



Eduardo Henrique Altieri

**Modelo de cálculo da necessidade de capital
para cobrir os riscos de subscrição de
operações não vida**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho
Co-orientador: Prof. Eduardo Fraga Lima de Melo

Rio de Janeiro
Março de 2013



Eduardo Henrique Altieri

Modelo de Cálculo da Necessidade de Capital para Cobrir os Riscos de Subscrição e Operações não Vida

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho
Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Eduardo Fraga Lima de Melo
Co-orientador

Superintendência de Seguros Privados – Ministério da Fazenda

Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. William Moreira Lima Neto
Superintendência de Seguros Privados

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 18 de março de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Eduardo Henrique Altieri

Graduou-se em Ciências Atuariais e em Estatística pelo Instituto de Matemática da UFRJ. É Analista da Superintendência de Seguros Privados (SUSEP) desde 2006, onde já foi chefe da Divisão de Monitoramento de Riscos de Subscrição. Já atuou nas empresas Mercer e SulAmérica, como também na Unimed-Rio.

Ficha Catalográfica

Altieri, Eduardo Henrique

Modelo de cálculo da necessidade de capital para cobrir os riscos de subscrição de operações não vida / Eduardo Henrique Altieri ; orientador: Álvaro de Lima Veiga Filho; co-orientador: Eduardo Fraga Lima de Melo– 2013.

106 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2013.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Risco de subscrição. 3. Requerimento de capital. 4. Necessidade de capital. 5. Capital econômico. 6. Quantificação de risco. 7. Modelo interno. 8. Cópula condicional. 9. Dependência entre riscos. 10. Estrutura de dependência. 11. Mensuração de riscos. I. Veiga Filho, Álvaro de Lima. II. Melo, Eduardo Fraga Lima de. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 621.3

Agradecimentos

Aos meus pais pela educação, apoio e incentivo, além do amor e carinho.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

À minha amiga Aline da Rocha Gonçalves, pelo incentivo e apoio em vários momentos do curso.

À Géssica Antunes dos Santos, pelo apoio em especial no período de conclusão desta dissertação.

Ao meu orientador Álvaro de Lima Veiga Filho, pelo apoio e contribuições dadas.

Ao meu também orientador Eduardo Fraga Lima de Melo, pela sugestão do tema, pelo incentivo e apoio à realização do curso, pelas inúmeras oportunidades de aquisição de conhecimento, como também pela amizade.

Aos amigos da SUSEP, com os quais aprendo diariamente.

Aos membros da banca cujas sugestões foram muito importantes no aprimoramento do trabalho.

Aos professores com quem tive aula no curso.

À SUSEP e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos.

Resumo

Altieri, Eduardo Henrique; Veiga Filho, Álvaro de Lima (Orientador); de Melo, Eduardo Fraga Lima (Co-orientador). **Modelo de cálculo da necessidade de capital para cobrir os riscos de subscrição de operações não vida**. Rio de Janeiro, 2013. 106p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Importante questão que se coloca atualmente é a capacidade de medição do volume de capital necessário, às sociedades seguradoras, para fazer frente aos diversos tipos de risco que tais companhias suportam no exercício de suas atividades. Esse volume de capital necessário deve ser tal que permita à companhia suportar variabilidades no negócio. As motivações para o desenvolvimento de modelos matemáticos visando à determinação desta necessidade de capital são tanto a preocupação das próprias companhias com a sua gestão de risco, como também aspectos relacionados ao estabelecimento de requerimentos de capital exigidos pelo regulador de seguro às sociedades seguradoras para fazer frente aos riscos suportados. Entre tais riscos, encontra-se a categoria dos riscos de subscrição, relacionados diretamente à operação central de uma seguradora (design de produto, precificação, processo de aceitação, regulação de sinistros e provisionamento). Esta dissertação apresenta uma proposta de modelo para determinação do volume necessário de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, na qual tal categoria de riscos é segregada nos riscos de provisão de sinistros (relativos aos sinistros ocorridos e, assim, relacionados às provisões de sinistros) e nos riscos de emissão/precificação (relativos aos sinistros à ocorrer num horizonte de tempo de 1 ano, considerando novos negócios). Em especial, o modelo proposto utiliza processos de simulação que levam em consideração a estrutura de dependência das variáveis envolvidas e linhas de negócio, fazendo uso do conceito de cópulas condicionais.

Palavras chave

Risco de subscrição; requerimento de capital; necessidade de capital; capital econômico; quantificação de risco; modelo interno; cópula condicional; dependência entre riscos; estrutura de dependência; mensuração de riscos.

Abstract

Altieri, Eduardo Henrique; Veiga Filho, Álvaro de Lima (Advisor); de Melo, Eduardo Fraga Lima (Co-advisor). **Model for calculating the need for capital to cover the underwriting risks of non-life operations**. Rio de Janeiro, 2013. 106p. MSc Dissertation - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Important question that arises today is the ability to measure the amount of capital necessary to insurance companies, to cope with various types of risk that these companies support in performing their activities. This volume of capital required must be such as to enable the company to bear variability in business. The motivations for the development of mathematical models aimed at the determination of those capital needs are both the concern of companies with their own risk management, as well as aspects related to establishing capital requirements required by the insurance regulator to insurance companies to face the risks borne. Among such risks, is the category of underwriting risks, directly related to the core operation of an insurance company (product design, pricing, underwriting process, loss settlement and provisioning). This dissertation proposes a model for determining the appropriate amount of capital to cope with the underwriting risks, where such risk category is segregated in reserving risks (relative to incurred events) and pricing risks (relative to events occurring in the time horizon of 1 year, considering new businesses). In particular, the proposed model uses simulation processes that take into account the dependence structure of the variables involved and lines of business, making use of the concept of conditional copulas.

Keywords

Underwriting risk; capital requirement; capital needs; economic capital; risk quantification; internal model; copula; conditional copula; dependence between risks; dependence structure risk measurement.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	13
2. O RISCO DE SUBSCRIÇÃO E SUA MODELAGEM	22
2.1. Risco de subscrição das operações não vida e sua segregação para fins de modelagem	23
2.2. Aspectos gerais do modelo proposto para fazer frente aos riscos de subscrição	26
3. CONCEITOS ACERCA DE FUNÇÃO CÓPULA UTILIZADOS NO MODELO PROPOSTO	27
3.1. Definição de função cópula	27
3.2. O Teorema de Sklar e sua utilidade	28
3.3. Cópula Gaussiana bivariada	29
3.4. Simulando de uma cópula Gaussiana bivariada	29
3.5. Simulando observações de um vetor aleatório $(Y_1, Y_2)'$ com FDAs marginais F_1 e F_2 conhecidas e estrutura de dependência dada por uma cópula Gaussiana.	30
3.6. Extensão para o caso multivariado	31
3.7. Cópula condicional	33
3.8. PROCESSO 1	34
3.9. PROCESSO 2	35
4. MÓDULO 1: MODELO PARA A DETERMINAÇÃO DA NECESSIDADE DE CAPITAL PARA FAZER FRENTE AO RISCO DE PROVISÃO DE SINISTRO	38
4.1. Medida de Risco	38
4.2. Triângulo de Run-off	40
4.3. Simulação de valores para a PERDA	43
4.4. Fator de desconto	45
4.5. Distribuição para a PERDA e determinação da necessidade de capital	46
4.6. Triângulo de run-off de números de pagamentos	47
4.7. Modelos estocásticos ajustados para $M_{c,i,j}$ e $N_{c,i,j}$	48
4.8. Processo de simulação	53
5. MÓDULO 2: MODELO PARA A DETERMINAÇÃO DA NECESSIDADE DE CAPITAL PARA FAZER FRENTE AO RISCO DE EMISSÃO/PRECIFICAÇÃO	58
5.1. Simulação de valores para RS	59
5.2. Distribuição para RS e determinação da necessidade de capital	62
5.3. Séries de dados	63
5.4. Dados trimestrais	66
5.5. Modelos estocásticos ajustados para as séries que compõem RS	66
5.5.1. Modelo estocástico ajustado para $NE_{c,i}$	67

5.5.2. Modelo estocástico ajustado para $NSO_{c,i}$	68
5.5.3. Modelo estocástico ajustado para $PG_{c,i}$	68
5.5.4. Modelo estocástico ajustado para $SO_{c,i}$	69
5.5.5. Modelo estocástico ajustado para DA_i	69
5.5.6. Modelo estocástico ajustado para $ORDOP_i$	70
5.6. Processo de simulação	70
6. EXECUÇÃO DO MODELO PROPOSTO E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	78
6.1. Execução do modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro	79
6.2. Execução do modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de emissão/precificação	92
6.3. Determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de subscrição	101
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105

Lista de figuras

Figura 1: Distribuição de perda com distribuição simétrica	40
Figura 2: Distribuição de perda com distribuição assimétrica	40
Figura 3: Diagrama com o processo de formação da PERDA	45
Figura 4: Cruzamentos entre valores observados e ajustados para números e montantes de pagamentos	84
Figura 5: Histograma dos valores simulados para a PERDA	91
Figura 6: Cruzamentos entre valores observados e ajustados para as séries (parte 1)	97
Figura 7: Cruzamentos entre valores observados e ajustados para as séries (parte 2)	97
Figura 8: Projeções das séries (parte 1)	97
Figura 9: Projeções das séries (parte 2)	99
Figura 10: Histograma dos valores simulados para o RS	100

Lista de tabelas

Tabela 1: Triângulo de run-off com os montantes de pagamentos relativos a sinistros ocorridos	41
Tabela 2: Valores de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos	43
Tabela 3: Pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos	47
Tabela 4: Números de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos	48
Tabela 5: Montantes de pagamentos referentes aos sinistros já ocorridos	64
Tabela 6: Números de pagamentos referentes aos sinistros já ocorridos	65
Tabela 7: Triângulo de run-off - números de pagamentos ($n_{c,i,j}$) - Patrimonial Demais (c=1)	79
Tabela 8: Triângulo de run-off - montantes de pagamentos ($m_{c,i,j}$) - Patrimonial Demais (c=1)	80
Tabela 9: Triângulo de run-off - números de pagamentos ($n_{c,i,j}$) - Automóveis (c=2)	80
Tabela 10: Triângulo de run-off - montantes de pagamentos ($m_{c,i,j}$) - Automóveis (c=2)	81
Tabela 11: Triângulo de run-off - números de pagamentos ($n_{c,i,j}$) - Residencial (c=3)	81
Tabela 12: Triângulo de run-off - montantes de pagamentos ($m_{c,i,j}$) - Residencial (c=3)	82
Tabela 13: Parâmetros estimados – modelos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$ - Patrimonial Demais (c=1)	82
Tabela 14: Parâmetros estimados – modelos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$ - Automóveis (c=2)	83
Tabela 15: Parâmetros estimados – modelos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$ - Residencial (c=3)	83
Tabela 16: Números de pagamentos - observados e estimados - Patrimonial Demais (c=1)	85

Tabela 17: Montantes de pagamentos - observados e estimados - Patrimonial Demais (c=1)	85
Tabela 18: Números de pagamentos - observados e estimados - Automóveis (c=2)	86
Tabela 19: Montantes de pagamentos - observados e estimados - Automóveis (c=2)	86
Tabela 20: Números de pagamentos - observados e estimados - Residencial (c=3)	86
Tabela 21: Montantes de pagamentos - observados e estimados - Residencial (c=3)	87
Tabela 22: Números de pagamentos - observados e médias dos simulados - Patrimonial Demais (c=1)	88
Tabela 23: Montantes de pagamentos - observados e médias dos simulados - Patrimonial Demais (c=1)	88
Tabela 24: Números de pagamentos - observados e médias dos simulados - Automóveis (c=2)	89
Tabela 25: Montantes de pagamentos - observados e médias dos simulados - Automóveis (c=2)	90
Tabela 26: Números de pagamentos - observados e médias dos simulados - Residencial (c=3)	90
Tabela 27: Montantes de pagamentos - observados e médias dos simulados - Residencial (c=3)	91
Tabela 28: valores de necessidade de capital – risco de provisão de sinistros	92
Tabela 29: Séries - Patrimonial Demais (c=1)	92
Tabela 30: Séries - Automóveis (c=2)	93
Tabela 31: Séries - Residencial (c=3)	93
Tabela 32: Séries gerais da companhia	93
Tabela 33: Projeções da Selic	94
Tabela 34: Parâmetros estimados – modelo para $\ln(\text{NE})$	94
Tabela 35: Parâmetros estimados – modelo para $\ln(\text{NE})$ – ajuste ARIMA	95
Tabela 36: Parâmetros estimados – modelo para NSO	95

Tabela 37: Parâmetros estimados – modelo para PG	95
Tabela 38: Parâmetros estimados – modelo para SO	95
Tabela 39: Parâmetros estimados – modelo para DA	95
Tabela 40: Parâmetros estimados – modelo para DA – ajuste ARIMA	96
Tabela 41: Parâmetros estimados – modelo para ORDOP	96
Tabela 42: Parâmetros estimados – modelo para ORDOP – ajuste ARIMA	96
Tabela 43: valores de necessidade de capital – risco de emissão/precificação	100
Tabela 44: valores de necessidade de capital – risco de subscrição (total)	101

INTRODUÇÃO

Uma importante questão que se coloca atualmente, para as sociedades seguradoras, é a capacidade de medição do volume de capital necessário para fazer frente aos diversos tipos de risco que a companhia suporta no exercício de suas atividades. Como capital, entenda-se, a grosso modo, o excesso de ativos sobre o passivo da companhia.

Esse volume de capital necessário deve ser tal que permita à companhia suportar variabilidades no negócio de forma que, ao longo de um horizonte de tempo estabelecido, e com uma determinada probabilidade (nível de confiança), a companhia não venha a ter o seu passivo superando os seus ativos.

Como exposto em Sandström (2011), são duas as motivações para o desenvolvimento de modelos visando à determinação deste capital necessário para fazer frente aos riscos suportados. A primeira é o interesse da própria companhia em avaliar este capital necessário, dentro de um ambiente corporativo em que haja a preocupação com a gestão de riscos. Assim, a empresa desenvolve modelos internos à companhia para tal fim, adaptados a sua realidade específica. Esses modelos buscam medir o volume de capital necessário para manter a companhia em contínuo funcionamento. A este capital, determinado pela própria companhia de forma a subsidiar as suas decisões internas, damos o nome de capital econômico.

A segunda motivação vem do fato de ser imperativo ao regulador de mercado que este estabeleça níveis mínimos de capital que as companhias devam observar, a qualquer momento, para poderem operar. Este capital é denominado capital regulatório (ou requerimento de capital regulatório, ou somente, requerimento de capital). O capital regulatório não deve visar a garantir existência contínua das companhias, mas tão somente que estas sejam capazes de pagar todas as suas obrigações em uma situação de liquidação ou, ainda, de transferir sua carteira a uma companhia cessionária. Ainda, devido ao fato de que há sempre um espaço

de tempo entre a constatação pelo supervisor de seguros de que a companhia está em um estado de insolvência (incapacidade de continuar operando) e a sua efetiva tomada de ação mais firme (processo de liquidação ou transferência da carteira para congêneres), o capital regulatório deve garantir ainda que, por algum horizonte de tempo estabelecido, a companhia seja capaz de pagar as suas obrigações conforme estas forem sendo devidas como, também, de subscrever novos negócios ao longo deste período.

Em relação ao capital regulatório, nas últimas décadas tem-se avançado para requerimentos de capital que sejam mais sensíveis ao portfólio de risco assumido pela companhia, em substituição a requerimentos de capital mais simplistas, que somente consideravam o volume geral das operações das companhias. Assim, deu-se início às formas de requerimento de capital chamadas de *Risk Based Capital*, ou capital baseado em risco. Os pioneiros foram os EUA e Canadá, ao iniciarem em 1992 a adoção dos seus sistemas de capital baseado em risco (*Risk Based Capital* – RBC)

Na Europa, a partir dos anos 2000, iniciou-se um processo de consolidação das normas relativas à solvência de seguradoras, o que incluía os requerimentos de capital regulatório, iniciando-se assim a discussão para determinação de um requerimento de capital baseado em risco comum para a Comunidade Europeia. Este projeto foi denominado Solvência II. Como já dito, o projeto na verdade é maior que tão somente a definição de requerimentos de capital, abrangendo todo arcabouço regulatório relativo à solvência e gestão de riscos, sendo estruturado em três pilares, a saber:

- Pilar 1 : Requerimentos quantitativos.
 - Regras sobre requerimentos de capital, provisões, investimento, etc.
- Pilar 2 : Requerimentos qualitativos.
 - Regras sobre gestão de riscos, controles internos, autoavaliação de solvência, atividades de supervisão, etc.
- Pilar 3 : Requerimentos acerca de transparência e harmonização de informações para fins de supervisão e divulgação pública.

Muito deste projeto, em especial o que tange os requerimentos de capital, foi influenciado pelo relatório do *Insurer Solvency Assessment Working Party* (em tradução nossa, Grupo de Trabalho sobre Avaliação de Solvência de Sociedades Seguradoras) da *International Actuary Association*, IAA (IAA, 2004). A formação deste grupo – e o conseqüente relatório – teve como motivação consulta realizada à IAA em 2002 pela *International Association of Insurance Supervisors*, IAIS. Conforme citado no próprio relatório, o mesmo destinava-se a auxiliar no desenvolvimento de uma estrutura global para avaliação de solvência de sociedades seguradoras.

Assim, neste relatório foram propostas as diretrizes básicas sobre avaliação de solvência de sociedades seguradoras, vindo daqui, inclusive, a proposta dos três pilares adotados no projeto Solvência II – que, diga-se, já haviam anteriormente sido adotados no projeto Basileia II, de supervisão bancária. Ainda, foram levantados os principais grupos de riscos suportados pelas sociedades seguradoras em suas operações, tendo sido também estabelecidas diretrizes básicas sobre as abordagens de determinação de capital regulatório para fazer frente a tais riscos. Estes foram os grupos de riscos estabelecidos no relatório:

- Riscos de Subscrição;
- Riscos de Mercado;
- Riscos de Crédito;
- Riscos Operacionais.

Os últimos três dizem respeito aos riscos já anteriormente levantados no projeto Basileia II, sendo os riscos de mercado e crédito associados mais aos ativos das companhias. O grupo dos riscos de subscrição foi, então, introduzido no conjunto, sendo este específico da atividade de seguros e de previdência (aqui no Brasil, também nos planos de capitalização), e mais associado ao passivo das companhias. O risco de subscrição será o foco deste trabalho e, portanto, receberá maior atenção no Capítulo 2.

Vale a pena abrir espaço para ressaltar que, aqui, tais riscos estão sendo avaliados pelo lado das perdas que podem produzir, conduzindo a companhia a um estado de insolvência. Entretanto, conforme salientado nos itens 5.5 e 5.6 do relatório do

grupo de trabalho da IAA, referenciando o *Standard on Risk Management* (AS/NZS 4360:1995) publicado em 1995 pelos *Standards Australia* e *Standards New Zealand*, o conceito de risco diz respeito à chance de acontecer algo que venha a ter impacto sobre os objetivos, podendo este impacto ser positivo ou negativo. Ou seja, risco deve ser enxergado como algo que pode trazer tanto perdas como oportunidades, sendo então função da gestão de risco não somente evitar ou mitigar possíveis perdas, mas também identificar oportunidades.

Outra questão importante em relação à categorização dos riscos, salientada no relatório do grupo de trabalho da IAA, é a existência de interdependência entre os diferentes grupos de risco, o que requer uma abordagem integrada de avaliação.

Voltando ao capital regulatório, foram reconhecidas no relatório do grupo de trabalho da IAA duas abordagens possíveis para a determinação dos requerimentos de capital: a abordagem padrão (*standard approach*) e a abordagem avançada (*advanced approach*). Na abordagem padrão, o capital regulatório é estabelecido através de formulações definidas pelo regulador de seguros. De forma geral, são definidas fórmulas para cada um dos grupos de risco, ou subgrupo destes, contendo fatores (que representam medidas de mercado) que são aplicados a unidades de exposição, ou seja, dados relacionados à operação das companhias. Os valores determinados para grupos ou subgrupos de riscos são, então, agregados de forma que a dependência entre eles seja respeitada, de forma a considerar o benefício trazido pela diversificação. Já a abordagem avançada traduz-se em requerimentos de capital determinados com base em modelos internos à companhia, desenvolvidos para tal fim pelas mesmas, e validados pelo supervisor de seguros. Dessa forma, trata-se de uma abordagem que leva em consideração as características específicas da companhia, em oposição à abordagem padrão, que leva em consideração medidas de mercado.

Segundo o relatório do grupo de trabalho da IAA, a abordagem avançada seria aplicável a companhias mais fortes, com maior habilidade técnica e com efetivos programas de gerenciamento de riscos. Já a abordagem padrão, estruturada pelo regulador de seguros, seria para aplicação geral no mercado, determinando o requerimento de capital baseado em risco das companhias que não possuem os requisitos para determiná-lo através de modelos específicos. A abordagem padrão

seria a evolução das formulações anteriores de requerimento de capital historicamente estabelecidas pelos reguladores, que não consideravam o perfil de risco das companhias.

Assim como o projeto Solvência II europeu, a nível global, a IAIS adotou estas mesmas abordagens sobre avaliação de solvência, identificação de riscos e requerimentos de capital, como pode ser observado nos *Insurance Core Principals*, ICP, (IAIS, 2011), documento revisado em outubro de 2011, onde a IAIS estabelece os princípios a serem seguidos por seus signatários – nos quais se inclui a Superintendência Nacional de Seguros Privados, SUSEP, autarquia federal supervisora dos mercados de seguro, resseguro, capitalização e previdência aberta brasileiros. Tal aproximação com o projeto Solvência II europeu acabou por gerar uma verdadeira convergência mundial sobre as questões relacionadas à avaliação de solvência. Em relação aos requerimentos de capital, o ICP de número 17 afirma que “o supervisor determina requerimentos de adequação de capital para fins de solvência de forma que seguradoras possam absorver perdas imprevistas significantes e para promover graus de intervenção do supervisor.” (tradução nossa).

Aqui no Brasil, a adoção dos requerimentos de capital regulatório baseados em risco iniciou-se em 2008, com a entrada em vigor das Resoluções CNSP 155 a 158, publicadas em dezembro de 2006. A Resolução CNSP 155 (substituída pela Resolução CNSP 178 antes de sua entrada em vigor) foi responsável por determinar a base do sistema, instituindo o **capital mínimo requerido** para operação das sociedades seguradoras, este constituído pela soma de um **capital base**, definido em função das regiões em que a companhia possuísse autorização para operar (um valor fixo definido para cada uma das oito regiões de autorização definidas, mais um valor fixo geral), mais um **capital adicional**, este propriamente um capital baseado em risco, resultante da agregação de componentes relativas a cada um dos grupos de risco. Ainda, foram estabelecidos no normativo os níveis de atuação do regulador ensejados pelo não atendimento aos requerimentos de capital estabelecidos, quais sejam:

- Apresentação de **plano corretivo de solvência**, para insuficiências de capital de até 30% (regulamentado pela Resolução CNSP 156);

- Apresentação de **plano de recuperação de solvência**, para insuficiências de capital entre 30% e 50% (regulamentado pela Resolução CNSP 157);
- Estabelecimento de **direção fiscal**, traduzindo-se em intervenção da SUSEP na sociedade seguradora, no caso de insuficiências de capital entre 50% e 70%; e
- **Liquidação extrajudicial** da sociedade seguradora, para insuficiências de capital superiores a 70%.

Em relação ao capital adicional, naquele momento inicial, foi instituído somente o seu componente baseado no risco de subscrição, o denominado **capital adicional baseado no risco de subscrição**, estabelecido pela Resolução CNSP 158. Ainda, tal requerimento foi definido somente para as operações de seguro de danos e vida em grupo. Esse foco inicial nos riscos de subscrição deveu-se à constatação de que tais riscos estão entre as principais causas de insolvências de seguradoras. No capítulo 1 de Cardoso (2008), é citado estudo da A.M.Best (2004), realizado com o intuito de identificar casos de insolvência de sociedades seguradoras nos EUA, e que aponta situações relacionadas aos riscos de subscrição como maioria dentre as causas primárias que conduziram aos processos de insolvência identificados, isso em diferentes períodos analisados. A SUSEP, por sua vez, ainda em 2004, publicou a Circular SUSEP 253, que instituiu o Questionário de Riscos de Seguros, de preenchimento anual, sendo este uma das formas encontradas de se obter informações acerca de como as companhias enxergavam, identificavam e avaliavam os principais riscos aos quais estavam sujeitas. Através da análise das primeiras respostas ao questionário, assim como através de reuniões realizadas com profissionais de mercado para reforçar alguns aspectos verificados nas respostas, foi confirmado serem os riscos de subscrição os mais relevantes. Já o foco inicial nos seguros de danos e vida em grupo deveu-se ao fato de necessitar de uma modelagem mais simples, utilizando-se de conceitos mais acessíveis na época de seu desenvolvimento, deixando o estabelecimento de modelos para as operações de vida individual e previdência, produtos de prazo mais longo e que geram acumulação de provisões relativas a benefícios a serem concedidos no futuro, para um segundo momento.

O capital adicional então estabelecido traduzia-se em uma fórmula, composta de duas componentes: uma primeira, relativa aos “riscos de provisão de sinistros”, ou seja, aos riscos de subscrição relacionados à variabilidade dos fluxos futuros de pagamento referentes a sinistros já ocorridos – e, assim, relacionados à provisão de sinistros; a segunda componente, relativa aos “riscos de emissão/precificação”, refere-se às variações do resultado de subscrição ao longo do horizonte de tempo futuro de 1 ano – sendo, dessa forma, relacionada às provisões de prêmios, mas considerando os novos negócios. A primeira componente é composta de fatores calculados para todo o mercado, relativos a cada uma das classes de negócio definidas (doze classes, posteriormente sendo ampliadas para dezessete, representando os fatores medidas do risco associado a tais classes de negócio, considerando-se todo o mercado segurador), sendo estes fatores aplicados ao acumulado de doze meses de sinistros retidos da companhia para a qual esta sendo determinado o requerimento de capital, nas respectivas classes de negócio; ainda era considerada matriz de correlação entre as classes de negócio, agregando os produtos de fator e sinistro retido relativo a cada classe de negócio. A segunda componente tem estrutura similar, sendo que os fatores, assim como a matriz de correlação, foram estabelecidos para trinta e seis (e depois cinquenta e um) segmentos de mercado, onde estes são definidos como o cruzamento entre as doze (e depois dezessete) classes de negócio e três regiões de operação definidas; ainda a unidade de exposição passa a ser o prêmio retido, nos últimos doze meses, pela companhia para a qual esta sendo determinado o requerimento de capital, nos respectivos segmentos de mercado.

Ainda, foi permitido o uso de fatores reduzidos caso a companhia possuísse e fizesse uso de “modelos internos”, tendo sido estes minimamente definidos. Aqui se ressalta que tais modelos internos nada tem a ver com modelos para determinação de capital regulatório internos e específicos à companhia, não sendo portanto estes validados pela SUSEP. O intuito do regulador de seguros em abrir tal possibilidade para determinação do capital adicional baseado nos riscos de subscrição através da fórmula padrão definida, mas fazendo uso de fatores reduzidos, foi o de promover o incentivo às companhias para o desenvolvimento de modelos de quantificação dos riscos por estas suportados, em especial os de

subscrição, promovendo um ambiente em que as companhias fossem incentivadas a desenvolver suas estruturas internas de gestão de riscos.

Ao longo dos últimos anos, foram sendo aprimorados e estendidos os requerimentos de capital regulatório brasileiros. Em dezembro de 2007, quando da regulamentação do mercado de resseguro, o mesmo arcabouço definido para as sociedades seguradoras foi estendido para os resseguradores locais. Já a em dezembro de 2010 foi publicada a Resolução CNSP 227, em substituição à Resolução CNSP 158, estendendo o capital mínimo requerido a todas as sociedades reguladas (além das sociedades seguradoras e resseguradores locais, às sociedades de capitalização e entidades abertas de previdência complementar). No mesmo momento, em dezembro de 2010, foi também publicada a Resolução CNSP 228, instituindo mais uma componente do capital adicional, o **capital adicional baseado no risco de crédito**. A forma de agregação destes dois componentes do capital adicional (subscrição e crédito) considerando matriz de correlação entre tais componentes foi também definida na Resolução CNSP 227. O histórico completo do processo de adoção dos requerimentos de capital regulatório baseado em risco, assim como tudo o que envolve os mesmos, pode ser encontrado na seção de Informações ao Mercado/Solvência/Capital Mínimo Requerido do portal da SUSEP na internet, em www.susep.gov.br.

Para 2013, entre outras mudanças, a SUSEP busca promover a complementação da componente do capital adicional (renomeado para capital de risco) baseado no risco de subscrição para também contemplar as operações de vida individual e previdência, como também instituir mais duas componentes, o **capital de risco baseado no risco operacional** e o **capital de risco baseado no risco de mercado**. Ainda, a direção da Autarquia deliberou por iniciar o processo de permissão do uso de modelos internos para determinação dos requerimentos de capital regulatório, a serem denominados de “metodologias próprias”.

Tudo que foi até aqui exposto dá a dimensão da necessidade de se desenvolver modelos para a determinação da necessidade de capital baseado em riscos, aqui em foco o risco de subscrição. Neste contexto, este trabalho busca desenvolver e apresentar um modelo para determinação da necessidade de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, para as operações não vida (seguro de danos e vida

em grupo, custeados sob o regime financeiro de repartição) – mais especificamente, as mesmas operações originalmente abrangidas pela Resolução CNSP 158. Este modelo será segmentado em dois módulos, um para o “risco de provisão de sinistro” e outro para o “risco de emissão/precificação”; ou seja, considera a mesma segmentação dos riscos de subscrição admitida na modelagem da SUSEP para definição do capital adicional baseado no risco de subscrição. No Capítulo 2 esta segmentação dos riscos de subscrição será melhor explicada.

Muitas vezes, nas modelagens desenvolvidas, são determinados valores de necessidade de capital relativos a cada carteira significativa da companhia (aquí classes de negócio) e, posteriormente, tais valores são agregados considerando a dependência entre tais carteiras, através do uso de matriz de correlação. Neste modelo proposto, e assim será realizado nos seus dois módulos, a dependência entre as classes de negócio será considerada já no processo de simulação de valores possíveis das variáveis que determinam a PERDA, no Módulo 1, ou o RS (resultado de subscrição), no Módulo 2. Resumidamente, tais simulações visam a determinar distribuições não paramétricas para a PERDA e para RS, através das quais determinamos as necessidades de capital visando suportar as duas componentes do risco de subscrição. Os Capítulos 4 e 5 descrevem de forma detalhada os conceitos, metodologias e variáveis consideradas nos Módulos 1 e 2, respectivamente, do modelo aqui proposto. Ressalta-se que em nenhum dos dois módulos será considerado segmentação de operações em regiões de operação, como realizado no modelo desenvolvido pela SUSEP.

Para cumprir o objetivo de realização de simulações considerando a dependência entre as classes de negócio, será utilizado o conceito de cópulas, em especial o de cópula condicional. O Capítulo 3 é destinado, assim, à apresentação de tais conceitos, assim como à descrição passo a passo de processos de simulação considerando-os. Pode-se dizer que o uso de cópulas condicionais nos processos de simulação representa o diferencial da abordagem aqui apresentada.

O RISCO DE SUBSCRIÇÃO E SUA MODELAGEM

Conforme o parágrafo 16.7.1 de IAIS (2011), chama-se risco de subscrição àquele risco específico de seguro oriundo da subscrição de contratos de seguro. Por sua vez, o relatório do grupo de trabalho da IAA (IAA, 2004), na sua seção 5.24, afirma que os riscos que compõem a categoria dos riscos de subscrição são aqueles relacionados com os “perigos” cobertos pelas diferentes linhas/coberturas de seguro (incêndio, morte, etc.), assim como os relacionados aos processos específicos associados à condução do negócio de seguros; no relatório, foi apresentada uma lista de diferentes riscos genéricos, que se aplicariam a todas (ou quase todas) as sociedades seguradoras:

- Risco do Processo de Subscrição – risco da exposição a perdas financeiras relacionadas à aprovação e seleção de riscos a serem segurados;
- Risco de Precificação – risco de que os preços determinados pelas companhias para os contratos de seguro firmados venham a mostrarem-se inadequados para suportar as obrigações futuras advindas de tais contratos;
- Risco de Desenho de Produto – risco de que a companhia venha a ficar exposta a riscos, advindos dos contratos de seguros firmados, que não foram antecipados quando do desenho e precificação de tais contratos;
- Risco de Sinistros (por cada “perigo”) – risco de que ocorram muitos mais sinistros que o esperado, ou que alguns sinistros venham a ser muito maiores que os sinistros esperados, resultando em perdas não esperadas; inclui tanto o risco de que um sinistro possa ocorrer, quanto o risco de que um sinistro venha a desenvolver-se adversamente após sua ocorrência;
- Risco de Ambiente Econômico – risco de que as condições sociais mudem de tal maneira que venham a ter efeito adverso na companhia;
- Risco de Retenção Líquida – risco de que grandes retenções de riscos cobertos por seguro resultem em perdas devido à experiência de sinistro catastrófica ou concentrada.

- Risco de Comportamento do Segurado – risco de que os segurados da companhia venham a agir de formas não antecipadas, produzindo efeito adverso na companhia;
- Risco de Reserva – risco de que as provisões estabelecidas nos demonstrativos financeiros (especificamente as provisões relativas a sinistros ocorridos) venham a mostrarem-se inadequadas.

Já em relação ao Projeto Solvência II europeu, conforme exposto em CEIOPS (2009), a Diretiva 2009/138/CE do Parlamento Europeu e do Conselho, de 25 de novembro de 2009, define o risco de subscrição como “o risco de perda, ou de evolução desfavorável do valor dos elementos do passivo decorrentes da atividade seguradora, devido a uma fixação de preços inadequada e a pressupostos de provisionamento incorretos”.

Tanto no projeto Solvência II como em outras abordagens, o risco de subscrição pode ser segregado, de uma forma macro, naqueles relacionados às operações de vida, não vida, e de seguro saúde. Na abordagem aqui apresentada, como já exposto no Capítulo 1, será estabelecido um modelo para determinação de necessidade de capital para fazer frente aos riscos de subscrição relativos especificamente às operações de seguro não vida, onde estas são, basicamente, as operações de seguro de danos e vida em grupo, custeados sob o regime financeiro de repartição.

2.1

Risco de subscrição das operações não vida e sua segregação para fins de modelagem

Voltando ao projeto Solvência II, em relação ao risco de subscrição das operações não vida, a Diretiva expõe no seu artigo 105, que trata do *Solvency Capital Requirement - SCR*:

“ [...] O módulo de risco de subscrição do seguro não vida deve refletir o risco decorrente das obrigações de seguros não vida, atendendo aos riscos cobertos e aos processos utilizados no exercício da atividade.

Deve ter em conta a incerteza dos resultados das empresas de seguros e de resseguros ligada às obrigações de seguros e resseguros existentes e aos novos negócios que se espera venham a ser subscritos nos 12 meses subsequentes.

É calculado, nos termos do disposto no ponto 2 do anexo IV, combinando os requisitos de capital respeitantes, no mínimo, aos seguintes submódulos:

a) O risco de perda ou de evolução desfavorável do valor dos elementos do passivo decorrentes da atividade seguradora, resultante de variações quanto ao momento de ocorrência, frequência e gravidade dos acontecimentos segurados e ao momento e montante da regularização dos sinistros (risco de prêmio e de provisões do seguro não vida);

b) O risco de perda ou de evolução desfavorável do valor dos elementos do passivo decorrentes da atividade seguradora, resultante de uma incerteza significativa na fixação de preços e nos pressupostos de provisionamento ligada a acontecimentos extremos ou excepcionais (risco catastrófico do seguro não vida). [...] ”

Na abordagem aqui proposta, para fins de sua modelagem, o risco de subscrição relativo às operações de seguro não vida será segregado em dois componentes, os quais denominaremos **risco de provisão de sinistros** e **risco de emissão/precificação**, mesmas abordagem e nomenclatura consideradas pela SUSEP no estabelecimento do capital adicional baseado no risco de subscrição.

Como pode ser observado na seção 21.1 de Sandström (2011), essa divisão vem sendo considerada nos modelos internacionalmente propostos para medição do capital necessário para fazer frente aos riscos de subscrição das operações de seguro de danos e vida em grupo, inclusive em modelagens que foram fonte de inspiração para o projeto Solvência II.

Vale também observar que o projeto Solvência II, embora reconheça a segmentação do risco de subscrição em risco de prêmio (aqui chamado de emissão/precificação) e em risco de provisão de sinistros, estabelece um único

submódulo para ambos no cálculo do seu SCR, e determina um submódulo específico para os riscos associados a catástrofes. Na abordagem aqui proposta, entretanto, os riscos associados a catástrofes não são avaliados de forma segregada.

Basicamente, a divisão nos dois componentes propostos visa a segregar, para efeitos de modelagem, os riscos de subscrição entre os relativos aos sinistros já ocorridos (risco de provisão de sinistros) daqueles relativos aos sinistros a ocorrer (risco de emissão/precificação).

Assim, o risco de provisão de sinistros diz respeito à variação do valor presente dos fluxos futuros de pagamentos referentes a sinistros ocorridos até a data base de avaliação, cujo valor esperado seria equivalente às provisões de sinistros ocorridos. Tal variação é devida tanto às incertezas associadas às provisões de IBNR e/ou IBNER, quanto à incerteza em relação à provisão de sinistros a liquidar, já que tanto a frequência quanto a severidade dos pagamentos futuros relativos aos sinistros ocorridos e já conhecidos pode (e certamente vai) variar, em maior ou menor grau, em relação aos valores estimados quando do conhecimento da ocorrência dos sinistros. Podemos ainda dizer que, na modelagem que será aqui proposta, na medição da variação do valor presente dos fluxos de pagamentos estaria também embutido o efeito de eventuais alterações no nível geral de tais fluxos.

Já o risco de emissão/precificação diz respeito à variação do resultado de subscrição ao longo do horizonte de tempo considerado, a partir da data base de avaliação. Como resultado de subscrição, entenda-se o resultado entre o montante de sinistros ocorridos mais despesas administrativas e operacionais, menos o prêmio ganho e receitas operacionais, todos relativos ao período dado pelo horizonte de tempo, a partir da data base de avaliação. São consideradas aqui tanto apólices emitidas até a data base quanto novos negócios subscritos ao longo do horizonte de tempo considerado. Dessa forma, o risco de emissão/precificação relaciona-se com as provisões de prêmios.

De forma a capturar esta segregação dos riscos de subscrição das operações não vida, como já explicado no Capítulo 1, o modelo aqui proposto para determinação

da necessidade de capital para fazer frente a tais riscos será segmentado em dois módulos, descritos nos Capítulos 3 e 4, respectivamente.

2.2

Aspectos gerais do modelo proposto para fazer frente aos riscos de subscrição

A seguir, serão expostas algumas questões importantes relacionados ao modelo aqui proposto.

Consideraremos o horizonte de tempo de 1 ano, em linha com o adotado no projeto Solvência II.

Outra questão importante é que consideraremos, na abordagem aqui apresentada, prêmios e sinistros líquidos de resseguro. Dessa forma, o modelo aqui proposto fica desobrigado a lidar com o risco de *default* do ressegurador, o que é desejável, já que tal risco faz parte da categoria dos riscos de crédito.

Ainda, como citado em Sandström (2011) e estabelecido em IAA (2004), assim como no projeto Solvência II, em ambos os módulos do modelo aqui proposto consideramos a segmentação dos “perigos” cobertos em grupos mais homogêneos, determinados pelas classes de negócio, sendo estas as mesmas estabelecidas pela SUSEP visando à determinação do capital adicional baseado no risco de subscrição – isto por ser esta uma segmentação de coberturas de seguro por linhas de negócio já bem estabelecida no mercado segurador brasileiro. A dependência entre tais classes de negócio será também considerada, sendo a forma como isso será realizado nos módulos do modelo proposto parte central da abordagem aqui considerada.

3

CONCEITOS ACERCA DE FUNÇÃO CÓPULA UTILIZADOS NO MODELO PROPOSTO

O objetivo deste capítulo é expor os conceitos e métodos relacionados à função cópula utilizados nesta dissertação, em especial nos processos de simulação. Com isso, espera-se que o leitor desta dissertação consiga ter acesso às informações básicas necessárias ao entendimento dos modelos para determinação de necessidade de capital propostos. Maior entendimento sobre os assuntos função cópula e dependência pode ser obtido em livros como Cherubini *et al.* (2004) e também em McNeil (2005). Artigos interessantes são Frees e Valdez (1998) e Embrechts *et al.* (1999). O conceito de função cópula foi primeiramente exposto em Sklar (1959). Por fim, um resumo do conceito de cópulas e seu uso em modelagem de risco pode ser encontrado no Apêndice I de IAA (2004).

3.1

Definição de função cópula

Por definição, uma cópula é uma função de distribuição acumulada (FDA) multivariada cujas marginais univariadas são FDAs da distribuição Uniforme(0, 1).

Assim, podemos escrever:

$$\mathbb{C}(u_1, \dots, u_N),$$

onde u_n é uma observação de $U_n \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, $n = 1, \dots, N$.

Notar que esta definição resume-se em estabelecer as marginais como uniformes entre 0 e 1, não se exigindo que a cópula seja uma FDA de uma distribuição uniforme multivariada. Na verdade, ela pode assumir diferentes estruturas, e é exatamente este fato que guarda sua importância, como ficará claro mais à frente.

3.2

O Teorema de Sklar e sua utilidade

Pelo Teorema de Sklar, estabelecido em Sklar (1959), dada uma FDA multivariada F , existe uma cópula \mathbb{C} tal que:

$$F(y_1, \dots, y_N) = \mathbb{C}(u_1, \dots, u_N)$$

Onde $U_n = F_n(Y_n)$, F_n é a FDA marginal relativa à Y_n , $n = 1, \dots, N$.

\mathbb{C} é única no caso de FDAs marginais contínuas.

Dessa forma, para gerarmos uma observação do vetor aleatório $(Y_1, \dots, Y_N)'$ com distribuição dada por F , basta gerarmos uma observação do vetor aleatório $(U_1, \dots, U_N)'$ com distribuição conjunta dada por \mathbb{C} , considerando que:

$$(Y_1, \dots, Y_N)' = \left(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_N^{-1}(U_N) \right)'$$

Uma observação do vetor $(U_1, \dots, U_N)'$ com distribuição dada por \mathbb{C} , é denominada como uma “observação da cópula \mathbb{C} ”. Em geral, quando se usa o termo cópula, podemos estar nos referindo tanto à função \mathbb{C} quanto ao vetor aleatório $(U_1, \dots, U_N)'$.

Vale ressaltar uma importante característica do uso do conceito de cópulas, consequência direta do Teorema de Sklar. Uma FDA multivariada F , como definida acima, guarda dois tipos de informações: tanto a distribuição de probabilidade marginal de cada variável aleatória Y_n , como também a estrutura de dependência entre tais variáveis. Assim, o uso de cópulas tem a funcionalidade de segregar a estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias das distribuições de probabilidade marginais, uma vez que “transforma” uma FDA multivariada F em uma função \mathbb{C} (também uma FDA) das FDAs marginais F_n de F , onde tal função \mathbb{C} , a cópula, guarda toda a informação acerca da estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias Y_n .

3.3

Cópula Gaussiana bivariada

A função \mathbb{C} pode assumir diferentes tipos de estrutura, que são agrupadas nos que chamamos de classes ou famílias. Falaremos então da família denominada como cópula Gaussiana ou normal, tendo em vista que consideramos cópulas de tal família nos processos de simulação dos modelos para determinação de necessidade de capital propostos. Descreveremos o caso bivariado, por ser de mais fácil entendimento, sendo o caso multivariado sua extensão direta.

Conforme descrito em Cherubini *et al.* (2004), a cópula Gaussiana bivariada pode ser definida como:

$$\mathbb{C}_{\rho}^{\text{Ga}}(u_1, u_2) = \Phi_{\rho}(x_1, x_2)$$

Onde:

Φ_{ρ} é a FDA de uma distribuição normal bivariada $N(0, \rho)$, onde ρ é a matriz de

correlação, $\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, $\rho = \text{corr}(X_1, X_2)$;

u_1, u_2, x_1, x_2 são observações das variáveis aleatórias U_1, U_2, X_1, X_2 ;

$U_1 \sim \text{Uniforme}(0, 1) \rightarrow X_1 = \Phi^{-1}(U_1) \sim N(0, 1)$;

$U_2 \sim \text{Uniforme}(0, 1) \rightarrow X_2 = \Phi^{-1}(U_2) \sim N(0, 1)$;

Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada.

Notar que Φ_{ρ} como função de X_1 e X_2 não satisfaria a definição de cópula (FDA de marginais uniformes), haja vista que X_1 e X_2 possuem distribuição marginal normal padrão. Entretanto, ela obedece a tal definição caso enxergada como função de U_1 e U_2 .

3.4

Simulando de uma cópula Gaussiana bivariada

Da simples observação da definição de cópula Gaussiana, percebe-se que é possível gerar S observações de uma cópula Gaussiana $(U_1, U_2)'$ através dos seguintes passos:

1. Simular S observações do vetor $(X_1, X_2)'$, com distribuição normal bivariada $N(0, \boldsymbol{\rho})$, onde $\boldsymbol{\rho}$ é a matriz de correlação, $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, $\rho = \text{corr}(X_1, X_2)$;
2. Para cada uma das S observações de $(X_1, X_2)'$ geradas, fazer $(u_1, u_2)' = (\Phi(x_1), \Phi(x_2))'$, onde Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada.

O passo (1) pode, alternativamente, ser decomposto em:

- 1a. Encontrar a decomposição de Cholesky \mathbf{A} de $\boldsymbol{\rho}$;
- 1b. Simular S observações do vetor $(Z_1, Z_2)'$, com distribuição normal bivariada $N(0, \mathbf{I})$, onde \mathbf{I} é a matriz de correlação, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Z_1 \perp Z_2$;
- 1c. Para cada uma das S observações de $(Z_1, Z_2)'$ geradas, fazer $(x_1, x_2)' = \mathbf{A} \times (z_1, z_2)'$.

3.5

Simulando observações de um vetor aleatório $(Y_1, Y_2)'$ com FDAs marginais F_1 e F_2 conhecidas e estrutura de dependência dada por uma cópula Gaussiana

Para podermos simular S observações de um vetor aleatório $(Y_1, Y_2)'$ com FDAs marginais F_1 e F_2 conhecidas e estrutura de dependência dada por uma cópula Gaussiana, faremos uso do processo de simulação descrito acima como também do Teorema de Sklar, na forma do esquema abaixo:

$$F(y_1, y_2) \stackrel{T. Sklar}{=} \mathbb{C}_{\boldsymbol{\rho}}^{\text{Ga}}(u_1, u_2) = \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(x_1, x_2)$$

Onde:

$\Phi_{\boldsymbol{\rho}}$ é a FDA de uma distribuição normal bivariada $N(0, \boldsymbol{\rho})$, onde $\boldsymbol{\rho}$ é a matriz de correlação, $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, $\rho = \text{corr}(X_1, X_2)$;

$y_1, y_2, u_1, u_2, x_1, x_2$ são observações das variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, U_1, U_2, X_1, X_2$;

$$U_1 = F_1(Y_1) \sim \text{Uniforme}(0, 1) \quad \rightarrow \quad X_1 = \Phi^{-1}(U_1) \sim N(0, 1);$$

$$U_2 = F_2(Y_2) \sim \text{Uniforme}(0, 1) \quad \rightarrow \quad X_2 = \Phi^{-1}(U_2) \sim N(0, 1);$$

F_1 é a FDA marginal da variável aleatória Y_1 ;

F_2 é a FDA marginal da variável aleatória Y_2 ;

Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada.

Assim, basta simularmos S observações da cópula, segundo processo descrito anteriormente, e depois fazermos $(y_1, y_2)' = (F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))'$ para cada uma das S observações de $(U_1, U_2)'$. O processo completo, então, fica:

1. Simular S observações do vetor $(X_1, X_2)'$, com distribuição normal bivariada $N(0, \boldsymbol{\rho})$, onde $\boldsymbol{\rho}$ é a matriz de correlação, $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, $\rho = \text{corr}(X_1, X_2)$;
2. Para cada uma das S observações de $(X_1, X_2)'$ geradas, fazer $(u_1, u_2)' = (\Phi(x_1), \Phi(x_2))'$, onde Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada;
3. Para cada uma das S observações de $(U_1, U_2)'$ geradas, fazer $(y_1, y_2)' = (F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))'$, onde Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada.

Importante observar que $\boldsymbol{\rho}$ é a matriz de correlação do vetor aleatório $(X_1, X_2)'$ e não do vetor $(Y_1, Y_2)'$ cujas S observações queremos obter como produto final do processo de simulação. Assim, se já temos observados valores do vetor aleatório $(Y_1, Y_2)'$ e queremos ainda fazer S simulações deste, devemos então realizar o processo descrito acima com $\boldsymbol{\rho}$ sendo estimado levando em consideração que:

$$\begin{aligned} \rho = \text{corr}(X_1, X_2) &= \text{corr}(\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2)) = \\ &= \text{corr}(\Phi^{-1}(F_1(Y_1)), \Phi^{-1}(F_2(Y_2))) \end{aligned}$$

3.6

Extensão para o caso multivariado

A extensão de todos os conceitos expostos acima pode ser realizada de forma direta. Assim, vamos logo expor a versão para N variáveis do processo de

multivariada do processo para simular S observações de um vetor aleatório $(Y_1, \dots, Y_N)'$ com FDAs marginais F_1, \dots, F_N conhecidas e estrutura de dependência dada por uma cópula Gaussiana. O esquema apresentado então para o caso bivariado passa a ser:

$$F(y_1, \dots, y_N) \stackrel{T. Sklar}{=} \mathbb{C}_{\rho}^{\text{Ga}}(u_1, \dots, u_N) = \Phi_{\rho}(x_1, \dots, x_N)$$

Onde

Φ_{ρ} é a FDA de uma distribuição normal multivariada $N(0, \rho)$, onde ρ é a matriz de correlação do vetor $(X_1, \dots, X_N)'$;

$y_1, \dots, y_N, u_1, \dots, u_N, x_1, \dots, x_N$ são observações das variáveis aleatórias $Y_1, \dots, Y_N, U_1, \dots, U_N, X_1, \dots, X_N$;

$$U_n = F_n(Y_n) \sim \text{Uniforme}(0, 1) \quad \rightarrow \quad X_n = \Phi^{-1}(U_n) \sim N(0, 1) \quad , \quad n = 1, \dots, N ;$$

F_n é a FDA marginal da variável aleatória Y_n , $n = 1, \dots, N$;

Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada.

Com isso, o processo completo de simulação, na versão N -variada, pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Simular S observações do vetor $(X_1, \dots, X_N)'$, com distribuição normal bivariada $N(0, \rho)$, onde ρ é a matriz de correlação do vetor $(X_1, \dots, X_N)'$;
2. Para cada uma das S observações de $(X_1, \dots, X_N)'$ geradas, fazer $(u_1, \dots, u_N)' = (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N))'$, onde Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada;
3. Para cada uma das S observações de $(U_1, \dots, U_N)'$ geradas, fazer $(y_1, \dots, y_N)' = (F_1^{-1}(u_1), \dots, F_N^{-1}(u_N))'$, onde Φ é a FDA de uma distribuição normal padrão univariada.

Por fim, de forma análoga ao caso bivariado, o estimador de ρ deve ser determinado baseado na relação:

$$\rho = \text{corr}(X_1, \dots, X_N) = \text{corr}(\Phi^{-1}(U_1), \dots, \Phi^{-1}(U_N)) = \\ \text{corr}(\Phi^{-1}(F_1(Y_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_N(Y_N)))$$

3.7

Cópula condicional

Em Cherubini *et al.* (2004), o conceito de cópula condicional é apresentado num contexto temporal, típico dos modelos econométricos, onde a preocupação é com a modelagem de distribuições condicionais a toda informação contida nos períodos passados. A extensão da definição original de cópula para o caso condicional bivariado foi realizada em Patton (2001).

Tal extensão, da definição original de função cópula para a sua versão condicional, é realizada através da adaptação do Teorema de Sklar para distribuições condicionais. Numa visão econométrica, o condicionamento é dado em função da sigma-álgebra gerada por toda a informação passada. Assim, para cada tempo $t = 1, \dots, T$, dada uma FDA multivariada F_t , existe uma cópula \mathbb{C}_t tal que:

$$F_t(y_{1t}, \dots, y_{Nt} | \mathfrak{F}_t) = \mathbb{C}_t(u_{1t}, \dots, u_{Nt} | \mathfrak{F}_t)$$

Onde:

$U_{nt} = F_{nt}(Y_{nt} | \mathfrak{F}_t)$, F_{nt} é a FDA marginal relativa à Y_{nt} condicional à \mathfrak{F}_t , $n = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$;

$\mathfrak{F}_t = \sigma\{y_{1t-1}, \dots, y_{Nt-1}, y_{1t-2}, \dots, y_{Nt-2}, \dots\}$ é a sigma-álgebra que representa toda a informação passada até o tempo t .

Como observado em Cherubini *et al.* (2004), dois fatos importantes devem ser notados:

Fato 1. A matriz amostral $Y = \{y_{1t}, \dots, y_{Nt}\}_{t=1}^T$ não representa T observações de uma mesma distribuição conjunta, mas sim observações de T diferentes distribuições conjuntas dadas pelas funções F_t .

Fato 2. Para cada período t , o conjunto condicionante \mathfrak{F}_t de cada marginal $F_{nt}(Y_{nt}|\mathfrak{F}_t)$ e da cópula condicional \mathbb{C}_t é o mesmo, o que faz com que cada variável transformada U_{nt} seja independente de \mathfrak{F}_t , ou seja, da informação de períodos passados.

A ideia central embutida no uso de cópulas condicionais é deixar que as relações intertemporais do vetor aleatório $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$ com seus equivalentes de períodos anteriores (que compõem a sigma-álgebra \mathfrak{F}_t) sejam explicadas por modelos econométricos, restando à cópula condicional descrever a estrutura de dependência intratemporal em t entre os componentes de \mathbf{Y}_t .

Dessa forma, torna-se necessário definir um modelo econométrico para o vetor $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$, $t = 1, \dots, T$. Sem assumir alguma estrutura funcional seria impossível estimar a forma de cada distribuição conjunta F_t .

Ainda, a evolução de \mathbb{C}_t deve ser considerada. Como exposto em Cherubini *et al.* (2004), possíveis caminhos envolvem o caso degenerado (onde as cópulas não variam, ou seja, $\mathbb{C}_t = \mathbb{C}$, $t = 1, \dots, T$), o caso com parâmetros variantes no tempo (a forma funcional da cópula é constante no tempo, mudando somente seus parâmetros) ou ainda o caso de estrutura completa variante no tempo (tanto a forma funcional da cópula quanto os parâmetros são variantes no tempo).

3.8

PROCESSO 1: Simulando S observações da série de K previsões dadas pelos vetores aleatórios $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$, $t = T + 1, \dots, T + K$, tendo observada a série dada pelos vetores $(y_{1t}, \dots, y_{Nt})'$, $t = 1, \dots, T$, onde os vetores da série possuem FDAs marginais condicionais à \mathfrak{F}_t conhecidas (distribuições de forma constante com parâmetros estimados via ajuste de modelo econométrico) e estrutura de dependência em t dada por cópula Gaussiana condicional

Considerando todo o exposto nas seções anteriores, o ajuste de um modelo econométrico à série de vetores dada por $(y_{1t}, \dots, y_{Nt})'$, $t = 1, \dots, T$,

relacionando cada vetor com seus predecessores, nos dá os vetores de FDAs marginais $(F_{1t}(Y_{1t}|\mathfrak{F}_t), \dots, F_{Nt}(Y_{Nt}|\mathfrak{F}_t))'$, $t = 1, \dots, T + K$ e $n = 1, \dots, N$.

Tendo em vista que, conforme descrito no Fato 2 da seção anterior, o vetor $(U_{1t}, \dots, U_{Nt})' = (F_{1t}(Y_{1t}|\mathfrak{F}_t), \dots, F_{Nt}(Y_{Nt}|\mathfrak{F}_t))'$, $t = 1, \dots, T + K$, é independente de \mathfrak{F}_t , ou seja, dos vetores $(U_{1r}, \dots, U_{Nr})'$, $r < t$, então, considerando que as cópulas \mathbb{C}_t são Gaussianas (somente variando o parâmetro $\boldsymbol{\rho}_t$), o ajuste de um modelo econométrico para $\boldsymbol{\rho}_t$ nos permite, utilizando as técnicas de simulação já apresentadas nas seções anteriores, simular S observações do vetor $(U_{1t}, \dots, U_{Nt})'$, $t = T + 1, \dots, T + K$, o que por sua vez nos permite gerar S observações do vetor $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})' = (F_{1t}^{-1}(U_{1t}|\mathfrak{F}_t), \dots, F_{Nt}^{-1}(U_{Nt}|\mathfrak{F}_t))'$, $t = T + 1, \dots, T + K$.

Ainda, se considerarmos o caso degenerado, ou seja, com $\boldsymbol{\rho}_t = \boldsymbol{\rho}$, $t = 1, \dots, T + K$, fazendo com que as cópulas Gaussianas sejam tais que $\mathbb{C}_t = \mathbb{C}$, $t = 1, \dots, T + K$, podemos considerar todos os vetores $(U_{1t}, \dots, U_{Nt})'$ como independentes e iguais em distribuição ao vetor $(U_1, \dots, U_N)'$, com distribuição dada por \mathbb{C} . Assim, nosso trabalho resume-se em gerar $K \cdot S$ observações do vetor $(U_1, \dots, U_N)'$, visto que agrupando posteriormente estas observações em K grupos de S , alcançamos o objetivo de gerar as desejadas S observações de cada vetor $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$, $t = T + 1, \dots, T + K$, tendo sido respeitada a estrutura de dependência entre as variáveis.

No caso degenerado, para estimarmos $\boldsymbol{\rho}$, podemos utilizar os vetores $(u_{1t}, \dots, u_{Nt})' = (F_{1t}(y_{1t}|\mathfrak{F}_t), \dots, F_{Nt}(y_{Nt}|\mathfrak{F}_t))'$, $t = 1, \dots, T$, reagrupando-os de forma a permitir calcular a correlação amostral entre os vetores $(\Phi^{-1}(u_{n1}), \dots, \Phi^{-1}(u_{nT}))'$, $n = 1, \dots, N$.

3.9

PROCESSO 2: Alternativa ao PROCESSO 1

Simular as S observações da série de K previsões com base na igualdade $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})' = (F_{1t}^{-1}(U_{1t}|\mathfrak{F}_t), \dots, F_{Nt}^{-1}(U_{Nt}|\mathfrak{F}_t))'$, $t = T + 1, \dots, T + K$, pode

tornar-se complexo devido às funções $F_{nt}^{-1}(U_{nt}|\mathfrak{S}_t)$ poderem depender de valores de períodos anteriores das componentes do vetor $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$ como também de ruídos brancos de períodos anteriores, dependendo da modelagem econométrica assumida.

Uma alternativa prática é considerar as dependências entre os choques padronizados, dado o modelo econométrico assumido para o vetor $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$, $t = 1, \dots, T + K$. Considerando que podemos ajustar modelos que não prevejam heterocedasticidade condicional, teremos então os vetores de choques padronizados $(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{Nt})'$, com um choque relativo a cada variável do vetor $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$.

Assim, o Teorema de Sklar seria aplicado da seguinte forma:

$$G_t(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{Nt}|\mathfrak{S}_t) = \mathbb{C}_t(v_{1t}, \dots, v_{Nt}|\mathfrak{S}_t)$$

Onde:

$V_{nt} = G_{nt}(\epsilon_{nt}|\mathfrak{S}_t)$, G_{nt} é a FDA marginal relativa à ϵ_{nt} condicional à \mathfrak{S}_t , $n = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$.

Ainda:

1. Os vetores de choques padronizados $(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{Nt})'$, $t = 1, \dots, T + K$, são independentes;
2. Cada choque padronizado assumiremos possuir distribuição normal padrão;
3. A matriz de correlação ${}^\epsilon \rho_t$ relativa ao vetor $(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{Nt})'$, $t = 1, \dots, T + K$, pode assumir estrutura funcional temporal.

Com isso, o Teorema de Sklar fica:

$$\Phi_{\epsilon_{\rho_t}}(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{Nt}|\mathfrak{S}_t) = \mathbb{C}_t(v_{1t}, \dots, v_{Nt}|\mathfrak{S}_t)$$

Onde:

$V_{nt} = \Phi(\epsilon_{nt})$, $n = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$;

Φ é a FDA marginal da normal padrão.

Notar que $\Phi^{-1}(V_{nt}) = \epsilon_{nt}$, o que faz com que $\boldsymbol{\rho}_t = \text{corr}(\Phi^{-1}(V_{1t}), \dots, \Phi^{-1}(V_{Nt})) = \text{corr}(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{Nt}) = \boldsymbol{\rho}_t$, onde $\boldsymbol{\rho}_t$ é o parâmetro da cópula \mathbb{C}_t . Assumindo o caso degenerado, temos que $\mathbb{C}_t = \mathbb{C}$ e $\boldsymbol{\rho}_t = \boldsymbol{\rho}$, o que conduz aos vetores $(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{Nt})'$ serem i.i.d. iguais em distribuição a $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)'$. Com isso, para estimarmos $\boldsymbol{\rho}$ podemos utilizar os resíduos padronizados obtidos com base no ajuste da modelagem econométrica, $(\hat{\epsilon}_{1t}, \dots, \hat{\epsilon}_{Nt})'$, $t = 1, \dots, T$, reagrupando-os de forma a permitir calcular a correlação amostral entre os vetores $(\hat{\epsilon}_{n1}, \dots, \hat{\epsilon}_{nT})'$, $n = 1, \dots, N$.

Podemos, então, utilizar os mesmos procedimentos do PROCESSO 1 (tendo este ficado muito simplificado) para simularmos S observações de cada vetor $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)'$, $t = T + 1, \dots, T + K$, tendo sido respeitada a estrutura de dependência entre as variáveis. Por fim, chegamos aos vetores $(Y_{1t}, \dots, Y_{Nt})'$, $t = T + 1, \dots, T + K$, aplicando a lei de formação especificada no modelo econométrico proposto.

4

MÓDULO 1: MODELO PARA A DETERMINAÇÃO DA NECESSIDADE DE CAPITAL PARA FAZER FRENTE AO RISCO DE PROVISÃO DE SINISTRO

O objetivo inicial aqui é determinar uma distribuição para o valor presente dos fluxos futuros de pagamentos relativos a sinistros ocorridos, que doravante para facilitar chamaremos de PERDA, cujo valor esperado é equivalente às provisões de sinistros ocorridos a serem formadas pela companhia. A necessidade de capital será determinada com base em uma medida de risco desta distribuição, sendo estabelecida como o excesso desta medida de risco (em função da volatilidade da distribuição) em relação ao valor esperado, funcionando assim como um “colchão” destinado a absorver os naturais desvios do montante de pagamentos efetivamente realizados em relação aos valores provisionados, fruto da natureza aleatória da PERDA.

4.1

Medida de Risco

Aqui será realizada uma breve apresentação sobre medidas de risco, focada naquelas que interessam para o modelo proposto. Uma introdução sobre o conceito de medidas de risco e seu uso nas ciências atuariais pode ser encontrada em Hardy (2006); abordagens mais voltadas para uso em modelos de determinação de capital podem ser encontradas em Sandström (2011, capítulo 14) e Cardoso (2008).

Uma primeira medida de risco que poderia ser considerada seria o “*Value at Risk*” (VaR), amplamente utilizado nos modelos desenvolvidos para o estabelecimento de requerimentos de capital regulatório para o setor bancário. Segundo Hull (2002), quando se pensa em VaR, o seguinte enunciado é posto:

“Estamos α por cento certos de que não perderemos mais do que V reais nos próximos N dias”.

Ou seja, considerando-se uma distribuição do montante de perdas possíveis acumuladas ao longo de N dias (horizonte de tempo), temos que o VaR_α representa o nível de perda que estamos $100 \times \alpha\%$ certos de que não excederemos. Em suma, trata-se de um quantil determinado para um nível de confiança α .

Entretanto, no modelo proposto neste trabalho, a opção foi por utilizar outra medida de risco, o “*Tail VaR*” (TVaR), sendo este brevemente definido na seção 5.53 do relatório IAA (2004) como “o quantil VaR mais a média dos excessos em relação a este quantil”; assim, o TVaR_α está diretamente relacionado ao VaR_α .

A motivação para o uso do TVaR ao invés do VaR é o fato de este último possuir algumas características que não o qualificam como medida de risco coerente – para maiores detalhes acerca da preferência do uso de medidas de risco coerentes, ver os trabalhos citados no primeiro parágrafo desta seção. Ainda, conforme exposto na seção 5.24 do relatório IAA (2004), em especial quando se trata de distribuições assimétricas e com caudas pesadas, o TVaR é preferível ao VaR como medida de risco, tendo em vista que é mais sensível à possibilidade de perdas catastróficas (de rara frequência, mas de grande valor).

Os gráficos a seguir ajudam a ilustrar os conceitos expostos.

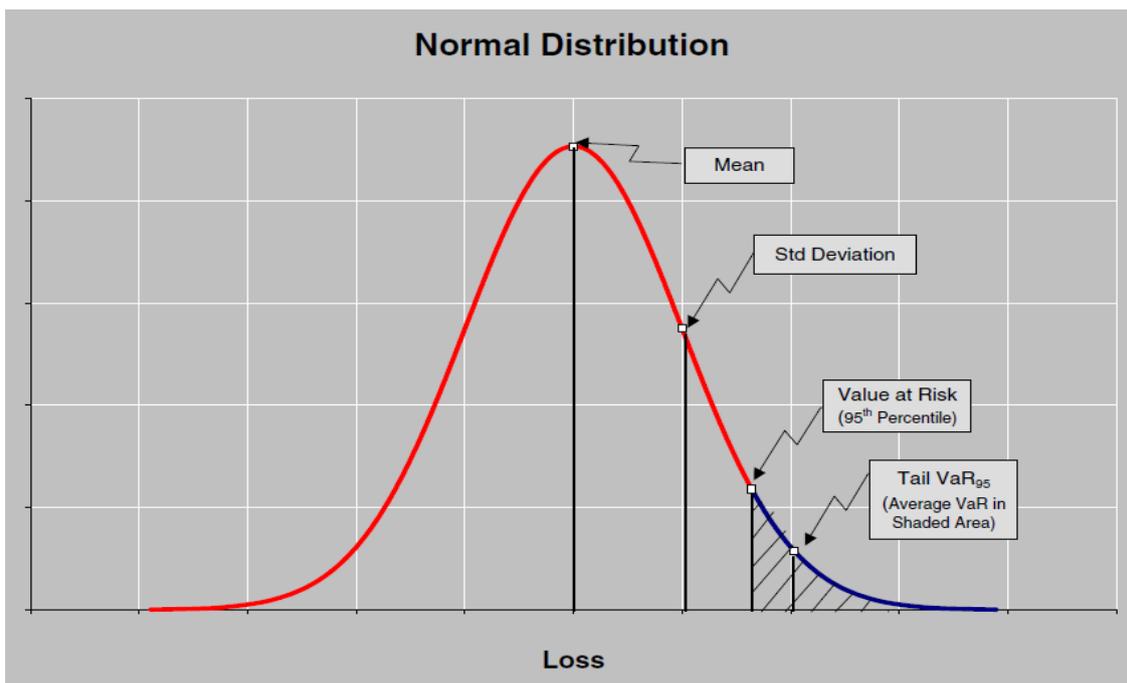


Figura 1: Distribuição de perda com distribuição simétrica

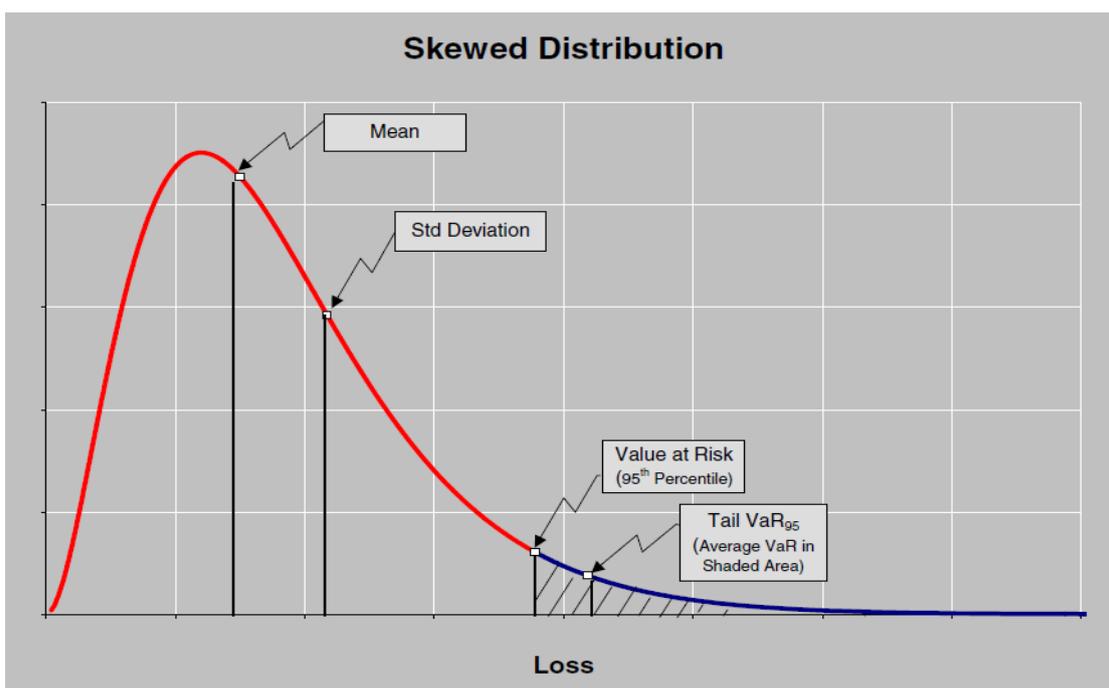


Figura 2: Distribuição de perda com distribuição assimétrica

4.2

Triângulo de *Run-off*

Para a determinação da distribuição desejada, utilizaremos como base o triângulo de *run-off*. O uso de tais triângulos é frequente em abordagens, tanto

determinísticas quanto estocásticas, para a determinação das provisões relativas a sinistros já ocorridos. Como exemplos de abordagens determinísticas amplamente utilizadas pelo mercado segurador para tal fim, temos os métodos *chain-ladder* e o *separation method*, descritos sob enfoques diferenciados em Hossack *et al.* (1999) e em Kaas *et al.* (2008). A avaliação de algumas abordagens probabilísticas pode ser encontrada em Neto (2004). A abordagem a ser aqui considerada será estocástica.

A função do triângulo de *run-off* é resumir a experiência de sinistros observada em uma particular classe de negócio de uma seguradora. Para tanto, os montantes de valores pagos relativos a sinistros ocorridos são dispostos em uma estrutura de tabela na qual aparecem classificados por período de ocorrência dos sinistros, representados pelas linhas, e por prazo de desenvolvimento do pagamento, representado pelas colunas. Por prazo de desenvolvimento do pagamento entendemos como a quantidade de períodos, a partir do período de ocorrência, no qual se deu o pagamento.

Para uma dada classe de negócio c , podemos estabelecer a seguinte descrição para o triângulo de *run-off* com os montantes de pagamentos relativos a sinistros ocorridos:

Tabela 1: Triângulo de *run-off* com os montantes de pagamentos relativos a sinistros ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$m_{c,1,1}$	$m_{c,1,2}$	$m_{c,1,3}$...	$m_{c,1,P-2}$	$m_{c,1,P-1}$	$m_{c,1,P}$
2	$m_{c,2,1}$	$m_{c,2,2}$	$m_{c,2,3}$...	$m_{c,2,P-2}$	$m_{c,2,P-1}$	
3	$m_{c,3,1}$	$m_{c,3,2}$	$m_{c,3,3}$...	$m_{c,3,P-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
P-2	$m_{c,P-2,1}$	$m_{c,P-2,2}$	$m_{c,P-2,3}$				
P-1	$m_{c,P-1,1}$	$m_{c,P-1,2}$					
P	$m_{c,P,1}$						

Onde:

$c = 1, \dots, C$	Classe de negócio.
$i = 1, \dots, P$	Período de ocorrência do sinistro.
$j = 1, \dots, P-i+1$	Prazo de desenvolvimento: número de períodos, a partir do período de ocorrência, até o pagamento realizado. 1 significa pagamento no período de ocorrência; 2 pagamento no período seguinte ao de ocorrência, etc.
$m_{c,i,j}$	Montante pago por sinistros relativos à classe de negócio c , ocorridos no período i , cujo pagamento deu-se no período de desenvolvimento j . São encarados como observações das respectivas variáveis aleatórias $M_{c,i,j}$. Os valores são contabilizados em unidades de IPCA, buscando assim eliminar o efeito da inflação.

Neste trabalho, consideraremos o período i em trimestres. O objetivo é termos uma segmentação dos dados maior do que aquela que teríamos caso considerássemos os períodos em anos, mas ao mesmo tempo mantendo uma massa de dados mais satisfatória nas células do triângulo do que se trabalhássemos com períodos em meses, em especial para classes de negócios não massificadas.

Com os dados observados de pagamentos estruturados na forma do triângulo de *run-off*, o objetivo passa a ser inferir sobre os valores de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos, ou seja, sobre os valores abaixo do triângulo. Estes valores serão representados pelas variáveis aleatórias $M_{c,i,j}$ dispostas na tabela a seguir. Os índices c , i e j são os mesmos já descritos.

Tabela 2: Valores de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1							
2							$M_{c,2,P}$
3						$M_{c,3,P-1}$	$M_{c,3,P}$
⋮				⋮	⋮	⋮	⋮
P-2				⋯	$M_{c,P-2,P-2}$	$M_{c,P-2,P-1}$	$M_{c,P-2,P}$
P-1			$M_{c,P-1,3}$	⋯	$M_{c,P-1,P-2}$	$M_{c,P-1,P-1}$	$M_{c,P-1,P}$
P		$M_{c,P,2}$	$M_{c,P,3}$	⋯	$M_{c,P,P-2}$	$M_{c,P,P-1}$	$M_{c,P,P}$

4.3

Simulação de valores para a PERDA

Nos métodos de determinação de provisões de sinistros ocorridos que se utilizam dos triângulos de *run-off* o objetivo resume-se em realizar previsões para as variáveis aleatórias acima, que denominaremos de “triângulo inferior”. Aqui, nosso objetivo será o de, via processo de simulação que leve em consideração a estrutura de dependência existente entre as classes de negócio, gerar S possíveis observações do triângulo inferior para cada classe de negócio, permitindo com isso gerar S possíveis observações para a PERDA e, conseqüentemente, a obtenção de uma distribuição não paramétrica para a PERDA. Para tanto, consideraremos as seguintes relações:

$$(1) \quad FP_{s,c,k} = \sum_{i+j=k+P+1} M_{s,c,i,j}$$

$$(2) \quad PERDA_{s,c} = \sum_{k=1}^{P-1} FP_{s,c,k} * d_k$$

$$(3) \quad PERDA_s = \sum_{c=1}^C PERDA_{s,c}$$

Onde:

$s = 1, \dots, S$	Simulação. Indica cada uma das S simulações do triângulo inferior.
$c = 1, \dots, C$	Classe de negócio.
$k = 1, \dots, P-1$	Período de pagamento. Representa o período, a partir da data base de avaliação, no qual é realizado o desembolso do fluxo de pagamento $FP_{s,c,k}$. Cada k está relacionado a uma diagonal do triângulo inferior.
$i = 2, \dots, P$	Período de ocorrência do sinistro.
$j = P-i+2, \dots, P$	Prazo de desenvolvimento.
$M_{s,c,i,j}$	Simulação de índice s da variável aleatória $M_{c,i,j}$, conforme anteriormente definida, componente do triângulo inferior.
$FP_{s,c,k}$	Fluxo simulado de pagamentos realizados no período k , relativo à classe de negócio c .
d_k	Fator de desconto relativo ao período k .
$PERDA_{s,c}$	Simulação de índice s da PERDA relativa à classe de negócio c , posicionada na data base.
$PERDA_s$	Simulação de índice s da PERDA total da companhia, posicionada na data base.

O diagrama a seguir descreve, de forma gráfica, o efeito das relações (1) e (2), para cada simulação s do triângulo inferior relativo a cada classe de negócio c .

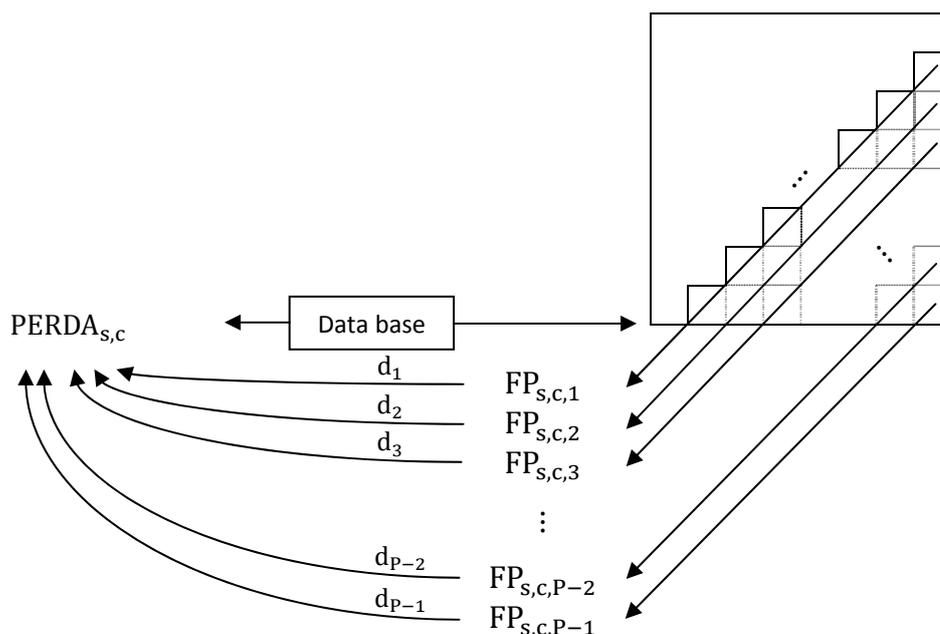


Figura 3: Diagrama com o processo de formação da PERDA

Ou seja, os valores das diagonais do triângulo inferior representam os montantes de pagamentos realizados no período k seguinte à data base. Assim, a soma dos valores das diagonais representa o fluxo total de pagamentos de sinistros realizados no mês k seguinte à data base. Totalizando estes fluxos, descontados pelos respectivos fatores de desconto, chegamos ao valor simulado para a PERDA relativa à classe de negócio c . A PERDA total simulada é a soma dos valores de PERDA simulados para cada classe de negócio.

Posteriormente, será descrito o processo de simulação que permite a geração dos S valores dos triângulos inferiores de cada classe de negócio c , obedecendo à estrutura de dependência existente entre as C classes de negócio consideradas.

4.4

Fator de desconto

Os fluxos de pagamentos futuros são descontados a valor presente considerando uma curva de desconto, vigente na data da avaliação, construída com base em uma estrutura a termo de taxas de juros (ETTJ) livre de riscos (de crédito e liquidez) definida para o cupom de IPCA. Ou seja, trata-se de uma taxa de juros real

(líquida do efeito da inflação), coerente com os valores de pagamentos considerados (em unidades de IPCA).

Os valores aqui utilizados foram definidos com base nas curvas de juros estimadas pela Superintendência Nacional de Seguros Privados e disposta no portal de internet da Autarquia, em <http://www.susep.gov.br/setores-susep/cgsoa/coris/dicem/modelo-de-interpolacao-e-extrapolacao-da-ettj>. Tais curvas baseiam-se nos modelos definidos em Franklin *et al.* (2011).

Em suma, é utilizada aqui uma curva de desconto à vista trimestral (a.t.), construída com base na curva anual (a.a.) estimada pela SUSEP para o cupom de IPCA.

4.5

Distribuição para a PERDA e determinação da necessidade de capital

Com base nos S valores simulados para a PERDA, obtemos uma distribuição não paramétrica para esta variável. Para tanto, os valores são ordenados, e aquele cujo número de valores superiores representam $\alpha\%$ dos S valores simulados é considerado o VaR_α amostral. Por sua vez, o TVaR_α amostral é determinado como a média dos valores superiores ao VaR_α amostral.

A necessidade de capital é determinada, então, como a diferença entre o TVaR_α amostral e o valor esperado amostral da PERDA (calculado como a média de todos os S valores gerados), este fazendo às vezes da provisão de sinistros ocorridos. Calculada dessa forma, a necessidade de capital representa uma estimativa do valor adicional às provisões que a companhia deve possuir de forma que, com uma confiança de $\alpha\%$, o valor a ser efetivamente realizado de pagamentos de sinistros não venha a ser superior ao valor provisionado mais o colchão determinado pelo valor da necessidade de capital.

4.6

Triângulo de *run-off* de números de pagamentos

De forma idêntica aos montantes de pagamentos, estabelecemos também, para cada classe de negócio, um triângulo de *run-off* com os números de pagamentos relativos a sinistros ocorridos. A motivação é que tais triângulos serão utilizados no modelo estocástico a ser estabelecido para as variáveis aleatórias $M_{c,i,j}$.

Tabela 3: Pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$n_{c,1,1}$	$n_{c,1,2}$	$n_{c,1,3}$...	$n_{c,1,P-2}$	$n_{c,1,P-1}$	$n_{c,1,P}$
2	$n_{c,2,1}$	$n_{c,2,2}$	$n_{c,2,3}$...	$n_{c,2,P-2}$	$n_{c,2,P-1}$	
3	$n_{c,3,1}$	$n_{c,3,2}$	$n_{c,3,3}$...	$n_{c,3,P-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
P-2	$n_{c,P-2,1}$	$n_{c,P-2,2}$	$n_{c,P-2,3}$				
P-1	$n_{c,P-1,1}$	$n_{c,P-1,2}$					
P	$n_{c,P,1}$						

Onde:

- $c = 1, \dots, C$ Classe de negócio.
- $i = 1, \dots, P$ Período de ocorrência do sinistro.
- $j = 1, \dots, P$ Prazo de desenvolvimento.
- $n_{c,i,j}$ Número observado de pagamentos por sinistros relativos à classe de negócio c , ocorridos no período i , cujo pagamento deu-se no período de desenvolvimento j . São encarados como observações das respectivas variáveis aleatórias $N_{c,i,j}$.

Da mesma forma temos, por classe de negócio, o triângulo inferior de números de pagamentos de sinistros:

Tabela 4: Números de pagamentos futuros referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1							
2							$N_{c,2,P}$
3						$N_{c,3,P-1}$	$N_{c,3,P}$
⋮				⋮	⋮	⋮	⋮
P-2				⋯	$N_{c,P-2,P-2}$	$N_{c,P-2,P-1}$	$N_{c,P-2,P}$
P-1			$N_{c,P-1,3}$	⋯	$N_{c,P-1,P-2}$	$N_{c,P-1,P-1}$	$N_{c,P-1,P}$
P		$N_{c,P,2}$	$N_{c,P,3}$	⋯	$N_{c,P,P-2}$	$N_{c,P,P-1}$	$N_{c,P,P}$

4.7

Modelos estocásticos ajustados para $M_{c,i,j}$ e $N_{c,i,j}$

De forma a possibilitar a simulação de S pares de triângulos inferiores para cada classe de negócio c, foi definida a seguinte modelagem estocástica para as variáveis $M_{c,i,j}$ e $N_{c,i,j}$.

Modelo para $M_{c,i,j}$:

$$\ln(M_{c,i,j}) \sim N\left(\ln^{(M)}\mu_{c,i,j}, \ln^{(M)}\sigma_c^2 | c, i, j, N_{c,i,j}\right)$$

$$E\left(\ln(M_{c,i,j})\right) = \ln^{(M)}\mu_{c,i,j} = \ln^{(M)}_0\beta_c + \ln^{(M)}_1\beta_{c,i} + \ln^{(M)}_2\beta_{c,j} + \ln^{(M)}_3\beta_c \cdot \ln(N_{c,i,j})$$

$$\ln^{(M)}_1\beta_{c,1} = 0 ; \quad \ln^{(M)}_2\beta_{c,1} = 0$$

Modelo para $N_{c,i,j}$:

$$N_{c,i,j} \sim \text{ODPoisson}(^N\lambda_{c,i,j}, ^N\phi_c | c, i, j)$$

$$\ln\left(E(N_{c,i,j})\right) = \ln(^N\lambda_{c,i,j}) = ^N_0\beta_c + ^N_1\beta_{c,i} + ^N_2\beta_{c,j}$$

$$^N_1\beta_{c,1} = 0 ; \quad ^N_2\beta_{c,1} = 0$$

Onde $\ln^{(M)}\mu_{c,i,j}$ e $N\lambda_{c,i,j}$ são os valores esperados de $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$, respectivamente.

Pode-se dizer que o uso dos modelos estocásticos aqui propostos para os triângulos têm inspiração nas exposições realizadas na seção 10.3 de Kaas *et al.* (2008).

É estabelecido um modelo linear generalizado (GLM) para o número de pagamentos de sinistros, para uma dada classe de negócio c . É assumida uma distribuição de Poisson com sobredispersão (em inglês, *overdispersed Poisson*) para a variável, sendo o logaritmo (função de ligação canônica) do preditor dado por uma relação linear envolvendo um efeito do período de ocorrência i e um efeito do prazo de desenvolvimento j .

A diferença da distribuição de Poisson com sobredispersão, aqui considerada, para a Poisson tradicional, é que se admite variância proporcional ao valor esperado. A proporcionalidade é dada pelo parâmetro de dispersão ϕ (da forma geral da função de probabilidade de uma distribuição pertencente à família exponencial, caso da Poisson), permitindo que ele seja diferente de 1. Tal modelagem permite um melhor ajuste à variabilidade observada dos dados, muitas vezes maior que aquela predita pela distribuição Poisson; este fato é chamado de sobredispersão (em língua inglesa, de *overdispersion*).

Informações sobre modelagem GLM considerando distribuições do tipo Poisson com sobredispersão é England e Verrall (2002). Na seção 6.3 de Jong e Heller (2008) podem ser obtidas informações sobre estimação por quase verossimilhança sendo aplicada em situações de modelagem por distribuição de Poisson com presença de sobredispersão podem ser obtidas. Mais informações sobre distribuições de Poisson com sobredispersão podem também ser obtidas nos exemplos 9.4.2 e 11.3.8 contidos em Kaas *et al.* (2008).

Observando o modelo adotado para $N_{c,i,j}$, pode-se facilmente constatar que temos, para cada carteira, um modelo multiplicativo para $N_{c,i,j}$, da forma $N_{c,i,j} \approx N_1\alpha_{c,i} \cdot N_2\alpha_{c,j}$. Esse modelo, como descrito em Kaas *et al.* (2008), representa a versão GLM, estocástica, do método determinístico *chain-ladder* para o número de

pagamentos de sinistros. Os efeitos em i indicariam influências como, por exemplo, as determinadas pelas variações no tamanho da carteira ao longo do tempo, e os efeitos em j representariam a dinâmica de liquidação dos sinistros que, por hipótese assumida no modelo, seria estacionária – ou seja, em cada prazo de desenvolvimento j , em torno do mesmo percentual de número de pagamentos de sinistros seria observado, independente do período de ocorrência i , fazendo com que as colunas sejam proporcionais.

Por sua vez, o logaritmo neperiano do montante de pagamentos de sinistros é modelado por um modelo linear generalizado, também para uma dada classe de negócio c . É assumida uma distribuição normal para tal variável, sendo seu preditor dado por uma relação linear composta por um efeito do período de ocorrência i , por um efeito do prazo de desenvolvimento j , e pelo logaritmo do número de pagamentos. Também se pode constatar que representa um modelo multiplicativo para $M_{c,i,j}$, da forma $M_{c,i,j} \approx M_1 \alpha_{c,i} \cdot M_2 \alpha_{c,j} \cdot M_3 \alpha_c N_{c,i,j}$, com um fator adicional relativo ao número de pagamentos de sinistros, cumprindo esta função de um “offset” – ver seção 5.4 de Jong e Heller (2008); $M_{c,i,j}$, obviamente, possui distribuição lognormal.

Na seção 10.4.2 de Kaas *et al.* (2008) foi adotada modelagem para o valor médio dos sinistros pagos, considerando o prazo de desenvolvimento j , capturando a dinâmica de liquidação dos sinistros, assumida estacionária, e o que chamaremos de período de pagamento k , dado pelas diagonais, buscando este capturar em especial o efeito da inflação. O período de pagamento i não necessitaria constar do modelo, visto que está sendo modelado o valor médio de sinistros pagos e, assim, mudanças no tamanho da carteira não importariam. Foi assumido que o valor médio dos sinistros pagos possui distribuição gama, com coeficiente de variação constante, com um modelo multiplicativo. Já o modelo aqui proposto refere-se ao montante total de pagamentos de sinistros, contabilizado em unidades de IPCA. Como a contabilização por unidades de IPCA elimina o efeito da inflação, e por não tratar-se de valor médio e sim total, optou-se então aqui por considerar efeitos do período de ocorrência i e do prazo de desenvolvimento j , com offset dado pelo número de pagamento de sinistros, já modelado também considerando efeitos do período de ocorrência i e do prazo de desenvolvimento j .

Modelos lineares generalizados são em geral ajustados através da estimação por máxima verossimilhança de seus parâmetros. Tais estimadores de máxima verossimilhança são obtidos fazendo-se uso de processos iterativos e, por este motivo, o ajuste de tais modelos usualmente é realizado fazendo uso de pacotes estatísticos. Na seção 5.5 de Jong e Heller (2008) é exposta a forma do vetor aleatório composto por tais estimadores, sendo descrito o desenvolvimento realizado para sua obtenção e o processo iterativo de estimação. Ver também a seção 11.6 de Kaas *et al.* (2008).

Em relação aos condicionamentos apresentados na formulação do modelo (${}^{\ln(M)}\beta_{c,1}$, ${}^{\ln(M)}\beta_{c,2}$, ${}^N\beta_{c,1}$ e ${}^N\beta_{c,2}$ iguais a zero), são necessários para evitar problemas de identificação (multicolinearidade), prejudicando a estimação (ver Remark 9.3.2 de Kaas *et al.*, 2008; ver também seção 4.14 de Jong e Heller, 2008).

Outro detalhe a ser notado é que a previsão para o valor de $M_{c,i,j}$, relativo às células do triângulo inferior, é dada por:

$$\begin{aligned}\widehat{M}_{c,i,j} &= \widehat{E}(M_{c,i,j}) = \exp\left({}^{\ln(M)}\widehat{\mu}_{c,i,j} + \frac{{}^{\ln(M)}\widehat{\sigma}_c^2}{2}\right) = \\ &= \exp\left({}^{\ln(M)}\widehat{\beta}_{c,i} + {}^{\ln(M)}\widehat{\beta}_{c,j} + {}^{\ln(M)}\widehat{\beta}_c \cdot \ln(\widehat{N}_{c,i,j}) + \frac{{}^{\ln(M)}\widehat{\sigma}_c^2}{2}\right), \text{ pois} \\ M_{c,i,j} &\sim \text{LN}\left({}^{\ln(M)}\mu_{c,i,j}, {}^{\ln(M)}\sigma_c^2 | c, i, j, N_{c,i,j}\right)\end{aligned}$$

De forma a permitir o processo de estimação através do uso de pacotes estatísticos como o R e o S+, torna-se necessário observar, nos modelos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$, as equações lineares para o preditor (logaritmo deste no caso de $N_{c,i,j}$) na suas formas matriciais:

No modelo para $N_{c,i,j}$:

$$\ln({}^N\lambda_c) = {}^N D_c \times {}^N \beta_c$$

Onde, para cada classe de negócio c :

- $\ln({}^N\lambda_c)$ Vetor onde cada elemento representa o logaritmo do valor esperado, com base no modelo, para cada uma das células do triângulo de *run-off*, ou seja, para cada combinação (i,j) .
- ${}^N\mathbf{D}_c$ Matriz de design: matriz onde as linhas representam cada uma das combinações (i,j) , e as colunas cada um dos $2P+1$ parâmetros. Em cada linha, a coluna receberá valor 1 caso o parâmetro refira-se à combinação (i,j) representada pela linha. As colunas referentes aos parâmetros ${}^N\beta_{c,1}$ e ${}^N\beta_{c,1}$ devem estar totalmente zeradas.
- ${}^N\beta_c$ Vetor com os $2P+1$ parâmetros.

No modelo para $M_{c,i,j}$:

$$\ln^{(M)}\mu_c = \ln^{(M)}\mathbf{D}_c \times \ln^{(M)}\beta_c$$

Onde, para cada classe de negócio c :

- $\ln^{(M)}\mu_c$ Vetor onde cada elemento representa o valor esperado, com base no modelo, para cada uma das células do triângulo de *run-off*, ou seja, para cada combinação (i,j) .
- $\ln^{(M)}\mathbf{D}_c$ Idem à matriz ${}^N\mathbf{D}_c$, adicionando-se a esta mais uma coluna, ao final, com os logaritmos dos valores observados $n_{c,i,j}$. As colunas referentes aos parâmetros $\ln^{(M)}\beta_{c,1}$ e $\ln^{(M)}\beta_{c,1}$ devem estar totalmente zeradas.
- $\ln^{(M)}\beta_c$ Vetor com os $2P+2$ parâmetros.

4.8

Processo de simulação

Começamos por observar que simular S possíveis observações do par de triângulos inferiores de cada classe de negócio c equivale a simular S observações para cada uma das variáveis aleatórias $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$, com $c = 1, \dots, C$, $i = 2, \dots, P$ e $(P-i+1) < j \leq P$, o que pode ser realizado considerando-se as relações:

$$\ln(M_{c,i,j}) = {}^{\ln(M)}F_{c,i,j}^{-1}({}^{\ln(M)}U_{c,i,j} | c, i, j, N_{c,i,j})$$

$$N_{c,i,j} = {}^NF_{c,i,j}^{-1}({}^NU_{c,i,j} | c, i, j)$$

Com $c = 1, \dots, C$, $i = 2, \dots, P$ e $(P-i+1) < j \leq P$.

Onde:

$c = 1, \dots, C$	Classe de negócio.
$i = 1, \dots, P$	Período de ocorrência do sinistro.
$j = 1, \dots, P$	Prazo de desenvolvimento.
${}^{\ln(M)}F_{c,i,j}$	É a função de distribuição acumulada de $\ln(M_{c,i,j})$, condicional a c , i , j e $N_{c,i,j}$, estimada através do ajuste do modelo proposto considerando os dados do triângulo de <i>run-off</i> de montantes de pagamentos de sinistros relativo à classe de negócio c .
${}^NF_{c,i,j}$	É a função de distribuição acumulada de $N_{c,i,j}$, condicional a c , i e j , estimada através do ajuste do modelo proposto considerando os dados do triângulo de <i>run-off</i> de números de pagamentos de sinistros relativo à classe de negócio c .
${}^{\ln(M)}U_{c,i,j}$ e	Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.
${}^NU_{c,i,j}$	

O problema, então, passa a ser simular S observações de cada uma das variáveis aleatórias $\ln^{(M)}U_{c,i,j}$ e $N_{c,i,j}$, com $c = 1, \dots, C$, $i = 2, \dots, P$ e $(P - i + 1) < j \leq P$. Ainda, a estrutura de dependência entre as variáveis deve ser respeitada.

A ideia que se apresenta, então, é a de considerar que as relações entre as variáveis aleatórias que compõem cada triângulo em questão (de montante de pagamentos e de número de pagamentos, por carteira c) já estariam explicadas pelo modelo linear generalizado ajustado. Assim, faltaria levar em consideração a relação existente entre as classes de negócio. Para aplicarmos tal ideia, faremos o uso de cópulas condicionais.

Aqui faremos uma adaptação do conceito de cópula condicional, apresentado no Capítulo 3 num contexto de série temporal, para um contexto no qual as variáveis aleatórias de interesse são componentes de triângulos de desenvolvimento de pagamento de sinistros (ou seja, indexadas pela combinação entre período de ocorrência e prazo de desenvolvimento).

Dessa forma, para cada uma das $\binom{P}{2}$ combinações de i e j, com $i = 2, \dots, P$ e $(P - i + 1) < j \leq P$, podemos considerar a existência das FDAs multivariadas $F_{i,j}$ e das cópulas condicionais $C_{i,j}$, tais que:

$$F_{2,P}(\ln(M_{1,2,P}), N_{1,2,P}, \dots, \ln(M_{C,2,P}), N_{C,2,P}) = C_{2,P}(\ln^{(M)}U_{1,2,P}, N_{1,2,P}, \dots, \ln^{(M)}U_{C,2,P}, N_{C,2,P})$$

$$\vdots$$

$$F_{P,P}(\ln(M_{1,P,P}), N_{1,P,P}, \dots, \ln(M_{C,P,P}), N_{C,P,P}) = C_{P,P}(\ln^{(M)}U_{1,P,P}, N_{1,P,P}, \dots, \ln^{(M)}U_{C,P,P}, N_{C,P,P})$$

i	j
2	P
3	P-1
3	P
4	P-2
4	P-1
4	P
⋮	⋮
P	2
⋮	⋮
P	P

Onde o conjunto condicionante, ao invés de ser a sigma-álgebra \mathfrak{F}_t como estabelecido no Capítulo 3, é aqui determinado pelo par (i, j).

Ainda seguindo o que foi desenvolvido no PROCESSO 1 do Capítulo 3, mas com as adaptações necessárias, assumiremos as seguintes premissas:

1. Podemos admitir estruturas de dependência Gaussianas, ou seja, as funções $\mathbb{C}_{i,j}$ são cópulas Gaussianas condicionais com parâmetros $\boldsymbol{\rho}_{i,j}$;
2. Podemos considerar o caso degenerado, ou seja, $\mathbb{C}_{i,j} = \mathbb{C}$ e, conseqüentemente, $\boldsymbol{\rho}_{i,j} = \boldsymbol{\rho}$.

Adotadas tais premissas, e considerando o método de simulação exposto no Capítulo 3 com as adaptações aqui realizadas, podemos simular $S * \binom{P}{2}$ observações da cópula dada pelo vetor aleatório $(\ln^{(M)}U_1, {}^N U_1, \dots, \ln^{(M)}U_C, {}^N U_C)'$, com distribuição dada por \mathbb{C} , permitindo-nos com isso gerar as S observações do par de triângulos inferiores relativo a cada classe de negócio c.

O processo descrito no parágrafo anterior pode ser realizado seguindo-se os seguintes passos:

- 1) Definimos a matriz **A** a seguir, composta com os valores observados do par de triângulos de *run-off* de cada classe de negócio c:

	c = 1	...	c = C		i	j
$\ln^{(M)}F_{1,1,1}(\ln(m_{1,1,1}))$	${}^N F_{1,1,1}(n_{1,1,1})$	\dots	$\ln^{(M)}F_{C,1,1}(\ln(m_{C,1,1}))$	${}^N F_{C,1,1}(m_{C,1,1})$	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> 1 1 : : 1 P </div>	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> 2 1 : : 2 P-1 </div>
\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> 3 1 : : 3 P-2 </div>	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> : : 3 P-2 </div>
\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> : : P 1 </div>	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> : : P 1 </div>
$\ln^{(M)}F_{1,P,1}(\ln(m_{1,P,1}))$	${}^N F_{1,P,1}(n_{1,P,1})$	\dots	$\ln^{(M)}F_{C,P,1}(\ln(m_{C,P,1}))$	${}^N F_{C,P,1}(m_{C,P,1})$	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> P 1 </div>	<div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> P 1 </div>

Cada classe de negócio c está representada por duas colunas na matriz **A**, uma relativa ao triângulo de *run-off* de montantes de pagamentos e outra ao

triângulo de *run-off* de números de pagamentos. Ainda, cada linha da matriz \mathbf{A} pode ser interpretada como uma observação da cópula dada pelo vetor aleatório $(\ln^{(M)}U_1, N_{U_1}, \dots, \ln^{(M)}U_C, N_{U_C})'$ com distribuição dada por \mathbb{C} , onde \mathbb{C} é uma função cópula Gaussiana com parâmetro $\boldsymbol{\rho}$.

- 2) Definimos a matriz \mathbf{B} a seguir, composta pela aplicação do inverso da FDA normal padrão, Φ^{-1} , em cada um dos elementos da matriz \mathbf{A} , o que equivale à matriz:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 \text{c} = 1 & & \dots & \text{c} = C \\
 \hline
 \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{1,1,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{1,1,1}}) & \dots & \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{C,1,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{C,1,1}}) \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{1,P,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{1,P,1}}) & \dots & \Phi^{-1}(\ln^{(M)}u_{C,P,1}) & \Phi^{-1}(N_{u_{C,P,1}})
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 i & j \\
 \hline
 1 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & P \\
 2 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 2 & P-1 \\
 3 & 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 3 & P-2 \\
 \vdots & \vdots \\
 P & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Onde cada vetor $(\ln^{(M)}u_{1,i,j}, N_{u_{1,i,j}}, \dots, \ln^{(M)}u_{C,i,j}, N_{u_{C,i,j}})'$, com $i = 1, \dots, P$ e $1 \leq j \leq (P - i + 1)$, representa uma observação da cópula $(\ln^{(M)}U_1, N_{U_1}, \dots, \ln^{(M)}U_C, N_{U_C})'$.

A matriz de correlação amostral $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, calculada com base nas colunas da matriz \mathbf{B} , pode então ser vista como uma estimativa do parâmetro $\boldsymbol{\rho}$.

- 3) Geramos $S * \binom{P}{2}$ observações do vetor normal padrão multivariado $(\ln^{(M)}X_1, N_{X_1}, \dots, \ln^{(M)}X_C, N_{X_C})'$, com correlação dada por $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.
- 4) Aplicando em cada observação do vetor normal padrão multivariado a transformação

$$(\ln^{(M)}U_1, {}^N U_1, \dots, \ln^{(M)}U_C, {}^N U_C)' = (\Phi(\ln^{(M)}X_1), \Phi({}^N X_1), \dots, \Phi(\ln^{(M)}X_C), \Phi({}^N X_C))'$$

temos então as $S * \binom{P}{2}$ observações da cópula Gaussiana.

- 5) Por fim, agrupando as observações geradas no passo anterior em $\binom{P}{2}$ grupos de S , conseguimos gerar S observações de cada uma das linhas da matriz C abaixo.

	c = 1	...	c = C		i	j
$\ln(M_{1,2,P})$ \vdots	$N_{1,2,P}$ \vdots	\dots	$\ln(M_{C,2,P})$ \vdots	$N_{C,2,P}$ \vdots	2 P 3 $P-1$ 3 P 4 $P-2$ 4 $P-1$ 4 P	\vdots \vdots
\vdots $\ln(M_{1,P,P})$	\vdots $N_{1,P,P}$	\dots	\vdots $\ln(M_{C,P,P})$	\vdots $N_{C,P,P}$	P 2 \vdots \vdots P P	\vdots \vdots

Como cada coluna da matriz C representa um dos triângulos inferiores que desejávamos gerar, alcançamos então nosso objetivo.

5

MÓDULO 2: MODELO PARA A DETERMINAÇÃO DA NECESSIDADE DE CAPITAL PARA FAZER FRENTE AO RISCO DE EMISSÃO/PRECIFICAÇÃO

Aqui o objetivo é determinarmos uma distribuição para o resultado de subscrição, a ser observado no período dado pelo horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base de avaliação, que doravante chamaremos de RS, dado por:

$$RS = (SO + DA + DO) - (PG + RO)$$

Onde:

SO	Montante total a ser pago por sinistros cuja ocorrência se dá ao longo do período dado pelo horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base.
DA	Despesa administrativa observada ao longo do horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base.
DO	Despesa operacional observada ao longo do horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base.
PG	Prêmio ganho ao longo do horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base. Representa o prêmio cobrado para fazer frente aos riscos cobertos ao longo do período dado pelo horizonte de tempo.
RO	Receita operacional observada ao longo do horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base.

No segundo termo da igualdade, o primeiro membro representa as perdas ao longo do horizonte de tempo, enquanto o segundo membro representa os ganhos relativos ao mesmo período. Assim, o RS representa a perda (se positivo, ou ganho se negativo) operacional da companhia no período dado pelo horizonte de tempo. O RS é posicionado na data base de avaliação.

Observar que, aqui, o RS está sendo avaliado pelo ângulo da situação negativa que se quer evitar. Assim, valores positivos do RS significam resultados adversos e os negativos, consequentemente, os favoráveis.

Alternativamente, podemos reescrever RS por:

$$RS = (SO + DA) - (PG + ORDOP)$$

Onde:

$$ORDOP = RO - DO.$$

Considerando o exposto em Sandström (2011), que por sua vez segue Hürlimann (2008), devido ao princípio da equivalência atuarial, $E(RS) = 0$. Logo, podemos tomar a necessidade de capital para fazer frente ao risco de prêmio diretamente igual a uma medida de risco da distribuição de RS, dado um nível de confiança α considerado.

Tomaremos como medida de risco o TVaR, pelos mesmos motivos já expostos quando tratamos do módulo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistros.

Ainda, como horizonte de tempo, tomamos o período de 1 ano, pois, conforme estabelecido em IAA (2004), considera-se razoável a adoção de 1 ano como horizonte de tempo para fins de avaliação de solvência.

5.1

Simulação de valores para RS

Os dados relativos às variáveis consideradas na formulação do RS geralmente estão disponíveis em períodos menores que 1 ano. Ainda, as variáveis SO e PG podem ser observadas por classe de negócio. Assim, segmentando o horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base em K períodos iguais, tanto RS quanto as variáveis que o compõem podem ser redefinidas como:

$SO_{c,k}$	Montante total a ser pago por sinistros cuja ocorrência se dá ao longo do período k , relativo à classe de negócio c . É líquido da parcela a ser recuperada em resseguros e inclui parcelas a serem pagas referentes a riscos aceitos em retrocessão.
$PG_{c,k}$	Prêmio ganho ao longo do período k , relativo à classe de negócio c . Representa o prêmio cobrado para fazer frente aos riscos cobertos ao longo do período k , estes líquidos dos riscos cedidos em resseguro e incluindo os riscos aceitos em retrocessão. É líquido de cancelamentos.
DA_k	Despesa administrativa observada ao longo do período k .
$ORDOP_k$	$RO_k - DO_k$, denominada “outras despesas e receitas operacionais”, observada ao longo do período k .
RS_k	Resultado de subscrição do período k .

Onde:

$c = 1, \dots, C$	Classe de negócio.
$k = P+1, \dots, P+K$	Representa cada um dos K períodos futuros nos quais o horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base de avaliação foi segmentado. P representa o último período de dados observados anterior à data base.

Assim, o objetivo de determinar uma distribuição para RS pode ser alcançado através da geração, via processo de simulação, de S possíveis observações de cada uma das variáveis que compõem a formulação do RS , em cada um destes K períodos futuros. Tais observações simuladas, aplicadas à reformulação da variável RS dada pelas relações apresentadas a seguir, nos permite obter S possíveis observações do RS , definindo uma distribuição não paramétrica para tal variável.

$$(1) \quad RS_{s,k} = \left(\sum_{c=1}^C SO_{s,c,k} + DA_{s,k} \right) - \left(\sum_{c=1}^C PG_{s,c,k} + ORDOP_{s,k} \right)$$

$$(2) \quad RS_s = \sum_{k=1}^K RS_{s,k} * d_k$$

Onde:

$s = 1, \dots, S$ Simulação. Indica cada uma das S simulações do valor referente ao período futuro k de cada uma das variáveis componentes da formulação de RS .

$c = 1, \dots, C$ Classe de negócio.

$k = P+1, \dots, P+K$ Representa cada um dos K períodos futuros nos quais o horizonte de tempo de 1 ano foi segmentado.

$SO_{s,c,k}$ Simulação de índice s da variável aleatória $SO_{c,k}$.

$PG_{s,c,k}$ Simulação de índice s da variável aleatória $PG_{c,k}$.

$DA_{s,k}$ Simulação de índice s da variável aleatória DA_k .

$ORDOP_{s,k}$ Simulação de índice s da variável aleatória $ORDOP_k$.

d_k Fator de desconto relativo ao período k . São os mesmos valores considerados no modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de reserva.

$RS_{s,k}$ Simulação de índice s do resultado de subscrição da companhia relativo ao período k .

RS_s Simulação de índice s do resultado de subscrição da companhia, referente ao horizonte de tempo de 1 ano, posicionado na data base.

Além das variáveis aleatórias $SO_{c,k}$, $PG_{c,k}$, DA_k e $ORDOP_k$, também serão simuladas S observações, para cada um dos K períodos futuros, referentes às variáveis $NSO_{c,k}$ e $NE_{c,k}$, definidas como:

$NSO_{c,k}$ Número de pagamentos relativos a sinistros cuja ocorrência se dá ao longo do período k , relativo à classe de negócio c .

$NE_{c,k}$ Número de expostos ao longo do período k , relativo à classe de negócio c . O número de expostos é dado pela soma das exposições individuais ao risco, cujo conceito pode ser encontrado no Apêndice 1 de Ferreira (2005).

As variáveis $NSO_{c,k}$ e $NE_{c,k}$ são necessárias pois serão consideradas no processo de simulação das variáveis que compõem o RS.

Assim, também teremos:

$NSO_{s,c,k}$ Simulação de índice s da variável aleatória $NSO_{c,k}$.

$NE_{s,c,k}$ Simulação de índice s da variável aleatória $NE_{c,k}$.

Fixado um período futuro k , cada valor simulado de índice s do vetor aleatório $(NSO_{1,k}, \dots, NSO_{c,k}, PG_{1,k}, \dots, PG_{c,k}, SO_{1,k}, \dots, SO_{c,k}, NE_{1,k}, \dots, NE_{c,k}, DA_k, ORDOP_k)$ deverá respeitar as dependências existentes entre as variáveis aleatórias componentes do vetor, o que acaba por também considerar a dependência entre as diferentes classes de negócio. Tal processo de simulação, que dependerá ainda dos modelos estocásticos a serem ajustados às séries de valores observados de tais variáveis relativos a períodos anteriores à data base de avaliação, será descrito de forma detalhada mais à frente.

5.2

Distribuição para RS e determinação da necessidade de capital

Da mesma forma que realizado para a PERDA, no Capítulo 4, aqui obtemos uma distribuição não paramétrica para a variável RS com base nos S valores simulados. Para tanto, os valores são ordenados, e aquele cujo número de valores superiores representam $\alpha\%$ dos S valores simulados é considerado o VaR_α amostral. Por sua vez, o $TVaR_\alpha$ amostral é determinado como a média dos valores superiores ao VaR_α amostral.

A necessidade de capital é determinada, então, como o TVaR_α amostral da distribuição não paramétrica obtida para o RS.

5.3

Séries de dados

De forma a permitir a simulação de observações das variáveis aleatórias que compõem a formulação do RS, para os períodos futuros k que compõem o horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base de avaliação, serão ajustados modelos estocásticos a tais variáveis. E para que possamos estimar os parâmetros de tais modelos estocásticos, faremos uso de séries de valores observados das variáveis aleatórias em questão, nos períodos anteriores à data base.

Assim, temos as séries de valores observados da_i e $ordop_i$, onde $i = 1, \dots, P$ representa o período anterior à data base ao qual a informação diz respeito. Da mesma forma, mas agora para cada classe de negócio $c = 1, \dots, C$, temos as séries de valores observados $pg_{i,c}$.

Ajustando modelos estocásticos a tais séries, podemos então inferir sobre os respectivos valores futuros, referentes aos períodos $k = P+1, \dots, P+K$ que compõem o horizonte de tempo de 1 ano considerado. Tais valores são representados pelas variáveis DA_k , $ORDOP_k$ e $PG_{k,c}$.

Em relação à variável SO, considerando as colocações realizadas acerca dos triângulos relativos aos montantes de pagamentos relativos a sinistros ocorridos, podemos considerar, para cada classe de negócio $c = 1, \dots, C$, o valor $\widehat{SO}_{c,i}$, onde $i = 1, \dots, P$ representa o período anterior à data base ao qual a informação diz respeito, como dado pela soma dos valores que formam a linha i da seguinte tabela, considerada no modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro:

Tabela 5: Montantes de pagamentos referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência a (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$m_{c,1,1}$	$m_{c,1,2}$	$m_{c,1,3}$...	$m_{c,1,P-2}$	$m_{c,1,P-1}$	$m_{c,1,P}$
2	$m_{c,2,1}$	$m_{c,2,2}$	$m_{c,2,3}$...	$m_{c,2,P-2}$	$m_{c,2,P-1}$	$\widehat{M}_{c,2,P}$
3	$m_{c,3,1}$	$m_{c,3,2}$	$m_{c,3,3}$...	$m_{c,3,P-2}$	$\widehat{M}_{c,3,P-1}$	$\widehat{M}_{c,3,P}$
...
P-2	$m_{c,P-2,1}$	$m_{c,P-2,2}$	$m_{c,P-2,3}$...	$\widehat{M}_{c,P-2,P-2}$	$\widehat{M}_{c,P-2,P-1}$	$\widehat{M}_{c,P-2,P}$
P-1	$m_{c,P-1,1}$	$m_{c,P-1,2}$	$\widehat{M}_{c,P-1,3}$...	$\widehat{M}_{c,P-1,P-2}$	$\widehat{M}_{c,P-1,P-1}$	$\widehat{M}_{c,P-1,P}$
P	$m_{c,P,1}$	$\widehat{M}_{c,P,2}$	$\widehat{M}_{c,P,3}$...	$\widehat{M}_{c,P,P-2}$	$\widehat{M}_{c,P,P-1}$	$\widehat{M}_{c,P,P}$

Onde $\widehat{M}_{c,i,j}$ é a estimativa (previsão) obtida com base nos dados do triângulo de *run-off* e na modelagem estocástica definida para $M_{c,i,j}$.

Dessa forma, $\widehat{SO}_{c,i}$, com $i = 1, \dots, P$ representando um período anterior à data base, diferentemente das demais variáveis contidas na formulação de RS, é composta tanto por valores já observados como também por estimativas (previsões) de valores não observados, representando o montante total a ser pago por sinistros cuja ocorrência se deu no período i . De forma similar às demais variáveis contidas na formulação de RS, ajustando modelo estocástico às séries $\widehat{SO}_{c,i}$, com $i = 1, \dots, P$, podemos inferir sobre os valores futuros $SO_{c,k}$, referentes aos períodos $k = P+1, \dots, P+K$ que compõem o horizonte de tempo de 1 ano considerado.

Para cada classe de negócio $c = 1, \dots, C$, definiremos $\widehat{NSO}_{c,i}$ de forma similar à $\widehat{SO}_{c,i}$, como dado pela soma dos valores que formam a linha i da seguinte tabela, considerada no modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro:

Tabela 6: Números de pagamentos referentes aos sinistros já ocorridos

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)						
	1	2	3	...	P-2	P-1	P
1	$n_{c,1,1}$	$n_{c,1,2}$	$n_{c,1,3}$...	$n_{c,1,P-2}$	$n_{c,1,P-1}$	$n_{c,1,P}$
2	$n_{c,2,1}$	$n_{c,2,2}$	$n_{c,2,3}$...	$n_{c,2,P-2}$	$n_{c,2,P-1}$	$\widehat{N}_{c,2,P}$
3	$n_{c,3,1}$	$n_{c,3,2}$	$n_{c,3,3}$...	$n_{c,1,P-2}$	$\widehat{N}_{c,3,P-1}$	$\widehat{N}_{c,3,P}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P-2	$n_{c,P-2,1}$	$n_{c,P-2,2}$	$n_{c,P-2,3}$...	$\widehat{N}_{c,P-2,P-2}$	$\widehat{N}_{c,P-2,P-1}$	$\widehat{N}_{c,P-2,P}$
P-1	$n_{c,P-1,1}$	$n_{c,P-1,2}$	$\widehat{N}_{c,P-1,3}$...	$\widehat{N}_{c,P-1,P-2}$	$\widehat{N}_{c,P-1,P-1}$	$\widehat{N}_{c,P-1,P}$
P	$n_{c,P,1}$	$\widehat{N}_{c,P,2}$	$\widehat{N}_{c,P,3}$...	$\widehat{N}_{c,P,P-2}$	$\widehat{N}_{c,P,P-1}$	$\widehat{N}_{c,P,P}$

Com $\widehat{N}_{c,i,j}$ sendo a estimativa (previsão) obtida com base nos dados do triângulo de *run-off* e na modelagem estocástica definida para $N_{c,i,j}$.

$\widehat{NSO}_{c,i}$, com $i = 1, \dots, P$ representando um período anterior à data base, é composta tanto por valores já observados como também por não observados, representando o número de pagamentos relativos a sinistros com ocorrência no período i . Ainda, ajustando modelo estocástico às séries $\widehat{NSO}_{c,i}$, com $i = 1, \dots, P$, podemos inferir sobre os valores futuros $NSO_{c,k}$, referentes aos períodos $k = P+1, \dots, P+K$ que compõem o horizonte de tempo de 1 ano considerado.

Temos, ainda, para cada classe de negócio $c = 1, \dots, C$, a série de valores observados $n_{c,i}$, onde $i = 1, \dots, P$ representa o período anterior à data base ao qual a informação diz respeito, e ajustando modelo estocástico à série de valores observados podemos inferir sobre os respectivos valores futuros $NE_{c,k}$, referentes aos períodos $k = P+1, \dots, P+K$ que compõem o horizonte de tempo de 1 ano considerado.

Por fim, na modelagem estocástica a ser ajustada para NE , é proposto ser considerado um fator macroeconômico, mais especificamente, a taxa Selic. Assim, temos também a série de valores observados $selic_i$, onde $i = 1, \dots, P$ representa o período anterior à data base ao qual a informação diz respeito. Já os valores futuros $SELIC_k$, referentes aos períodos $k = P+1, \dots, P+K$ que compõem o horizonte de tempo de 1 ano considerado, ao invés de inferidos via modelos, podem ser baseados em projeções de mercado.

5.4

Dados trimestrais

Em geral, os dados das séries em questão estão disponíveis em periodicidade mensal. Entretanto, de forma a manter o padrão adotado no modelo para determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro (necessário devido a forma de obtenção das séries $\widehat{NSO}_{c,i}$ e $\widehat{SO}_{c,i}$), os dados serão agrupados de forma a termos períodos trimestrais. Consequentemente, teremos $K=4$ trimestres, formando então o horizonte de tempo de 1 ano adotado.

5.5

Modelos estocásticos ajustados para as séries que compõem RS

As modelagens estatísticas apresentadas a seguir, ajustadas para cada uma das séries de observações das variáveis que compõem RS, surgiram como fruto de várias tentativas com dados de algumas seguradoras, com o objetivo de encontrar modelos que se adequassem relativamente bem a carteiras de diferentes companhias. Foram inspiradas em algumas abordagens propostas em Kaas *et al.* (2008) e em Jong e Heller (2008).

Reforça-se que tais modelagens não são exatamente o foco principal deste trabalho. Elas poderiam, inclusive, vir a ser modificadas ou substituídas, de forma a melhor adequarem-se à realidade dos dados disponíveis, relativos a uma companhia específica. O que realmente destaca-se como ponto chave pode-se dizer que é o processo de simulação aqui proposto, respeitando dependências existentes entre as séries que compõem a formulação de RS.

5.5.1

Modelo estocástico ajustado para $NE_{c,i}$

$$\ln(NE_{c,i}) \sim N\left(\ln^{(NE)}\mu_{c,i}, \ln^{(NE)}\sigma_{c,i}^2\right)$$

$$\ln^{(NE)}\mu_{c,i} = \ln^{(NE)}\beta_c + \ln^{(NE)}\beta_c * i + \ln^{(NE)}\beta_c * SELIC_i +$$

$$\ln^{(NE)}\beta_c * {}_1I_i + \ln^{(NE)}\beta_c * {}_2I_i + \ln^{(NE)}\beta_c * {}_3I_i$$

Assim, é ajustado um modelo linear para o logaritmo neperiano do número de expostos no período i , para uma dada classe de negócio c . O seu preditor é dado por uma relação linear composta por um nível geral, pelo período i , pela série de taxa básica de juros SELIC e pelos indicadores de trimestre do ano (considerando que estamos trabalhando com períodos em trimestres) de forma a capturar efeito sazonal.

$${}_1I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = P, P - 4, P - 8, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_2I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = P - 1, P - 5, P - 9, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_3I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = P - 2, P - 6, P - 10, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não será definido o indicador ${}_4I_i$ para os demais trimestres de forma a evitar problemas de identificação (multicolinearidade) na estimação dos parâmetros (ver Remark 9.3.2 de Kaas *et al.*, 2008; ver também seção 4.14 de Jong e Heller, 2008).

Na sequência, utilizando a metodologia de Box & Jenkins (1970), é ajustado um modelo $ARIMA\left(\ln^{(NE)}p_c, \ln^{(NE)}i_c, \ln^{(NE)}q_c\right)$ para os choques padronizados $\ln^{(NE)}\delta_{c,i}$ da modelagem linear de $\ln(NE_{c,i})$, capturando efeitos de autocorrelação na série de cada classe de negócio c .

5.5.2

Modelo estocástico ajustado para $NSO_{c,i}$

$$NSO_{c,i} \sim \text{ODPoisson}(^{NSO}\lambda_{c,i}, ^{NSO}\phi_c)$$

$$\ln(^{NSO}\lambda_{c,i}) = ^{NSO}_1\beta_c + ^{NSO}_2\beta_c * i + ^{NSO}_3\beta_c * \ln(NE_{c,i})$$

Dessa forma, é ajustado um modelo linear generalizado para o número de pagamentos relativos a sinistros ocorridos no período i , para uma dada classe de negócio c . É assumida uma distribuição de Poisson com sobredispersão para a variável, sendo o logaritmo (função de ligação canônica) de seu preditor dado por uma relação linear composta por um nível geral, pelo período i e pelo logaritmo do número de expostos.

Considerações acerca do uso da distribuição de Poisson com sobredispersão já foram realizadas quando tratamos da modelagem ajustada para $N_{c,i,j}$, no Capítulo 4.

5.5.3

Modelo estocástico ajustado para $PG_{c,i}$

$$PG_{c,i} \sim \text{Gama}(^{PG}\text{shape}_{c,i}, ^{PG}\text{rate}_{c,i})$$

$$\left(\frac{^{PG}\text{shape}_{c,i}}{^{PG}\text{rate}_{c,i}}\right)^{-1} = ^{PG}_1\beta_c + ^{PG}_2\beta_c * i + ^{PG}_3\beta_c * \ln(NE_{c,i})$$

É ajustado um modelo linear generalizado para o prêmio ganho no período i , para uma dada classe de negócio c . É assumida uma distribuição gama para a variável, sendo o inverso (função de ligação canônica) de seu preditor dado por uma relação linear composta por um nível geral, pelo período i e pelo logaritmo do número de expostos.

5.5.4

Modelo estocástico ajustado para $SO_{c,i}$

$$SO_{c,i} \sim \text{Gama}(SO_{\text{shape}_{c,i}}, SO_{\text{rate}_{c,i}})$$

$$\left(\frac{SO_{\text{shape}_{c,i}}}{SO_{\text{rate}_{c,i}}}\right)^{-1} = SO_1\beta_c + SO_2\beta_c * i + SO_3\beta_c * NSO_{c,i} + SO_4\beta_c * PG_{c,i}$$

É ajustado um modelo linear generalizado para o montante pago por sinistros ocorridos no período i , para uma dada classe de negócio c . É assumida uma distribuição gama para a variável, sendo o inverso (função de ligação canônica) de seu preditor dado por uma relação linear composta por um nível geral, pelo período i , pelo número pagamentos por sinistros ocorridos e pelo número de expostos.

5.5.5

Modelo estocástico ajustado para DA_i

$$DA_i \sim N(DA_{\mu_i}, DA_{\sigma_i^2})$$

$$DA_{\mu_i} = DA_1\beta + DA_2\beta * \left(\sum_{c=1}^C PG_{c,i}\right) + DA_3\beta * \left(\sum_{c=1}^C SO_{c,i}\right)$$

Assim, é ajustado um modelo linear para a despesa administrativa no período i . O seu preditor é dado por uma relação linear composta por um nível geral, pelo prêmio ganho total da companhia no período i e pelo número pagamentos por sinistros ocorridos total da companhia.

Ainda, utilizando a metodologia de Box & Jenkins (1970), é ajustado um modelo ARIMA(DA_p, DA_i, DA_q) para os choques padronizados DA_{δ_i} da modelagem linear de DA_i , capturando efeitos de autocorrelação na série.

5.5.6

Modelo estocástico ajustado para $ORDOP_i$

$$ORDOP_i \sim N(ORDOP_{\mu_i}, ORDOP_{\sigma_i^2})$$

$$ORDOP_{\mu_i} = ORDOP_1\beta + ORDOP_2\beta * \left(\sum_{c=1}^C PG_{c,i} \right) + ORDOP_3\beta * \left(\sum_{c=1}^C SO_{c,i} \right)$$

Dessa forma, de forma similar ao que foi feito para a variável DA_i , é ajustado um modelo linear para a despesa administrativa no período i . O seu preditor é dado por uma relação linear composta por um nível geral, pelo prêmio ganho total da companhia no período i e pelo número pagamentos por sinistros ocorridos total da companhia.

Utilizando a metodologia de Box & Jenkins (1970), é ainda ajustado um modelo $ARIMA(ORDOP_p, ORDOP_i, ORDOP_q)$ para os choques padronizados $ORDOP_{\delta_i}$ da modelagem linear de $ORDOP_i$, capturando efeitos de autocorrelação na série.

5.6

Processo de simulação

Para simular S caminhos futuros das séries dadas pelas variáveis aleatórias $PG_{c,k}$, $SO_{c,k}$, $NSO_{c,k}$, $NE_{c,k}$, DA_k e $ORDOP_k$, dados os modelos propostos para cada série, utilizaremos um procedimento híbrido, que reúne procedimentos do PROCESSO 1 e do PROCESSO 2, ambos descritos no Capítulo 3. Assim, para as séries que tiverem alguma modelagem de autocorrelação (uso de modelos $ARIMA$) utilizaremos procedimento similar ao realizado no PROCESSO 2; para as demais, às quais foram ajustadas modelos lineares generalizados, utilizaremos procedimento similar ao realizado no PROCESSO 1.

Isto posto, simular S caminhos futuros das séries dadas pelas variáveis aleatórias $NSO_{c,k}$, $PG_{c,k}$, $SO_{c,k}$, $NE_{c,k}$, DA_k e $ORDOP_k$, dados os modelos propostos para cada série, equivale a simular S observações para cada uma das variáveis

aleatórias $^{NSO}U_{c,k}$, $^{PG}U_{c,k}$, $^{SO}U_{c,k}$, $^{\ln(NE)}\epsilon_{V_{c,k}}$, $^{DA}\epsilon_{V_k}$ e $^{ORDOP}\epsilon_{V_k}$, tendo em vista as seguintes relações:

$$NE_{c,k} = \ln \left(\begin{aligned} &^{\ln(NE)}_1\beta_c + ^{\ln(NE)}_2\beta_c * k + ^{\ln(NE)}_3\beta_c * SELIC_k + \\ &^{\ln(NE)}_4\beta_c * {}_1I_k + ^{\ln(NE)}_5\beta_c * {}_2I_k + ^{\ln(NE)}_6\beta_c * {}_3I_k + ^{\ln(NE)}\delta_{\sigma_c} * ^{\ln(NE)}\delta_{c,k} \end{aligned} \right)$$

$$\ln(NE)\delta_{c,k} = \ln(NE)h_c \left(\left\{ \ln(NE)\delta_{c,m} \right\}_{m=1}^{m=k-1}, \left\{ \ln(NE)\epsilon_{c,m} \right\}_{m=1}^{m=k-1} \right)$$

$$\ln(NE)\epsilon_{c,k} = ^{\ln(NE)}\epsilon_{F_{c,k}^{-1}} \left(^{\ln(NE)}\epsilon_{V_{c,k}} | c, k \right)$$

$$^{NSO}U_{c,k} = ^{NSO}F_{c,k}^{-1} \left(^{NSO}U_{c,k} | c, k, NE_{c,k} \right)$$

$$^{PG}U_{c,k} = ^{PG}F_{c,k}^{-1} \left(^{PG}U_{c,k} | c, k, NE_{c,k} \right)$$

$$^{SO}U_{c,k} = ^{SO}F_{c,k}^{-1} \left(^{SO}U_{c,k} | c, k, ^{NSO}U_{c,k}, ^{PG}U_{c,k} \right)$$

$$DA_k = ^{DA}_1\beta + ^{DA}_3\beta * \left(\sum_{c=1}^C ^{PG}U_{c,k} \right) + ^{DA}_4\beta * \left(\sum_{c=1}^C ^{SO}U_{c,k} \right) + ^{DA}\delta_{\sigma} * ^{DA}\delta_k$$

$$^{DA}\delta_k = ^{DA}h \left(\left\{ ^{DA}\delta_m \right\}_{m=1}^{m=k-1}, \left\{ ^{DA}\epsilon_m \right\}_{m=1}^{m=k-1} \right)$$

$$^{DA}\epsilon_k = ^{DA}\epsilon_{F_k^{-1}} \left(^{DA}\epsilon_{V_k} | k \right)$$

$$^{ORDOP}k = ^{ORDOP}_1\beta + ^{ORDOP}_3\beta * \left(\sum_{c=1}^C ^{PG}U_{c,k} \right) + ^{ORDOP}_4\beta * \left(\sum_{c=1}^C ^{SO}U_{c,k} \right) +$$

$$^{ORDOP}\delta_{\sigma} * ^{ORDOP}\delta_k$$

$$^{ORDOP}\delta_k = ^{ORDOP}h \left(\left\{ ^{ORDOP}\delta_m \right\}_{m=1}^{m=k-1}, \left\{ ^{ORDOP}\epsilon_m \right\}_{m=1}^{m=k-1} \right)$$

$$^{ORDOP}\epsilon_k = ^{ORDOP}\epsilon_{F_k^{-1}} \left(^{ORDOP}\epsilon_{V_k} | k \right)$$

Com $c = 1, \dots, C$, $k = P+1, \dots, P+K$, $K=4$.

Onde, além dos termos já anteriormente definidos, temos:

$\ln^{(NE)}_{\delta} \sigma_c$ Desvio padrão do choque definido pela modelagem linear estabelecida, por classe de negócio c , para a série $\ln^{(NE)}_{c,k}$, de forma que $\left(\ln^{(NE)}_{\delta} \sigma_c * \ln^{(NE)}_{\delta_{c,k}} \right) \sim N \left(0, \ln^{(NE)}_{\delta} \sigma_c^2 \right)$, lembrando que $\ln^{(NE)}_{\delta_{c,k}}$ trata-se do choque padronizado.

$\ln^{(NE)}_{h_c}$ É a forma funcional definida pelo modelo $ARIMA \left(\ln^{(NE)}_{p_c}, \ln^{(NE)}_{i_c}, \ln^{(NE)}_{q_c} \right)$ estabelecido para os choques padronizados $\ln^{(NE)}_{\delta_{c,k}}$ da modelagem linear de $\ln^{(NE)}_{c,k}$, por classe de negócio c .

$\ln^{(NE)}_{\epsilon_{c,k}}$ É o choque definido pelo modelo $ARIMA \left(\ln^{(NE)}_{p_c}, \ln^{(NE)}_{i_c}, \ln^{(NE)}_{q_c} \right)$ estabelecido para os choques padronizados $\ln^{(NE)}_{\delta_{c,k}}$ da modelagem linear de $\ln^{(NE)}_{c,k}$, por classe de negócio c .

$\ln^{(NE)}_{\epsilon_{F_{c,k}}}$ É a função de distribuição acumulada de $\ln^{(NE)}_{\epsilon_{c,k}}$, condicional a c e k ; dado o modelo $ARIMA \left(\ln^{(NE)}_{p_c}, \ln^{(NE)}_{i_c}, \ln^{(NE)}_{q_c} \right)$, temos que $\ln^{(NE)}_{\epsilon_{F_{c,k}}}$ é tal que $\ln^{(NE)}_{\epsilon_{c,k}} \sim N \left(0, \ln^{(NE)}_{\epsilon} \sigma_c^2 \right)$.

$\ln^{(NE)}_{\epsilon_{V_{c,k}}}$ Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.

$NSO_{F_{c,k}}$ É a função de distribuição acumulada de $NSO_{c,k}$, condicional a c , k e $NE_{c,k}$, estimada através do ajuste do modelo proposto para a série relativa à classe de negócio c .

$NSO_{U_{c,k}}$ Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.

$PG_{F_{c,k}}$ É a função de distribuição acumulada de $PG_{c,k}$, condicional a c , k e $NE_{c,k}$, estimada através do ajuste do modelo proposto para a série relativa à classe de negócio c .

$PG_{U_{c,k}}$ Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.

- $SO_{F_{c,k}}$ É a função de distribuição acumulada de $PG_{c,k}$, condicional a c , k , $NSO_{c,k}$ e $PG_{c,k}$, estimada através do ajuste do modelo proposto para a série relativa à classe de negócio c .
- $SO_{U_{c,k}}$ Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.
- $DA_{\delta} \sigma$ Desvio padrão do choque definido pela modelagem linear estabelecida para a série DA_k , de forma que $\left(\begin{matrix} DA_{\delta} \\ \sigma * DA_{\delta_k} \end{matrix} \right) \sim N\left(0, \begin{matrix} DA_{\delta} \\ \sigma^2 \end{matrix}\right)$, lembrando que DA_{δ_k} trata-se do choque padronizado.
- DA_h É a forma funcional definida pelo modelo $ARIMA(DA_p, DA_i, DA_q)$ estabelecido para os choques padronizados DA_{δ_k} da modelagem linear de DA_k .
- DA_{ϵ_k} É o choque definido pelo modelo $ARIMA(DA_p, DA_i, DA_q)$ estabelecido para os choques padronizados DA_{δ_k} da modelagem linear de DA_k .
- $DA_{\epsilon} F_k$ É a função de distribuição acumulada de DA_{ϵ_k} , condicional a k ; dado o modelo $ARIMA(DA_p, DA_i, DA_q)$, temos que $DA_{\epsilon} F_k$ é tal que $DA_{\epsilon_k} \sim N\left(0, \begin{matrix} DA_{\epsilon} \\ \sigma^2 \end{matrix}\right)$.
- $DA_{\epsilon} V_k$ Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.
- $ORDOP_{\delta} \sigma$ Desvio padrão do choque definido pela modelagem linear estabelecida para a série $ORDOP_k$, de forma que $\left(\begin{matrix} ORDOP_{\delta} \\ \sigma * ORDOP_{\delta_k} \end{matrix} \right) \sim N\left(0, \begin{matrix} ORDOP_{\delta} \\ \sigma^2 \end{matrix}\right)$, lembrando que $ORDOP_{\delta_k}$ trata-se do choque padronizado.
- $ORDOP_h$ É a forma funcional definida pelo modelo $ARIMA(ORDOP_p, ORDOP_i, ORDOP_q)$ estabelecido para os choques padronizados $ORDOP_{\delta_k}$ da modelagem linear de $ORDOP_k$.

$ORDOP_{\epsilon_k}$ É o choque definido pelo modelo ARIMA($ORDOP_p, ORDOP_i, ORDOP_q$) estabelecido para os choques padronizados $ORDOP_{\delta_k}$ da modelagem linear de $ORDOP_k$.

$ORDOP_{\epsilon_{F_k}}$ É a função de distribuição acumulada de $ORDOP_{\epsilon_k}$, condicional a k ; dado o modelo ARIMA($ORDOP_p, ORDOP_i, ORDOP_q$), temos que $ORDOP_{\epsilon_{F_k}}$ é tal que $ORDOP_{\epsilon_k} \sim N(0, ORDOP_{\epsilon} \sigma^2)$.

$ORDOP_{\epsilon_{V_k}}$ Variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1.

Como já dito, a nossa meta passa a ser simular S observações de cada uma das variáveis aleatórias $NSOU_{c,k}, PGU_{c,k}, SOU_{c,k}$ e $\ln(NE)_{\epsilon_{V_{c,k}}}$, com $c = 1, \dots, C$, $k = P+1, \dots, P+K$, como também as variáveis $DA_{\epsilon_{V_k}}$ e $ORDOP_{\epsilon_{V_k}}$, com $k = P+1, \dots, P+K$. Ainda, a estrutura de dependência entre as variáveis deve ser respeitada.

A ideia que se apresenta, então, é a de considerar que as séries já estariam explicadas pelos modelos ajustados. Assim, faltaria levar em consideração a relação existente entre as séries. Para aplicarmos tal ideia, faremos o uso de cópulas condicionais.

Dessa forma, para $k = P+1, \dots, P+K$, $K=4$, podemos considerar a existência das FDAs multivariadas F_k e das cópulas condicionais \mathbb{C}_k , tais que:

$$\begin{array}{l}
 F_{P+1}(NSO_{1,P+1}, \dots, NSO_{C,P+1}, PG_{1,P+1}, \dots, PG_{C,P+1}, SO_{1,P+1}, \dots, SO_{C,P+1}, \ln(NE)_{\epsilon_{1,P+1}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{C,P+1}}, DA_{\epsilon_{P+1}}, ORDOP_{\epsilon_{P+1}}) = \begin{array}{c} \overline{k} \\ P \\ + \\ 1 \\ \vdots \end{array} \\
 \mathbb{C}_{P+1}(NSO_{1,P+1}, \dots, NSO_{C,P+1}, PG_{1,P+1}, \dots, PG_{C,P+1}, SO_{1,P+1}, \dots, SO_{C,P+1}, \ln(NE)_{\epsilon_{V_{1,P+1}}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{V_{C,P+1}}}, DA_{\epsilon_{V_{P+1}}}, ORDOP_{\epsilon_{V_{P+1}}}) \\
 \vdots \\
 F_{P+4}(NSO_{1,P+4}, \dots, NSO_{C,P+4}, PG_{1,P+4}, \dots, PG_{C,P+4}, SO_{1,P+4}, \dots, SO_{C,P+4}, \ln(NE)_{\epsilon_{1,P+4}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{C,P+4}}, DA_{\epsilon_{P+4}}, ORDOP_{\epsilon_{P+4}}) = \begin{array}{c} P \\ + \\ 4 \end{array} \\
 \mathbb{C}_{P+4}(NSO_{1,P+4}, \dots, NSO_{C,P+4}, PG_{1,P+4}, \dots, PG_{C,P+4}, SO_{1,P+4}, \dots, SO_{C,P+4}, \ln(NE)_{\epsilon_{V_{1,P+4}}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{V_{C,P+4}}}, DA_{\epsilon_{V_{P+4}}}, ORDOP_{\epsilon_{V_{P+4}}})
 \end{array}$$

Da forma como foram estabelecidos os modelos, o conjunto condicionante, ao invés de ser a sigma-álgebra \mathfrak{F}_t como estabelecido no Capítulo 3, é aqui determinado simplesmente por k .

Serão adotadas aqui as mesmas premissas consideradas no PROCESSO 1 e no PROCESSO 2 do Capítulo 3:

1. Podemos admitir estruturas de dependência Gaussianas, ou seja, as funções \mathbb{C}_k são cópulas Gaussianas condicionais com parâmetros $\boldsymbol{\rho}_k$;
2. Podemos considerar o caso degenerado, ou seja, $\mathbb{C}_k = \mathbb{C}$ e, conseqüentemente, $\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}$.

Adotadas tais premissas, e considerando os métodos de simulação expostos no Capítulo 3 com as adaptações aqui realizadas, podemos simular 4S observações da cópula dada pelo vetor aleatório:

$$\left(\text{NSO}_{U_1, \dots, \text{NSO}_{U_C}, \text{PG}_{U_1, \dots, \text{PG}_{U_C}, \text{SO}_{U_1, \dots, \text{SO}_{U_C}, \ln(\text{NE})}_{V_1, \dots, \ln(\text{NE})}_{V_C}, \text{DA}_{V, \text{ORDOP}_{V}} \right)',$$

com distribuição dada por \mathbb{C} , permitindo-nos com isso simular S caminhos futuros de 4 elementos para as séries $\text{NSO}_{1,k}, \dots, \text{NSO}_{C,k}, \text{PG}_{1,k}, \dots, \text{PG}_{C,k}, \text{SO}_{1,k}, \dots, \text{SO}_{C,k}, \text{NE}_{1,k}, \dots, \text{NE}_{C,k}, \text{DA}_k$ e ORDOP_k .

O processo descrito no parágrafo anterior pode ser realizado seguindo-se os seguintes passos:

- 1) Definimos a matriz \mathbf{A} , onde cada linha é composta pelo valor em $i=1, \dots, P$ do vetor:

$$\left(\text{NSO}_{F_{1,i}}(\widehat{\text{NSO}}_{1,i}), \dots, \text{NSO}_{F_{C,i}}(\widehat{\text{NSO}}_{C,i}), \text{PG}_{F_{1,i}}(\widehat{\text{pg}}_{1,i}), \dots, \text{PG}_{F_{C,i}}(\widehat{\text{pg}}_{C,i}), \text{SO}_{F_{1,i}}(\widehat{\text{SO}}_{1,i}) \dots \text{SO}_{F_{C,i}}(\widehat{\text{SO}}_{C,i}), \Phi(\ln(\text{NE})_{\widehat{\epsilon}_{1,i}}), \dots, \Phi(\ln(\text{NE})_{\widehat{\epsilon}_{C,i}}), \Phi(\text{DA}_{\widehat{\epsilon}_i}), \Phi(\text{ORDOP}_{\widehat{\epsilon}_i}) \right)',$$

onde $\ln(\text{NE})_{\widehat{\epsilon}_{1,i}}, \dots, \ln(\text{NE})_{\widehat{\epsilon}_{C,i}}, \text{DA}_{\widehat{\epsilon}_i}, \text{ORDOP}_{\widehat{\epsilon}_i}$ são os resíduos padronizados calculados com base no ajuste dos modelos propostos aos dados observados.

Com isso, cada série fica representada por uma coluna na matriz **A**. Ainda, cada linha da matriz **A** pode ser interpretada como uma observação da cópula dada pelo vetor aleatório:

$$\left(\text{NSO}U_1, \dots, \text{NSO}U_C, \text{PG}U_1, \dots, \text{PG}U_C, \text{SO}U_1, \dots, \text{SO}U_C, \ln(\text{NE})\epsilon_{V_1}, \dots, \ln(\text{NE})\epsilon_{V_C}, \text{DA}\epsilon_V, \text{ORDOP}\epsilon_V \right)',$$

com distribuição dada por \mathbb{C} , onde \mathbb{C} é uma função cópula Gaussiana com parâmetro $\boldsymbol{\rho}$.

- 2) Definimos a matriz **B** como a matriz dada pela aplicação do inverso da FDA normal padrão, Φ^{-1} , a cada um dos elementos da matriz **A**. Assim, cada linha da matriz **B** é composta pelo valor em $i=1, \dots, P$ do vetor:

$$\left(\Phi^{-1}(\text{NSO}u_{1,i}), \dots, \Phi^{-1}(\text{NSO}u_{C,i}), \Phi^{-1}(\text{PG}u_{1,i}), \dots, \Phi^{-1}(\text{PG}u_{C,i}), \Phi^{-1}(\text{SO}u_{1,i}), \dots, \Phi^{-1}(\text{SO}u_{C,i}), \ln(\text{NE})\hat{\epsilon}_{1,i}, \dots, \ln(\text{NE})\hat{\epsilon}_{C,i}, \text{DA}\hat{\epsilon}_i, \text{ORDOP}\hat{\epsilon}_i \right)'$$

Onde $\text{NSO}u_{1,i}, \dots, \text{NSO}u_{C,i}, \text{PG}u_{1,i}, \dots, \text{PG}u_{C,i}, \text{SO}u_{1,i}, \dots, \text{SO}u_{C,i}$, com $i = 1, \dots, P$, representam os primeiros 3C elementos da observação de índice i da cópula explicitada no primeiro passo.

A matriz de correlação $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, calculada com base nas colunas da matriz **B**, pode então ser vista como uma estimativa do parâmetro $\boldsymbol{\rho}$.

- 3) Geramos $S * K$, $K=4$, observações do vetor normal padrão multivariado:

$$\left(\text{NSO}X_1, \dots, \text{NSO}X_C, \text{PG}X_1, \dots, \text{PG}X_C, \text{SO}X_1, \dots, \text{SO}X_C, \ln(\text{NE})\epsilon_{X_1}, \dots, \ln(\text{NE})\epsilon_{X_C}, \text{DA}\epsilon_X, \text{ORDOP}\epsilon_X \right)',$$

com correlação dada por $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

- 4) Aplicando em cada amostra do vetor normal padrão multivariado a transformação:

$$\left(\text{NSO}U_1, \dots, \text{NSO}U_C, \text{PG}U_1, \dots, \text{PG}U_C, \text{SO}U_1, \dots, \text{SO}U_C, \ln(\text{NE})\epsilon_{V_1}, \dots, \ln(\text{NE})\epsilon_{V_C}, \text{DA}\epsilon_V, \text{ORDOP}\epsilon_V \right)' = \left(\Phi(\text{NSO}X_1), \dots, \Phi(\text{NSO}X_C), \Phi(\text{PG}X_1), \dots, \Phi(\text{PG}X_C), \Phi(\text{SO}X_1), \dots, \Phi(\text{SO}X_C), \Phi(\ln(\text{NE})\epsilon_{X_1}), \dots, \Phi(\ln(\text{NE})\epsilon_{X_C}), \Phi(\text{DA}\epsilon_X), \Phi(\text{ORDOP}\epsilon_X) \right)'$$

temos então as $S * K$, $K=4$, observações da cópula Gaussiana.

- 5) Agrupando as observações geradas no passo anterior em $K=4$ grupos de S , conseguimos gerar S observações de cada uma das linhas da matriz C , onde cada linha é composta pelo valor em $k=P+1, \dots, P+K$, $K=4$, do vetor:

$$(NSO_{1,k}, \dots, NSO_{C,k}, PG_{1,k}, \dots, PG_{C,k}, SO_{1,k}, \dots, SO_{C,k}, \ln(NE)_{\epsilon_{1,k}}, \dots, \ln(NE)_{\epsilon_{C,k}}, DA_{\epsilon_k}, ORDOP_{\epsilon_k})'$$

- 6) Por fim, da matriz C definimos a matriz D , onde cada linha é composta pelo valor em $k=P+1, \dots, P+K$, $K=4$, do vetor:

$$(NSO_{1,k}, \dots, NSO_{C,k}, PG_{1,k}, \dots, PG_{C,k}, SO_{1,k}, \dots, SO_{C,k}, NE_{1,k}, \dots, NE_{C,k}, DA_k, ORDOP_k)'$$

As primeiras $3C$ colunas, relativas às variáveis NSO , PG e SO , são idênticas às respectivas da matriz C . Já as $C+2$ últimas colunas têm seus elementos determinados de forma iterativa, considerando as relações acerca das variáveis NE , DA e $ORDOP$, descritas no início desta seção tratando do processo de simulação.

Realizando o procedimento acima para cada uma das S observações geradas para a matriz C no quinto passo, conseguimos obter S simulações da matriz D . por fim, como cada coluna da matriz D representa as previsões para os $K=4$ períodos futuros das séries que utilizaremos para determinação da distribuição não paramétrica de RS , alcançamos então nosso objetivo.

6

EXECUÇÃO DO MODELO PROPOSTO E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

De forma a exemplificar o uso do modelo proposto para determinação de necessidade de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, tanto os relacionados ao risco de flutuação das provisões de sinistro quanto aqueles relativos ao resultado de subscrição ao longo do horizonte de tempo de 1 ano a partir da data base de avaliação, aplicaremos aos dados de uma sociedade seguradora as duas componentes do modelo, descritas nos Capítulos 4 e 5.

A data base de avaliação foi tomada como sendo 28/09/2012 (último dia útil do mês). Os dados foram organizados em trimestres e foram tomados $P=13$ trimestres de observações. A opção por organizar os dados em trimestres, ao invés de meses, e serem considerados 13 trimestres foi tomada de forma a minimizar a ocorrência de células vazias nos triângulos de *run-off*, tanto de montantes de pagamentos quanto de números de pagamentos relativos à sinistros ocorridos.

Foram utilizadas neste exercício de execução do modelo proposto as 3 classes de negócio relevantes da companhia, a saber:

c=1: Patrimonial Demais;

c=2: Automóveis;

c=3: Residencial

As classes de negócio 1, 2 e 3 acima são equivalentes, respectivamente, às classes de negócio 4, 8 e 1 estabelecidas na Tabela 4 do Anexo III da Resolução CNSP 280, de 30 de janeiro de 2013, visando à determinação do capital de risco baseado no risco de subscrição (componente do requerimento de capital regulatório exigido das sociedades seguradoras).

Para determinação das distribuições não paramétricas da PERDA e de RS, serão executadas $S=1000$ simulações (respectivamente, de pares de triângulos inferiores e de projeções de séries), seguindo os passos dos processos de simulação descritos

nos Capítulos 4 e 5. Todo o processo (ajustes de modelos aos dados e simulações) será conduzido através da execução de scripts no pacote estatístico S-PLUS.

6.1

Execução do modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de provisão de sinistro

Nas tabelas a seguir são apresentados os triângulos de *run-off* de montantes e números de pagamentos de sinistros, relativos aos P=13 trimestres observados, de cada uma das C=3 classes de negócio consideradas. Os valores dos triângulos de *run-off* de montantes de sinistros estão convertidos em unidades de IPCA.

Tabela 7: Triângulo de *run-off* - números de pagamentos ($n_{c,i,j}$) - Patrimonial Demais (c=1)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	172	210	51	21	0	3	0	2	0	0	0	2	1
2	191	241	32	10	9	3	2	0	1	2	3	1	
3	173	149	30	15	4	0	1	1	0	0	0		
4	151	117	28	10	2	2	1	1	1	2			
5	142	203	31	11	8	6	7	3	4				
6	172	152	19	16	7	5	6	4					
7	191	146	46	27	11	6	1						
8	162	139	28	7	5	1							
9	90	158	30	11	5								
10	98	120	19	15									
11	91	121	13										
12	101	103											
13	106												

Tabela 8: Triângulo de run-off - montantes de pagamentos ($m_{c,i,j}$) - Patrimonial Demais (c=1)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	223,29	558,26	269,77	57,17	0,00	2,63	0,00	5,73	0,00	0,00	0,00	26,88	8,45
2	312,83	715,18	68,03	30,17	128,87	1,04	2,52	0,00	2,08	56,67	3,24	6,13	
3	364,63	317,30	56,29	36,20	11,51	0,00	8,84	0,13	0,00	0,00	0,00		
4	217,83	213,28	151,92	9,11	3,55	10,11	0,18	0,29	2,34	22,83			
5	422,02	587,30	58,72	45,68	24,49	18,23	6,27	12,39	3,27				
6	194,96	730,32	146,55	108,49	27,85	4,68	1,58	3,80					
7	223,97	645,72	154,91	86,50	14,72	8,12	5,70						
8	211,43	348,03	48,74	22,41	15,56	1,20							
9	183,64	415,85	55,95	18,12	13,24								
10	141,09	361,35	66,92	56,06									
11	275,32	666,89	55,27										
12	360,53	461,66											
13	349,34												

Tabela 9: Triângulo de run-off - números de pagamentos ($n_{c,i,j}$) - Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10581	11986	940	183	84	48	58	55	29	32	24	26	14
2	11288	10873	472	154	88	59	35	30	32	39	50	23	
3	10676	9474	688	187	103	66	61	29	66	66	30		
4	10385	11133	886	227	151	88	80	42	74	35			
5	10029	12049	807	264	124	92	67	75	92				
6	10575	11240	904	236	134	115	53	323					
7	10162	18751	1146	272	195	129	140						
8	19064	15721	1212	459	184	70							
9	15122	15275	1620	314	131								
10	15886	15214	1071	248									
11	15659	13367	1046										
12	14162	15276											
13	13857												

Tabela 10: Triângulo de run-off - montantes de pagamentos ($m_{c,i,j}$) - Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10402,54	7748,00	636,19	122,59	37,18	27,93	64,62	36,20	27,55	28,43	13,22	10,97	18,78
2	11204,41	6909,42	325,25	109,14	71,77	49,48	17,52	30,43	6,46	31,43	53,89	11,01	
3	11296,52	6858,92	496,29	84,74	98,27	35,86	44,67	18,02	35,40	39,70	17,21		
4	11482,30	7289,89	653,82	164,20	114,22	37,99	23,07	21,73	33,13	14,48			
5	11945,90	8536,29	591,76	217,90	84,56	26,15	60,45	51,73	29,08				
6	12050,76	8276,98	451,77	142,70	95,53	54,58	23,57	31,15					
7	11600,71	8095,10	661,73	138,33	81,22	58,33	55,37						
8	11062,21	7770,12	601,37	185,90	86,50	29,58							
9	9456,44	7688,45	490,53	192,67	67,95								
10	10031,97	7140,46	483,65	113,34									
11	9667,51	6346,95	495,17										
12	8709,07	6580,10											
13	9435,80												

Tabela 11: Triângulo de run-off - números de pagamentos ($n_{c,i,j}$) - Residencial (c=3)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1028	583	45	5	7	3	0	1	1	2	2	0	0
2	884	465	39	16	7	6	1	0	1	3	0	0	
3	856	553	46	11	8	5	0	4	2	0	1		
4	1290	587	75	10	13	1	1	3	1	0			
5	1479	903	99	19	9	12	7	2	2				
6	703	498	39	10	7	4	0	0					
7	969	651	31	7	5	9	2						
8	1200	782	68	16	11	8							
9	1557	929	77	22	16								
10	941	323	32	11									
11	947	582	62										
12	1492	823											
13	1433												

Tabela 12: Triângulo de run-off - montantes de pagamentos ($m_{c,i,j}$) - Residencial ($c=3$)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	668,16	294,37	23,46	1,67	29,79	17,41	0,00	0,33	0,02	4,47	0,32	0,00	0,00
2	537,92	325,07	23,38	2,92	0,77	6,28	1,56	0,00	0,04	6,88	0,00	0,00	
3	488,45	392,53	29,30	1,68	47,27	0,87	0,00	1,74	0,41	0,00	0,34		
4	548,37	323,46	81,25	3,44	0,93	0,15	0,12	5,91	1,10	0,00			
5	743,63	527,00	61,44	5,44	4,74	4,33	25,08	6,77	0,25				
6	471,27	362,54	19,63	5,65	5,57	5,42	0,00	0,00					
7	459,19	354,85	51,46	0,70	0,25	5,57	5,10						
8	512,12	510,51	48,21	19,66	18,01	7,72							
9	626,62	454,76	84,49	8,23	19,38								
10	448,58	197,86	15,31	0,86									
11	430,20	405,20	55,48										
12	665,02	377,15											
13	564,23												

Os valores estimados para os parâmetros das modelagens estocásticas propostas para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$ estão listados a seguir.

Tabela 13: Parâmetros estimados – modelos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$ - Patrimonial Demais ($c=1$)

$\ln(M)_0 \beta_c$	i ou j	$\ln(M)_1 \beta_{c,i}$	$\ln(M)_2 \beta_{c,j}$	$\ln(M)_3 \beta_c$	$\ln(M) \sigma_c^2$	$N_0 \beta_c$	i ou j	$N_1 \beta_{c,i}$	$N_2 \beta_{c,j}$	$N \phi_c$
0,0925	1	0,0000	0,0000	1,0860	0,6525	5,2277	1	0,0000	0,0000	2,4916
	2	0,1030	0,5578				2	0,0712	0,0696	
	3	-0,1325	0,7467				3	-0,2087	-1,6098	
	4	-0,2553	0,7637				4	-0,3754	-2,3744	
	5	0,1203	0,9162				5	-0,0973	-3,3336	
	6	-0,0269	0,1726				6	-0,1798	-3,9177	
	7	0,0868	0,0941				7	-0,0589	-4,1711	
	8	-0,1574	-0,1430				8	-0,2769	-4,5003	
	9	-0,2259	0,4306				9	-0,4199	-4,9351	
	10	0,0785	1,6908				10	-0,5591	-5,1141	
	11	0,5528	0,3079				11	-0,6323	-5,1881	
	12	0,6172	2,0323				12	-0,6381	-4,8584	
	13	0,6991	2,0417				13	-0,5642	-5,2277	

Tabela 14: Parâmetros estimados – modelos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$ - Automóveis (c=2)

$\ln(M)_0\beta_c$	i ou j	$\ln(M)_1\beta_{c,i}$	$\ln(M)_2\beta_{c,j}$	$\ln(M)_3\beta_c$	$\ln(M)\sigma_c^2$	$N_0\beta_c$	i ou j	$N_1\beta_{c,i}$	$N_2\beta_{c,j}$	$N\phi_c$
4,4388	1	0,0000	0,0000	0,5292	0,0964	9,3037	1	0,0000	0,0000	72,3615
	2	-0,0476	-0,3929				2	-0,0383	0,0431	
	3	-0,0203	-1,6646				3	-0,1134	-2,5570	
	4	-0,1011	-2,2786				4	-0,0375	-3,8947	
	5	0,0739	-2,5472				5	-0,0143	-4,5221	
	6	-0,1721	-3,0353				6	-0,0126	-4,9567	
	7	-0,0952	-2,9901				7	0,2584	-5,0594	
	8	-0,2188	-3,1716				8	0,4370	-4,7430	
	9	-0,2519	-3,3969				9	0,3173	-5,1931	
	10	-0,3116	-3,0772				10	0,3210	-5,4961	
	11	-0,3138	-3,1287				11	0,2554	-5,7085	
	12	-0,3891	-3,7099				12	0,2714	-6,0861	
	13	-0,3336	-2,9029				13	0,2328	-6,6647	

Tabela 15: Parâmetros estimados – modelos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$ - Residencial (c=3)

$\ln(M)_0\beta_c$	i ou j	$\ln(M)_1\beta_{c,i}$	$\ln(M)_2\beta_{c,j}$	$\ln(M)_3\beta_c$	$\ln(M)\sigma_c^2$	$N_0\beta_c$	i ou j	$N_1\beta_{c,i}$	$N_2\beta_{c,j}$	$N\phi_c$
-0,8205	1	0,0000	0,0000	1,0236	0,9447	6,9184	1	0,0000	0,0000	3,2095
	2	-0,0863	0,1851				2	-0,1649	-0,5527	
	3	-0,0535	0,4443				3	-0,1209	-2,9640	
	4	-0,3212	-0,5341				4	0,1672	-4,4522	
	5	0,1311	0,2113				5	0,4134	-4,8016	
	6	0,2347	0,3919				6	-0,2829	-5,1792	
	7	-0,3197	1,0232				7	0,0014	-6,4920	
	8	0,4452	0,8704				8	0,2218	-6,4372	
	9	0,1794	-1,2971				9	0,4464	-6,6641	
	10	-0,4407	1,4152				10	-0,2368	-6,6737	
	11	0,0535	-0,0479				11	-0,0330	-6,8252	
	12	-0,2316	1,0267				12	0,3743	-13,7471	
	13	-0,2830	0,9835				13	0,3491	-13,8262	

As figuras a seguir mostram o cruzamento dos valores $\ln(m_{c,i,j})$ e $n_{c,i,j}$ observados, componentes dos triângulos de *run-off*, e seus respectivos valores ajustados pelos modelos estocásticos propostos para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$, permitindo a avaliação dos ajustes dos modelos aos dados.

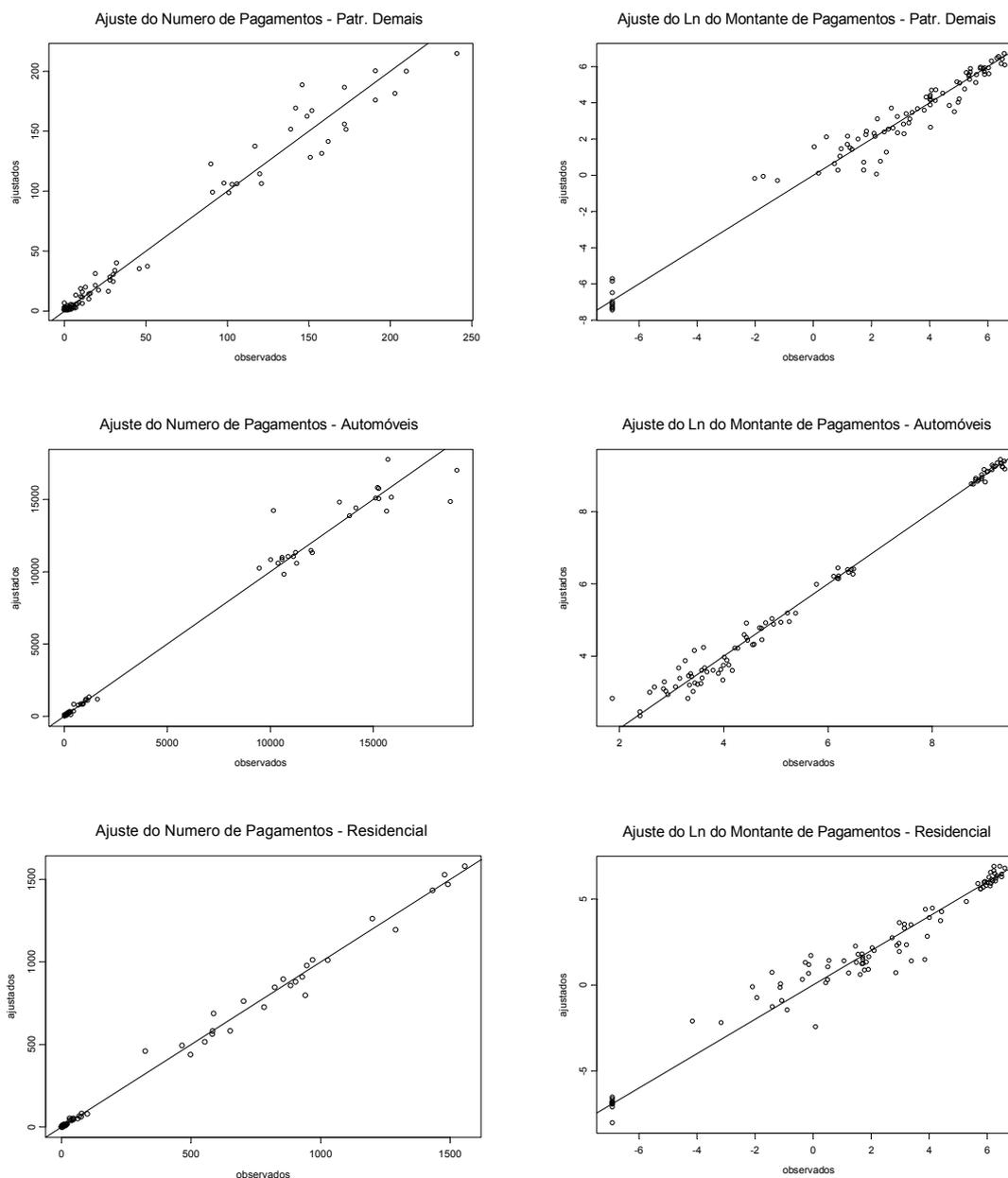


Figura 4: Cruzamentos entre valores observados e ajustados para números e montantes de pagamentos

Observar que, em especial nos gráficos relativos ao ajuste de $\ln(M_{c,i,j})$, há uma concentração de pontos onde o valor observado é igual a $-6,9077$. Isto se dá pois, para fins de facilitar a estimação dos parâmetros via funções do pacote estatístico S-Plus, foi adotado o procedimento prático de substituir os valores iguais a zero nos triângulos de *run-off* por $0,001$; e assim, ao aplicar o logaritmo neperiano a tais valores, temos $\ln(0,001) = -6,9077$.

A seguir, temos os triângulos de *run-off* completados com os triângulos inferiores ajustados com base nas modelagens propostas para $\ln(M_{c,i,j})$ e $N_{c,i,j}$. Os valores que compõem os triângulos inferiores servem como “previsões” dos valores ainda não observados.

Tabela 16: Números de pagamentos - observados e estimados - Patrimonial Demais (c=1)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	172	210	51	21	0	3	0	2	0	0	0	2	1
2	191	241	32	10	9	3	2	0	1	2	3	1	1,1
3	173	149	30	15	4	0	1	1	0	0	0	1,2	0,8
4	151	117	28	10	2	2	1	1	1	2	0,7	1,0	0,7
5	142	203	31	11	8	6	7	3	4	1,0	0,9	1,3	0,9
6	172	152	19	16	7	5	6	4	1,1	0,9	0,9	1,2	0,8
7	191	146	46	27	11	6	1	2,0	1,3	1,1	1,0	1,4	0,9
8	162	139	28	7	5	1	2,2	1,6	1,0	0,8	0,8	1,1	0,8
9	90	158	30	11	5	2,4	1,9	1,4	0,9	0,7	0,7	1,0	0,7
10	98	120	19	15	3,8	2,1	1,6	1,2	0,8	0,6	0,6	0,8	0,6
11	91	121	13	9,2	3,5	2,0	1,5	1,1	0,7	0,6	0,6	0,8	0,5
12	101	103	19,7	9,2	3,5	2,0	1,5	1,1	0,7	0,6	0,5	0,8	0,5
13	106	113,6	21,2	9,9	3,8	2,1	1,6	1,2	0,8	0,6	0,6	0,8	0,6

Tabela 17: Montantes de pagamentos - observados e estimados - Patrimonial Demais (c=1)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	223,29	558,26	269,77	57,17	0,00	2,63	0,00	5,73	0,00	0,00	0,00	26,88	8,45
2	312,83	715,18	68,03	30,17	128,87	1,04	2,52	0,00	2,08	56,67	3,24	6,13	14,02
3	364,63	317,30	56,29	36,20	11,51	0,00	8,84	0,13	0,00	0,00	0,00	12,10	8,18
4	217,83	213,28	151,92	9,11	3,55	10,11	0,18	0,29	2,34	22,83	1,11	8,93	6,03
5	422,02	587,30	58,72	45,68	24,49	18,23	6,27	12,39	3,27	9,46	2,19	17,58	11,88
6	194,96	730,32	146,55	108,49	27,85	4,68	1,58	3,80	2,57	7,47	1,73	13,87	9,38
7	223,97	645,72	154,91	86,50	14,72	8,12	5,70	2,97	3,29	9,54	2,21	17,72	11,98
8	211,43	348,03	48,74	22,41	15,56	1,20	3,33	1,84	2,03	5,90	1,37	10,96	7,41
9	183,64	415,85	55,95	18,12	13,24	3,79	2,66	1,47	1,62	4,72	1,09	8,76	5,92
10	141,09	361,35	66,92	56,06	17,52	4,42	3,10	1,71	1,89	5,50	1,27	10,21	6,90
11	275,32	666,89	55,27	63,25	26,00	6,55	4,60	2,54	2,81	8,16	1,89	15,15	10,24
12	360,53	461,66	151,20	67,03	27,55	6,95	4,88	2,69	2,98	8,64	2,00	16,06	10,85
13	349,34	912,04	177,82	78,83	32,40	8,17	5,74	3,16	3,50	10,17	2,35	18,88	12,77

Tabela 18: Números de pagamentos - observados e estimados - Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10581	11986	940	183	84	48	58	55	29	32	24	26	14
2	11288	10873	472	154	88	59	35	30	32	39	50	23	13,5
3	10676	9474	688	187	103	66	61	29	66	66	30	22,3	12,5
4	10385	11133	886	227	151	88	80	42	74	35	35,1	24,0	13,5
5	10029	12049	807	264	124	92	67	75	92	44,4	35,9	24,6	13,8
6	10575	11240	904	236	134	115	53	323	60,2	44,5	36,0	24,7	13,8
7	10162	18751	1146	272	195	129	140	123,9	79,0	58,3	47,2	32,3	18,1
8	19064	15721	1212	459	184	70	107,9	148,1	94,4	69,7	56,4	38,7	21,7
9	15122	15275	1620	314	131	106,1	95,7	131,4	83,8	61,9	50,0	34,3	19,2
10	15886	15214	1071	248	164,5	106,5	96,1	131,9	84,1	62,1	50,2	34,4	19,3
11	15659	13367	1046	288,4	154,0	99,7	90,0	123,5	78,7	58,2	47,0	32,2	18,1
12	14162	15276	1116,6	293,1	156,5	101,3	91,4	125,5	80,0	59,1	47,8	32,8	18,4
13	13857	14467,8	1074,4	282,0	150,6	97,5	88,0	120,7	77,0	56,9	46,0	31,5	17,7

Tabela 19: Montantes de pagamentos - observados e estimados - Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10402,54	7748,00	636,19	122,59	37,18	27,93	64,62	36,20	27,55	28,43	13,22	10,97	18,78
2	11204,41	6909,42	325,25	109,14	71,77	49,48	17,52	30,43	6,46	31,43	53,89	11,01	18,41
3	11296,52	6858,92	496,29	84,74	98,27	35,86	44,67	18,02	35,40	39,70	17,21	11,02	18,18
4	11482,30	7289,89	653,82	164,20	114,22	37,99	23,07	21,73	33,13	14,48	23,10	10,58	17,46
5	11945,90	8536,29	591,76	217,90	84,56	26,15	60,45	51,73	29,08	32,83	27,86	12,76	21,05
6	12050,76	8276,98	451,77	142,70	95,53	54,58	23,57	31,15	21,91	25,69	21,81	9,99	16,48
7	11600,71	8095,10	661,73	138,33	81,22	58,33	55,37	43,41	27,31	32,02	27,18	12,45	20,54
8	11062,21	7770,12	601,37	185,90	86,50	29,58	42,76	42,16	26,53	31,11	26,40	12,09	19,95
9	9456,44	7688,45	490,53	192,67	67,95	39,18	38,83	38,29	24,09	28,25	23,97	10,98	18,12
10	10031,97	7140,46	483,65	113,34	75,85	36,99	36,65	36,14	22,74	26,66	22,63	10,36	17,10
11	9667,51	6346,95	495,17	133,28	73,10	35,65	35,32	34,83	21,91	25,70	21,81	9,99	16,48
12	8709,07	6580,10	467,57	124,66	68,37	33,34	33,04	32,58	20,49	24,03	20,40	9,34	15,41
13	9435,80	6839,17	484,24	129,10	70,81	34,53	34,22	33,74	21,23	24,89	21,13	9,68	15,96

Tabela 20: Números de pagamentos - observados e estimados - Residencial (c=3)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1028	583	45	5	7	3	0	1	1	2	2	0	0
2	884	465	39	16	7	6	1	0	1	3	0	0	0,0
3	856	553	46	11	8	5	0	4	2	0	1	0,0	0,0
4	1290	587	75	10	13	1	1	3	1	0	1,3	0,0	0,0
5	1479	903	99	19	9	12	7	2	2	1,9	1,7	0,0	0,0
6	703	498	39	10	7	4	0	0	1,0	1,0	0,8	0,0	0,0
7	969	651	31	7	5	9	2	1,6	1,3	1,3	1,1	0,0	0,0
8	1200	782	68	16	11	8	1,9	2,0	1,6	1,6	1,4	0,0	0,0
9	1557	929	77	22	16	8,9	2,4	2,5	2,0	2,0	1,7	0,0	0,0
10	941	323	32	11	6,6	4,5	1,2	1,3	1,0	1,0	0,9	0,0	0,0
11	947	582	62	11,4	8,0	5,5	1,5	1,6	1,2	1,2	1,1	0,0	0,0
12	1492	823	75,8	17,1	12,1	8,3	2,2	2,4	1,9	1,9	1,6	0,0	0,0
13	1433	824,5	74,0	16,7	11,8	8,1	2,2	2,3	1,8	1,8	1,6	0,0	0,0

Tabela 21: Montantes de pagamentos - observados e estimados - Residencial (c=3)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	668,16	294,37	23,46	1,67	29,79	17,41	0,00	0,33	0,02	4,47	0,32	0,00	0,00
2	537,92	325,07	23,38	2,92	0,77	6,28	1,56	0,00	0,04	6,88	0,00	0,00	0,00
3	488,45	392,53	29,30	1,68	47,27	0,87	0,00	1,74	0,41	0,00	0,34	0,00	0,00
4	548,37	323,46	81,25	3,44	0,93	0,15	0,12	5,91	1,10	0,00	0,64	0,00	0,00
5	743,63	527,00	61,44	5,44	4,74	4,33	25,08	6,77	0,25	6,50	1,29	0,00	0,00
6	471,27	362,54	19,63	5,65	5,57	5,42	0,00	0,00	0,24	3,53	0,70	0,00	0,00
7	459,19	354,85	51,46	0,70	0,25	5,57	5,10	2,01	0,18	2,72	0,54	0,00	0,00
8	512,12	510,51	48,21	19,66	18,01	7,72	5,95	5,40	0,49	7,31	1,45	0,00	0,00
9	626,62	454,76	84,49	8,23	19,38	11,71	5,74	5,21	0,47	7,06	1,40	0,00	0,00
10	448,58	197,86	15,31	0,86	3,85	3,13	1,53	1,39	0,13	1,89	0,37	0,00	0,00
11	430,20	405,20	55,48	5,27	7,77	6,32	3,10	2,81	0,26	3,81	0,76	0,00	0,00
12	665,02	377,15	73,36	6,01	8,86	7,21	3,54	3,21	0,29	4,34	0,86	0,00	0,00
13	564,23	618,42	67,91	5,56	8,20	6,67	3,27	2,97	0,27	4,02	0,80	0,00	0,00

Estimados os parâmetros das distribuições propostas pelos modelos para $M_{c,i,j}$ e $N_{c,i,j}$, pôde ser estimada, com base no passo 2 do processo de simulação descrito no Capítulo 4, a matriz ρ .

$$\rho = \begin{bmatrix} 1,00 & -0,17 & 0,11 & 0,09 & 0,03 & -0,02 \\ -0,17 & 1,00 & 0,05 & -0,01 & -0,02 & -0,08 \\ 0,11 & 0,05 & 1,00 & -0,17 & 0,23 & 0,04 \\ 0,09 & -0,01 & -0,17 & 1,00 & 0,00 & 0,16 \\ 0,03 & -0,02 & 0,23 & 0,00 & 1,00 & -0,04 \\ -0,02 & -0,08 & 0,04 & 0,16 & -0,04 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Executando os demais passos do processo de simulação, chega-se aos $S=1000$ pares de triângulos inferiores simulados, de montantes e de número de pagamentos. Ressalta-se que, embora a formulação para determinação da PERDA envolva somente os triângulos inferiores de montantes de pagamentos, a simulação dos triângulos inferiores de números de pagamentos são necessárias, pois a s -ésima simulação do triângulo inferior de montantes de pagamentos é determinada sobre a s -ésima simulação do triângulo inferior de números de pagamentos. A seguir, são apresentados os triângulos de *run-off* completados com os triângulos inferiores dados pelas médias dos valores simulados. Notar a proximidade destes com aqueles das tabelas 16 a 21.

Tabela 22: Números de pagamentos - observados e médias dos simulados - Patrimonial Demais (c=1)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	172	210	51	21	0	3	0	2	0	0	0	2	1
2	191	241	32	10	9	3	2	0	1	2	3	1	1,0
3	173	149	30	15	4	0	1	1	0	0	0	1,1	0,9
4	151	117	28	10	2	2	1	1	1	2	0,7	1,0	0,6
5	142	203	31	11	8	6	7	3	4	1,0	1,0	1,3	0,9
6	172	152	19	16	7	5	6	4	1,2	0,9	0,9	1,2	0,9
7	191	146	46	27	11	6	1	1,9	1,3	1,0	1,0	1,4	0,9
8	162	139	28	7	5	1	2,3	1,6	1,0	0,8	0,7	1,1	0,8
9	90	158	30	11	5	2,5	1,9	1,4	0,9	0,7	0,7	0,8	0,7
10	98	120	19	15	3,8	2,2	1,6	1,2	0,7	0,7	0,6	0,8	0,5
11	91	121	13	9,3	3,6	2,0	1,4	1,1	0,7	0,6	0,6	0,7	0,6
12	101	103	20,1	9,0	3,6	1,8	1,5	1,0	0,8	0,6	0,6	0,8	0,5
13	106	114,1	20,8	9,9	4,0	2,1	1,6	1,1	0,7	0,7	0,5	0,7	0,5

Tabela 23: Montantes de pagamentos - observados e médias dos simulados - Patrimonial Demais (c=1)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	223,29	558,26	269,77	57,17	0,00	2,63	0,00	5,73	0,00	0,00	0,00	26,88	8,45
2	312,83	715,18	68,03	30,17	128,87	1,04	2,52	0,00	2,08	56,67	3,24	6,13	12,23
3	364,63	317,30	56,29	36,20	11,51	0,00	8,84	0,13	0,00	0,00	0,00	11,16	8,18
4	217,83	213,28	151,92	9,11	3,55	10,11	0,18	0,29	2,34	22,83	1,08	8,68	5,74
5	422,02	587,30	58,72	45,68	24,49	18,23	6,27	12,39	3,27	8,34	2,37	15,95	10,56
6	194,96	730,32	146,55	108,49	27,85	4,68	1,58	3,80	2,36	6,64	1,61	12,25	8,29
7	223,97	645,72	154,91	86,50	14,72	8,12	5,70	2,70	3,27	9,14	1,99	18,49	10,89
8	211,43	348,03	48,74	22,41	15,56	1,20	3,01	1,66	1,97	5,28	1,22	9,62	7,28
9	183,64	415,85	55,95	18,12	13,24	3,62	2,36	1,27	1,56	4,07	1,09	7,64	6,17
10	141,09	361,35	66,92	56,06	16,42	4,24	2,61	1,55	1,79	5,23	1,04	8,81	6,24
11	275,32	666,89	55,27	61,86	25,90	6,16	3,96	2,27	2,59	8,24	2,23	14,90	10,58
12	360,53	461,66	151,94	59,23	26,69	6,12	4,16	2,35	3,17	7,75	1,98	16,64	9,89
13	349,34	951,13	173,05	73,00	32,20	7,47	4,95	2,66	2,88	10,27	1,82	15,70	9,39

Tabela 24: Números de pagamentos - observados e médias dos simulados - Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10581	11986	940	183	84	48	58	55	29	32	24	26	14
2	11288	10873	472	154	88	59	35	30	32	39	50	23	14,3
3	10676	9474	688	187	103	66	61	29	66	66	30	21,7	13,7
4	10385	11133	886	227	151	88	80	42	74	35	38,8	23,8	12,6
5	10029	12049	807	264	124	92	67	75	92	46,7	37,6	25,6	13,0
6	10575	11240	904	236	134	115	53	323	59,4	42,6	33,6	26,5	13,7
7	10162	18751	1146	272	195	129	140	121,1	81,1	57,0	45,6	31,0	19,5
8	19064	15721	1212	459	184	70	105,9	153,6	96,3	73,0	55,8	40,2	19,4
9	15122	15275	1620	314	131	108,7	91,8	134,8	81,2	63,1	47,3	33,3	21,0
10	15886	15214	1071	248	157,7	105,9	99,8	135,5	83,3	62,4	48,8	33,4	20,8
11	15659	13367	1046	293,5	160,0	101,6	90,1	126,3	80,0	59,1	44,5	31,6	18,5
12	14162	15276	1106,0	297,5	159,1	99,2	89,3	120,6	75,3	57,7	48,5	31,8	20,0
13	13857	14499,9	1069,1	286,3	149,9	99,4	87,9	124,5	77,4	55,6	47,2	31,7	18,2

Tabela 25: Montantes de pagamentos - observados e médias dos simulados - Automóveis (c=2)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10402,54	7748,00	636,19	122,59	37,18	27,93	64,62	36,20	27,55	28,43	13,22	10,97	18,78
2	11204,41	6909,42	325,25	109,14	71,77	49,48	17,52	30,43	6,46	31,43	53,89	11,01	7,68
3	11296,52	6858,92	496,29	84,74	98,27	35,86	44,67	18,02	35,40	39,70	17,21	5,49	7,56
4	11482,30	7289,89	653,82	164,20	114,22	37,99	23,07	21,73	33,13	14,48	14,17	5,59	6,44
5	11945,90	8536,29	591,76	217,90	84,56	26,15	60,45	51,73	29,08	21,54	17,36	6,80	7,83
6	12050,76	8276,98	451,77	142,70	95,53	54,58	23,57	31,15	15,85	16,17	12,26	5,36	6,79
7	11600,71	8095,10	661,73	138,33	81,22	58,33	55,37	36,24	21,67	22,24	17,01	6,82	10,21
8	11062,21	7770,12	601,37	185,90	86,50	29,58	34,74	38,46	22,09	24,09	17,98	7,93	8,63
9	9456,44	7688,45	490,53	192,67	67,95	32,80	30,35	33,58	18,50	20,66	15,55	6,25	9,08
10	10031,97	7140,46	483,65	113,34	66,84	31,11	30,55	32,02	17,92	19,47	14,50	5,95	8,85
11	9667,51	6346,95	495,17	126,42	66,97	29,79	28,11	29,87	17,40	18,16	13,74	5,81	7,48
12	8709,07	6580,10	462,39	119,37	61,83	27,08	26,75	27,47	14,94	16,41	13,80	5,11	7,54
13	9435,80	6868,06	481,26	122,31	63,35	28,58	27,45	29,35	16,35	17,47	13,71	5,36	7,18

Tabela 26: Números de pagamentos - observados e médias dos simulados - Residencial (c=3)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1028	583	45	5	7	3	0	1	1	2	2	0	0
2	884	465	39	16	7	6	1	0	1	3	0	0	0,0
3	856	553	46	11	8	5	0	4	2	0	1	0,0	0,0
4	1290	587	75	10	13	1	1	3	1	0	1,3	0,0	0,0
5	1479	903	99	19	9	12	7	2	2	2,0	1,6	0,0	0,0
6	703	498	39	10	7	4	0	0	1,0	0,9	0,8	0,0	0,0
7	969	651	31	7	5	9	2	1,7	1,4	1,4	1,2	0,0	0,0
8	1200	782	68	16	11	8	1,9	2,1	1,6	1,6	1,4	0,0	0,0
9	1557	929	77	22	16	9,2	2,3	2,7	2,0	1,9	1,8	0,0	0,0
10	941	323	32	11	6,4	4,6	1,3	1,3	1,0	1,1	0,9	0,0	0,0
11	947	582	62	11,2	7,9	5,3	1,5	1,6	1,3	1,2	1,1	0,0	0,0
12	1492	823	75,2	17,3	11,8	8,1	2,3	2,3	1,8	1,8	1,6	0,0	0,0
13	1433	823,6	73,5	17,0	11,6	8,1	2,4	2,3	1,9	1,8	1,6	0,0	0,0

Tabela 27: Montantes de pagamentos - observados e médias dos simulados - Residencial (c=3)

Período de ocorrência (i)	Prazo de desenvolvimento (j)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	668,16	294,37	23,46	1,67	29,79	17,41	0,00	0,33	0,02	4,47	0,32	0,00	0,00
2	537,92	325,07	23,38	2,92	0,77	6,28	1,56	0,00	0,04	6,88	0,00	0,00	0,00
3	488,45	392,53	29,30	1,68	47,27	0,87	0,00	1,74	0,41	0,00	0,34	0,00	0,00
4	548,37	323,46	81,25	3,44	0,93	0,15	0,12	5,91	1,10	0,00	0,62	0,00	0,00
5	743,63	527,00	61,44	5,44	4,74	4,33	25,08	6,77	0,25	6,53	1,37	0,00	0,00
6	471,27	362,54	19,63	5,65	5,57	5,42	0,00	0,00	0,23	3,07	0,57	0,00	0,00
7	459,19	354,85	51,46	0,70	0,25	5,57	5,10	2,12	0,21	2,64	0,55	0,00	0,00
8	512,12	510,51	48,21	19,66	18,01	7,72	5,83	5,41	0,47	7,41	1,37	0,00	0,00
9	626,62	454,76	84,49	8,23	19,38	12,01	5,45	5,59	0,51	6,41	1,45	0,00	0,00
10	448,58	197,86	15,31	0,86	3,71	3,14	1,51	1,31	0,13	1,86	0,33	0,00	0,00
11	430,20	405,20	55,48	4,92	6,83	6,10	2,83	2,70	0,26	3,08	0,58	0,00	0,01
12	665,02	377,15	75,99	6,23	8,71	6,75	3,39	3,16	0,28	3,81	0,85	0,00	0,00
13	564,23	612,75	67,11	5,26	7,53	6,12	3,17	3,08	0,26	3,99	0,85	0,00	0,00

E, finalmente, é apresentado o histograma dos S=1000 valores simulados para a PERDA, dando uma ideia da distribuição não paramétrica desejada. Os valores simulados para a perda já estão convertidos em Reais.

Histograma dos valores simulados para a PERDA

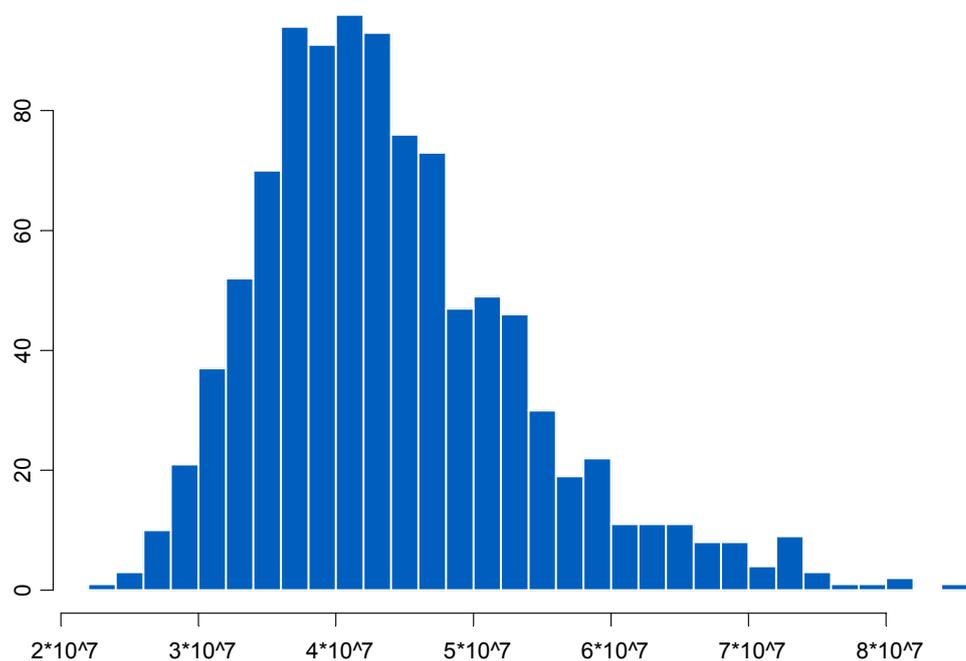


Figura 5: Histograma dos valores simulados para a PERDA

A tabela a seguir apresenta os valores de necessidade de capital, determinados com base no excesso do $TVaR_\alpha$ em relação ao valor esperado, ambos amostrais, determinados com base nos valores simulados para a PERDA.

Tabela 28: valores de necessidade de capital – risco de provisão de sinistros

Nível de confiança (α)	$TVaR_\alpha$	Valor esperado da PERDA	Necessidade de capital (risco de prov. de sinistros)
95,0%	70.018.317,61	- 44.102.480,48	= 25.915.837,13
97,5%	73.886.342,30	- 44.102.480,48	= 29.783.861,82
99,0%	77.700.650,05	- 44.102.480,48	= 33.598.169,57

6.2

Execução do modelo para a determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de emissão/precificação

Na tabela a seguir são apresentadas as séries relativas aos P=13 trimestres de observações das variáveis consideradas no modelo proposto.

Tabela 29: Séries - Patrimonial Demais (c=1)

Trimestre (i)	NE _{c,i}	NSO _{c,i}	SO _{c,i}	PG _{c,i}
1	16.649,16	462,01	1.152,19	2.384,34
2	32.022,50	496,02	1.339,00	2.552,10
3	39.070,21	375,01	814,25	2.758,77
4	25.922,96	317,37	646,96	2.553,50
5	22.491,46	419,18	1.215,61	2.648,61
6	13.764,07	386,01	1.249,36	2.591,65
7	7.238,76	435,54	1.186,15	2.466,41
8	6.530,79	350,14	677,41	2.430,86
9	5.582,18	303,56	714,58	2.108,62
10	3.410,26	264,15	673,36	1.944,30
11	13.450,99	245,62	1.136,15	2.265,18
12	22.880,42	244,22	1.112,10	2.286,29
13	22.871,62	262,77	1.633,84	2.309,83

Tabela 30: Séries - Automóveis (c=2)

Trimestre (i)	NE _{c,i}	NSO _{c,i}	SO _{c,i}	PG _{c,i}
1	592.920,35	24.060,00	19.174,20	28.549,94
2	1.427.721,58	23.157,26	18.827,89	27.423,13
3	401.927,10	21.481,46	19.038,65	27.404,60
4	806.813,40	23.176,18	19.861,01	31.207,49
5	479.667,10	23.721,87	21.597,37	27.730,92
6	253.245,40	23.755,84	21.183,47	28.527,21
7	157.492,20	31.150,37	20.804,98	27.392,00
8	89.237,83	37.254,16	19.889,60	25.673,81
9	34.434,91	33.043,06	18.062,82	30.226,57
10	44.112,71	33.166,64	17.996,63	26.750,27
11	1.227.734,86	31.077,25	16.853,38	25.340,43
12	753.730,53	31.543,14	16.071,86	25.491,87
13	542.542,22	30.404,12	17.116,22	25.668,07

Tabela 31: Séries - Residencial (c=3)

Trimestre (i)	NE _{c,i}	NSO _{c,i}	SO _{c,i}	PG _{c,i}
1	69.079,16	1.677,00	1.039,99	1.502,50
2	70.954,33	1.422,01	904,83	1.570,70
3	85.163,51	1.486,01	962,61	1.650,33
4	113.680,37	1.982,28	965,35	1.885,29
5	174.244,07	2.535,61	1.386,57	1.702,45
6	387.297,73	1.263,75	873,95	1.744,52
7	491.732,75	1.679,60	882,63	1.785,68
8	447.371,67	2.093,48	1.136,73	1.806,59
9	378.659,67	2.621,04	1.224,90	1.698,67
10	174.400,62	1.323,58	674,62	1.848,95
11	149.678,62	1.622,04	918,20	1.848,36
12	155.560,24	2.437,10	1.151,34	2.150,30
13	138.369,12	2.376,89	1.274,33	1.834,78

Tabela 32: Séries gerais da companhia

Trimestre (i)	DA _i	ORDOP _i	SELIC _i
1	11.162,13	2.160,77	9,07%
2	12.836,55	5.314,02	8,66%
3	12.038,97	3.989,43	8,34%
4	12.835,23	4.203,56	9,21%
5	13.175,98	7.028,82	10,91%
6	13.022,05	6.592,53	10,69%
7	13.624,39	6.636,62	11,03%
8	12.928,55	11.239,56	11,72%
9	13.274,55	3.511,43	12,61%
10	15.482,23	4.968,46	11,13%
11	15.538,70	4.662,80	10,30%
12	14.960,56	5.009,86	8,72%
13	15.579,96	5.277,35	7,92%

Os valores acima relativos à taxa Selic foram construídos com base nos valores obtidos do *site* do IPEA, estas taxas a.m. Foram, então, compostas as taxas relativas aos meses de cada trimestre, obtendo-se então as taxas a.t., sendo depois estas convertidas para taxas a.a.

Os valores futuros $SELIC_k$, referentes aos períodos $k = 14, \dots, 17$ que compõem o horizonte de tempo de 1 ano considerado, foram obtidos do site do Banco Central do Brasil, sendo estes referentes a projeções de mercado. Os valores obtidos, sendo taxas a.m., foram então compostos dentro dos trimestres, determinando as taxas a.t., sendo depois estas convertidas para taxas a.a., dispostas na tabela a seguir. Tais valores são necessários para a obtenção das simulações dos S caminhos futuros para a série $NE_{c,k}$, $c = 1, \dots, 3$ e $k = 14, \dots, 17$.

Tabela 33: Projeções da Selic

Trimestre (i)	$SELIC_i$
14	7,39%
15	7,40%
16	7,55%
17	7,83%

A seguir, são apresentados os valores estimados para os parâmetros das modelagens estocásticas propostas para as séries.

Tabela 34: Parâmetros estimados – modelo para $\ln(NE)$

Classe de negócio (c)	$\ln(NE)_1\beta_c$	$\ln(NE)_2\beta_c$	$\ln(NE)_3\beta_c$	$\ln(NE)_4\beta_c$	$\ln(NE)_5\beta_c$	$\ln(NE)_6\beta_c$
1	13,9618	-0,0558	-38,9897	-0,0209	-0,3193	-0,0592
2	19,2054	-0,0459	-60,6465	-0,2359	-0,3322	0,0779
3	8,3087	0,0482	35,4982	-0,2676	-0,1690	-0,0318

Tabela 35: Parâmetros estimados – modelo para $\ln(\text{NE})$ – ajuste ARIMA

Classe de negócio (c)	$\ln(\text{NE})_{\delta} \sigma_c$	$\ln(\text{NE})_{p_c}$	$\ln(\text{NE})_{i_c}$	$\ln(\text{NE})_{q_c}$	AR(i-1)	AR(i-2)	AR(i-3)	$\ln(\text{NE})_{\epsilon} \sigma_c$
1	0,3627	3	1	0	-0,5000	-0,3989	0,3190	1,0145
2	0,7425	3	0	0	-0,2216	-0,4590	-0,2916	0,8469
3	0,3578	2	0	0	0,9352	-0,7081		0,6831

Tabela 36: Parâmetros estimados – modelo para NSO

Classe de negócio (c)	$\text{NSO} \phi_c$	$\text{NSO}_1 \beta_c$	$\text{NSO}_2 \beta_c$	$\text{NSO}_3 \beta_c$
1	6,4967	6,7191	-0,0582	-0,0493
2	292,9526	10,7989	0,0314	-0,0617
3	122,9317	7,1241	0,0246	0,0200

Tabela 37: Parâmetros estimados – modelo para PG

Classe de negócio (c)	$\text{PG}_1 \beta_c$	$\text{PG}_2 \beta_c$	$\text{PG}_3 \beta_c$
1	0,000671	4,10E-06	-2,9E-05
2	2,53E-05	3,99E-07	6,56E-07
3	0,000636	-9,87E-06	1,91E-08

Tabela 38: Parâmetros estimados – modelo para SO

Classe de negócio (c)	$\text{SO}_1 \beta_c$	$\text{SO}_2 \beta_c$	$\text{SO}_3 \beta_c$	$\text{SO}_4 \beta_c$
1	0,004096	-9,3E-05	-3,50E-06	-5,08E-07
2	6,51E-05	8,04E-07	-1,69E-10	-4,74E-10
3	0,001300	4,82E-06	-3,67E-07	2,01E-07

Tabela 39: Parâmetros estimados – modelo para DA

$\text{DA}_1 \beta$	$\text{DA}_2 \beta$	$\text{DA}_3 \beta$
-30715,8	0,331897	0,315255

Tabela 40: Parâmetros estimados – modelo para DA – ajuste ARIMA

DA_{δ} σ	DA_p	DA_i	DA_q	AR(i-1)	AR(i-2)	AR(i-3)	MA(i-1)	DA_{ϵ} σ
1021,08	3	1	1	-0,0621	-0,2764	-0,0371	0,9836	0,6191

Tabela 41: Parâmetros estimados – modelo para ORDOP

$ORDOP_1\beta$	$ORDOP_2\beta$	$ORDOP_3\beta$
12064,63	-0,76067	0,829977

Tabela 42: Parâmetros estimados – modelo para ORDOP – ajuste ARIMA

$ORDOP_{\delta}$ σ	$ORDOP_p$	$ORDOP_i$	$ORDOP_q$	AR(i-1)	AR(i-2)	AR(i-3)	MA(i-1)	$ORDOP_{\epsilon}$ σ
1581,13	3	1	1	-0,8637	-0,5597	-0,5650	-0,9827	0,7592

As figuras a seguir mostram, para cada série à qual foi ajustada modelagem estocástica, o cruzamento dos valores observados com os respectivos valores ajustados, permitindo uma avaliação dos ajustes realizados.

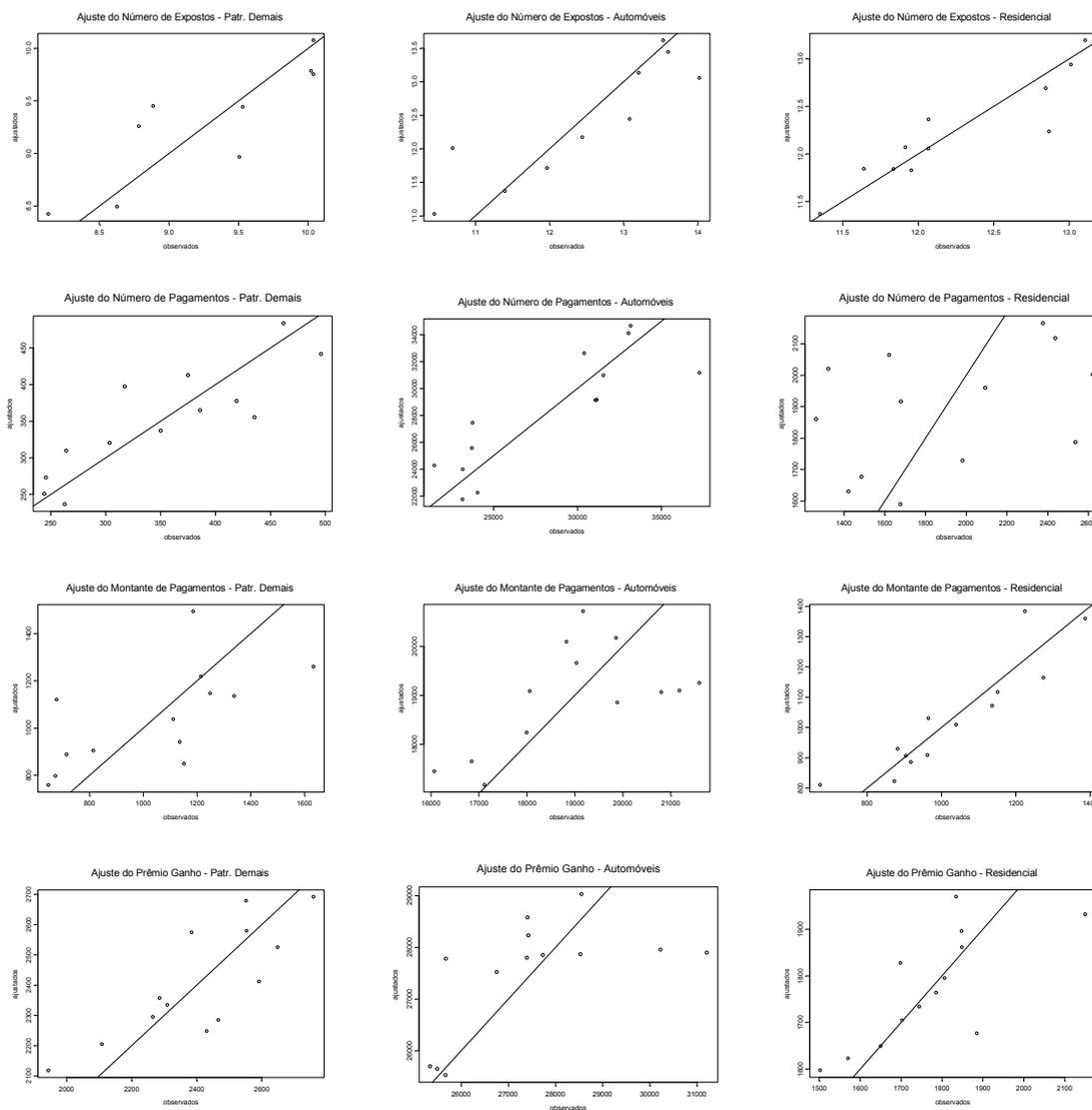


Figura 6: Cruzamentos entre valores observados e ajustados para as séries (parte 1)

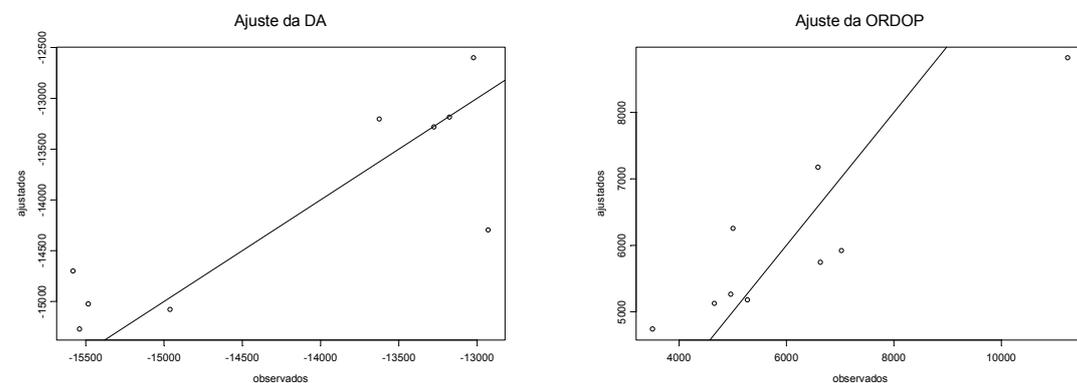


Figura 7: Cruzamentos entre valores observados e ajustados para as séries (parte 2)

Estimados os parâmetros das distribuições propostas pelos modelos ajustados às séries, estimamos a matriz ρ , com base no passo 2 do processo de simulação descrito no Capítulo 5.

$$\rho = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,07 & 0,22 & 0,84 & -0,08 & 0,18 & -0,19 & 0,75 & 0,35 & -0,39 & 0,46 & 0,26 & 0,04 & 0,49 \\ 0,07 & 1,00 & 0,09 & 0,24 & -0,67 & 0,11 & -0,53 & -0,16 & 0,24 & -0,42 & 0,17 & -0,40 & 0,69 & 0,60 \\ 0,22 & 0,09 & 1,00 & 0,09 & 0,25 & -0,03 & -0,20 & -0,04 & 0,16 & 0,16 & 0,17 & 0,08 & 0,48 & 0,11 \\ 0,84 & 0,24 & 0,09 & 1,00 & -0,30 & 0,10 & -0,21 & 0,81 & 0,67 & -0,27 & 0,62 & 0,45 & 0,33 & 0,68 \\ -0,08 & -0,67 & 0,25 & -0,30 & 1,00 & -0,39 & 0,34 & -0,22 & -0,30 & 0,48 & -0,10 & 0,40 & -0,50 & -0,74 \\ 0,18 & 0,11 & -0,03 & 0,10 & -0,39 & 1,00 & 0,21 & -0,08 & 0,40 & -0,26 & 0,08 & 0,10 & 0,12 & -0,04 \\ -0,19 & -0,53 & -0,20 & -0,21 & 0,34 & 0,21 & 1,00 & -0,18 & 0,30 & 0,78 & 0,46 & 0,19 & -0,61 & -0,64 \\ 0,75 & -0,16 & -0,04 & 0,81 & -0,22 & -0,08 & -0,18 & 1,00 & 0,31 & -0,27 & 0,34 & 0,30 & 0,02 & 0,64 \\ 0,35 & 0,24 & 0,16 & 0,67 & -0,30 & 0,40 & 0,30 & 0,31 & 1,00 & 0,25 & 0,80 & 0,51 & 0,42 & 0,30 \\ -0,39 & -0,42 & 0,16 & -0,27 & 0,48 & -0,26 & 0,78 & -0,27 & 0,25 & 1,00 & 0,46 & 0,16 & -0,30 & -0,53 \\ 0,46 & 0,17 & 0,17 & 0,62 & -0,10 & 0,08 & 0,46 & 0,34 & 0,80 & 0,46 & 1,00 & 0,21 & 0,06 & 0,23 \\ 0,26 & -0,40 & 0,08 & 0,45 & 0,40 & 0,10 & 0,19 & 0,30 & 0,51 & 0,16 & 0,21 & 1,00 & 0,08 & -0,18 \\ 0,04 & 0,69 & 0,48 & 0,33 & -0,50 & 0,12 & -0,61 & 0,02 & 0,42 & -0,30 & 0,06 & 0,08 & 1,00 & 0,62 \\ 0,49 & 0,60 & 0,11 & 0,68 & -0,74 & -0,04 & -0,64 & 0,64 & 0,30 & -0,53 & 0,23 & -0,18 & 0,62 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Executando os demais passos do processo de simulação, chega-se aos $S=1000$ caminhos futuros para cada uma das séries consideradas no modelo. Ressalta-se que a simulação de índice (s,k) de uma variável poderá ser necessária na determinação da simulação de índice (s,k) de outra variável, dependendo do modelo proposto para esta segunda variável. Por exemplo, como a modelagem proposta para ajuste à série SO tem como variáveis explicativas NSO e PG, o valor simulado $SO_{s,c,k}$ é determinado utilizando-se os valores simulados $NSO_{s,c,k}$ e $PG_{s,c,k}$; por sua vez, como o modelo ajustado à NSO tem como variável explicativa $\ln(NE)$, o valor $NSO_{s,c,k}$ é determinado utilizando-se o valor simulado $NE_{s,c,k}$, e assim por diante.

A seguir, são apresentados gráficos de cada uma das séries consideradas, completadas pelas médias dos $S=1000$ valores simulados para cada período futuro $k=14, \dots, 15$. Ainda, são apresentados intervalos de confiança de 95%, calculados de forma não paramétrica, com base nos valores simulados.

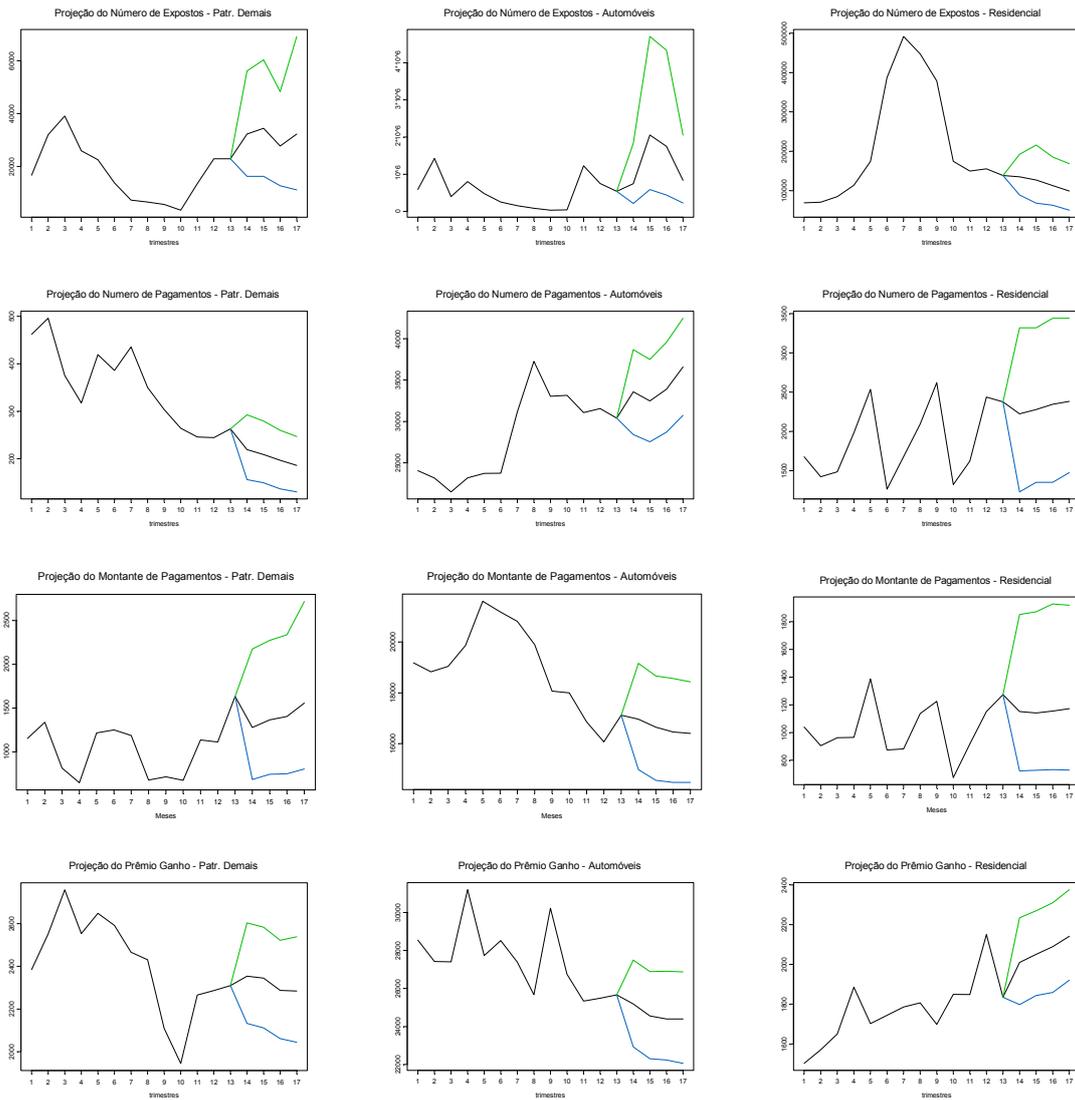


Figura 8: Projeções das séries (parte 1)

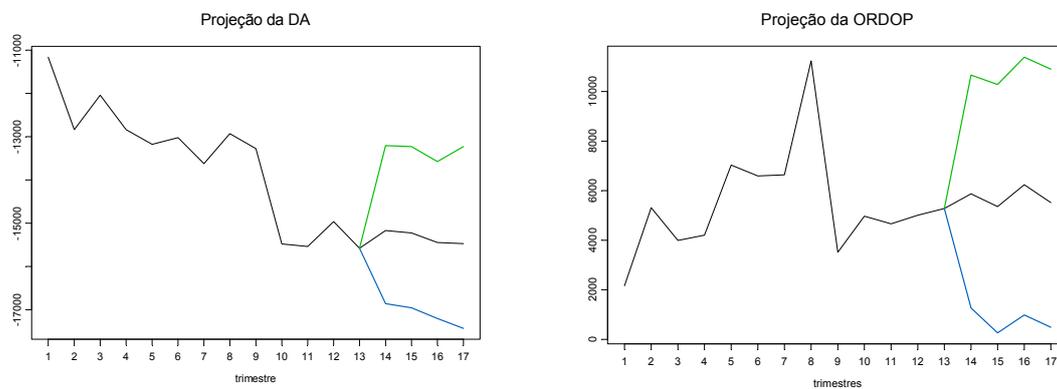


Figura 9: Projeções das séries (parte 2)

Por fim, é apresentado histograma dos $S=1000$ valores simulados para o RS, representando a distribuição não paramétrica desejada. Os valores simulados para RS já estão convertidos em Reais.

Histograma dos valores simulados para o RS

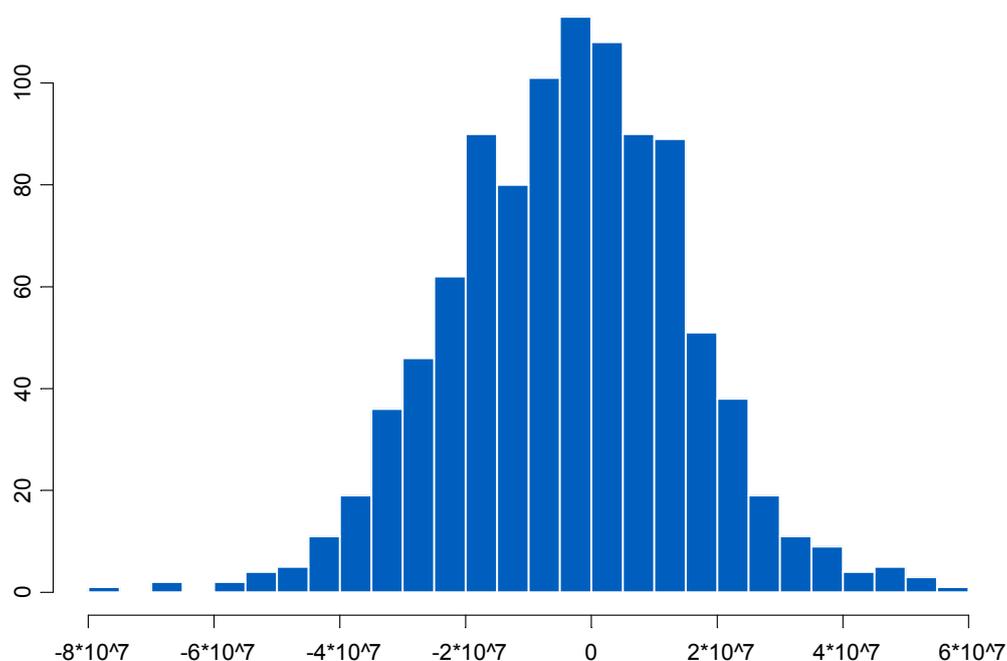


Figura 10: Histograma dos valores simulados para o RS

A tabela a seguir apresenta os valores de necessidade de capital, determinados com base no TVaR_α determinado com base nos valores simulados, considerando diferentes níveis de confiança α .

Tabela 43: valores de necessidade de capital – risco de emissão/precificação

Nível de confiança (α)	Necessidade de capital (risco de emissão/precificação)
95,0%	35.224.560,61
97,5%	41.815.730,99
99,0%	48.992.635,47

6.3

Determinação da necessidade de capital para fazer frente ao risco de subscrição

Finalmente, podemos determinar a necessidade de capital para fazer frente ao risco de subscrição somando os respectivos valores encontrados nos dois módulos, de risco de provisão de sinistro e de risco de emissão/precificação. Deve-se destacar que esse procedimento tem embutida a hipótese de que a correlação entre os riscos de provisão de sinistros e de emissão/precificação é igual a 1, o que é uma hipótese de certa forma conservadora, mas não absurda.

A seguir, para cada nível de confiança, é apresentada tabela final com a necessidade de capital calculada por cada um dos módulos e o seu valor final, dado pela soma.

Tabela 44: valores de necessidade de capital – risco de subscrição (total)

Nível de confiança (α)	Necessidade de capital (risco de prov. de sinistros)		Necessidade de capital (risco de emissão/precificação)		Necessidade de capital (risco de subscrição total)
95,0%	25.915.837,13	+	35.224.560,61	=	61.140.397,74
97,5%	29.783.861,82	+	41.815.730,99	=	71.599.592,81
99,0%	33.598.169,57	+	48.992.635,47	=	82.590.805,04

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho desenvolvemos um modelo visando à avaliação da necessidade de capital de uma sociedade seguradora para fazer frente aos riscos categorizados como de subscrição, sendo estes os ligados diretamente à operação básica da companhia, ou seja, o oferecimento de coberturas de seguros. Assim, basicamente, os riscos de subscrição são aqueles relacionados às possíveis perdas associadas às operações de formação de produto, precificação, processo de subscrição e aceitação de riscos, formação de provisões, processo de regulação e liquidação de sinistros.

Tal modelo apresenta-se dividido em dois módulos, cada qual buscando cobrir uma componente do risco da subscrição. O Módulo 1 busca cobrir a componente do “risco de provisão de sinistro”, relativa aos riscos associados à formação de provisões para pagamento de sinistros e sua inadequação frente a desenvolvimento adverso dos pagamentos referentes a sinistros ocorridos. Já o Módulo 2 cobre a componente do “risco de emissão/precificação”, associado ao resultado futuro da operação de seguro (prêmio ganho e receitas operacionais cobrindo sinistros ocorridos e despesas operacionais e administrativas), sendo assim afetado pelas questões relativas a desenho do produto, formação de preço, política de subscrição, etc.

Houve a preocupação em deixar o modelo descrito de forma que permitisse sua pronta aplicação. A execução do modelo com dados reais, realizadas no Capítulo 6, colabora no entendimento de como o modelo pode ser implementado. Basicamente, os dois módulos do modelo contemplam as etapas de:

1. Ajuste de modelos para os dados observados, sendo estes:
 - a. No Módulo 1: os triângulos de *run-off* de números e montantes de pagamento relativos a sinistros ocorridos, abertos por classes de negócio;

- b. No Módulo 2: as diferentes séries trimestrais de dados, algumas abertas por classes de negócio, outras gerais da companhia;
2. Simulação:
 - a. Determinação da matriz de correlação que mede a dependência linear entre os diferentes triângulos de *run-off*, no Módulo 1, e as diferentes séries trimestrais, no Módulo 2;
 - b. Geração de elementos de uma cópula Gaussiana multivariada, dada a estrutura de dependência medida pela matriz de correlação;
 - c. Simulação de valores ainda não observados (triângulos inferiores complementares aos triângulos de *run-off* no Módulo 1 e projeções dos valores das séries de dados para os próximos 4 trimestres no Módulo 2), fazendo uso dos elementos gerados da cópula Gaussiana, garantindo assim que, em cada simulação de índice s , a estrutura de dependência seja observada;
 3. Determinação de S valores simulados para a PERDA (Módulo 1) e para o RS (Módulo 2), definindo distribuições não paramétricas para tais variáveis;
 4. Determinação da necessidade de capital para fazer frente aos riscos de provisão de sinistros (Módulo 1) e aos riscos de emissão/precificação (Módulo 2), através do cálculo da medida de risco TVaR aplicada às respectivas distribuições;
 5. Determinação da necessidade final de capital para fazer frente aos riscos de subscrição, como a soma dos valores determinados por cada módulo.

Importante ressaltar que o foco desta dissertação está no processo de simulação aqui proposto, respeitando estruturas de dependência existentes, através do uso do conceito de cópulas condicionais, descrito no Capítulo 3. Assim, outros modelos podem vir a ser ajustados aos triângulos de *run-off* ou às séries trimestrais, desde que se mostrem mais adequados aos dados de uma companhia específica. Os modelos aqui ajustados surgiram como fruto de várias tentativas com dados de algumas seguradoras, com o objetivo de encontrar modelos que se adequassem relativamente bem a carteiras de diferentes companhias.

Outros pontos podem ainda serem trabalhados e desenvolvidos, em relação a este exercício de modelagem. Por exemplo, em relação à modelagem das estruturas de dependência, pode ser avaliado o uso de outras famílias de cópulas que não a Gaussiana, especialmente tendo em vista que a família Gaussiana pressupõe independência assintótica nas caudas (Sandström, 2011, p.181).

Dessa forma, espera-se que o resultado deste projeto, assim como os conceitos aqui trabalhados, venham a ser úteis, tanto para reguladores, quanto para companhias que pretendam desenvolver seus próprios modelos, mas que também seja visto como ponto de partida para futuros desenvolvimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A.M. Best. (2004). **Understanding BCAR For Life and Health Insurers: A.M. Best's Capital Adequacy Ratio for Life/Health Insurers and Its Implications for Ratings.** Publicação eletrônica (<http://www.ambest.com/ratings/bcar.pdf>) visualizada em fevereiro, 2013.

AS/NZS 4360:1995. **Standard on Risk Management.** Standards Australia & Standards New Zealand.

Box, G.; Jenkins, G. (1970). **Time series analysis: Forecasting and control.** San Francisco: Holden-Day

Cardoso, P.A. (2008). **Uma metodologia para estimação do capital econômico: incorporação de dependência entre riscos via cópulas.** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CEIOPS. (2009). **CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR standard formula – Article 111 Non-Life Underwriting Risk.** CEIOPS-DOC-41-09. Outubro.

Cherubini, U.; Luciano, E.; Vecchiato, W. (2004). **Copula methods in finance.** Wiley Finance Series, John Wiley & Sons Ltd.

de Jong, P.; Heller, G.Z. (2008). **Generalized Linear Models for Insurance Data.** International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press.

EMBRECHTS, P.; McNEIL, A.; STRAUMANN, D. (1999). **Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls.** <ftp://magellan-03.math.ethz.ch/hg/users/embrecht/pitfalls.pdf>

England; P.D.; Verrall, R.J. (2002). **Stochastic claims reserving in general insurance,** British Actuarial Journal. 8, III, 443-544.

Ferreira, P.P. (2005). **Modelos de Precificação e Ruína para Seguros de Curto Prazo.** 2ª edição. Funenseg.

Franklin et al. (2011). **A estrutura a termo de taxas de juros no Brasil: modelos, estimação, interpolação, extrapolação e testes.**

Frees E.W.; Valdez, E.A. (1998). **Understanding Relationships Using Copulas.** North American Actuarial Journal, Volume 2, Number 1.

Hardy, M.R. (2006). **An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications.** <http://alm.soa.org/files/edu/C-25-07.pdf>

Hossack, I.B.; Pollard, J.H.; Zehnwirth B. (1999). **Introductory Statistics with Applications in General Insurance**. Second Edition. Cambridge University Press.

Hull, J.C. (2002). **Options, Futures, and Other Derivatives**. 5th ed., Prentice Hall.

IAA. (2004). **A Global Framework for Insurer Solvency Assessment**. International Actuarial Association, Ontario, ISBN: 0-9733449-0-3.

IAIS. (2011). **Principles, Standards, Guidance and Assessment Methodology**. International Association of Insurance Supervisors, Basel, Outubro.

Kaas, R. et al. (2008). **Modern Actuarial Risk Theory: Using R**. Second Edition. Springer.

McNeil, A.J.; Frey, R.; Embrechts P. (2005). **Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools**. Princeton University Press.

Neto, W.M.L. (2004). **Avaliação do capital baseado nos riscos de subscrição das provisões de sinistro, utilizando modelos Bayesianos**. M.Sc. dissertação, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.

Sandström, A. (2011). **Handbook of solvency for actuaries and risk managers: theory and practice**. Chapman & Hall/CRC finance series. ISBN 978-1-4398-2130-5.

Sklar, A. (1959). **Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges**. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, 229–231.