



Mariana Gomes Dias dos Santos

**Estratégias de aproximações analíticas
hierárquicas de problemas não lineares:
métodos de perturbação**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Roberta de Queiroz Lima

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Mariana Gomes Dias dos Santos

Possui graduação em Engenharia de Produção pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2016) e mestrado em Engenharia Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2019).

Ficha Catalográfica

Gomes Dias dos Santos, Mariana

Estratégias de aproximações analíticas hierárquicas de problemas não lineares: métodos de perturbação / Mariana Gomes Dias dos Santos; orientador: Roberta de Queiroz Lima. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2019.

v., 70 f: il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica .

Inclui bibliografia

1. métodos de perturbação;. 2. aproximações analíticas;. 3. equação de Duffing;. 4. stick-slip;. 5. álgebra simbólica;. I. de Queiroz Lima, Roberta. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica . III. Título.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha orientadora, Professora Roberta de Queiroz Lima, por todo incentivo, dedicação e ensinamentos durante esses dois anos de mestrado. Ao Professor Rubens Sampaio, meus agradecimentos, pelos ensinamentos e pelas referências fornecidas.

Agradeço também à todos os professores do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, com quem tive aula no primeiro ano de mestrado, aos funcionários do departamento, e em especial ao Wagner, técnico do Laboratório de vibrações, por sempre estar disposto a ajudar.

Meu especial agradecimento, aos meus pais, Carluccio Souza e Ana Cristina Gomes, por todo amor e apoio incondicional que vocês me deram durante toda a minha vida, e por sempre acreditarem em mim. À minha madrinha, Carmelucia Souza, obrigada por todo amor, amizade e companheirismo.

Desejo igualmente agradecer a todos os meus colegas de mestrado, que se tornaram grandes amigos, Barbara Lavor, Bruno Cayres, Gabriela Martins, Ingrid Pires, Marília Asaad e Luis Fernando. Gostaria de agradecer em especial à Ingrid, pelos incentivos, companheirismo, e principalmente por sempre me encorajar. À Gabriela Martins, por todo apoio e paciência.

Agradeço também a amizade e apoio dos meus amigos Ana Luiza Barchilon, Camila Cunha, Juliana Talon, Mariana Brandão, Marianna Botelho, Matheus Borgerth e Paloma Rodrigues. Em especial à Ana Luiza Barchilon, por todo incentivo, apoio, conversas que me animaram em momentos difíceis e por ter sido tão presente nesses últimos dois anos. À Marianna Botelho, por todo apoio, e pelo dom de saber quando estou precisando de uma boa conversa. À Mariana Brandão, por toda paciência, revisões e pelo carinho. Às minhas irmãs de coração, Camila Cunha e Paloma Rodrigues, por estarem sempre comigo. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Gomes Dias dos Santos, Mariana; de Queiroz Lima, Roberta. **Estratégias de aproximações analíticas hierárquicas de problemas não lineares: métodos de perturbação**. Rio de Janeiro, 2019. 70p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Problemas dinâmicos governados por problemas de valor inicial (PVI) não lineares, em geral, despertam grande interesse da comunidade científica. O conhecimento da solução desses PVI facilita o entendimento das características dinâmicas do problema. Porém, infelizmente, muitos dos PVI de interesse não têm solução conhecida. Nesse caso, uma alternativa é o cálculo de aproximações para a solução. Métodos numéricos e analíticos são eficientes nessa tarefa e podem fornecer aproximações com a precisão desejada. Os métodos numéricos foram muito desenvolvidos nos últimos anos e amplamente aplicados em problemas de diversas áreas da engenharia. Pacotes computacionais de fácil utilização foram criados e hoje fazem parte dos mais tradicionais programas de simulação numérica. Entretanto, as aproximações numéricas têm uma desvantagem em relação às aproximações analíticas. Elas não permitem o entendimento de como a solução depende dos parâmetros do problema. Visto isso, esta dissertação foca na análise e implementação de técnicas analíticas denominadas métodos de perturbação. Foram estudados os métodos de Lindstedt-Poincaré e de múltiplas escalas de tempo. As metodologias foram aplicadas em um PVI envolvendo a equação de Duffing não amortecida. Programas em álgebra simbólica foram desenvolvidos com objetivo de calcular aproximações analíticas hierárquicas para a solução desse problema. Foi feita uma análise paramétrica, ou seja, estudo de como as condições iniciais e os valores de parâmetros influem nas aproximações. Além disso, as aproximações analíticas obtidas foram comparadas com aproximações numéricas calculadas através do método do Runge-Kutta. O método de múltiplas escalas de tempo também foi aplicado em um PVI que representa a dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor com atrito seco. Devido ao atrito, a resposta do sistema pode ser caracterizada em duas fases alternadas, a fase de *stick* e a fase de *slip*, compondo um fenômeno chamado *stick-slip*. Verificou-se que as aproximações obtidas para resposta do sistema pelo método de múltiplas escalas de tempo têm boa acurácia na representação da dinâmica do *stick-slip*.

Palavras-chave

métodos de perturbação; aproximações analíticas; equação de Duffing; *stick-slip*; álgebra simbólica;

Abstract

Gomes Dias dos Santos, Mariana; de Queiroz Lima, Roberta (Advisor). **Strategies of hierarchical analytical approximations of non-linear problems: perturbation methods**. Rio de Janeiro, 2019. 70p. Dissertação de mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Dynamical problems governed by non-linear initial value problems (IVP), in general, are of great interest of the scientific community. The knowledge of the solution of these IVPs facilitates the understanding of the dynamic characteristics of the problem. However, unfortunately, many of the IVPs of interest does not present a known solution. In this case, an alternative is to calculate approximations for the solution. Numerical and analytical methods are efficient in this assignment and can provide approximations with the desired precision. Numerical methods have been developed over the last years and have been widely applied to dynamical problems in various engineering areas. Computational packages, easy to use, were created and today are part of the most traditional numerical simulation programs. However, numerical approximations have a disadvantage in relation to analytical approaches. They do not allow the understanding of how the solution depends on the problem parameters. Given this, this dissertation focuses on the analysis and implementation of analytical techniques called perturbation methods. The Lindstedt-Poincaré method and multiple time scales method were studied. The methodologies were applied in an IVP involving the non-damped Duffing equation. Symbolic algebra programs were developed with the purpose of calculating hierarchical analytical approximations to the solution of this problem. A parametric analysis was performed, in other words, a study of how the approximations are influenced by initial conditions and parameter values. In addition, the analytical approximations obtained were compared with numerical approximations calculated using the Runge-Kutta method. The multiple scales method was also applied in a IVP that represents the dynamics of a mass-spring-damper oscillator with dry friction. Due to friction, the system response can be characterized in two alternating phases, the stick phase and the slip phase, composing a phenomenon called stick-slip. It was verified that the approximations obtained for system response by the multiple scales method represent the stick-slip dynamics with good accuracy.

Keywords

perturbation method; analytical approximation; Duffing equation; stick-slip; symbolic algebra;

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Métodos numéricos	12
1.2	Métodos analíticos de perturbação	13
1.3	Objetivos da dissertação	15
1.4	Organização da dissertação	15
2	Métodos de Lindstedt-Poincaré	17
2.1	Equação de Duffing	19
2.1.1	Custo Computacional	22
2.1.2	Domínio de validade	25
3	Métodos de múltiplas escalas de tempo	32
3.1	Equação de Duffing	37
3.2	Domínio de validade	42
3.2.1	Comparação entre as aproximações obtidas por Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas	43
4	Método de múltiplas escalas aplicado em um PVI com atrito seco	46
4.1	Descrição do sistema	47
4.2	Cálculo de aproximações analíticas para as fases de slip	50
4.3	Comparação entre as aproximações numérica e analítica de um PVI com atrito seco	53
5	Conclusões	56
A	Artigos publicados	58
B	Programa em álgebra simbólica para o método de Lindstedt-Poincaré	60
C	Programa em álgebra simbólica para o método de múltiplas escalas de tempo	62
	Referências bibliográficas	66

Lista de figuras

Figura 1.1	Discretização do tempo	12
Figura 2.1	Tempo gasto pelo computador para calcular diferentes ordens de aproximação através do método de Lindstedt-Poincaré, usando um computador com configuração de: Intel Core i5-7200U CPU @ 2.50GHz 2.71 GHz, 8 GB de RAM.	24
Figura 2.2	Memória usada pelo computador para calcular diferentes ordens de aproximação através do método de Lindstedt-Poincaré, usando um computador com configuração de: Intel Core i5-7200U CPU @ 2.50GHz 2.71 GHz, 8 GB de RAM.	25
Figura 2.3	Comparação entre as aproximações numérica (azul) e analítica (vermelha) com recortes em três intervalos de integração com os seguintes valores de parâmetro não linearidade= 1.5, $\omega_0 = 1$, $A_0 = 0.5$.	26
Figura 2.4	Discretização do intervalo de integração $[0, T]$.	27
Figura 2.5	Exemplo de uma situação em que as aproximações numéricas e analíticas estão com defasagem máxima de forma que o erro acumulativo seja máximo.	27
Figura 2.6	Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração entre as aproximações analíticas e numéricas, considerando os valores de não linearidade= 0.75, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 0.5$.	29
	2.6(a)1º ordem e 2º ordem	29
	2.6(b)2º ordem e 3º ordem	29
	2.6(c)3º ordem e 4º ordem	29
	2.6(d)4º ordem e 5º ordem	29
	2.6(e)5º ordem e 6º ordem	29
Figura 2.7	Erro não acumulativo em função da condição inicial $x(0) = A_0$ com não linearidade= 0.5, $\omega_0 = 1$ e $T = 500$.	30
Figura 2.8	Erro não acumulativo em função da não linearidade com $A_0 = 0.6$, $\omega_0 = 1$ e $T = 500$.	30
Figura 2.9	Erro acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração considerando não linearidade= 0.75, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 0.5$.	31
	2.9(a)1º ordem e 2º ordem	31
	2.9(b)2º ordem e 3º ordem	31
	2.9(c)3º ordem e 4º ordem	31
	2.9(d)4º ordem e 5º ordem	31
	2.9(e)5º ordem e 6º ordem	31
Figura 3.1	Comparação entre a expansão regular dada pela Eq. (3-4) e a solução analítica dada pela Eq. (3-3) com $\epsilon = 10^{-1}$.	33
Figura 3.2	Comparação entre a expansão regular dada pela Eq. 3-5 e a solução analítica dada pela Eq. 3-3 com $\epsilon = 10^{-1}$.	34
Figura 3.3	Comparação entre a aproximação dada pela Eq. (3-16) e a solução analítica dada pela Eq. (3-3) com $\epsilon = 10^{-1}$.	37

- Figura 3.4 Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$. 43
- Figura 3.5 Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, das aproximações analíticas com 1 termo calculadas pelos métodos de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas de tempo, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$. 44
- Figura 3.6 Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, das aproximações analíticas com 2 termo calculadas pelos métodos de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas de tempo, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$. 44
- Figura 3.7 Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, das aproximações analíticas com 3 termo calculadas pelos métodos de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas de tempo, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$. 45
- Figura 4.1 Sistema massa-mola-amortecedor com atrito seco. 47
- Figura 4.2 Modelo da força de atrito da Eq. (4-2), considerando $a = 0.1$ e $f_d = 0.5$. 48
- Figura 4.3 Fases de *stick* e *slip*. 49
- Figura 4.4 Parte do algoritmo utilizado para calcular a aproximação numérica. 53
- Figura 4.5 Parte do algoritmo utilizado para calcular a aproximação analítica. 54
- Figura 4.6 Deslocamentos da massa calculados através das aproximações numérica e analítica considerando $\epsilon = 0.0001$, $v = 1$ [m/s], $m = 1$ [Kg], $k = 0.1$ [N/m], $\beta = 1$ [Ns/m], $a = 0.1$, $f_e = 1$ [N], $f_d = 0.5$ [N], $S = 1$ [m] e $Q = 1$ [m/s]. 54
- Figura 4.7 Velocidade da massa calculados através das aproximações numérica e analítica considerando $\epsilon = 0.0001$, $v = 1$ [m/s], $m = 1$ [Kg], $k = 0.1$ [N/m], $\beta = 1$ [Ns/m], $a = 0.1$, $f_e = 1$ [N], $f_d = 0.5$ [N], $S = 1$ [m] e $Q = 1$ [m/s]. 55
- Figura 4.8 Diagramas de fase obtidos através das aproximações numérica e analítica considerando $\epsilon = 0.0001$, $v = 1$ [m/s], $m = 1$ [Kg], $k = 0.1$ [N/m], $\beta = 1$ [Ns/m], $a = 0.1$, $f_e = 1$ [N], $f_d = 0.5$ [N], $S = 1$ [m] e $Q = 1$ [m/s]. 55
- Figura 4.9 Instantes de transição entre a fase de *stick* e *slip* obtidas através das aproximações numérica e analítica. 55

Lista de tabelas

Tabela 2.1 Relação entre ordem da aproximação, número de equações na família de PVI, número de termos do lado direito de cada equação e total de termos.

23

1

Introdução

Problemas dinâmicos, em geral, são governados por problemas de valor inicial (PVI) compostos por equações diferenciais ordinárias (EDO) e condições iniciais. Equações diferenciais ordinárias são equações que envolvem uma função desconhecida e suas derivadas que, por sua vez, são dependentes de apenas uma variável independente. No caso de sistemas mecânicos, é muito comum a função ter como variável independente o tempo t . O número de condições iniciais necessárias para resolver um PVI de uma EDO deve ser igual a ordem da maior derivada presente na EDO do problema.

No passado, por simplicidade, muitos sistemas dinâmicos eram modelados por PVI lineares, apesar de terem natureza não linear [33; 44]. Com o passar do tempo, esse tipo de simplificação tornou-se inadequada. Verificou-se que os modelos lineares eram muito limitados e incapazes de representar com acurácia a dinâmica de sistemas não lineares. Assim, modelos não lineares passaram a ser frequentemente usados para garantir uma melhor representação da dinâmica dos sistemas [7; 14; 38; 44; 48]. Um exemplo clássico de PVI frequentemente encontrado na literatura, são os PVI que envolvem a equação de Duffing [15; 18; 19; 21; 34; 49]. Essa equação apresenta não linearidade cúbica e é usada para modelar a dinâmica de diversos sistemas. Na engenharia, a equação de Duffing pode ser usada para modelar a dinâmica, por exemplo, de osciladores com mola cúbica e sistemas mecânico-magnéticos com uma haste oscilando entre dois ímãs. Nesses sistemas, a não linearidade é introduzida devido ao acoplamento entre as partes mecânica e magnética. Na área da saúde, a equação aparece na modelagem da disseminação de doenças [1].

Uma vez que não linearidades são consideradas na modelagem de sistemas, os PVI que representam a dinâmica passam a ser não lineares. Esses PVI, em sua maioria, não têm solução analítica conhecida. Vale ressaltar que o conhecimento das soluções teria grande utilidade, uma vez que permitiria um estudo de performance do sistema, o que poderia auxiliar no desenvolvimento de técnicas de controle. Como alternativa, pode-se calcular aproximações para as soluções desses PVI não lineares. Os métodos mais populares para esses cálculos são os analíticos [17; 31; 37; 43] e os numéricos [2; 5; 6; 42].

Métodos numéricos e analíticos são eficientes nessa tarefa e podem

fornecer aproximações com a precisão desejada. Os métodos numéricos foram muito desenvolvidos nos últimos anos e amplamente aplicados em problemas de diversas áreas da engenharia. Pacotes computacionais de fácil utilização foram criados e hoje fazem parte dos mais tradicionais programas de simulação numérica. Entretanto, as aproximações numéricas têm uma desvantagem em relação às aproximações analíticas, não permitem o entendimento de como a solução depende dos parâmetros do problema. Visto isso, esta dissertação foca na análise e implementação de técnicas analíticas denominadas métodos de perturbação.

Os métodos de perturbação permitem calcular aproximações analíticas hierárquicas para soluções de PVI, que envolvem um parâmetro positivo de valor pequeno, $\epsilon \ll 1$, chamado parâmetro de perturbação. Os métodos assumem como solução do PVI uma série uniforme infinita em potências de ϵ , que deve ser truncada de acordo com a ordem de aproximação desejada. De modo genérico, após o truncamento, os métodos de perturbação decompõem o PVI não linear original em um número finito de PVI lineares com solução analítica conhecida.

Conforme explicado anteriormente, uma das vantagens de se obter aproximações analíticas para PVI não lineares é que as aproximações permitem o entendimento de como a solução depende dos parâmetros do problema. Esse tipo de análise é muito importante no estudo de sistemas dinâmicos e é chamado de análise paramétrica. Segundo Pasquetti [34], os fenômenos causados pela não linearidade são mais fáceis de serem identificados através de uma análise paramétrica. Esse tipo de análise, quando realizada por métodos numéricos, têm alto custo computacional e temporal, visto que para cada valor de parâmetro é necessário fazer uma integração numérica [34]. O artigo [29] fez uma análise paramétrica de um PVI não linear estocástico. Estudou-se a influência de dois parâmetros na dinâmica, um deles assumia quarenta valores diferentes e o outro, oito valores diferentes, totalizando 320 combinações a serem analisadas. Como o artigo considera incertezas e objetivava construir um modelo estatístico, para cada combinação dos parâmetros, era necessário fazer uma simulação de Monte Carlo. Em cada simulação de Monte Carlo, o PVI deveria ser integrado 2 mil vezes, totalizando 640.000 integrações numéricas. Para realizar todas essas integrações de forma sequencial, seriam necessários dois anos e meio. Como alternativa, foi usada a estratégia de paralelização. As integrações foram divididas em dezesseis computadores, reduzindo o tempo de simulação para cinquenta e cinco dias. Observe que, mesmo com a paralelização, o custo computacional continuou alto e demandou quase dois meses. Em [29] se, ao invés de integração numérica, aproximações analíticas tives-

sem sido utilizadas para fazer a análise paramétrica, provavelmente o tempo computacional gasto teria sido muito menor. Por exemplo, dispondo de uma expressão analítica, para a solução de um problema determinístico, ao invés de integrar a EDO para cada valor de parâmetro, seria necessário apenas fazer a substituição de valores. Uma tarefa bem menos custosa.

1.1

Métodos numéricos

Os primeiros trabalhos em métodos numéricos foram feitos por Isaac Newton e Leibniz [5]. Porém somente no século XVII, Leonhard Euler deduziu o processo iterativo chamado de método de Euler, que permite determinar uma aproximação para solução de um PVI para determinado valor do parâmetro independente. Posteriormente, surgiu o método de Euler modificado. Mais tarde, dois matemáticos alemães, Carl Runge em 1895 e Martin Wilhelm Kutta em 1901, aprimoraram os métodos de Euler, criando o método conhecido como Runge-Kutta. Esse último método é duas ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler modificado e três ordens de grandeza mais preciso que o de Euler [5]. Em Polking [35], também é encontrada uma comparação entre os erros dos métodos citados, sendo que o método de Runge-Kutta é o que apresenta menor erro.

Em geral, para a implementação de métodos numéricos de integração de um PVI, é necessário que seja feita uma discretização do parâmetro independente do problema. Em problemas dinâmicos, esse parâmetro é usualmente o tempo. A aproximação numérica é calculada apenas para alguns valores de parâmetro independente. No francês há uma palavra que descreve bem essa passagem de um domínio contínuo para um discreto. É a palavra "numérisation", [40]. Considere, por exemplo, que deseja-se aproximar a solução de um PVI através de um método numérico no intervalo $[0, T]$ do parâmetro independente. Será necessário então discretizar o intervalo, como sugerido na fig. 1.1.

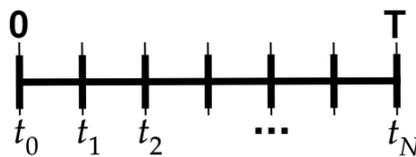


Figura 1.1: Discretização do tempo

Segundo Atkinson [2] e Savi [42], o método de Runge-Kutta é um dos métodos numéricos mais populares por aliar simplicidade de implementação

e precisão. Ele será utilizado como referência para validar as aproximações analíticas calculadas nesta dissertação. Esse método foi escolhido devido a simplicidade de uso e pela precisão obtida. Além, do método já estar implementado no software MATLAB, sendo apenas necessário indicar a equação a ser aproximada, as condições iniciais e o intervalo de tempo em que se deseja integrar. Em geral, Runge-Kutta é um método de passo único. A previsão em t_i é calculada com base apenas na informação do seu passo imediatamente anterior [2; 5].

1.2 Métodos analíticos de perturbação

Os métodos de perturbação são ferramentas que permitem o cálculo de aproximações para soluções de PVI que envolvem um parâmetro pequeno, denominado de ϵ . Como só é possível aplicar o método com a presença desse parâmetro, quando o problema não possui um parâmetro suficientemente pequeno que possa ser usado como o parâmetro de perturbação, usa-se o artifício de introduzir o parâmetro ϵ temporariamente e, ao final, faz-se $\epsilon = 1$, voltando assim para o problema inicial [4]. Recomenda-se introduzir ϵ no PVI de forma que, ao considerar $\epsilon = 0$, a equação se torne linear e tenha solução analítica conhecida [18; 30; 43].

Existem dois tipos de problemas de perturbação, os regulares e os singulares. Eles se diferenciam pela interferência do parâmetro de perturbação na solução do problema. Nas perturbações regulares, a solução do problema é pouco afetada se o valor do parâmetro de perturbação for suficientemente pequeno. Já nas perturbações singulares, mesmo para valores muito pequenos de ϵ , as soluções sofrerão os efeitos do parâmetro de perturbação. Em [3; 18; 37; 43] encontra-se exemplos e uma explicação detalhada sobre perturbações regulares e singulares. Para Awad [3], as duas singularidades mais comuns são as de camada limite e as seculares.

Segundo Marinca et al. [30], o precursor dos métodos de perturbação foi Poisson, no início do século XIX, sendo o primeiro a aplicá-lo formalmente sem nenhuma justificativa teórica. No entanto, o método resultou em satisfatórias aproximações, sendo aplicado especialmente em mecânica celeste. Nessas aproximações surgiram termos com coeficientes de t, t^2, \dots , que cresciam indefinidamente com o tempo, denominados por termos seculares. Lindstedt (1882) desenvolveu uma técnica para evitar o aparecimento desses termos. Como a frequência do sistema é função de sua amplitude [34; 44], Lindstedt escreveu a frequência do sistema em uma série de potências do parâmetro de perturbação. Poincaré provou que a expansão proposta por Lindstedt era assintótica, [34].

No final daquele mesmo século, Lindstedt e Poincaré contribuíram majoritariamente para os métodos de perturbação, elaborando os fundamentos teóricos e possibilitando sua aplicação em diversos problemas de sistemas mecânicos [30; 41]. O método de Lindstedt-Poincaré (MLP) é uma técnica iterativa que aproxima a solução de um PVI por uma expansão uniforme. Os termos de expansão são periódicos e a expansão é capaz de aproximar muito bem a solução de um PVI com baixa não linearidade [12; 30]. A estratégia do método é através do parâmetro do perturbação, transformar o PVI não linear original em um número finito de PVI lineares que possuem solução linear. Esses PVI lineares devem ser resolvidos sequencialmente. A cada iteração deve-se resolver um PVI linear e eliminar os termos seculares presentes na solução, de forma a garantir uma aproximação periódica.

Existem sistemas que apresentam características com escala de tempo diferentes como, por exemplo, um sistema massa-mola-amortecedor. Na resposta desse tipo de sistema, a oscilação e o decaimento da amplitude de oscilação acontecem em tempos diferentes. Outros exemplos são sistemas caracterizados por uma dinâmica com períodos rápidos e lentos (*fast-slow systems*). Esse tipo de dinâmica, em geral, não é bem caracterizada pela expansão uniforme dos métodos de perturbação [39]. Uma alternativa, para calcular aproximações para sistemas com essas singularidades, é usar o método de perturbação de múltiplas escalas de tempo. Esse método, assim como Lindstedt-Poincaré também é uma técnica para calcular aproximações hierárquicas para soluções de PVI não lineares, amplamente discutido em [15; 18; 22; 31]. Desenvolvido por Sturrock, Frieman, Kevorkian e Nayfeh, entre os anos de 1950 e 1960, o método de múltiplas escalas de tempo (MME) é equivalente ao método de *averaging* elaborado por Krylov e Bogoliubov nos anos 30 [41]. A série em potências do parâmetro de perturbação também é admitida como solução para o PVI, mas a expansão em potências de ϵ deve ser função de duas ou mais variáveis independentes [32], chamadas de escalas.

Apesar dos métodos de perturbação serem ferramentas poderosas para aproximar a solução de PVI, os cálculos necessários para a implementação dos métodos de perturbação podem ser trabalhosos e muito custosos quando realizados manualmente. Dependendo da ordem da aproximação desejada, os cálculos podem até ser inviabilizados. Uma forma de facilitar a obtenção das aproximações é utilizar, na implementação, o método de álgebra simbólica. Essa estratégia permite que os cálculos sejam feitos de forma automatizada, facilitando a obtenção de aproximações de ordens elevadas. Nos trabalhos [10; 11; 19; 34; 41], os autores utilizaram e ressaltaram a importância de álgebra simbólica nos cálculos de aproximações analíticas.

1.3

Objetivos da dissertação

A maioria dos problemas de valor inicial não lineares não tem solução analítica conhecida. Por esse motivo, os métodos de aproximações analíticas e numéricas tornam-se ferramentas tão importantes. Esse trabalho tem como objetivo principal apresentar de forma didática e com exemplos os métodos de perturbação, Lindstedt-Poincaré e o de múltiplas escalas de tempo. Os métodos foram implementados em álgebra simbólica e aplicados em PVI que envolvem a equação de Duffing e em PVI que modelam sistemas de interesses do Laboratório de Vibrações da PUC-Rio. Por exemplo, o PVI, que modela a dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor, que desliza em cima de uma esteira, considerando a presença de atrito seco entre a massa e a esteira, provocando na trajetória do sistema um fenômeno chamado *stick-slip*.

Aliar os métodos de perturbação estudados com os programas de álgebra simbólica facilitou os cálculos das aproximações analíticas e possibilitou o cálculo de aproximações de ordens elevadas. Criar uma rotina simbólica para automatizar os cálculos foi um dos objetivos desse trabalho também. O estudo de métodos de aproximação analítica, como os de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas de tempo, é uma frente de pesquisa recente no Laboratório de vibrações. Por isso, o texto dessa dissertação tem objetivo didático para que outros interessados possam aplicar os métodos em PVI de interesse, além de poder usar as rotinas simbólicas já programadas como base para novos problemas. Ao longo do desenvolvimento da dissertação, foram publicados dois artigos, um para o congresso do MECOM [10] e outro para o congresso do DINAME [11]. Ambos os artigos tratam da importância dos métodos de perturbação aliados a rotina de álgebra simbólica.

1.4

Organização da dissertação

Essa dissertação está dividida em cinco capítulos. Na introdução foram abordados conceitos importantes para os métodos de aproximação, numérico e analítico, com um breve histórico e resumo.

O segundo capítulo é dedicado ao método Lindstedt-Poincaré. O método será descrito e exemplificado com o cálculo de aproximações de diferentes ordens para a solução de um PVI com a equação de Duffing. Com o objetivo de mostrar a importância da álgebra simbólica no cálculo de aproximações analíticas, foi feita uma discussão sobre o custo computacional dos cálculos. Para avaliar a qualidade das aproximações, foram feitas comparações entre as aproximações analíticas hierárquicas obtidas pelo método de Lindstedt-

Poincaré e aproximações numéricas obtidas pelo método do Runge-Kutta (tidas com referência para validação). Duas medidas de erro foram utilizadas nas comparações. Foram feitas análises de como a ordem de aproximação, valor do parâmetro de perturbação e condições iniciais influenciam no erro e domínio de validade das aproximações.

No capítulo 3 é apresentada a metodologia de múltiplas escalas de tempo. Assim como no capítulo anterior, o método foi aplicado em um PVI com a equação de Duffing não amortecida. Aproximações de diferentes ordens foram calculadas usando uma rotina de álgebra simbólica. Os domínios de validade das aproximações foram avaliados usando os erros previamente definidos. No final do capítulo, as aproximações hierárquicas obtidas pelo método de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas foram comparados.

Nos capítulos 2 e 3, os métodos de perturbação de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas foram exemplificados em um PVI, que envolve uma EDO com não linearidade cúbica - a equação de Duffing. Esse PVI foi escolhido por ser simples e muito frequente na literatura. Um dos principais objetivos desses capítulos é apresentar os métodos de forma didática. No quarto capítulo, o método de múltiplas escalas é aplicado em um PVI muito interessante. É um exemplo de aplicação do método muito diferente do que é usualmente encontrado na literatura. O PVI escolhido descreve a dinâmica de um oscilador massa-mola-amortecedor, considerando a presença de atrito seco. A dinâmica desse problema pode apresentar duas fases alternadas chamadas, de *stick* e *slip* que compõem um fenômeno chamado de *stick-slip*. Na fase *stick*, tem-se um movimento retilíneo uniforme, com solução conhecida, de forma que não é preciso usar nenhum dos dois métodos de perturbação. Já na fase de *slip*, o método de múltiplas escalas de tempo deve ser aplicado para calcular uma aproximação analítica para essa fase do movimento.

No último capítulo é apresentada as conclusões do trabalho, as vantagens e desvantagens de cada método estudado. Nos anexos estão os artigos produzidos e uma descrição das rotinas simbólicas programadas para os cálculos das aproximações usando os métodos de perturbação.

2

Métodos de Lindstedt-Poincaré

Considere o problema de valor inicial não linear genérico como

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + f(\dot{x}(t), x(t)) = 0, \quad (2-1)$$

com condições iniciais $x(0) = A_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, sendo t o tempo, x o parâmetro de deslocamento, \dot{x} a representação da derivada em relação ao tempo t e f uma função não linear de x e \dot{x} . Um PVI não linear, em geral, não tem solução analítica conhecida. Entretanto, é possível obter aproximações analíticas para a solução desse tipo de problema através de métodos de perturbação. Para aplicação dos métodos, introduz-se um parâmetro positivo e adimensional, representado por ϵ , multiplicando f . A introdução de ϵ transforma o problema em um problema de perturbação. Assim a Eq. (2-1) se transforma em

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \epsilon f(\dot{x}(t), x(t)) = 0, \quad (2-2)$$

e as condições iniciais são mantidas. A escolha de adicionar o parâmetro ϵ no termo não linear f , é uma estratégia indicada por muitos autores [4; 33; 37; 43]. Uma vez que, com essa escolha, ao fazer-se $\epsilon = 0$, a Eq. (2-2) se torna linear, com solução analítica conhecida. Após o cálculo das aproximações, usando o método de perturbação, faz-se $\epsilon = 1$ de forma que as aproximações obtidas se tornem aproximações do problema original (sem o ϵ).

Nesse capítulo, será apresentado o método de perturbação de Lindstedt-Poincaré, que permite calcular aproximações analíticas periódicas hierárquicas para solução de PVI não lineares. Uma vez que o método visa calcular aproximações analíticas periódicas, um novo parâmetro τ é definido como

$$\tau = \omega t, \quad (2-3)$$

sendo ω uma frequência que é função do deslocamento inicial, A_0 . Lindstedt escreveu a frequência, ω , em uma série de potências do parâmetro de perturbação,

$$\omega(A_0) = \omega_0 + \epsilon \omega_1(A_0) + \epsilon^2 \omega_2(A_0) + \dots + \epsilon^N \omega_N(A_0), \quad (2-4)$$

onde ω_j , $j = 1, 2, 3, \dots, N$ são correções da frequência ω_0 , em função do deslocamento inicial [3; 34]. Para que ω apareça explicitamente na equação

diferencial, deve-se fazer uma mudança de variável no PVI usando o parâmetro τ definido na Eq. (2-3). Dessa forma, a Eq. (2-2) pode ser reescrita como

$$\omega^2 \bar{x}''(\tau) + \omega_0^2 \bar{x}(\tau) + \epsilon f(\bar{x}'(\tau), \bar{x}(\tau)) = 0, \quad (2-5)$$

onde \square' representa a derivada em relação a τ .

A solução suposta pelo método de Lindstedt-Poincaré é uma série uniforme em potências de ϵ [34; 37], escrita como

$$\bar{x}(\tau) = \bar{x}_0(\tau) + \epsilon \bar{x}_1(\tau) + \epsilon^2 \bar{x}_2(\tau) + \dots + \epsilon^N \bar{x}_N(\tau), \quad (2-6)$$

onde cada termo \bar{x}_j , $j = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ é uma função desconhecida que deve ser determinada através da equação governante e das condições iniciais. Os termos da série tem significância reduzida de acordo com o crescimento da ordem de ϵ , [33]. Garantindo assim que os termos de ordens altas se comportem apenas como pequenas correções para os termos de ordens inferiores, e não domine a solução geral, [3]. Ao assumir $\epsilon = 0$, a Eq. (2-2) se torna linear, e tem solução conhecida. Considerando essa hipótese, o termo \bar{x}_0 é a solução da equação linearizada, e os outros termos \bar{x}_j são perturbações em relação a solução linearizada com significância reduzida conforme j aumenta, [33].

Para dar continuidade aos cálculos, as Eqs. (2-4) e (2-6) devem ser truncadas de acordo com a ordem de aproximação desejada e, posteriormente, substituídas na Eq. (2-5),

$$\begin{aligned} (\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots + \epsilon^N \omega_N)^2 (\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2 + \dots + \epsilon^N \bar{x}_N)'' + \\ \omega_0^2 (\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2 + \dots + \epsilon^N \bar{x}_N) + \\ \epsilon f[(\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2 + \dots + \epsilon^N \bar{x}_N)', \\ (\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2 + \dots + \epsilon^N \bar{x}_N)] = 0. \end{aligned} \quad (2-7)$$

A Eq. (2-7) deve ser expandida e os coeficientes com mesma ordem de ϵ agrupados,

$$\begin{aligned} \bar{x}_0'' + \omega_0^2 \bar{x}_0 + \epsilon \{ \bar{x}_1'' + \omega_0^2 \bar{x}_1 + f[(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)', (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)] \} + \\ \epsilon^2 \{ \bar{x}_2'' + \omega_0^2 \bar{x}_2 + f[(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)', (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)] \} + \dots + \\ \epsilon^N \{ \bar{x}_N'' + \omega_0^2 \bar{x}_N + f[(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)', (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)] \} = 0. \end{aligned} \quad (2-8)$$

Com a equação escrita neste formato, podemos através, do teorema fundamental da teoria de perturbação, formar uma família de problemas de valor inicial lineares. O teorema fundamental da teoria de perturbação, enunciado a seguir, pode ser encontrado em [43].

Teorema fundamental da teoria de perturbação 1 *Se*

$$S_0 + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \dots + \epsilon^N S_N \approx 0, \quad (2-9)$$

para um ϵ suficientemente pequeno e se os coeficientes S_0, S_1, \dots são independentes de ϵ , então

$$S_0 = S_1 = S_2 = \dots = S_N = 0. \quad (2-10)$$

A Eq. (2-8) pode então ser reescrita em uma família de PVI lineares,

$$\bar{x}_0'' + \omega_0^2 \bar{x}_0 = 0, \quad (2-11a)$$

$$\bar{x}_1'' + \omega_0^2 \bar{x}_1 = -f[(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)', (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)], \quad (2-11b)$$

$$\bar{x}_2'' + \omega_0^2 \bar{x}_2 = -f[(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)', (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)], \quad (2-11c)$$

$$\bar{x}_N'' + \omega_0^2 \bar{x}_N = -f[(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)', (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N)], \quad (2-11d)$$

com condições iniciais $\bar{x}_0(0) = A_0$, $\bar{x}_0'(0) = 0$ e $\bar{x}_j(0) = \bar{x}_j'(0) = 0$ com $j = 1, 2, \dots, N$. Os PVI das Eqs. (2-11) devem ser resolvidos hierarquicamente, isto é, de acordo com a potência de ϵ , uma vez que os PVI referentes a ordens elevadas de ϵ dependem das soluções das ordens inferiores. Dessa forma, o PVI da Eq. (2-11a), que descreve a dinâmica de um oscilador harmônico não amortecido, deve ser o primeiro PVI a ser resolvido. É importante lembrar que estamos interessados em aproximações periódicas, por isso, em cada iteração, os termos que causam ressonância devem ser eliminados e os ω_j calculados. Após calcular a solução de todos os PVI, os termos de x_j e ω_j devem ser substituídos nas Eqs. (2-4) e (2-6), finalizando assim o cálculo da aproximação analítica com a ordem especificada no truncamento.

2.1**Equação de Duffing**

A metodologia de Lindstedt-Poincaré é exemplificada em um PVI que envolve a equação de Duffing. Dessa forma, será considerado como $f(\dot{x}(t), x(t)) = x^3(t)$, transformando a Eq. (2-2) em

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \epsilon x^3(t) = 0, \quad (2-12)$$

com condições iniciais $x(0) = A_0$ e $\dot{x}(0) = 0$. O parâmetro ϵ controla a não linearidade. Esse PVI é frequentemente encontrado na literatura [18; 30] e pode modelar, por exemplo, a dinâmica de um sistema massa-mola com mola cúbica.

O primeiro passo para aplicar o método de Lindstedt-Poincaré é aplicar a mudança de escala de tempo, de t para τ , através da Eq. (2-3), transformando a Eq. (2-12) em

$$\omega^2 \bar{x}''(t) + \omega_0^2 \bar{x}(t) + \epsilon \bar{x}^3(t) = 0. \quad (2-13)$$

Escolhendo-se calcular uma aproximação de 2º ordem para o PVI, as séries em potência de ϵ supostas para a solução e para a frequência devem ser truncadas até o terceiro termo. Transformando as Eqs. (2-4) e (2-6) em

$$\bar{x} \approx \bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2, \quad (2-14)$$

$$\omega \approx \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2. \quad (2-15)$$

As Eqs. (2-14) e (2-15) devem ser substituídas na Eq. (2-13),

$$\omega^2 (\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2)'' + \omega_0^2 (\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2) + \epsilon (\bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + \epsilon^2 \bar{x}_2)^3 = 0. \quad (2-16)$$

Após expansão dos termos, os coeficientes que aparecem na Eq. (2-16) devem ser agrupados de acordo com a ordem de ϵ . Feito isso, pelo teorema fundamental da teoria de perturbação, podemos igualar a zero cada grupo de coeficientes, formando assim a seguinte família de PVI

$$\omega_0^2 \bar{x}_0'' + \omega_0^2 \bar{x}_0 = 0, \quad (2-17a)$$

$$\omega_0^2 \bar{x}_1'' + \omega_0^2 \bar{x}_1 = -\bar{x}_0^3 - 2\omega_0 \omega_1 \bar{x}_0'', \quad (2-17b)$$

$$\omega_0^2 \bar{x}_2'' + \omega_0^2 \bar{x}_2 = -\omega_1^2 \bar{x}_0 - 2\omega_0 \omega_1 \bar{x}_1'' - 2\omega_0 \omega_2 \bar{x}_0'' - 3\bar{x}_1 \bar{x}_0^2, \quad (2-17c)$$

com condições iniciais $\bar{x}_0(0) = A_0$, $\bar{x}_0'(0) = 0$ e $\bar{x}_j(0) = \bar{x}_j'(0) = 0$, $j = 1, 2$.

Assim, um problema de valor inicial não linear, que não apresentava solução foi transformado em três PVI lineares com solução analítica conhecida. Devido a dependência dos PVI de ordens superior com as soluções dos PVI de ordens inferiores, deve-se resolver as equações hierarquicamente. Logo, o primeiro PVI a ser resolvido é o de ordem zero referente a Eq. (2-17a). Essa equação diferencial representa a dinâmica de um oscilador harmônico e, de acordo com as condições iniciais tem como solução,

$$\bar{x}_0(\tau) = A_0 \cos \tau. \quad (2-18)$$

O próximo PVI a ser resolvido é o da Eq. (2-17b), dependente de \bar{x}_0 , substituindo a solução de \bar{x}_0 na Eq. (2-17b), tem-se

$$\omega_0^2 \bar{x}_1'' + \omega_0^2 \bar{x}_1 = \left(2 A_0 \omega_0 \omega_1 - \frac{3 A_0^3}{4} \right) \cos \tau - \frac{A_0^3}{4} \cos 3\tau. \quad (2-19)$$

Ao substituir os termos provenientes da solução de \bar{x}_0 , esses são tratados como termos de forçamento para resolver a Eq. (2-19). Ao observar o lado direito da equação, encontra-se o termo $\cos \tau$, que resulta em $\tau \sin \tau$, termo que cresce indefinidamente com τ e causa ressonância. Para garantir a periodicidade da resposta, os termos seculares devem ser eliminados. Isso significa que na Eq. (2-19), o coeficiente de $\cos \tau$ deve ser igualado a zero, ou seja,

$$2 A_0 \omega_0 \omega_1 - \frac{3 A_0^3}{4} = 0, \quad (2-20)$$

$$\omega_1 = \frac{3 A_0^2}{8 \omega_0}. \quad (2-21)$$

Com a eliminação do termo que causa ressonância, pode-se garantir a periodicidade da solução da Eq. (2-19) que tem solução

$$\bar{x}_1(\tau) = \frac{A_0^3}{32 \omega_0^2} (\cos 3\tau - \cos \tau). \quad (2-22)$$

As soluções \bar{x}_0 e \bar{x}_1 calculadas devem ser substituídas de forma que a Eq. (2-17c) torna-se

$$\begin{aligned} \omega_0 \bar{x}_2'' + \omega_0 \bar{x}_2 = & \left(\frac{\cos(3\tau)}{4} + \frac{3 \cos(\tau)}{4} \right) \left(\frac{3 A_0^5}{8 \omega_0^2} + \frac{9 A_0^3 \omega_1}{4 \omega_0} \right) \\ & + \cos(\tau) \left(A_0 \omega_1^2 + 2 A_0 \omega_0 \omega_2 - \frac{7 A_0^3 \omega_1}{4 \omega_0} \right) \\ & - \left(\frac{3 A_0^5}{8 \omega_0^2} \right) \left(\frac{5 \cos(3\tau)}{16} + \frac{\cos(5\tau)}{16} + \frac{5 \cos(\tau)}{8} \right). \end{aligned} \quad (2-23)$$

Os mesmos passos usados para calcular \bar{x}_1 devem ser feitos para resolver o PVI da Eq. (2-23), que apresenta solução igual a

$$\bar{x}_2(\tau) = \frac{A_0^5}{128 \omega_0^4} \left(\frac{23 \cos \omega t}{8} - \frac{3 \cos 3\omega t}{1} + \frac{\cos 5\omega t}{8} \right). \quad (2-24)$$

Como realizado no cálculo da solução \bar{x}_1 , os termos que causam ressonância foram identificados e eliminados, resultando em

$$\omega_2 = \frac{21 A_0^4}{256 \omega_0^3}. \quad (2-25)$$

Todos os termos \bar{x}_j e ω_j , devem ser substituídos nas Eqs. (2-14) e (2-15) para obter-se a aproximação analítica de 2º ordem do PVI, ou seja, \bar{x} em função de τ . A mesma relação de Eq. (2-3) pode ser aplicada para voltar a aproximação

para o domínio do tempo t ,

$$x(t) \approx A_0 \cos \omega t + \epsilon \frac{A_0^3}{32 \omega_0^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) + \epsilon^2 \frac{A_0^5}{128 \omega_0^4} \left(\frac{23 \cos \omega t}{8} - \frac{3 \cos 3\omega t}{1} + \frac{\cos 5\omega t}{8} \right), \quad (2-26a)$$

$$\omega(A_0) \approx \omega_0 + \epsilon \left(\frac{3 A_0^2}{8 \omega_0} \right) - \epsilon^2 \left(\frac{21 A_0^4}{256 \omega_0^3} \right). \quad (2-26b)$$

Se fosse desejado o cálculo de uma aproximação de 3º ordem, a família de PVI lineares aumentaria em uma equação, transformando-se em

$$\omega_0^2 \bar{x}_0'' + \omega_0^2 \bar{x}_0 = 0, \quad (2-27a)$$

$$\omega_0^2 \bar{x}_1'' + \omega_0^2 \bar{x}_1 = -\bar{x}_0^3 - 2\omega_0 \omega_1 \bar{x}_0'', \quad (2-27b)$$

$$\omega_0^2 \bar{x}_2'' + \omega_0^2 \bar{x}_2 = -\omega_1^2 \bar{x}_0 - 2\omega_0 \omega_1 \bar{x}_1'' - 2\omega_0 \omega_2 \bar{x}_0'' - 3\bar{x}_1 \bar{x}_0^2, \quad (2-27c)$$

$$\omega_0^2 \bar{x}_3'' + \omega_0^2 \bar{x}_3 = -\omega_1^2 \bar{x}_1'' - 2\omega_0 \omega_1 \bar{x}_2'' - 2\omega_0 \omega_2 \bar{x}_1'' - 2\omega_0 \omega_3 \bar{x}_0'' - 2\omega_1 \omega_2 \bar{x}_0'' - 3\bar{x}_0 \bar{x}_1^2 - 3\bar{x}_0^2 \bar{x}_2. \quad (2-27d)$$

Seguindo a mesma metodologia aplicada no cálculo da aproximação de 2º ordem, ou seja, a solução hierárquica da família de PVI lineares, calcula-se a aproximação de 3º ordem

$$x(t) \approx A_0 \cos \omega t + \epsilon \frac{A_0^3}{32 \omega_0^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) + \epsilon^2 \frac{A_0^5}{128 \omega_0^4} \left(\frac{23 \cos \omega t}{8} - \frac{3 \cos 3\omega t}{1} + \frac{\cos 5\omega t}{8} \right) + \epsilon^3 \frac{A_0^7}{2048 \omega_0^6} \left(\frac{297 \cos 3\omega t}{8} - \frac{547 \cos \omega t}{16} - \frac{3 \cos 5\omega t}{1} + \frac{\cos 7\omega t}{16} \right), \quad (2-28a)$$

$$\omega(A_0) \approx \omega_0 + \epsilon \left(\frac{3 A_0^2}{8 \omega_0} \right) - \epsilon^2 \left(\frac{21 A_0^4}{256 \omega_0^3} \right) + \epsilon^3 \left(\frac{81 A_0^6}{2048 \omega_0^5} \right). \quad (2-28b)$$

2.1.1

Custo Computacional

A obtenção de aproximações analíticas para a solução de PVI não lineares facilita o entendimento de como a solução depende dos parâmetros do PVI e condições iniciais. Nesse sentido, métodos analíticos têm grande vantagem em relação aos métodos numéricos. Por exemplo, para realizar uma análise paramétrica em um PVI utilizando aproximações numéricas, seria necessário

fazer inúmeras integrações do PVI. Ao passo que para fazer a análise utilizando aproximações analíticas, seria necessário fazer apenas substituições de valores em uma expressão analítica. Ganhando em tempo e memória computacional. Contudo, os cálculos dessas expressões numéricas aliadas aos softwares de álgebra simbólica também podem resultar em altos custos computacionais.

Ao comparar as Eqs. (2-17) e (2-27), pode-se verificar que para calcular a aproximação de maior ordem, a família de PVI linear aumenta em uma equação, a qual apresenta mais termos de forçamento, conseqüentemente, pode ser mais trabalhosa de ser resolvida. A Tab. 2.1 mostra a relação entre a ordem de aproximação, a quantidade de equações na família de PVI, quantidade de termos de forçamento do lado direito de cada equação e o total de termos. Analisando a Tab 2.1, observa-se que maior a ordem, mais equações devem ser resolvidas e maior a quantidade de termos de forçamento.

Ordem da aproximação	Quantidade de equações na família de PVI	Quantidade de termos em cada equação	Total
1	2	0	2
		2	
2	3	0	6
		2	
		4	
3	4	0	13
		2	
		4	
		7	
4	5	0	24
		2	
		4	
		7	
		11	
5	6	0	39
		2	
		4	
		7	
		11	
		15	

Tabela 2.1: Relação entre ordem da aproximação, número de equações na família de PVI, número de termos do lado direito de cada equação e total de termos.

Pelos exemplos dados e pela Tab. 2.1, verifica-se que, quanto maior a ordem da aproximação desejada, mais trabalhoso será seu cálculo. As contas podem ser tão numerosas e trabalhosas de serem feitas à mão, que o esforço para calculá-las pode não ser vantajoso. Com o intuito de otimizar os cálculos

analíticos e até mesmo garantir o cálculo de aproximações de ordens superiores, foi desenvolvido uma rotina em álgebra simbólica usando o software MATLAB. Essa rotina permite calcular aproximações analíticas para $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e ω de acordo com a ordem e condições iniciais escolhida pelo usuário.

Aparentemente, o desenvolvimento de rotinas em álgebra simbólica seria uma estratégia muito eficiente para calcular aproximações de ordem elevada. Entretanto, ao calcular as aproximações através da rotina, verificou-se que quanto maior a ordem calculada, mais memória e tempo o computador necessitava. As Figs. 2.1 e 2.2 mostram o gasto de memória e tempo ao rodar a rotina para diferentes ordens de aproximação. A cada acréscimo na ordem de aproximação, o tempo e a memória gastos também aumentaram, apresentando um crescimento aparentemente exponencial. A diferença de tempo e memória consumidos entre as ordens oito e nove é bem maior que a diferença entre as ordens sete e oito, dando um indício de que para ordens superiores os gráficos manterão a tendência crescente. Esse crescimento pode representar uma limitação para aplicação do método. Caso se deseje calcular aproximações de ordem muito elevada, para melhorar a qualidade do resultado, o computador utilizado para fazer os cálculos pode não ter memória suficiente ou demorar muito para completar a tarefa. Dessa forma, a escolha da ordem da aproximação não pode ser feita de forma arbitrária. A escolha deve levar em consideração a precisão desejada, o tempo e memória consumidos pelo computador ao realizar os cálculos.

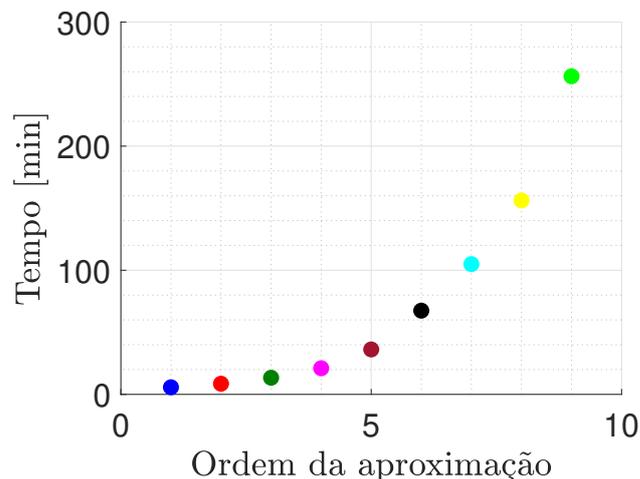


Figura 2.1: Tempo gasto pelo computador para calcular diferentes ordens de aproximação através do método de Lindstedt-Poincaré, usando um computador com configuração de: Intel Core i5-7200U CPU @ 2.50GHz 2.71 GHz, 8 GB de RAM.

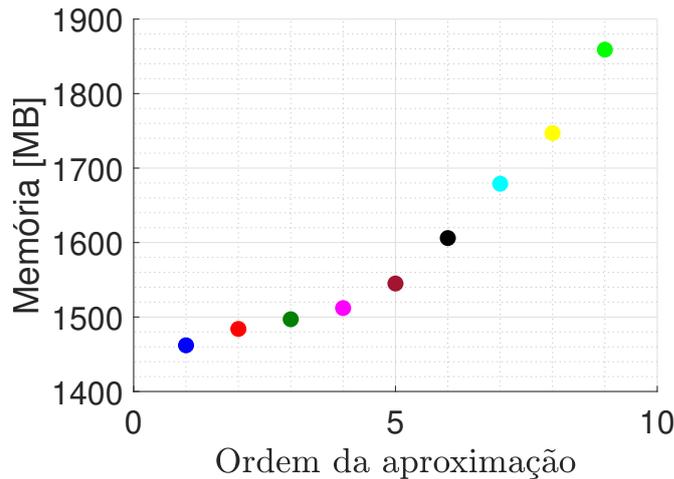


Figura 2.2: Memória usada pelo computador para calcular diferentes ordens de aproximação através do método de Lindstedt-Poincaré, usando um computador com configuração de: Intel Core i5-7200U CPU @ 2.50GHz 2.71 GHz, 8 GB de RAM.

2.1.2 Domínio de validade

Nessa seção, será feita uma comparação entre aproximações de diferentes ordens obtidas pelo método de Lindstedt-Poincaré e aproximações numéricas obtidas através do método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordem implementado no software MATLAB (comando ODE45). As aproximações numéricas são consideradas como referência na comparação. O objetivo é analisar a influência da ordem na precisão da aproximação.

Inicialmente, a comparação foi feita para valores fixados dos parâmetros do PVI. Escolheu-se $x(0) = A_0 = 0.5$, $\omega_0 = 1$ e $\epsilon = 1.5$. Como mencionado anteriormente, o parâmetro de perturbação ϵ deve ter valores menores do que 1. Nesse exemplo, a escolha de um valor superior a 1 objetivou destacar a não linearidade do problema de forma a facilitar a visualização dos resultados. A Fig. 2.3 mostra as aproximações numéricas e analíticas de 1º e 5º ordem para os valores de parâmetros escolhidos em três diferentes intervalos de integração ($[0, 50]$, $[3310, 3360]$ e $[9950, 10000]$). Observando as curvas no primeiro intervalo, verificou-se que as duas aproximações analíticas, de 1º e 5º ordem, praticamente estão superpostas com a aproximação numérica. No segundo intervalo, a aproximação de 5º ordem permanece superposta com a numérica, enquanto que a de 1º ordem começa a defasar. No terceiro intervalo, as duas aproximações analíticas estão defasadas em relação à numérica, apesar da defasagem da aproximação de 5º ordem ainda ser muito pequena em relação a defasagem da aproximação de 1º ordem.

Essa comparação mostrou que a medida que aumenta-se a ordem da aproxima-

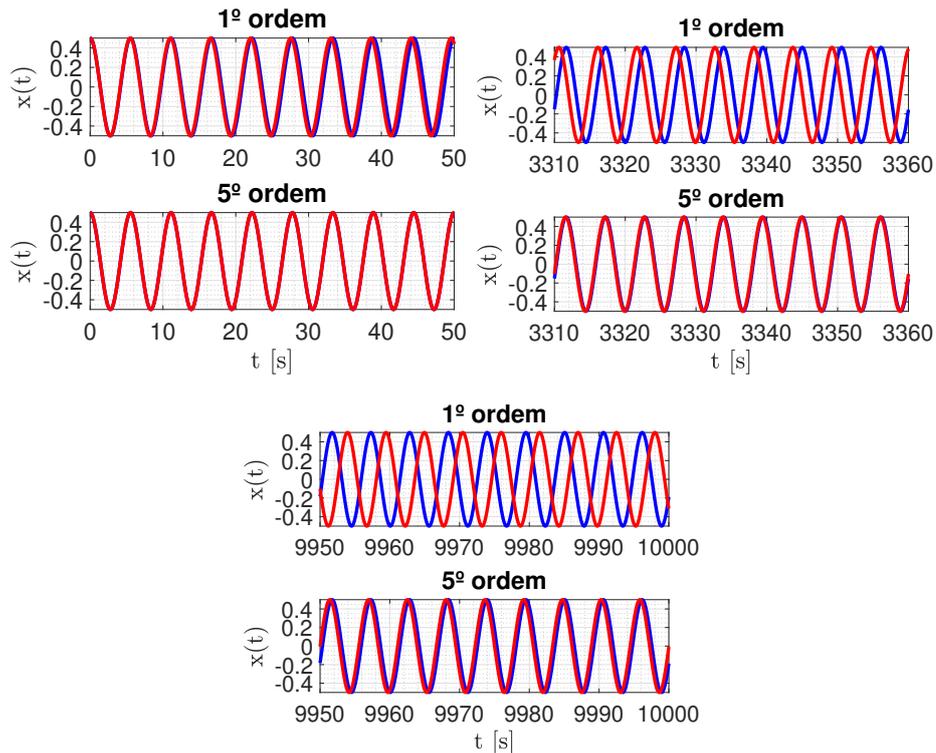


Figura 2.3: Comparação entre as aproximações numérica (azul) e analítica (vermelha) com recortes em três intervalos de integração com os seguintes valores de parâmetro não linearidade = 1.5, $\omega_0 = 1$, $A_0 = 0.5$.

ção analítica, aumenta-se o intervalo de integração durante o qual as aproximações estão quase superpostas. Dessa forma, a escolha da ordem da aproximação deve levar em consideração o tamanho do intervalo em que a aproximação será analisada.

Nesta dissertação, foram definidos dois erros para quantificar a qualidade dos aproximações analíticas ao longo do intervalo de integração. Através desses erros, é possível determinar o que chamamos de domínio de validade das aproximações. O domínio de validade é o intervalo máximo de integração no qual garante-se que um determinado tipo de erro (que é função da diferença entre as aproximações analítica e numérica) é menor do que um determinado valor previamente definido.

Para a implementação de métodos numéricos de integração de um PVI, é necessário que seja feita uma discretização do intervalo de integração, $[0, T]$, para o qual será calculado a aproximação, Fig. 1.1. A aproximação numérica é calculada apenas para alguns valores do parâmetro independente, t . O mesmo não ocorre com as aproximações analíticas. A partir da expressão analítica, é possível calcular-se o valor da aproximação para qualquer valor do parâmetro independente t . Visto isso, os erros definidos para quantificar a qualidade das aproximações analíticas em relação à aproximação numérica devem considerar

apenas os valores das aproximações nos instantes t_1, \dots, t_N da discretização como ilustrado na Fig. 2.4, onde x^{ar} representa a aproximação analítica de ordem r e x^n a aproximação numérica.

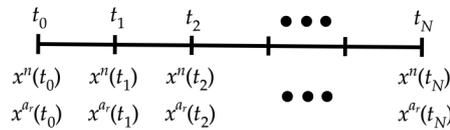


Figura 2.4: Discretização do intervalo de integração $[0, T]$.

O primeiro erro definido foi chamado de erro não acumulativo. Ele é o módulo da máxima diferença entre as aproximações nos intervalos t_1, \dots, t_N para valores fixos dos parâmetros, definido por

$$\text{erro}_1(t_N) = \max_{t_0 < t_j < t_N} |x^{ar}(t_j) - x^n(t_j)|. \quad (2-29)$$

Observe que o erro não acumulativo é função do tamanho do intervalo de integração. Entretanto, devido à periodicidade das aproximações analíticas obtidas pelo método de Lindstedt-Poincaré, o erro não acumulativo atinge um valor máximo. Ou seja, a partir de um certo tamanho de intervalo, o erro permanece constante. O erro máximo acontece quando, simultaneamente, uma das duas aproximações (analítica ou numérica) está no deslocamento máximo e a outra está no mínimo, como exemplificado na Fig. 2.5. O valor do erro máximo é igual a duas vezes o deslocamento inicial, $2A_0$.

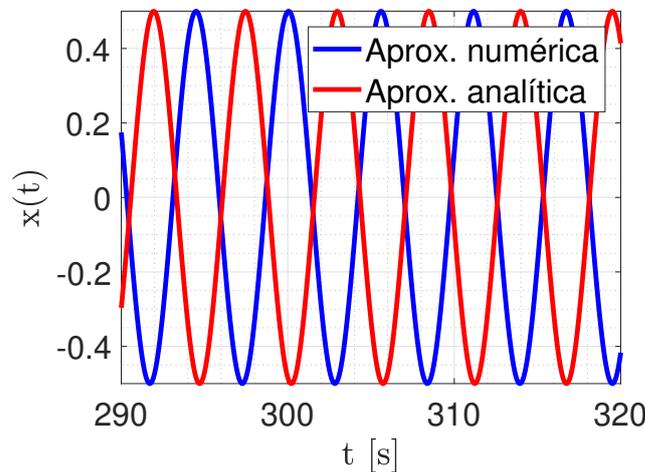


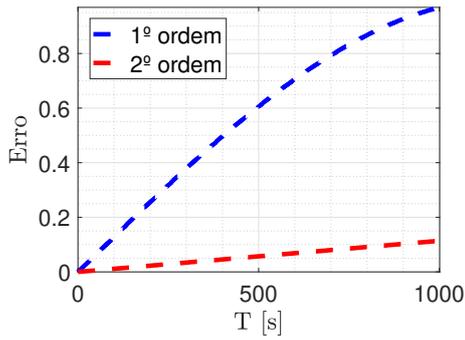
Figura 2.5: Exemplo de uma situação em que as aproximações numéricas e analíticas estão com defasagem máxima de forma que o erro acumulativo seja máximo.

Uma rotina, programada em MATLAB, foi desenvolvida para fazer o cálculo do erro não acumulativo para diferentes ordens de aproximação. Essa rotina está dividida em três partes, na primeira é calculada a aproximação numérica

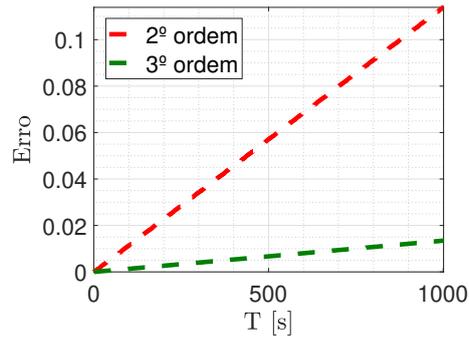
através do método de Runge Kutta de 4^o e 5^o ordem, usando a função ODE45, que será considerado como referência no cálculo do erro. Na segunda parte, valores dos parâmetros são atribuídos nas expressões analíticas. Com as duas aproximações já calculadas e avaliadas para os mesmos valores de parâmetro e intervalo de tempo, na terceira parte são calculados os erros. Usando a rotina desenvolvida, o erro não acumulativo foi calculado para as aproximações analíticas de 1^o à 6^o ordem, e o resultado está na Fig. 2.6. Essa figura está dividida em cinco subfiguras para uma melhor visualização. Ela mostra como a ordem da aproximação influencia no erro. A Fig. 2.6(a) mostra o erro das aproximações de 1^o e 2^o ordem, e é possível verificar como o erro entre as duas tem diferença significativa. Enquanto a curva de 1^o ordem atinge o erro máximo igual a 1 (dado que $A_0 = 0.5$) em $T \approx 1000$, a aproximação de 2^o ordem tem erro aproximadamente igual a 0.1 para o mesmo tamanho de intervalo de integração. Comportamentos semelhantes acontecem se continuarmos observando as outras subfiguras, conforme a ordem da aproximação aumenta, menor o erro apresentado para o mesmo intervalo de integração.

Em geral, a forma da solução de um PVI não linear é influenciada pelas condições iniciais. Por isso, foi feita uma análise da influência do deslocamento inicial, A_0 , no domínio de validade das aproximações analíticas de ordem 1 a 6. Para esta análise, cada aproximação analítica foi avaliada para valores de A_0 variando entre 0.1 a 1.5 e, para cada um dos valores de A_0 , a Eq. (2-12) foi integrada numericamente. A partir das aproximações analíticas e numéricas, o erro não acumulativo foi calculado, considerou-se $T = 500$. A Fig. 2.7 mostra os resultados obtidos. Como esperado, a Fig. 2.7 mostra que com o aumento do deslocamento inicial, a ordem da aproximação também deve aumentar para manter o mesmo erro. É importante observar que o erro da aproximação de 1^o ordem é sempre igual ou maior que os outros erros obtidos com aproximações de ordem maiores. Por exemplo, quando $A_0 = 0.5$, o erro da aproximação de 1^o ordem está em torno de 0.3, enquanto que o erro das outras aproximações são menores que 0.02. Quando $A_0 = 1.0$, a aproximação de 1^o e 2^o ordem apresentam erros próximos ao erro máximo, isto é, duas vezes o valor do deslocamento inicial, mas já os de 4^o, 5^o e 6^o ordem os erros são menores do que 0.2. Observa-se que a medida que A_0 aumenta, todas as curvas tendem a se sobrepor. Isso acontece pois conforme o valor de A_0 aumenta, o erro em $T = 500$ de todas as aproximações analíticas tende para o erro máximo que é função de A_0 .

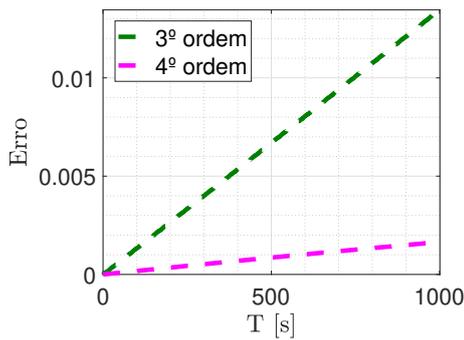
O comportamento do erro não acumulativo também foi analisado para variação da não linearidade. O resultado é mostrado na Fig. 2.8, construída



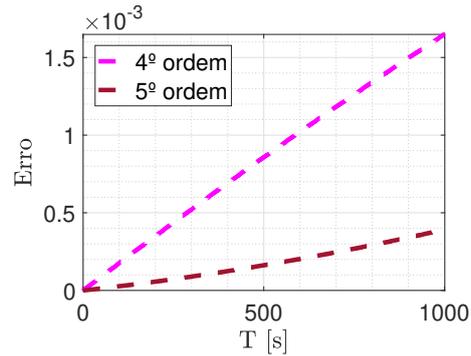
2.6(a): 1º ordem e 2º ordem



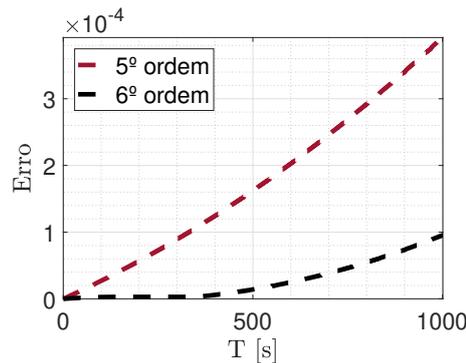
2.6(b): 2º ordem e 3º ordem



2.6(c): 3º ordem e 4º ordem



2.6(d): 4º ordem e 5º ordem



2.6(e): 5º ordem e 6º ordem

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1712554/CA

Figura 2.6: Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração entre as aproximações analíticas e numéricas, considerando os valores de não linearidade= 0.75, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 0.5$.

de forma similar à Fig. 2.7. Observe que com o aumento do valor da não linearidade, a curva que representa a aproximação de 1º ordem alcança o valor de erro máximo antes das outras. Esse resultado mostra novamente que o erro de 1º ordem é sempre maior ou igual do que os outros erros de ordem superior fixados todos os parâmetros do PVI. Nesta análise, o valor máximo da não linearidade considerado é 2.0, que pode ser considerado um valor alto.

Como uma forma de evitar o erro máximo que ocorre quando usamos o erro não acumulativo dado pela Eq. (2-29), foi considerada outra métrica, chamada de erro acumulativo. O erro acumulativo é dado pela soma do módulo

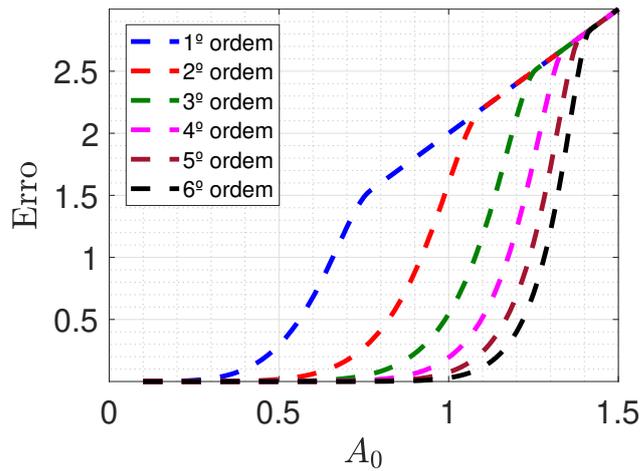


Figura 2.7: Erro não acumulativo em função da condição inicial $x(0) = A_0$ com não linearidade= 0.5, $\omega_0 = 1$ e $T = 500$.

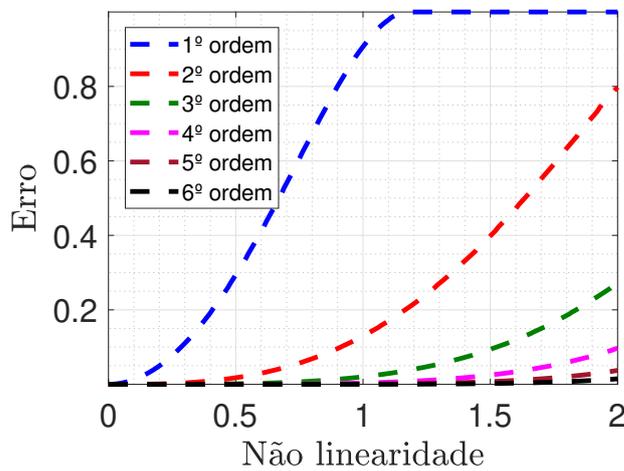
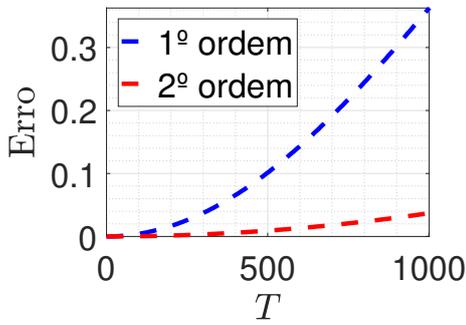


Figura 2.8: Erro não acumulativo em função da não linearidade com $A_0 = 0.6$, $\omega_0 = 1$ e $T = 500$.

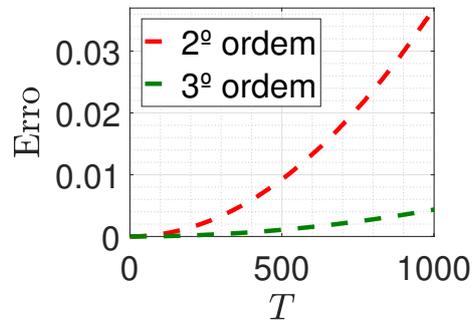
da diferença máxima entre as aproximações analíticas e numéricas durante um intervalo de tempo $[0, T]$ para valores fixos dos parâmetros, dado por

$$\text{erro}_2(t_N) = \frac{\sum_{p=0}^N \max_{t_0 < t_j < t_p} |x^{ar}(t_j) - x^n(t_j)|}{N}. \quad (2-30)$$

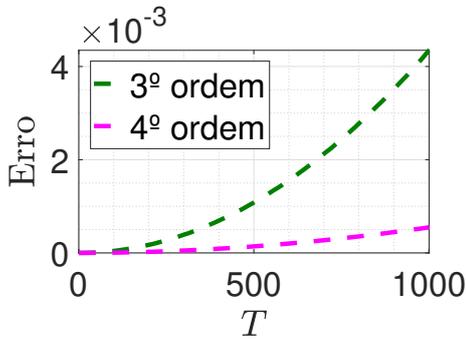
A Fig. 2.9 mostra o erro acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$ para as primeiras seis ordem de aproximação. Ao observá-la, é possível verificar que no final do intervalo, enquanto o erro obtido pela aproximação de 1º ordem é em torno de 0.35, o erro de 2º ordem é de 0.036 e, o de 6º ordem é menor do que $1.58 \cdot 10^{-5}$. Isso mostra que o aumento da ordem da aproximação, aumenta o domínio de validade.



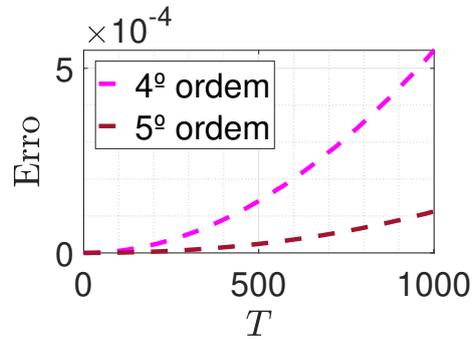
2.9(a): 1º ordem e 2º ordem



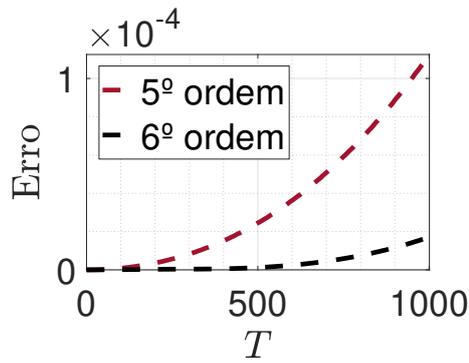
2.9(b): 2º ordem e 3º ordem



2.9(c): 3º ordem e 4º ordem



2.9(d): 4º ordem e 5º ordem



2.9(e): 5º ordem e 6º ordem

Figura 2.9: Erro acumulado em função do tamanho do intervalo de integração considerando não linearidade= 0.75, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 0.5$.

3

Métodos de múltiplas escalas de tempo

Como visto no capítulo anterior, o método de Lindstedt-Poincaré calcula aproximações analíticas hierárquicas lineares para a solução de PVI não-lineares. Entretanto, esse método não é eficiente quando as soluções apresentam aperiodicidade ou movimentos com diferentes escalas de tempo. Exemplos clássicos de sistemas mecânicos cuja resposta tem aperiodicidade e múltiplas escalas de tempo são osciladores com amortecimento [3; 33]. Nesse tipo de sistema há em geral uma escala de tempo associada à oscilação e uma outra escala associada ao decaimento da amplitude. O método de múltiplas escalas de tempo desenvolvido por Sturrock, Frieman, Kevorkian e Nayfeh fornece uma abordagem alternativa para calcular aproximações analíticas para a solução desse tipo de sistemas [41]. A principal característica do método é a troca da variável t por múltiplas escalas de tempo. Nessa dissertação será tratada apenas a expansão derivativa, definida por Nayfeh em [31], que expande a variável t em uma série de potências de ϵ , como

$$T_j = \epsilon^j t \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3-1)$$

As ideias centrais do método de múltiplas escalas de tempo serão apresentada no exemplo a seguir, que auxiliará a ilustrar a metodologia e o comportamento das múltiplas escalas.

Exemplo 1 *Este exemplo foi usado por Holmes em [13]. Considere um sistema massa-mola-amortecedor cuja dinâmica é dada pelo PVI linear*

$$\ddot{y}(t) + \epsilon \dot{y}(t) + y(t) = 0, \quad (3-2)$$

com condições iniciais $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$. Como o sistema é linear, tem solução analítica conhecida

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2/4}} e^{-\epsilon t/2} \sin(t \sqrt{1 - \epsilon^2/4}). \quad (3-3)$$

Primeiramente será mostrado que a solução desse PVI não é bem representada por aproximações obtidas pelo método de Lindstedt-Poincaré. Para isso, calcula-se a aproximação de 1ª ordem pelo método de Lindstedt-Poincaré que é dado por

$$y(t) \approx \sin t. \quad (3-4)$$

Ao observar a Fig. 3.1, onde são mostradas a aproximação calculada na Eq. (3-4) e a solução analítica da Eq. (3-3), pode-se concluir que a aproximação de 1º ordem calculada pelo método de Lindstedt-Poincaré não consegue representar o decaimento da amplitude de deslocamento do sistema, uma vez que o método calcula somente aproximações periódicas.

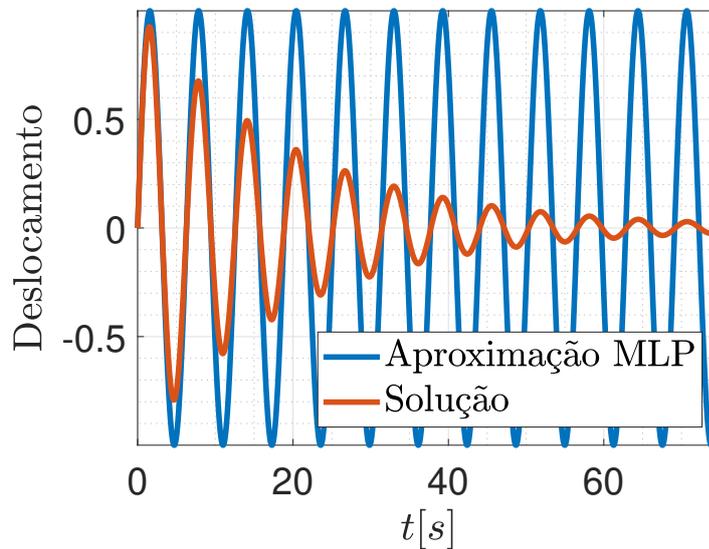


Figura 3.1: Comparação entre a expansão regular dada pela Eq. (3-4) e a solução analítica dada pela Eq. (3-3) com $\epsilon = 10^{-1}$.

Como uma segunda alternativa, para aproximar a solução do PVI será considerado uma expansão em potências de ϵ como na Eq. (2-6), só que os termos que causam ressonância não serão eliminados. Esse procedimento fornece a seguinte aproximação, também de 1º ordem, para a solução da Eq. (3-2)

$$y(t) \approx \sin t - \frac{1}{2} \epsilon t \sin t. \quad (3-5)$$

A aproximação calculada na Eq. (3-5) e a solução analítica do PVI expresso na Eq. (3-3) são mostrados na Fig. 3.2. Pode-se observar que a nova aproximação representa melhor a solução do que a calculada na Eq. (3-4). Pode-se observar que no intervalo $t \in [0, 9]$, as duas curvas são muito próximas. Porém, para $t > 9$, o comportamento das curvas se diferem. Enquanto a curva que representa a aproximação tem amplitude crescente, a solução tem amplitude decrescente. Conclui-se que a expansão regular também não é bem sucedida no cálculo de aproximações para a solução desse tipo de PVI.

Para aplicar o método de múltiplas escalas de tempo no cálculo de uma aproximação para a solução do PVI expresso na Eq. (3-2) com condição inicial $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$, primeiro deve-se definir a ordem da aproximação desejada.

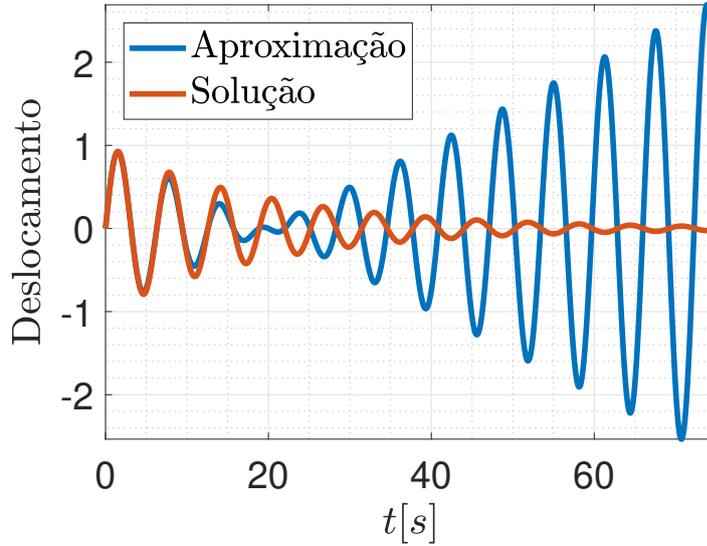


Figura 3.2: Comparação entre a expansão regular dada pela Eq. 3-5 e a solução analítica dada pela Eq. 3-3 com $\epsilon = 10^{-1}$.

Neste caso escolheu-se 1^o ordem para que o exemplo ficasse o mais simples possível. Devido a escolha de calcular a aproximação de 1^o ordem, será preciso definir duas novas escalas de tempo. Elas são dadas por

$$T_0 = t, \quad (3-6a)$$

$$T_1 = \epsilon t. \quad (3-6b)$$

Na expansão considerada para definir as novas escalas de tempo, observe que o termo T_1 depende de t , ou seja, dependente de T_0 . Entretanto, como estratégia para calcular as aproximações será considerado que T_1 não depende de T_0 . Esse é um artifício usado para simplificar as contas mas que não tem uma explicação rigorosa, é uma heurística [39]. Para transformar a derivada em relação ao tempo original t em relação as novas escalas T_0 e T_1 usa-se a regra da cadeia

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial y}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial y}{\partial T_1} = \frac{\partial y}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial y}{\partial T_1}, \quad (3-7)$$

Com segunda derivada igual

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 T_1} + \epsilon \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 T_1} + \epsilon \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2} \\ &= \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2}. \end{aligned} \quad (3-8)$$

Para simplificar a notação, as derivadas parciais serão representadas por ∂_{T_j} . A solução proposta continuará sendo uma expansão em série de ϵ como na Eq.

(2-6), que truncada até o segundo termo fica

$$y(T_0, T_1) \approx y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1), \quad (3-9)$$

só que agora cada y_j é função de T_0 e T_1 . Os próximos passos são análogos aos do método de Lindstedt-Poincaré. A Eq. (3-9) e suas derivadas devem ser substituídas na Eq. (3-2),

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 y(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y(T_0, T_1)}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y(T_0, T_1)}{\partial T_1^2} \right] + \\ & \epsilon \left[\frac{\partial y(T_0, T_1)}{\partial T_0} + \frac{\partial y(T_0, T_1)}{\partial T_1} \right] + y(T_0, T_1) = 0, \\ & \frac{\partial^2 [y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1)]}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 [y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1)]}{\partial T_0 \partial T_1} + \\ & \epsilon^2 \frac{\partial^2 [y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1)]}{\partial T_1^2} + \epsilon \left\{ \frac{\partial [y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1)]}{\partial T_0} + \frac{\partial [y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1)]}{\partial T_1} \right\} \\ & + y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 y_0(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + y_0(T_0, T_1) \right] \\ & + \epsilon \left[\frac{\partial^2 y_1(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0(T_0, T_1)}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial y_0(T_0, T_1)}{\partial T_0} + y_1(T_0, T_1) \right] \\ & + \epsilon^2 \left[2 \frac{\partial^2 y_1(T_0, T_1)}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 y_0(T_0, T_1)}{\partial T_1^2} + \frac{\partial y_1(T_0, T_1)}{\partial T_0} + \frac{\partial y_0(T_0, T_1)}{\partial T_1} \right] \\ & + \epsilon^3 \left[\frac{\partial^2 y_1(T_0, T_1)}{\partial T_1^2} + \frac{\partial y_1(T_0, T_1)}{\partial T_1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Como será calculada uma aproximação de 1^o ordem, só serão considerados os coeficientes dos termos de ϵ^0 e ϵ^1 , os coeficientes de ϵ^2 e ϵ^3 foram desconsiderados. Assim pelo teorema fundamental do método de perturbação pode-se formar uma família de PVI composta por equações diferenciais parciais lineares

$$\partial_{T_0}^2 y_0 + y_0 = 0, \quad (3-10a)$$

$$\partial_{T_0}^2 y_1 + y_1 = -2 \partial_{T_0} \partial_{T_1} y_0 - \partial_{T_0} y_0, \quad (3-10b)$$

com condições iniciais iguais a $y_0(0, 0) = y_1(0, 0) = 0$, $\partial_{T_0} y_0(0, 0) = 1$, $\partial_{T_0} y_1(0, 0) + \partial_{T_1} y_0(0, 0) = 0$. Os PVI da família devem ser solucionados de forma hierárquica, pois o PVI de ordem superior é dependente da solução do PVI de ordem inferior. Então, o problema da Eq. (3-10a) é o primeiro a ser resolvido, e apresenta solução geral

$$y_0(T_0, T_1) = a_0(T_1) \sin T_0 + b_0(T_1) \cos T_0. \quad (3-11)$$

Como as Eqs. (3-10) são equações diferenciais parciais, os coeficientes a_0 e b_0 devem ser funções em relação a T_1 , ao invés de constantes como no método de Lindstedt-Poincaré. Para definir as funções $a_0(T_1)$ e $b_0(T_1)$ deve-se considerar a próxima ordem de aproximação. Substituindo a solução $y_0(T_1, T_1)$ na Eq.(3-10b) tem-se

$$\partial_{T_0}^2 y_1 + y_1 = (2b'_0 + b_0) \sin T_0 - (2a'_0 + a_0) \cos T_0, \quad (3-12)$$

onde \square' representa a derivada em respeito a T_1 . O lado direito da equação apresenta os termos $\cos T_0$ e $\sin T_0$ que geram na solução $T_0 \sin T_0$ e $T_0 \cos T_0$, respectivamente. Esses termos crescem indefinidamente com o tempo, e devem ser eliminados para que resultados semelhantes aos ilustrados na Fig. 3.2 não se repitam. Com isso a_0 e b_0 devem ser escolhidos de maneira a evitar a presença desses termos na aproximação, ou seja

$$2b'_0 + b_0 = 0, \quad (3-13a)$$

$$2a'_0 + a_0 = 0. \quad (3-13b)$$

As condições iniciais das Eqs. (3-13) são definidas de acordo com as condições para $y_0(0, 0) = 0$ e $\partial_{T_0} y_0(0, 0) = 1$, que devem ser substituída na Eq. (3-11)

$$y_0(0, 0) = a_0(0) \sin 0 + b_0(0) \cos 0 = 0 \quad (3-14a)$$

$$\partial_{T_0} y_0(0, 0) = a_0(0) \cos 0 - b_0(0) \sin 0 = 1 \quad (3-14b)$$

assim tem-se $a_0(0) = 1$ e $b_0(0) = 0$. Como as Eqs. (3-13) são lineares e têm solução analítica conhecida, pode-se integra-las de acordo com as condições iniciais definidas para a_0 e b_0 , obtendo como solução

$$b_0(T_1) = 0, \quad (3-15a)$$

$$a_0(T_1) = e^{-T_1/2}. \quad (3-15b)$$

A aproximação de primeira ordem para o PVI da Eq. (3-2),

$$y(T_0, T_1) \approx e^{-T_1/2} \sin T_0. \quad (3-16)$$

A Fig. 3.3 mostra a aproximação de 1^o ordem calculada pelo método de múltiplas escalas de tempo, a solução do PVI da Eq. (3-2) e o decaimento da amplitude que é dado por

$$\text{Decaimento} = e^{-T_1/2}. \quad (3-17)$$

Observe que no gráfico as duas curvas são praticamente indistinguíveis. É evidente que existem duas escalas de tempo. A escala rápida, T_0 , relacionada com a oscilação do sistema, e a escala lenta, T_1 , relacionada com o decaimento da amplitude.

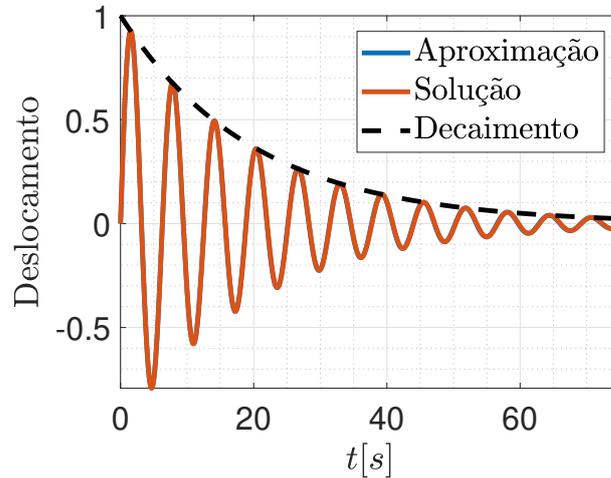


Figura 3.3: Comparação entre a aproximação dada pela Eq. (3-16) e a solução analítica dada pela Eq. (3-3) com $\epsilon = 10^{-1}$.

3.1 Equação de Duffing

O objetivo da seção anterior do trabalho foi apresentar o método de múltiplas escalas de tempo através de um exemplo linear simples. Nessa seção, o método será aplicado em um PVI envolvendo a equação de Duffing não amortecida, o mesmo PVI apresentado na seção 2.1. A escala de tempo adotada será uma expansão em série de ϵ

$$T_0 = t, \quad (3-18a)$$

$$T_1 = \epsilon t, \quad (3-18b)$$

$$T_2 = \epsilon^2 t, \quad (3-18c)$$

⋮

$$T_N = \epsilon^N t. \quad (3-18d)$$

Na expansão considerada para definir as novas escalas de tempo, só duas variáveis são realmente independentes, t e ϵ . As escalas T_j para $j = 1, \dots, N$

dependem das escalas anteriores. Entretanto, como estratégia para calcular as aproximações, os termos T_j , $j = 1, \dots, N$ serão tratados como variáveis independentes. Esse artifício não tem uma explicação rigorosa, é uma heurística, e aparece em várias literaturas [20; 31; 41]. Note que T_0 cresce na mesma proporção que t , enquanto que as escalas lentas, T_j , $j = 1, \dots, N$ crescem mais lentamente do que t [39]. Como as escalas são tratadas como independentes, a regra da cadeia é usada para transformar a derivada em relação a t para as novas escalas de tempos. Dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial y}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial y}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial y}{\partial T_2} + \dots + \frac{dT_N}{dt} \frac{\partial y}{\partial T_N} \\ &= \frac{\partial y}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial y}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial y}{\partial T_2} + \dots + \epsilon^N \frac{\partial y}{\partial T_N}, \end{aligned} \quad (3-19)$$

que por simplificação de notação será representada por

$$\partial_t y = \partial_{T_0} y + \epsilon \partial_{T_1} y + \epsilon^2 \partial_{T_2} y + \dots + \epsilon^N \partial_{T_N} y.$$

Com segunda derivada igual a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 \partial T_1} + \dots \\ &= \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3-20)$$

A solução proposta para o PVI também será um série em potências de ϵ , que passa de função de t , $y(t)$, para função de $T_0, T_1, T_2, \dots, T_N$, $y(T_0, T_1, T_2, \dots, T_N)$, assim a Eq. (2-6) se torna

$$\begin{aligned} y(T_0, T_1, T_2, \dots, T_N) &= y_0(T_0, T_1, T_2, \dots, T_N) + \epsilon y_1(T_0, T_1, T_2, \dots, T_N) + \\ &\quad \epsilon^2 y_2(T_0, T_1, T_2, \dots, T_N) + \dots + \epsilon^N y_N(T_0, T_1, T_2, \dots, T_N). \end{aligned} \quad (3-21)$$

Para simplificar a notação nas próximas contas, os argumentos da Eq. (3-21) serão omitidos, sendo representados por

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots + \epsilon^N y_N. \quad (3-22)$$

Para calcular a aproximação de 2º ordem para o PVI da Eq. (2-12) com três termos, as Eqs. (3-19), (3-20) e (3-21) devem ser truncadas, no termo de ϵ^2 , e substituídas na Eq. (2-12)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2)}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2)}{\partial T_0 T_1} \\ & + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2)}{\partial T_1^2} + \frac{\partial^2(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2)}{\partial T_0 T_1} \right) \\ & + \omega_0^2 (y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2) + \epsilon (y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2)^3 = 0. \end{aligned} \quad (3-23)$$

O próximo passo é expandir a Eq. (3-23), para facilitar o agrupamento dos coeficientes de mesma ordem de ϵ . Vale lembrar que a aproximação a ser calculada é a de 2º ordem, assim os coeficientes de potência de ϵ maior que 3 devem ser desconsiderados, resultando em

$$\begin{aligned} & \partial_{T_0}^2 y_0 + \omega_0^2 y_0 + \epsilon [\partial_{T_0}^2 y_1 + \omega_0^2 y_1 + 2 \partial_{T_0} \partial_{T_1} y_0 + y_0^3] + \\ & \epsilon^3 [\partial_{T_0}^2 y_2 + \omega_0^2 y_2 + 2 \partial_{T_0} \partial_{T_1} y_1 + 2 \partial_{T_0} \partial_{T_2} y_0 + \partial_{T_1}^2 y_0 + 3 y_1 y_0^2] = 0. \end{aligned} \quad (3-24)$$

Lembrando que cada termo y_i é função das novas escalas de tempo, logo as equações diferenciais presentes na família de PVI, são equações diferenciais parciais. Usando o teorema fundamental do método de perturbação, obtêm-se

$$\partial_{T_0}^2 y_0 + \omega_0^2 y_0 = 0, \quad (3-25a)$$

$$\partial_{T_0}^2 y_1 + \omega_0^2 y_1 = -2 \partial_{T_0} \partial_{T_1} y_0 - y_0^3, \quad (3-25b)$$

$$\partial_{T_0}^2 y_2 + \omega_0^2 y_2 = -2 \partial_{T_0} \partial_{T_1} y_1 - 2 \partial_{T_0} \partial_{T_2} y_0 - \partial_{T_1}^2 y_0 - 3 y_1 y_0^2. \quad (3-25c)$$

A condição inicial $y(t = 0) = A_0$ passa a ser

$$y_0(0, 0, 0) = A_0, \quad (3-26a)$$

$$y_1(0, 0, 0) = 0, \quad (3-26b)$$

$$y_2(0, 0, 0) = 0, \quad (3-26c)$$

e $\dot{y}(t = 0) = 0$ passar a ser

$$\partial_{T_0} y_0(0, 0, 0) = 0, \quad (3-27a)$$

$$\partial_{T_0} y_1(0, 0, 0) = -\partial_{T_1} y_0(0, 0, 0), \quad (3-27b)$$

$$\partial_{T_0} y_2(0, 0, 0) = -\partial_{T_1} y_1(0, 0, 0) - \partial_{T_2} y_0(0, 0, 0). \quad (3-27c)$$

As equações devem ser resolvidas hierarquicamente, uma vez que, as equações referentes a ordens superiores de ϵ são dependentes das soluções dos PVI de ordens inferiores. Com o intuito de facilitar os cálculos, a resposta das EDP serão representados na forma exponencial, e as condições iniciais só serão aplicadas no último passo para calcular as constante de integração. O primeiro PVI resolvido é Eq. (3-25a), que apresenta solução igual a

$$y_0(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (3-28)$$

Reforçando que as Eqs. (3-25) são equações diferenciais parciais, e ao invés de A ser uma constante como para a solução da Eq. (2-17a), A deve ser função de T_1 e T_2 , assim como \bar{A} , seu complexo conjugado. Substituindo a Eq. (3-28) na Eq. (3-25b) tem-se

$$\begin{aligned} \partial_{T_0}^2 y_1 + \omega_0^2 y_1 = & (-2i\omega_0 \partial_{T_1} A - 3A^2 \bar{A}) e^{i\omega_0 T_0} \\ & + (2i\omega_0 \partial_{T_1} \bar{A} - 3A \bar{A}^2) e^{-i\omega_0 T_0} \\ & - A^3 e^{3i\omega_0 T_0} - \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0}. \end{aligned} \quad (3-29)$$

As funções $A(T_1, T_2)$ e $\bar{A}(T_1, T_2)$ devem ser calculadas de forma a evitar a presença de termos seculares, dessa forma iguala-se a zero os coeficientes dos termos $e^{i\omega_0 T_0}$ e $e^{-i\omega_0 T_0}$, tendo assim

$$-2i\omega_0 \partial_{T_1} A - 3A^2 \bar{A} = 0, \quad (3-30a)$$

$$2i\omega_0 \partial_{T_1} \bar{A} - 3A \bar{A}^2 = 0. \quad (3-30b)$$

As relações das Eqs. (3-30) são não lineares, então elas não podem ser solucionadas analiticamente, igual feito para o exemplo linear no início do capítulo. Com os coeficientes de $e^{i\omega_0 T_0}$ e $e^{-i\omega_0 T_0}$ eliminados, Eq. (3-29) se torna

$$\partial_{T_0}^2 y_1 + \omega_0^2 y_1 = -A^3 e^{3i\omega_0 T_0} - \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0}, \quad (3-31)$$

com solução igual a

$$y_1(T_0, T_1, T_2) = \frac{A(T_1, T_2)^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{\bar{A}(T_1, T_2)^3}{8\omega_0^2} e^{-3i\omega_0 T_0}. \quad (3-32)$$

Para solucionar as Eqs. (3-30), será proposto como solução para $A(T_1, T_2)$ da seguinte forma

$$A(T_1, T_2) = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) e^{i\phi(T_1, T_2)}, \quad (3-33)$$

onde $a(T_1, T_2)$ e $\phi(T_1, T_2)$ são funções a serem determinadas e \bar{A} é o complexo conjugado de A ,

$$\bar{A}(T_1, T_2) = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) e^{-i\phi(T_1, T_2)}. \quad (3-34)$$

Assim as Eqs. (3-33) e (3-34) devem ser substituídas na Eq. (3-30), obtendo

$$i\omega_0 D_{T_1} a e^{i\phi} - \omega_0 a D_{T_1} \phi e^{i\phi} + \frac{3}{4} a^2 e^{2i\phi} \frac{a}{2} e^{-i\phi} = 0. \quad (3-35)$$

Para calcular a e ϕ , separam-se as partes reais e imaginárias, ficando com

$$\partial_{T_1} a = 0 \Rightarrow a = a_0(T_2), \quad (3-36a)$$

$$-\omega_0 a \partial_{T_1} \phi + \frac{3a^3}{8} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{3a^2}{8\omega_0} T_1 + \phi_0(T_2). \quad (3-36b)$$

Para calcular as funções de $a_0(T_2)$ e $\phi_0(T_2)$, é preciso resolver a Eq. (3-25c). Assim as Eqs. (3-28) e (3-32) devem ser substituídas na Eq. (3-25c), que se torna

$$\begin{aligned} \partial_{T_0}^2 y_2 + \omega_0^2 y_2 = & \left(\frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2} - 2i\omega_0 \partial_{T_2} A \right) e^{i\omega_0 T_0} \\ & - \frac{3A^5}{8\omega_0^2} e^{5i\omega_0 T_0} + \frac{21A^4 \bar{A}}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + c.c, \end{aligned} \quad (3-37)$$

onde c.c significa complexo conjugado. Seguindo os mesmos passos para calcular y_1 , devemos eliminar os termos que causam ressonância, obtendo assim a relação de $\partial_{T_2} A$,

$$2i\omega_0 \partial_{T_2} A = \frac{15A^3 \bar{A}^2}{8\omega_0^2}. \quad (3-38)$$

Como feito para resolver $\partial_{T_1} A$, substitui-se as Eqs. (3-33) e (3-34) na Eq. (3-38), a parte real e a imaginária devem ser separadas, obtendo as seguintes equações

$$\partial_{T_2} a_0 = 0 \Rightarrow a_0(T_2) = \alpha, \quad (3-39a)$$

$$\partial_{T_2} \phi_0 = -\frac{15a^4}{256\omega_0^3} \Rightarrow \phi_0(T_2) = -\frac{15a^4}{256\omega_0^3} T_2 + \beta. \quad (3-39b)$$

onde α e β são constantes. Assim tem-se que

$$A(T_1, T_2) = \frac{\alpha}{2} e^{\frac{3\alpha^2}{8\omega_0} T_1 - \frac{15\alpha^4}{256\omega_0^3} T_2 + \beta} \quad (3-40)$$

Para finalizar o cálculo da aproximação de 2^o ordem, precisa-se calcular a solução de x_2 . Ao eliminar os termos que causam ressonância, a Eq. (3-37) se torna

$$\partial_{T_0}^2 y_2 + \omega_0^2 y_2 = -\frac{3A^5}{8\omega_0^2} e^{5i\omega_0 T_0} + \frac{21A^4 \bar{A}}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + c.c, \quad (3-41)$$

com solução igual

$$y_2(T_0, T_1, T_2) = \frac{A^5}{64\omega_0^4} e^{5i\omega_0 T_0} - \frac{21 A^4 \bar{A}}{64\omega_0^4} e^{3i\omega_0 T_0} + c.c. \quad (3-42)$$

Assim tem-se a aproximação analítica de 2º ordem obtida pelo método de múltiplas escalas para o PVI envolvendo a equação de Duffing não amortecida,

$$y(T_0, T_1, T_2) = \alpha \cos(\omega_0 T_0 + \phi) + \frac{\epsilon \alpha^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \frac{\epsilon 21 \alpha^2}{32\omega_0^2} \right) \cos(3\omega_0 T_0 + 3\phi) + \frac{\epsilon^2 \alpha^5}{1024\omega_0^4} \cos(5\omega_0 T_0 + 5\phi), \quad (3-43)$$

onde

$$\phi = \frac{3\alpha^2}{8\omega_0} T_1 - \frac{15\alpha^4}{256\omega_0^3} T_2 + \beta, \quad (3-44)$$

as constantes α e β devem ser definidas através das condições iniciais.

3.2

Domínio de validade

Nesta seção será avaliada a influência do número de termos considerados nas aproximações analíticas obtidas através do método de múltiplas escalas, usando o erro não acumulativo definido na seção 2.1.2. Também será feita uma comparação entre os dois métodos de perturbação estudados, o Lindstedt-Poincaré e o de múltiplas escalas de tempo. Nessa comparação será avaliado o erro não acumulativo das aproximações calculadas pelos dois métodos. Similar a rotina programada para avaliar as aproximações calculadas pelo método de Lindstedt-Poincaré, foi feita uma para o método de múltiplas escalas de tempo. Essa nova rotina foi dividida em três sub-rotinas, a primeira delas para calcular a aproximação numérica usando o método de Runge-Kutta para a Eq. (2-12), considerada como referência. A segunda sub-rotina tem o objetivo de atribuir valores aos parâmetros das expressões analíticas calculadas pelo método de múltiplas escalas de tempo. Para este método as aproximações foram calculadas considerando de um a três termos. A terceira sub-rotina, é destinada a calcular o erro não acumulativo entre as aproximações numérica e analítica. O erro calculado está plotado na Fig. 3.4. Analisando-a, é possível, concluir que o aumento no número de termos considerado na aproximação, aumenta o domínio de validade. Considerando um erro máximo admitido igual a 0.02, o domínio de validade para a aproximação com 1 termo, é igual a $T = 90[s]$. As outras duas aproximações tem valor de erro menor que 0.02 para $T = 500[s]$.

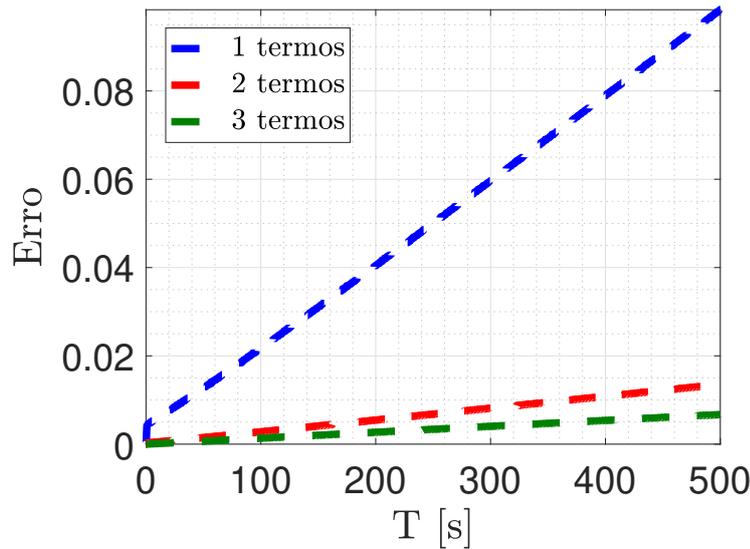


Figura 3.4: Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$.

3.2.1

Comparação entre as aproximações obtidas por Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas

Os dois métodos de perturbação estudados se revelaram eficientes ao calcular aproximações analíticas para PVI não lineares que não possuem solução analítica conhecida. Porém, o método de múltiplas escalas de tempo apresenta uma vantagem em relação ao Lindstedt-Poincaré. Ele consegue tratar aperiodicidades enquanto que o método de Lindstedt-Poincaré não consegue. Como os dois métodos foram aplicados para calcular aproximações para a solução do mesmo PVI, pode-se então comparar o erro não acumulativo obtido com cada um dos métodos para aproximações de mesma ordem. Para isso, foi incluído mais duas subdivisões na rotina em MATLAB, uma para atribuir os mesmos valores de parâmetro nas expressões analíticas calculadas pelo método de Lindstedt-Poincaré, e outra para calcular seu erro não acumulativo. Os resultados obtidos são mostrados nas Figs. 3.5, 3.6 e 3.7. Observando essas figuras, verifica-se que para todas as ordens de aproximação, o método de múltiplas escalas de tempo apresentaram menor erro não acumulativo do que o método de Lindstedt-Poincaré.

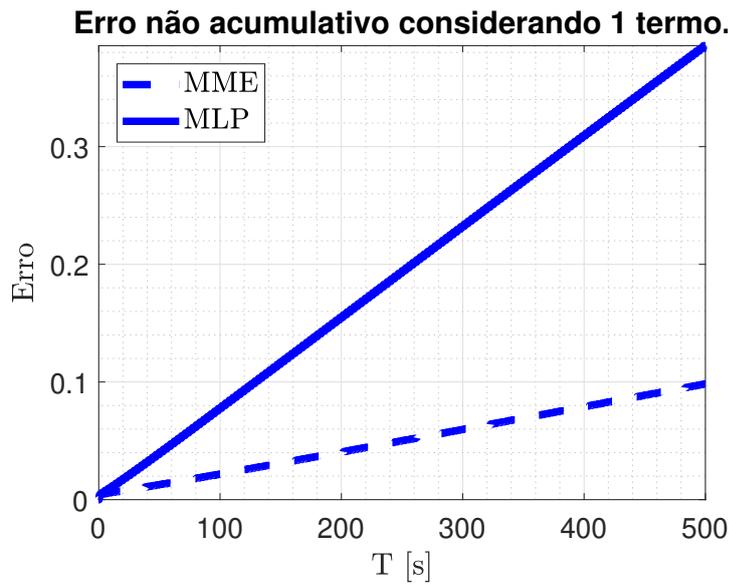


Figura 3.5: Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, das aproximações analíticas com 1 termo calculadas pelos métodos de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas de tempo, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$.

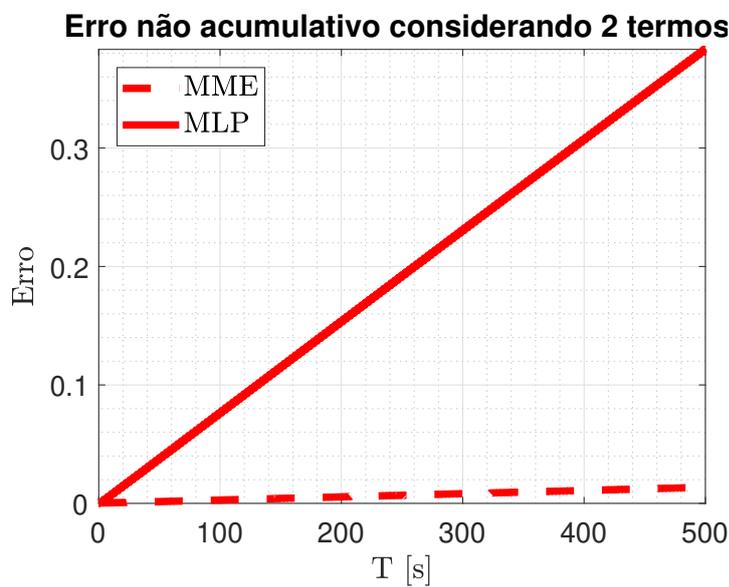


Figura 3.6: Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, das aproximações analíticas com 2 termo calculadas pelos métodos de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas de tempo, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$.

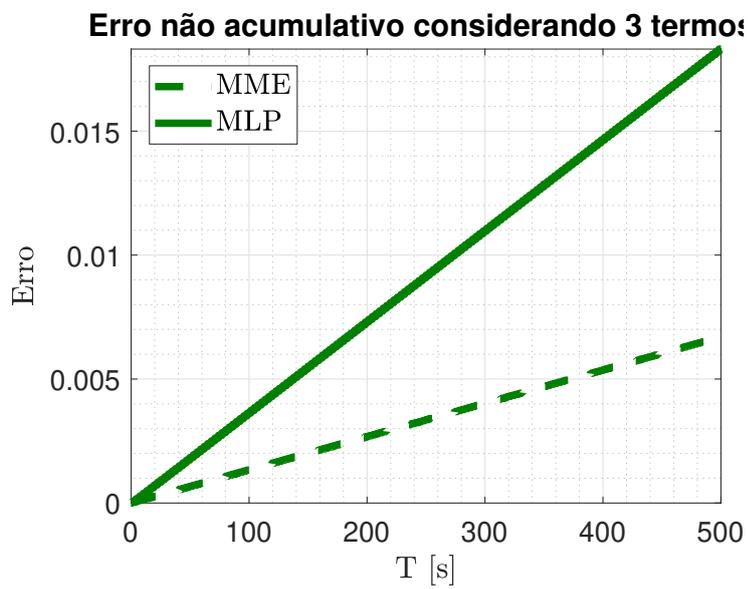


Figura 3.7: Erro não acumulativo em função do tamanho do intervalo de integração $[0, T]$, das aproximações analíticas com 3 termo calculadas pelos métodos de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas de tempo, considerando os valores de $\epsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$ e $A_0 = 1$.

4

Método de múltiplas escalas aplicado em um PVI com atrito seco

O estudo de métodos de aproximação analítico, é uma linha de pesquisa recente no laboratório de Vibrações da PUC-Rio. A nova linha complementa as outras frentes de pesquisa já existentes, uma vez que no Laboratório de Vibrações existe um grande interesse em PVI não lineares. Neste capítulo, um dos métodos de perturbação apresentado nessa dissertação será aplicado em um PVI não lineares de interesse do Laboratório de Vibrações, que modela a dinâmica de um sistema com atrito seco. Serão calculadas aproximações para a dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor que desliza em cima de uma esteira considerando a presença de atrito seco entre a massa e a esteira. O método utilizado para os cálculos da aproximação será o de múltiplas escalas de tempo, uma vez que o sistema apresenta amortecimento. Esse sistema foi escolhido por apresentar uma dinâmica muito interessante devido ao atrito seco. Ele aparece em diversos livros da literatura [8; 9; 13; 16].

O contato entre dois corpos com superfícies rugosas podem gerar uma força de atrito seco. A existência do atrito seco pode causar na dinâmica dos corpos em contato um fenômeno muito interessante chamado *stick-slip*, que desperta interesse de muitos pesquisadores e é objeto de estudo em vários artigos encontrados na literatura [25; 27; 36; 45; 46; 47; 50]. Esse fenômeno gerado pela força de atrito seco pode fazer com que a dinâmica de um sistema seja dividida em duas fases alternadas, uma denominada de *stick* e a outra de *slip*. Na fase de *stick*, a velocidade relativa entre os corpos em contato é igual a zero, e na fase *slip*, a velocidade tem valor diferente de zero [23].

Em geral, os PVI que modelam a dinâmica de sistemas com atrito seco e *stick-slip* não têm solução analítica conhecida. É comum encontrar na literatura trabalhos que aplicam métodos numéricos de integração para obter aproximações para esse tipo de problema. Entretanto, a não linearidade e a transição abrupta entre as fases de *stick* e *slip* dificultam bastante o processo de integração. Dessa forma, a aplicação do método de múltiplas escalas, uma técnica analítica, representa uma alternativa para o tratamento desse tipo de PVI. O uso da técnica pode levar a uma significativa redução do custo computacional empregado para a obtenção das aproximações. Vale ressaltar

que essa redução seria muito importante para o estudo de sistemas com atrito seco considerando incertezas [23; 24; 26; 28]. Facilitaria, por exemplo, a construção de modelos estatísticos e análises paramétricas. Uma observação importante é que na literatura, pode-se encontrar trabalhos que fazem esse tipo de análise de sistemas com atrito seco utilizando técnicas numéricas para calcular aproximações para a dinâmica dos sistemas com *stick-slip* [29].

4.1

Descrição do sistema

Considere um sistema massa-mola-amortecedor que desliza em cima de uma esteira com velocidade constante v , como ilustrado na Fig. 4.1. A massa do sistema é modelada como uma partícula de massa m , e considera-se a existência do atrito seco entre a massa m e a esteira.

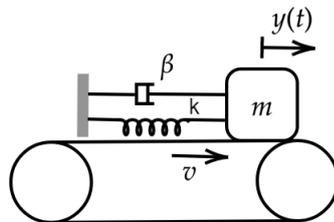


Figura 4.1: Sistema massa-mola-amortecedor com atrito seco.

A dinâmica do sistema esquematizado na Fig. 4.1 é descrito pelo PVI

$$m \ddot{y}(t) + \epsilon \beta \dot{y}(t) + k y(t) = f_{at}(t), \quad (4-1)$$

com condição de deslocamento inicial igual a $y(0) = A$ e de velocidade igual a $\dot{y}(0) = B$. Sendo y a posição da massa m , β o coeficiente de amortecimento, k a constante da mola, ϵ o parâmetro de perturbação, f_{at} a força de atrito que existe entre a massa e a esteira e V um múltiplo da velocidade relativa entre elas. A força de atrito é modelada como

$$f_{at}(V) = \frac{1}{3} a V (V^2 - 3) + f_d \text{sign}(V) \quad \text{quando } V \neq 0, \quad (4-2)$$

onde $V = (\epsilon v - \epsilon \dot{y})$, a e f_d são constantes positivas. Na Fig. 4.2 temos o modelo de atrito seco em função do múltiplo da velocidade relativa, V . Observando a Fig. 4.2, verifica-se que quando $V = 0$, a força de atrito pode assumir qualquer valor no intervalo $[-f_e, f_e]$, já para valores de $V \neq 0$, a força de atrito é descrita pela Eq. (4-2).

A resposta de um sistema com atrito seco pode ser composta por 2 fatores de movimento, a fase de *stick* e a fase de *slip*. Essas fases se alternam com

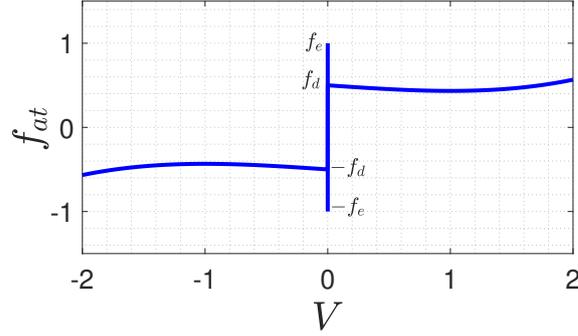


Figura 4.2: Modelo da força de atrito da Eq. (4-2), considerando $a = 0.1$ e $f_d = 0.5$.

uma transição abrupta e compõem um fenômeno chamado *stick-slip*. Para o sistema esquematizado na Fig. 4.1, a fase de *stick* é caracterizada pelo valor da velocidade relativa entre massa e esteira ser igual a 0, e pelo valor da força de atrito estar entre $-f_e$ e f_e . Durante a fase de *stick*, para determinar o valor que a força de atrito tem em cada instante, faz-se um balanço de forças através da Eq. (4-1). Como já mencionado nessa fase, a velocidade da massa m é igual a da esteira, $\dot{y} = v$, ou seja, a massa tem velocidade constante e aceleração igual a zero, $\ddot{y} = 0$. Aplicando essas 2 condições na Eq. (4-1) obtêm-se

$$\epsilon \beta v + k y(t) = f_{at}, \quad (4-3)$$

Observe que ao longo da fase de *stick*, a força de atrito varia de acordo com a Eq. (4-3). Para uma velocidade da esteira positiva, a posição da massa, y , crescerá e conseqüentemente f_{at} aumentará também. Esse crescimento acontecerá até f_{at} atingir o valor f_e . Nesse instante, a fase de *stick* termina e uma fase de *slip* se inicia. A seguir será explicado como determinar em qual fase de movimento o sistema se encontrar (*stick* ou *slip*) a partir da configuração da fase do sistema (posição e velocidade). Na fase de *stick*, tem-se que $\dot{y} = v$. Lembrando que a força de atrito está no intervalo

$$-f_e \leq f_{at} \leq f_e, \quad (4-4)$$

$$-f_e \leq \epsilon \beta v + k y(t) \leq f_e, \quad (4-5)$$

diminuindo o termo $\epsilon \beta v$ em todos os lados da desigualdade e dividindo eles por k , obtêm-se

$$\frac{-f_e - \epsilon \beta v}{k} \leq y(t) \leq \frac{f_e - \epsilon \beta v}{k}. \quad (4-6)$$

Uma característica importante das fases de *stick* e *slip* é que elas não podem ter duração nula, ou seja, não são instantâneas. Dessa forma, quando a posição e velocidade do sistema satisfazem $\dot{y} = v$ e $\frac{-f_e - \epsilon \beta v}{k} \leq y(t) \leq \frac{f_e - \epsilon \beta v}{k}$ durante

um intervalo de tempo não nulo, considera-se que o sistema está em *stick*. Caso contrário, considera-se que está em *slip*. A Fig. 4.3 mostra a sequência de fases de *stick* e *slip* na resposta do sistema, começando por uma fase de *stick*:

- o número de intervalos nos quais acontecem a fase *stick* é representado por st ;
- o número de intervalos nos quais acontecem a fase *slip* é representado por sl ;
- o instante que começa cada fase de *stick* é representado por d_i com i podendo assumir valores de $1 \dots st$;
- o instante que começa cada fase de *slip* é representado por l_i com i podendo assumir valores de $1 \dots sl$;
- a duração de cada fase de *stick* é representada por D_i com i podendo assumir valores de $1 \dots st$;
- a duração de cada fase de *slip* é representada por L_i com i podendo assumir valores de $1 \dots sl$.

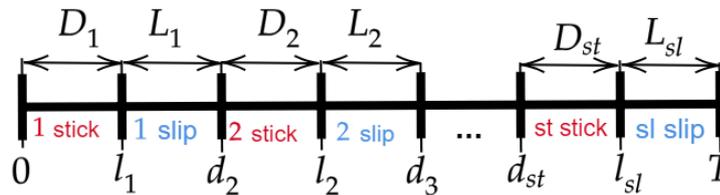


Figura 4.3: Fases de *stick* e *slip*.

Observando a Eq. (4-3), verifica-se que a equação da dinâmica durante a fase de *stick* vira uma equação algébrica e a massa tem um movimento retilíneo uniforme. Durante a fase de *stick* tem-se

$$y(t) = \text{Desl}_0 + vt, \quad t \in D_j, \quad j = 1, \dots, st, \quad (4-7)$$

onde Desl_0 representa a posição da massa no início de cada fase de *stick*. Durante a fase de *slip*, o PVI que representa a dinâmica do sistema não tem solução analítica conhecida. Dessa forma, para cada uma das fases de *slip*, aproximações para a solução do PVI serão calculadas através do método de múltiplas escalas de tempo.

4.2

Cálculo de aproximações analíticas para as fases de slip

O primeiro passo para calcular aproximações analíticas para as fases de *slip* é escolher a ordem da aproximação desejada e definir a expansão da variável t . Para calcular uma aproximação de 1º ordem, será definido $T_0 = t$ e $T_1 = \epsilon t$. A regra da cadeia deve ser utilizada no cálculo da primeira e segunda derivadas. Tem-se assim

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial T_0}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial T_0} + \frac{\partial T_1}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial T_1} = \frac{\partial y}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial y}{\partial T_1}, \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 T_1} + \epsilon \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 T_1} + \epsilon \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2} \\ &= \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2}. \end{aligned} \quad (4-9)$$

Considera-se a expansão uniforme em termos de ϵ mostrada na Eq. (3-21) como solução do PVI não linear expresso na Eq. (4-1) durante a fase *slip*. A expansão é truncada no termo de primeira ordem

$$y(T_0, T_1) \approx y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1). \quad (4-10)$$

Aplicando as Eqs. (4-8), (4-9) e (4-10) na Eq. (4-1) tem-se

$$\begin{aligned} &m \left[\frac{\partial^2 (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_0 T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_1^2} \right] \\ &+ \epsilon \beta \left[\frac{\partial (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_1} \right] + k [y_0 + \epsilon y_1] = \\ &\frac{1}{3} a \left(\epsilon v - \epsilon \left[\frac{\partial (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_1} \right] \right)^3 \\ &- 3 \frac{1}{3} a \left(\epsilon v - \epsilon \left[\frac{\partial (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial (y_0 + \epsilon y_1)}{\partial T_1} \right] \right) + f_d. \end{aligned} \quad (4-11)$$

Na Eq. (4-11) omitiu-se o termo $\text{sign}(V)$ a título de simplificação. O próximo passo a ser feito é expandir a Eq. (4-11) e agrupar os coeficientes de acordo com as potências de ϵ

$$\begin{aligned}
 & m \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + k y_0 + \epsilon \left[m \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + 2 m \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 T_1} + \beta \frac{\partial y_0}{\partial T_0} + k y_1 \right] \\
 & + \epsilon^2 \left[m \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_1^2} + 2 m \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0 T_1} + \beta \frac{\partial y_1}{\partial T_0} + \beta \frac{\partial y_0}{\partial T_1} \right] \\
 & + \epsilon^3 \left[m \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_1^2} + \beta \frac{\partial y_1}{\partial T_1} \right] = \\
 & \frac{1}{3} a \epsilon^3 \left[v - \frac{\partial y_0}{\partial T_0} - \epsilon \frac{\partial y_1}{\partial T_0} - \epsilon \frac{\partial y_0}{\partial T_1} - \epsilon^2 \frac{\partial y_1}{\partial T_1} \right]^3 \\
 & - a \epsilon \left[v - \frac{\partial y_0}{\partial T_0} - \epsilon \frac{\partial y_1}{\partial T_0} - \epsilon \frac{\partial y_0}{\partial T_1} - \epsilon^2 \frac{\partial y_1}{\partial T_1} \right] + f_d.
 \end{aligned} \tag{4-12}$$

Como está sendo calculada uma aproximação de 1º ordem, só serão considerados os coeficientes dos termos ϵ^0 e ϵ^1 . Os coeficientes correspondentes a potências de ϵ iguais ou maiores de 2 devem ser desconsiderados, transformando Eq. (4-12) em

$$\begin{aligned}
 & m \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + k y_0 + \epsilon \left[m \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + 2 m \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 T_1} + \beta \frac{\partial y_0}{\partial T_0} + k y_1 \right] = \\
 & \frac{1}{3} a \left[-3 \epsilon v + 3 \epsilon \frac{\partial y_0}{\partial T_0} \right] + f_d.
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

Será usado a mesma simplificação de notação usada no capítulo 3, ou seja, $\partial_t y = \partial_{T_0} y + \epsilon \partial_{T_1} y$. De acordo com o teorema fundamental da teoria de perturbação, a família de PVI com EDP lineares é formada

$$m \partial_{T_0}^2 y_0 + k y_0 = f_d, \tag{4-14a}$$

$$m \partial_{T_0}^2 y_1 + k y_1 = -2 \partial_{T_0} \partial_{T_1} y_0 - \beta \partial_{T_0} y_0 + a \partial_{T_0} y_0 - a v. \tag{4-14b}$$

Lembrando que com a aplicação das escalas de tempo, as equações diferenciais passam a ser parciais, e as constantes de integração passam a ser funções. Resolvendo a Eq. (4-14a), tem-se

$$y_0(T_0, T_1) = C_1(T_1) e^{\sqrt{k m} T_0 i/m} + C_2(T_1) e^{-\sqrt{k m} T_0 i/m} + \frac{f_d}{k}. \tag{4-15}$$

Para definir as funções $C_1(T_1)$ e $C_2(T_1)$ é preciso resolver o próximo PVI da família. Para isso a solução de $y_0(T_0, T_1)$ deve ser substituída na Eq. (4-14b)

$$m \partial_{T_0}^2 y_1 + k y_1 = \left[-2 \frac{\sqrt{k m}}{m} i \partial_{T_1} C_1 - \beta \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_1 + a \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_1 \right] e^{\sqrt{k m} T_0 i / m} \\ \left[2 \frac{\sqrt{k m}}{m} i \partial_{T_1} C_2 + \beta \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_2 - a \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_2 \right] e^{-\sqrt{k m} T_0 i / m}. \quad (4-16)$$

Ao eliminar os coeficientes dos termos que causam ressonância, encontra-se uma relação para $C_1(T_1)$ e $C_2(T_1)$ que deverá ser resolvida para calcular a solução dessas funções. Essa relação é encontrada igualando os coeficientes dos termos $e^{\sqrt{k m} T_0 i / m}$ e $e^{-\sqrt{k m} T_0 i / m}$ a zero,

$$-2 \frac{\sqrt{k m}}{m} i \partial_{T_1} C_1 - \beta \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_1 + a \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_1 = 0, \quad (4-17)$$

$$2 \frac{\sqrt{k m}}{m} i \partial_{T_1} C_2 + \beta \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_2 - a \frac{\sqrt{k m}}{m} i C_2 = 0. \quad (4-18)$$

As Eqs. (4-17) e (4-18) são equações diferenciais ordinárias lineares e têm solução analítica conhecida. Assim, pode-se resolve-las analiticamente e apresentam solução igual a

$$C_1(T_1) = \alpha_1 e^{T_1(a-\beta)/2}, \quad (4-19)$$

$$C_2(T_1) = \alpha_2 e^{T_1(a-\beta)/2}, \quad (4-20)$$

onde α_1 e α_2 são constantes de integração que serão determinadas de acordo com as condições iniciais. Com as funções $C_1(T_1)$ e $C_2(T_1)$ determinadas, a aproximação de 1º ordem para cada fase de *slip* pode ser escrita como

$$y(T_0, T_1) \approx \alpha_1 e^{T_1(a-\beta)/2} e^{\sqrt{k m} T_0 i / m} + \alpha_2 e^{T_1(a-\beta)/2} e^{-\sqrt{k m} T_0 i / m} + f_d. \quad (4-21)$$

Voltando a Eq. (4-21) para domínio original t

$$y(t) \approx \alpha_1 e^{\epsilon t(a-\beta)/2} e^{\sqrt{k m} t i / m} + \alpha_2 e^{\epsilon t(a-\beta)/2} e^{-\sqrt{k m} t i / m} + f_d. \quad (4-22)$$

Aplicando a Lei de Euler na Eq. (4-22) para passar da notação exponencial para sin e cos tem-se

$$y(t) \approx e^{z t} [D \cos(\sqrt{k} t) + E \sin(\sqrt{k} t)] + f_d, \quad (4-23)$$

onde $z = \epsilon(a - \beta)/2$, $D = S - f_d/k$ e $E = [Q - z D]/\sqrt{k}$, sendo S e o deslocamento inicial e Q a velocidade inicial para cada fase de *slip*.

4.3

Comparação entre as aproximações numérica e analítica de um PVI com atrito seco

O fenômeno de *stick-slip* é composto por 2 fases de movimento que se alternam. O movimento da massa durante a fase de *stick* segue um movimento retilíneo uniforme, Eq. (4-7). Já durante a fase *slip*, a dinâmica do sistema pode ser aproximado pela Eq. (4-23), uma aproximação de 1º ordem obtida pelo método de múltiplas escalas de tempo. Para verificar se a solução do PVI do sistema com atrito seco é bem representada por um movimento que alterna entre fases de *stick* e *slip* aproximadas pelas Eqs. (4-7) e (4-23), fez-se uma comparação entre a aproximação analítica obtida e uma aproximação numérica calculada através do método de Runge Kutta de 4º e 5º ordem implementado no software MATLAB. No cálculo da aproximação numérica, foi preciso usar o comando *if else* para que em cada instante fosse determinado em qual fase de movimento a massa se encontrava, de forma a determinar o valor da força de atrito atuante na massa em cada instante. Assim, a cada instante deve ser verificado se os valores de $y(t)$ e $\dot{y}(t)$ respeitam as condições de *stick*. Para ilustrar melhor esse comando, a Fig. 4.4 apresenta parte do algoritmo usado para calcular a aproximação numérica. Devido a impossibilidade numérica de se obter $V = 0$, uma das condições necessárias para haver *stick*, $V = 0$, é substituída pela condição $|V| \leq \text{erro relativo}$, onde erro relativo é definido como um valor pequeno.

```

if  $\epsilon[v - \dot{y}(t)] \leq \text{erro relativo}$  &  $\frac{-f_e - \epsilon \beta v}{k} \leq \dot{y}(t)$  &  $\dot{y}(t) \leq \frac{f_e - \epsilon \beta v}{k}$ 
    Integrar Eq. (4-3)
else
    Integrar Eq. (4-1)
end

```

Figura 4.4: Parte do algoritmo utilizado para calcular a aproximação numérica.

Parte do algoritmo no cálculo analítico é mostrado na Fig. 4.5. A cada intervalo de *stick*, a condição inicial, $Desl_0$, da Eq. (4-7) deve ser atualizada com a última posição $y(t)$ da fase *slip* imediatamente anterior. Assim, como as constantes D e E da aproximação da fase *slip*, Eq. (4-23), também devem ser calculadas a cada transição de fase. As Figs. 4.6, 4.7 e 4.8 mostram, respectivamente, deslocamento, velocidade e diagrama de fases das aproximações numérica e analítica para determinados valores de parâmetros e intervalo de integração

[0, 100]. As curvas são praticamente indistinguíveis, mostrando a qualidade da aproximação analítica de primeira ordem calculada.

```

if  $\epsilon[v - \dot{y}(t)] = < \text{erro relativo}$  &  $\frac{-f_e - \epsilon \beta v}{k} = < y(t)$  &  $y(t) = < \frac{f_e - \epsilon \beta v}{k}$ 
     $\Rightarrow$  Considerar Eq. (4-7).
     $\Rightarrow$  Guardar as configurações de  $y(t)$  e  $\dot{y}(t)$  para  $S$  e  $Q$ .
else
     $\Rightarrow$  Calcular novas constantes  $D$  e  $E$  da Eq. (4-23).
     $\Rightarrow$  Considerar Eq. (4-23).
     $\Rightarrow$  Guardar o deslocamento,  $y(t)$ , para  $Desl_0$ .
end
    
```

Figura 4.5: Parte do algoritmo utilizado para calcular a aproximação analítica.

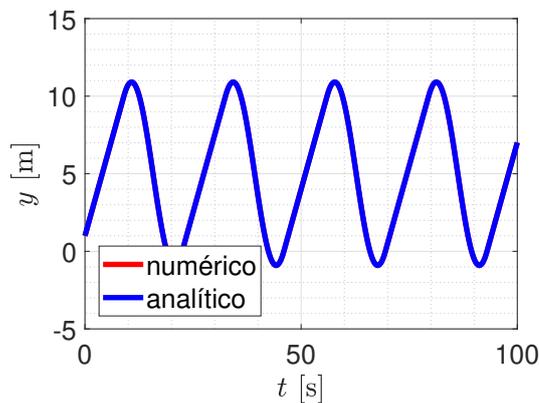


Figura 4.6: Deslocamentos da massa calculados através das aproximações numérica e analítica considerando $\epsilon = 0.0001$, $v = 1$ [m/s], $m = 1$ [Kg], $k = 0.1$ [N/m], $\beta = 1$ [Ns/m], $a = 0.1$, $f_e = 1$ [N], $f_d = 0.5$ [N], $S = 1$ [m] e $Q = 1$ [m/s].

As curvas das aproximação numérica e analítica nas Figs. 4.6, 4.7 e 4.8, são praticamente indistinguíveis, indicando que a aproximação considerando apenas um termo fornece um bom resultado neste exemplo. Além de comparar o deslocamento, velocidade e diagrama de fase entre as aproximações, foi também comparado o instante de transição da fase *stick* para a fase *slip*. No intervalo de simulação de [0, 100], ocorreram 4 fases de *stick* completas. Os instantes de mudança são mostrados na Fig. 4.9.

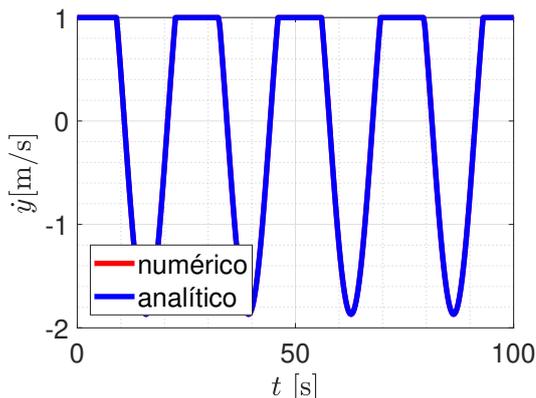


Figura 4.7: Velocidade da massa calculados através das aproximações numérica e analítica considerando $\epsilon = 0.0001$, $v = 1$ [m/s], $m = 1$ [Kg], $k = 0.1$ [N/m], $\beta = 1$ [Ns/m], $a = 0.1$, $f_e = 1$ [N], $f_d = 0.5$ [N], $S = 1$ [m] e $Q = 1$ [m/s].

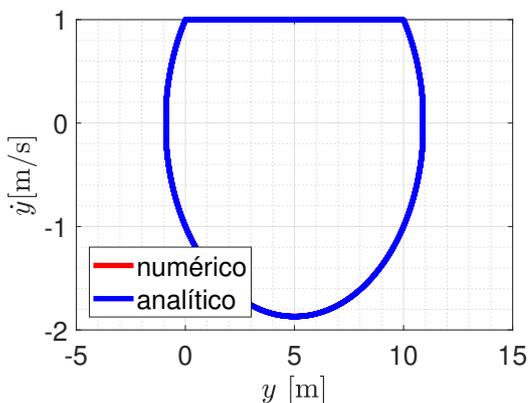


Figura 4.8: Diagramas de fase obtidos através das aproximações numérica e analítica considerando $\epsilon = 0.0001$, $v = 1$ [m/s], $m = 1$ [Kg], $k = 0.1$ [N/m], $\beta = 1$ [Ns/m], $a = 0.1$, $f_e = 1$ [N], $f_d = 0.5$ [N], $S = 1$ [m] e $Q = 1$ [m/s].

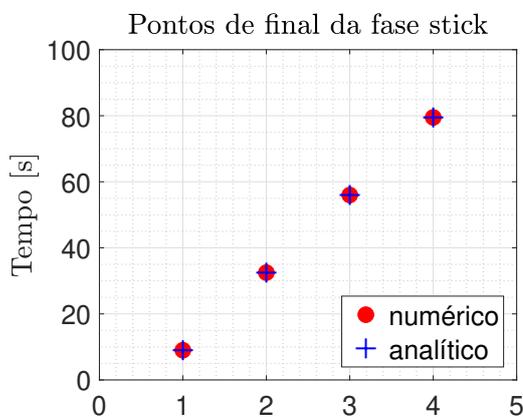


Figura 4.9: Instantes de transição entre a fase de *stick* e *slip* obtidas através das aproximações numérica e analítica.

5 Conclusões

Nesta dissertação, foram estudados dois métodos de perturbação para calcular aproximações analíticas hierárquicas de PVI não lineares que, em geral, não tem solução analítica conhecida. Esses métodos representam uma poderosa ferramenta no estudo de características dinâmicas de um problema de valor inicial não linear, uma vez que permitem o entendimento de como a solução depende dos parâmetros do problema. Com uma expressão analítica, é possível entender como os parâmetros influenciam a solução da dinâmica do sistema.

No capítulo 2, foi apresentada a metodologia de Lindstedt-Poincaré, método que permite o cálculo de aproximações analíticas periódicas para solução de problemas de valor inicial. A metodologia foi exemplificada com o cálculo da aproximação para a solução de um PVI envolvendo a Equação de Duffing com condições iniciais especificadas. Foram calculadas aproximações de diversas ordens para verificar a influência dos parâmetros no domínio de validade. Para calcular o domínio de validade foram definidos duas métricas, chamadas de erro não acumulativo e acumulativo. Ao analisar o domínio usando as duas métricas, foi concluído que o crescimento da ordem da aproximação aumenta o domínio de validade. Quanto maior não linearidade e maior o deslocamento inicial, maior deve ser a ordem de aproximação para manter o mesmo domínio de validade. Porém, calcular manualmente aproximações de ordens altas pode ser trabalhoso, devido ao aumento da família de PVI linear e do número de termos de forçamento nas equações, como mostrado na Tab. 2.1. Assim, foi possível concluir a importância de associar o cálculo de aproximações analíticas com programas de álgebra simbólica. Criando rotinas para automatizar os cálculos analíticos, permitindo obter aproximações de ordens mais altas.

A dinâmica de sistemas que apresentam características com diferentes escalas de tempo, geralmente, não são bem caracterizadas pela expansão uniforme do método de Lindstedt-Poincaré. Em vista disso, no capítulo 3, foi apresentado o método de múltiplas escalas de tempo e exemplificado com o mesmo exemplo usado no capítulo 2. O mesmo comportamento do domínio de validade pode ser analisado para as aproximações de primeira a terceira ordem calculadas com o método de múltiplas escalas, ou seja, quanto maior a ordem de

aproximação maior o domínio de validade. A dificuldade de trabalhar com esse método, é que com a aplicação das múltiplas escalas, as equações diferenciais ordinárias da família de PVI linear, passam a ser equações diferenciais parciais, o que pode acarretar em uma dificuldade adicional ao se usar este método. Em contra partida, as aproximações calculadas pelo método de múltiplas escalas de tempo apresentam maior domínio de validade que as aproximações calculadas pelo método de Lindstedt-Poincaré, se comparadas ordem a ordem. Essa comparação pode ser feita pois o mesmo exemplo foi calculado usando os dois métodos de perturbação, e foram consideradas as mesmas condições iniciais.

O capítulo 4, tinha o objetivo de aplicar o método de múltiplas escalas de tempo em um PVI que representa a dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor que desliza sobre uma esteira com velocidade constante, considerando a presença de atrito seco entre a massa e a esteira. A presença do atrito seco pode causar o fenômeno de *stick-slip*, que divide a dinâmica do sistema em duas fases. A fase de *stick* ocorre quando a velocidade relativa entre os corpos é 0 e a de *slip* quando a velocidade relativa é diferente de 0. A fase *stick* é modelada como um movimento retilíneo uniforme e tem solução conhecida, Eq. (4-7), já para a fase *slip* foi calculada a aproximação para a solução do PVI usando o método de múltiplas escalas de tempo, Eq. (4-23). Como mostrado nas Figs. 4.6, 4.7 e 4.8, a aproximação analítica tem uma boa acurácia. As curvas que representam as aproximações são quase indistinguíveis das curvas obtidas através do método numérico de Runge Kutta. Isso mostra a eficiência do método de múltiplas escalas ao ser aplicado para problemas desse tipo. Observe que trabalhar com expressões analíticas pode ser mais vantajoso do que trabalhar com aproximações numéricas. A partir de aproximações analíticas, é possível, por exemplo, fazer previsões dos instantes em que se iniciarão as fases de *stick* e *slip* e reduzir o custo computacional ao realizar uma análise paramétrica.

A Artigos publicados

Asociación Argentina
de Mecánica Computacional



Mecánica Computacional Vol XXXVI, págs. 921-930 (artículo completo)
José G. Etse, Bibiana M. Luccioni, Martín A. Pucheta, Mario A. Storti (Eds.)
San Miguel de Tucumán, 6-9 Noviembre 2018

QUALITATIVE ANALYSIS OF DYNAMICAL PROBLEMS USING A COMBINATION OF SYMBOLIC ALGEBRA COUPLED WITH POINCARÉ-LINDSTEDT METHOD

Mariana Gomes^a, Roberta Lima^a and Rubens Sampaio^a

^a*Department of Mechanical Engineering, PUC-Rio, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea,
22451-900 RJ, Brazil*

Keywords: Symbolic method, analytical approximations, Perturbation method.

Abstract. Dynamical problems are governed by initial value problems (IVP), often nonlinear, that must be solved to understand the dynamical features of a problem. Numerical methods are very efficient and provide approximations with the precision required, if one is interested in solving a specific problem. Unfortunately, numerical approximations do not provide the insight necessary to understand how a solution depends on the parameters of the problem. Sometimes, perturbation methods help in the sense that they can provide an analytical approximation that shows how the parameters influence the solutions. However to solve a problem for large time intervals require high order approximations that are cumbersome to derive. This paper uses a symbolic method to derive approximation of an IVP using Poincaré-Lindstedt method. The resulting linear problems are combined to have several orders of approximations. The approximations are compared to understand their domain of validity. As a reference to estimate the quality of an approximation, a Runge-Kutta method is used for a specific value of the parameters, of course. To show the main features of the methodology, it is applied to a non-damped Duffing equation, the simplest nonlinear problem used in Mechanics. It is computed analytical approximations of displacement, velocity, and frequency, for any order of approximation and initial conditions desired by the user. To quantify how the order of approximation affect the results, the obtained analytical approximations are evaluated for different combinations of parameters values. The results show that the number of terms has a great influence in the accuracy of the approximation, specially when the term that controls the nonlinearities grows.

DINAME 2019 - Proceedings of the XVIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, M.A. Savi, T.G. Ritto and W.M. Bessa (Editors), ABCM, Buzios, RJ, Brazil, March 10th to 15th, 2019

Approximations using symbolic algebra coupled with Poincaré-Lindstedt method: some applications

Mariana Gomes¹, Roberta Lima¹, and Rubens Sampaio¹

¹ Mechanical Engineering, PUC-Rio, Street Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro-RJ, 22451-000, Brazil

Abstract: Dynamical problems are governed by initial value problems (IVP), often nonlinear, that must be solved to understand the dynamical features of a problem. Numerical methods are very efficient and provide approximations with the precision required, if one is interested in solving a specific problem. Unfortunately, numerical approximations do not provide the insight necessary to understand how a solution depends on the parameters of the problem. Sometimes, perturbation methods help in the sense that they can provide an analytical approximation that shows how the parameters influence the solutions. However to solve a problem for large time intervals require high order approximations that are cumbersome to derive. This paper uses a symbolic method to derive approximation of an IVP using Poincaré-Lindstedt method. The resulting linear problems are combined to have several orders of approximations. The approximations are compared to understand their domain of validity. As a reference to estimate the quality of an approximation, a Runge-Kutta method is used for a specific value of the parameters, of course. To show the main features of the methodology, it is applied to a non-damped Duffing equation, the simplest nonlinear problem used in Mechanics. It is computed analytical approximations of displacement, velocity, and frequency, for any order of approximation and initial conditions desired by the user. To quantify how the order of approximation affect the results, the obtained analytical approximations are evaluated for different combinations of parameters values. The results show that the number of terms has a great influence in the accuracy of the approximation, specially when the term that controls the nonlinearities grows.

Keywords: Symbolic method, analytical approximations, Perturbation method.

B

Programa em álgebra simbólica para o método de Lindstedt-Poincaré

Esta seção será dedicada a descrever os passos necessários para implementar a rotina em álgebra simbólica usando o software MATLAB para automatizar os cálculos da aproximação analítica através do método de Poincaré-Lindstedt. A rotina segue os seguintes passos:

1. Definir cada parâmetro da equação a qual será calculada a aproximação, através do comando *syms* para que o MATLAB reconheça os termos como simbólicos. O parâmetro de deslocamento, $x(t)$, deve ser declarado como função de t para que o programa consiga reconhecer a relação entre eles. Neste passo, também é feito a transformação de escala de tempo de $x(t) \rightarrow \bar{x}(\tau)$ com a aplicação da Eq. (2-3).
2. Definir a ordem da aproximação desejada para criar as séries truncadas das Eqs. (2-4) e (2-6). Neste passo é importante ressaltar que cada item de x_i deve ser definido como função de τ através do comando *syms*, para que o comando *diff* consiga reconhecer a relação entre eles fazer a derivada. Esse comando recebe três parâmetro, a função a ser derivada, o termo o qual será feito a derivação e seu grau. Como a equação de interesse nesse caso é de segundo grau, a série de x deve ser derivada duas vezes.
3. Substituir as séries de $x(\tau)$ e ω na equação diferencial, usando o comando *subs*, que recebe como parâmetro a equação, o termo a ser substituído e o novo termo. Já feita as substituições, devemos expandir a equação para garantir que os termos não estejam simplificados e conflite com a próxima etapa de coletar os termos. Para isso usamos os comandos de *collect* e *coeff*, ambos recebem como parâmetro a equação e o termo de interesse. O primeiro comando *collect*, como o próprio nome já indica, agrupa os coeficientes do termo desejado e retorna uma equação. Já o comando *coeff* retorna um vetor onde cada posição está os coeficientes do termo desejado em ordem crescente de potência. Assim temos um vetor que representa a família de PVI lineares.

4. Definir as condições iniciais para cada equação de x_i . Como estamos trabalhando com equações diferenciais de segundo grau, devemos definir duas condições iniciais em forma de vetor, na primeira posição o deslocamento inicial e na segunda a velocidade inicial no tempo $t = 0$.
5. Resolver a equação diferencial relacionada a ϵ^0 de acordo com as condições iniciais definidas através do comando *dsolve*. Este comando resolve analiticamente equações diferenciais, e recebe como parâmetro a equação diferencial e o vetor com as condições iniciais.
6. Substituir a solução das equações já calculadas de ordem inferiores, através do comando *subs*.
7. Eliminar os termos que podem resultar em termos ressonantes, como $\sin \tau$ e $\cos \tau$. Para isso é importante garantir que todos os sin e cos não estejam elevados a potências superior a um, para garantir isso usamos as identidades trigonométricas desses termos e substituímos na equação com o comando *subs*. Assim podemos usar novamente o comando *coeff* para coletar os coeficientes dos termos ressonantes. Como este comando ele sempre retorna os coeficientes em ordem crescente de potencias, sabemos qual a posição do vetor temos que acessar para calcular o termo ω_i . Ao acessar a posição correta, usamos o comando *isolate*, que recebe a equação e o termos que deve ser isolado, assim temos ω_i em função dos parâmetros do sistema. Esses coeficientes devem ser zerados na equação diferencial para podermos seguir para o próximo passo.
8. Calcular a equação diferencial x_i com o comando *dsolve* de acordo com as condições iniciais.
9. Repetir as passos 6, 7, 8 até calcular todos os termos x_i e ω_i , para substituir-los nas equações de x e ω .
10. Aplicar a relação da Eq. (2-3) para voltar de $\bar{x}(\tau) \rightarrow x(t)$.

C

Programa em álgebra simbólica para o método de múltiplas escalas de tempo

Para os cálculos usando o método de múltiplas escalas de tempo, a rotina simbólica foi programada no software Mathematica. Essa rotina não foi programada em MATLAB como a rotina do método de Lindstedt-Poincaré, porque com o método de múltiplas escalas é preciso trabalhar com equações diferenciais parciais, e o MATLAB não consegue fazer a integração simbólica desse tipo de equação. A rotina segue os seguintes passos:

1. Definir a variável *EqEntrada* como a equação não linear de interesse em função do tempo t a ser aproximada, e a ordem de aproximação desejada é definida na variável *Ordem*.
2. Para aplicar as múltiplas escalas de tempo e a expansão proposta como solução para y na equação foi feita uma função, nomeada de *InPowers*. Essa função recebe a ordem da aproximação desejada, a variável *Ordem*, *EqEntrada* e tem como saída uma tabela onde cada posição é ocupada pela equação linear que compõem a família de PVI lineares. A função segue os seguintes passos:
 - (a) Definir as novas escalas de tempo de acordo com a Eq. (3-18), definida na variável *arguments*. Isso é feito usando o comando *Table*, que recebe a fórmula base da expansão, $\epsilon^i t$, e a indicação de que o índice i deve ser expandido do valor 0 até o valor de *Ordem*.
 - (b) Definir a expansão proposta como solução para o PVI não linear na Eq. (3-21). Para isso será usado o comando *Sum*, que recebe como entrada a fórmula de cada item da expansão, $\epsilon^i y_i[\text{argumento}]$, e a indicação da variação de i , do valor 0 até o definido em *Ordem*. Na opção de argumento de y pode ser definido como as múltiplas escalas de tempo determinadas em *escalas*, colocando $\epsilon^i y_i[\text{escalas}]$. Essa expansão é definida na variável *ytemp*.
 - (c) Com o objetivo de simplificar a notação, ao invés de tratar os termos das novas escalas de tempo por $\epsilon^i t$, será substituído por $T[i]$, como por exemplo, o termo $\epsilon^1 t$ passará a ser $T[1]$. Usando o

mesmo comando para definir a tabela *escalas*, foi usado para definir $T[i]$, denominados como *bigarguments*. Com o comando *MapThread* pode-se criar uma regra que faz a associação dos *bigarguments* com os *escalas*, denominada por *trules*.

- (d) A substituição de itens em uma equação no Mathematica pode ser feito de maneira simples usando a notação $"/."$, como por exemplo, *EquaçãoReferencia /.* *ArgumentosAntigos* \rightarrow *ArgumentosNovos*. Essa série de comandos quer dizer que na *EquaçãoReferencia* os *ArgumentosAntigos* serão substituídos pelos *ArgumentosNovos*. Usando esse artifício os itens $\epsilon^i t$ foram substituídos por $T[i]$ na expansão de y . Posteriormente, a variável *ytemp* com a expansão de y deve ser substituída em *EqEntrada*.
- (e) Com a equação em *EqEntrada* já escrita em termos de y_i e estes com as novas escalas de tempo como argumento, pode-se agrupar os coeficientes de acordo com a ordem de ϵ . Para isso, o comando *Coefficient* foi usado. Ele recebe como argumento de entrada uma equação e um termo de interesse, retornando os coeficientes em ordem crescente de acordo a potência do termo de interesse. Assim foi passado para o comando as argumentos de *EqEntrada* e o termo ϵ . Cada coeficiente foi alocada em uma posição da tabela gerada pelo comando *Table*. Esta tabela é a resposta final da função *InPowers*.

3. Depois da definição da função *InPowers*, ela pode ser usada igual as funções pré estabelecidas pelo Mathematica. Como já mencionado essa função retorna uma tabela com as equações diferenciais parciais lineares, e é importante comentar que o número de posições da tabela é igual ao valor da ordem de aproximação desejada definida em $Ordem + 1$. Como por exemplo, uma aproximação de primeira ordem tem $Ordem = 1$ e resulta em 2 EDP lineares, referente a ϵ^0 e ϵ^1 , que formam a família de PVI lineares. Assim, nesse exemplo deve-se definir duas variáveis para receber as equações resultantes, escrevendo-o de forma *zeroordemeqn*, *primordemeqn* = *InPowers*[*EqEntrada*,*x*,*t*,*T*,*Ordem*], sendo *x*,*t* argumentos da equação *EqEntrada* e *T* é referente as novas múltiplas escalas.
4. Seguindo a metodologia estudada no capítulo 3, as equações que formam a família de PVI lineares devem ser resolvidas hierarquicamente, então a primeira a ser resolvida é a *zeroordemeqn*. Para isso usa-se o comando *DSolve*, que resolve analiticamente uma equação diferencial tanto ordinária quanto parcial. Esse comando recebe como argumento de entrada a equação diferencial a ser resolvida, a variável da função, o parâmetro o

qual será calculada a integral e as condições iniciais, retornando a solução da equação. Caso não seja passada as condições iniciais, em caso de EDO a solução estará em função das constantes de integração, e em caso de EDP, as constantes de integração passam a ser funções. Para resolver *zeroordemeqn* com o comando *DSolve* foi passado como argumento de entrada a própria equação, a escala de tempo $T[0]$ que será o parâmetro integrador, e a solução foi denominada como *zerosol*. Como este comando escreve a solução em função de sin e cos, usa-se o artifício de 2.d para passar a solução para a forma exponencial, esta notação facilita a manipulação algébrica.

5. Com a solução de *zerosol* calculada, ela deve ser substituída na equação *primordemeqn*, usando o artifício de 2d. Após a substituição, será usado o comando *Collect* para agrupar os coeficientes de acordo com o termo exponencial, para garantir a eficiência desse comando é recomendado usar o comando *Expand*.
6. Com os coeficientes agrupados de acordo com o termo exponencial, será agora separado os coeficientes dos termos e^{iT_0} e e^{-iT_0} . O comando *DeleteCases* recebe como argumento de entrada a equação e o termo que irá identificar o coeficiente a ser guardado, e o retorna. Para o comando *DeleteCases* foi passado como argumento a equação *primordemeqn* e o termo e^{iT_0} , e o seu coeficiente foi retornado, sendo denominado de *solveeq1*
7. Com os coeficientes dos termos que geram ressonância já coletados, deve-se elimina-los da equação *primordemeqn* para que ela seja resolvida. Assim usando o artifício dado em 2.d, substitui-se os termos e^{iT_0} e e^{-iT_0} por zero na equação. Assim, *primordemeqn* pode ser resolvida usando o comando *DSolve*, similar ao feito no passo 4, e sua solução foi denominada como *primsol*.
8. Voltando a variável *solveeq1* que guarda os coeficientes de e^{iT_0} , esses coeficientes formam uma equação diferencial, podendo ser ordinária para aproximações de primeira ordem e parcial para ordens mais elevadas. Como a equação tratada no PVI é não linear a equação da variável *solveeq1* também é não linear. Por isso, não pode ser resolvida diretamente usando o comando *DSolve*, para contornar essa situação, será proposta uma solução para essa equação diferencial igual a Eq. (3-33). Usando o artifício 2.d a solução proposta em Eq. (3-33) e seu conjugado são substituídos em *solveeq1*.

9. Ao fazer a substituição na equação *solveeq1* tem-se que separar a parte real da imaginária e resolver cada uma delas separadamente. Para fazer essa separação, usa-se o comando *DeleteCases*, guardando a parte imaginária na variável *imag*. A parte real será guardada na variável *real*, que será calculada pela diminuição de *solveeq1* menos o *imag*.
10. Para resolver as equações de *imag* e *real*, pode-se usar o comando *DSolve*.
11. Por último, todas as variáveis calculadas devem ser substituídas na expansão proposta para *y*, finalizando assim o cálculo da aproximação.

Referências bibliográficas

- [1] AHMAD, B.; ALSAEDI, A. ; ALGHAMDI, B. S.. **Analytic approximation of solutions of the forced duffing equation with integral boundary conditions**. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 9(4):1727–1740, 2008.
- [2] ATKINSON, K. E.. **An Introduction to Numerical Analysis**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.
- [3] AWAD, A. I.. **Advances and Applications of Multiple Scale Methods in Complex Dynamical Systems**. PhD thesis, University of Washington, Aeronautics and Astronautics, 2017.
- [4] BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A.. **Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory**. Springer-Verlag New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, NY, 10010, USA, 1 edition, 1999.
- [5] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. LTC, 9 edition, 2010.
- [6] CHAPRA, S. C.. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas-3**. AMGH Editora, 2013.
- [7] DI, A. H.; MIKHAIL, R. ; OTHERS. **Introduction to nonlinear dynamics for physicists**, volumen 53. World Scientific, Box 128, Farrer Road, Singapore, 9128, 1993.
- [8] GAFVERT, M.. **Comparisons of two dynamic friction models**. In: **PROCEEDINGS OF THE 1997 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS**, p. 386–391. IEEE, 1997.
- [9] GEFFEN, V.. **A study of friction models adn friction compensation**. Trainedshio report, 2009.
- [10] GOMES, M.; LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Qualitative analysis of dynamical problems using a combination of symbolic algebra coupled with poincaré-lindstedt method**. In: **MECANICA COMPUTACIONAL**, San Miguel de Tucumán, Argentina, 2018.

- [11] GOMES, M.; LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Approximations using symbolic algebra coupled with poincaré-lindstedt method: some applications**. In: PROCEEDINGS OF DINAME 2019, Buzios, RJ, Brasil, 2019.
- [12] HE, J.-H.. **Modified lindstedt–poincaré methods for some strongly non-linear oscillations: Part i: expansion of a constant**. International Journal of Non-Linear Mechanics, 37(2):309–314, 2002.
- [13] HOLMES, M. H.. **Introduction to perturbation methods**, volumen 20. Springer Science & Business Media, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1 edition, 1995.
- [14] INMAN, D. J.. **Engineering vibration**. Pearson Education, Inc, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 4 edition, 2014.
- [15] JAKOBSEN, P.. **Introduction to the method of multiple scales**. arXiv preprint arXiv:1312.3651, 2013.
- [16] JAPE, S.. **Experimental and numerical investigation of effect of stick-slip friction transition on lateral vibration of magnetic tapes**. PhD thesis, Iowa State University, Mechanical Engineering, 2011.
- [17] JORDAN, D. W.; SMITH, P.. **Nonlinear ordinary differential equations: an introduction to dynamical systems**, volumen 2. Oxford University Press, USA, 1999.
- [18] KEVORKIAN, J. K.; COLE, J. D.. **Multiple scale and singular perturbation methods**, volumen 114. Springer Science & Business Media, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1996.
- [19] KHANIN, R.; CARTMELL, M. ; GILBERT, A.. **A computerised implementation of the multiple scales perturbation method using mathematica**. Computers & Structures, 76(5):565–575, 2000.
- [20] KIM, H.; HAN TAN, C.. **Method of multiple scales**. Lecture Notes, 2018.
- [21] KOVACIC, IVANA; BRENNAN, M. J.. **The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour**. John Wiley & Sons, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, United Kingdom, 2011.
- [22] KUEHN, C.. **Multiple time scale dynamics**, volumen 191. Springer, 2015.

- [23] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Stick-mode duration of a dry-friction oscillator with an uncertain model**. *Journal of Sound and Vibration*, 353:259–271, 2015.
- [24] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Stochastic parametric analysis: a new approach to stick-slip oscillations**. In: PROCEEDINGS OF DINAME 2017, São Sebastião, SP, Brazil, 2017.
- [25] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Stick-slip oscillations or couple-decouple oscillations?** In: PROCEEDINGS OF DINAME 2019, Búzios, RJ, Brazil, 2019.
- [26] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Role of parameters in the stochastic dynamics of a stick-slip oscillator**. In: PROCEEDING SERIES OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF APPLIED AND COMPUTATIONAL MATHEMATICS, S.J. dos Campos, SP, Brazil, 2018.
- [27] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **A strange head-tail problem: a base-excited stick-slip oscillator**. In: PROCEEDING SERIES OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF APPLIED AND COMPUTATIONAL MATHEMATICS, Gramado, RS, Brazil, 2016.
- [28] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Construction of a statistical model for the dynamics of a base-driven stick-slip oscillator**. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 91:157–166, 2017.
- [29] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Parametric analysis of the statistical model of the stick-slip process**. *Journal of Sound and Vibration*, 397:141–151, 2017.
- [30] MARINCA, V.; HERISANU, N.. **Nonlinear dynamical systems in engineering: Some approximate approaches**. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] NAYFEH, A. H.. **Perturbation methods**. John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [32] NAYFEH, ALI H; MOOK, D. T.. **Nonlinear oscillations**. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [33] NEILD, S. A.. **Approximate methods for analysing nonlinear structures**. In: EXPLOITING NONLINEAR BEHAVIOR IN STRUCTURAL DYNAMICS, p. 53–109. Springer, 2012.

- [34] PASQUETTI, E.. **Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares**. PhD thesis, PUC-Rio, Engenharia Civil, 2008.
- [35] POLKING, J. C.. **Ordinary differential equations using MATLAB**. Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [36] POPOV, V. L.. **Contact mechanics and friction**. Springer, Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany, 2 edition, 2010.
- [37] RADHIKA, TSL; IYENGAR, T.; RANI, T. R.. **Approximate Analytical Methods for Solving Ordinary Differential Equations**. Taylor and Francis Group/CRC, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487-2742, 2015.
- [38] RAND, R.H.. **Nonlinear vibrations**. Lecture Notes, 2005.
- [39] SALIH, A.. **The method of multiple scales**. Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram, 2014.
- [40] SAMPAIO, R; LIMA, R.. **Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios**, 2012.
- [41] SANCHEZ, N. E.. **The method of multiple scales: asymptotic solutions and normal forms for nonlinear oscillatory problems**. Journal of Symbolic Computation, 21(2):245–252, 1996.
- [42] SAVI, M. A.. **Dinâmica não-linear e caos**. E-papers, Rua Mariz e Barros, 72, sala 202, Praça da Bandeira, RJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1 edition, 2006.
- [43] SIMMONDS, J. G; MANN, J. E.. **A First Look at Perturbation Theory**. Dover Publications, INC, 31 East 2nd Street, Mineola, NY, 11501, 2 edition, 1988.
- [44] SINGIRESU, S. R.. **Mechanical vibrations**. Addison Wesley, 1995.
- [45] TANG, LIPING; ZHU, X.. **Effects of drill string length on stick–slip oscillation of the oilwell drill string**. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, p. 1–10, 2019.
- [46] VAHID-ARAGHI, ORANG; GOLNARAGHI, F.. **Friction-induced vibration in lead screw drives**. Springer Science & Business Media, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2010.

- [47] VAN DE VRANDE, BL; VAN CAMPEN, D.; DE KRAKER, A.. **An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure.** *Nonlinear Dynamics*, 19(2):159–171, 1999.
- [48] WAGG, DAVID; VIRGIN, L.. **Exploiting nonlinear behavior in structural dynamics**, volumen 536. Springer Science & Business Media, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2012.
- [49] YOUNG, W.R.. **Part a: Perturbation theory.** Lecture Notes, 2017.
- [50] ZASPA, Y. P.. **Force characteristics of dry friction when contact oscillates.** *Journal of Friction and Wear*, 30(1):17–24, 2009.