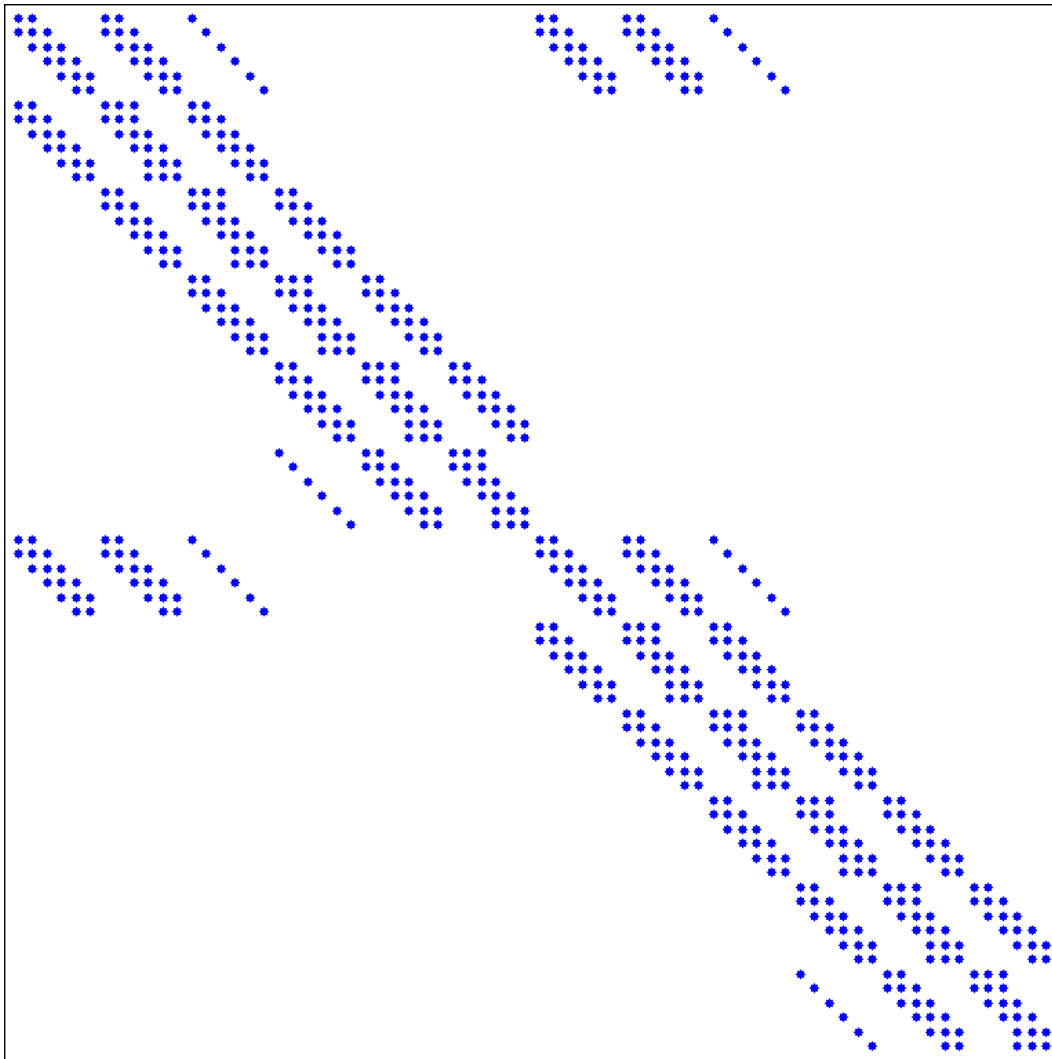


Figura 2.7 - Distribuição dos coeficientes não nulos da matriz A ($M = 6$, $N = 6$)

2.6. Domínio computacional

Um dos desafios dos métodos numéricos, tal como o método das diferenças finitas, tem sido a solução eficiente e precisa de campos eletromagnéticos em domínios onde a região de interesse é ilimitada em uma ou mais direções. Em alguns casos, para tornar possível a simulação numérica de tais problemas, uma condição de contorno absorvente (*Absorbing Boundary Condition* - ABC) deve ser introduzida nas fronteiras computacionais para simular a condição de radiação de Sommerfeld no infinito. Através da utilização de ABC's [51], reflexões espúrias oriundas dos contornos do domínio computacional são minimizadas.

Como domínio computacional deve ser truncado no plano transversal, já que domínio de propagação infinito não pode ser realizado computacionalmente, isso

será realizado numericamente forçando uma condição de contorno absorvente no plano superior $z = z_{\max}$ e nos dois planos laterais definidos por $\varphi = -\varphi_{\max}$ e $\varphi = +\varphi_{\max}$. Essa condição de contorno absorvente deve amortecer suavemente o campo fora do domínio de propagação e evitar que reflexões espúrias, oriundas dos limites artificiais impostos ao domínio computacional. Uma das condições de contorno absorvente mais popularmente implementada para revestir as faces laterais e superior do domínio de propagação é imposta pela técnica da camada perfeitamente casada (*Perfectly Matched Layer* - PML) [49]. Entretanto, devido às dificuldades de se implementar a PML no modelo proposto, um filtro foi usado como condição de contorno absorvente.

2.6.1.

Filtro como uma condição de contorno absorvente

Nesta tese de doutorado, foi utilizado um filtro como condição de contorno absorvente. Esse filtro foi aplicado nos limites da região de interesse, a fim de absorver a energia incidente. Para o filtro não influenciar a propagação na região de interesse, o filtro deve ser escolhido de tal forma que apenas uma quantidade insignificante de energia se propaga de volta para a região de interesse.

Um filtro simples, mas efetivo, é dado pela janela de Hanning, frequentemente usado em processamento de sinais [34]. Esse filtro tem a seguinte forma

$$\tau(x) = \frac{1 + \cos(\pi x)}{2} \quad (2.118)$$

A janela de Hanning satisfaz $\tau(0) = 1$, $\tau(1) = 0$ e as derivadas nas extremidades do intervalo de validade $[0, 1]$ são nulas, o que garante um casamento suave com o resto do domínio.

2.6.2.

PARDISO

A equação parabólica e as condições de contorno apropriadas definem um problema de valor inicial que pode ser resolvido usando um esquema numérico que avança ao longo da direção axial. Isto é, os valores conhecidos das funções

amplitudes complexas v^e e v^m no plano transversal (z, Φ) à direção de propagação principal são usados para determinar aqueles no plano a um passo imediatamente mais distante da fonte.

Em cada passo de progressão ao longo da direção principal, as matrizes $\bar{\bar{A}}_{l+1}$ e $\bar{\bar{B}}_l$ são recalculadas e o sistema esparsa de equações lineares é resolvido com ajuda do pacote PARDISO (*Parallel Direct Sparse Solver*), parte da biblioteca MKL (*Intel Math Kernel Library*), integrante do compilador *Intel Visual Fortran Compiler Professional Edition for Windows*. Este software de fácil uso resolve, iterativa ou diretamente, um amplo conjunto de tipos de sistemas de equações lineares esparsos simétricos ou assimétricos, compartilhando memória de multiprocessadores. Decisões e operações de pré-condicionamento e renumeração de elementos da matriz esparsa ficam automaticamente a cargo do PARDISO [52].

Cabe lembrar que o compilador *Intel Visual Fortran* compila o código fonte tomando decisões de paralelização e vetorização automaticamente, para usufruir de todos os recursos computacionais disponíveis.

2.7. Campo inicial

Da discretização da Equação (2.30), tem-se que o campo na distância $a(\theta + \Delta\theta)$ é dependente do campo no passo anterior. Portanto, deve-se especificar o campo no passo inicial, a fim de se determinar o campo nos planos subsequentes desejados.

A superfície inicial será considerada aquela de uma antena de abertura. Sabe-se que a distribuição do campo na abertura e o campo distante da antena formam um par de transformadas de Fourier [8], [38], [39].

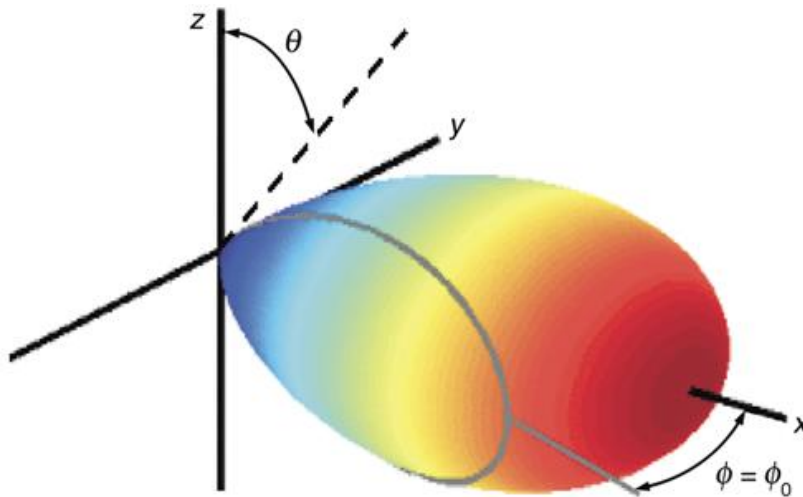


Figura 2.8 – Fonte Gaussiana

Nesta tese de doutorado, deseja-se usar uma antena que represente um feixe Gaussiano simples da forma [20]

$$\vec{E}_f(y, z) = \frac{1}{\pi\varpi^2} e^{-\left[\frac{(z-z_f)^2 + y^2}{\varpi^2}\right]} \begin{cases} \hat{y}, & \text{HPOL} \\ \hat{z}, & \text{VPOL} \end{cases} \quad (2.119)$$

Esse modelo de campo próximo, em função do ângulo polar θ (medido a partir do eixo z) e o ângulo de azimute φ (medido a partir do eixo x) é mostrado na Figura 2.8.

Na Equação (2.119), o subscrito "f" indica que o campo definido nessa equação é o campo da fonte, z_f é a altura de antena transmissora e ϖ é a largura do feixe Gaussiano.

É bem conhecido da teoria de antenas que o campo distante devido a uma distribuição de campo polarizado horizontalmente na abertura é determinado por [53]

$$E_y(r, \theta, \varphi) = -\frac{ik\text{sen}\theta\cos\varphi}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} E_{fy}(k\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, k\cos\theta) \quad (2.120)$$

onde E_{fy} é a transformada de Fourier do campo de abertura. Para uma distribuição de fonte Gaussiana da forma da Equação (2.119), a Equação (2.120) pode ser reescrita na forma

$$E_y(r, \theta, \varphi) = -\frac{ik \text{sen} \theta \cos \varphi}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \exp(-ipz_f) \times \exp\left[-\frac{\varpi^2(q^2+p^2)}{4}\right] \quad (2.121)$$

onde

$$p = k \cos \theta \quad (2.122)$$

$$q = k \text{sen} \theta \text{sen} \varphi = \sqrt{k^2 - p^2} \text{sen} \varphi \quad (2.123)$$

Para propagação próxima a horizontal, $\theta \approx 90^\circ$, $\varphi \approx 0^\circ$ e o termo $\text{sen} \theta \cos \varphi$ na Equação (2.121) pode ser aproximado por 1. Substituindo a Equação (2.123) em (2.120) e suprimindo o fator de onda esférica, obtém-se

$$E_{2D}(r, \theta, \varphi) = \exp\left[-\frac{\varpi^2 k^2 \text{sen}^2 \varphi}{4}\right] \times \exp(-ipz_f) \times \exp\left[-\frac{\varpi^2 p^2 \cos^2 \varphi}{4}\right] \quad (2.124)$$

A distribuição de fonte responsável pelo padrão 2D pode ser encontrada pela transformada inversa de Fourier da Equação (2.124) com respeito a p .

$$E_{f2D}(z, \varphi) = \frac{1}{\varpi \cos \varphi \sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\varpi^2 k^2 \text{sen}^2 \varphi}{4}\right] \times \exp\left[-\frac{(z-z_f)^2}{\varpi^2 \cos^2 \varphi}\right] \quad (2.125)$$