

2

Análise de Campos Modais em Guias de Onda Arbitrários

Neste capítulo serão analisados os campos modais em guias de onda de seção arbitrária. A seção transversal do guia é aproximada por um polígono convexo descrito por um conjunto finito de pares coordenados (vértices do polígono). O método variacional de Rayleigh-Ritz com funções de base polinomiais é aplicado na determinação dos números de onda de corte do guia.

A geometria da aproximação poligonal do guia a ser considerado e o sistema de coordenadas utilizado são mostrados na figura 2.1.

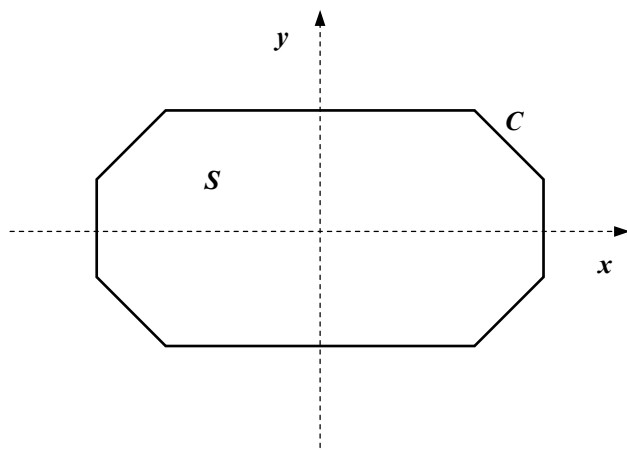


Figura 2.1 – Seção transversal da aproximação poligonal do guia.

Assume-se que as paredes do guia são perfeitamente condutoras e que a região S é limitada pela curva convexa C . Considera-se que o meio interior ao guia de onda é o vácuo, caracterizado pela permissividade ϵ_0 e pela permeabilidade μ_0 . A dependência temporal, neste capítulo e no restante do trabalho, é da forma $e^{j\omega t}$.

Uma breve discussão sobre o método de Rayleigh-Ritz será apresentada a seguir.

2.1.

O Método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz [22] é uma técnica utilizada na determinação de um conjunto finito de autofunções e autovalores aproximados de uma dada equação diferencial e suas condições de contorno.

Considere-se a equação:

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (2.1)$$

sujeita a dadas condições de contorno, onde L é um operador linear, com domínio e imagem especificados, u são as autofunções e λ os autovalores a serem determinados.

Para operadores auto-adjuntos e positivo-definidos [22], o ponto estacionário do funcional

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle + \frac{1}{2} \lambda \langle u, u \rangle \quad (2.2)$$

é uma solução da equação (2.1). O produto interno de duas funções sobre um dado domínio S é definido por:

$$\langle a, b \rangle = \int_S a b \, dS \quad (2.3)$$

Para o caso particular do presente trabalho, conforme será mostrado no item 2.2, a equação diferencial a ser resolvida é:

$$\nabla_T^2 u + \lambda u = 0 \quad (2.4)$$

sujeita a condições de contorno homogêneas. ∇_T^2 é o Laplaciano bi-dimensional no plano transversal.

A equação (2.2), então, assume a forma:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_S [\nabla_T^2 u + \lambda u] u \, dS \quad (2.5)$$

Da primeira identidade de Green [22], tem-se:

$$\int_S [u \nabla_T^2 u + \nabla_T u \cdot \nabla_T u] \, dS = \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} \, dl \quad (2.6)$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada parcial na direção normal ao contorno C .

Tendo em vista que as condições de contorno são homogêneas, a integração de linha se anula, e a equação (2.6) pode ser reescrita como:

$$\int_S u \nabla_T^2 u \, dS = - \int_S \nabla_T u \cdot \nabla_T u \, dS \quad (2.7)$$

Combinando-se (2.5) e (2.7), tem-se finalmente:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_S [-\nabla_T u \cdot \nabla_T u + \lambda u^2] \, dS \quad (2.8)$$

Uma solução aproximada para as autofunções u e os autovalores λ é obtida expandindo-se u em um somatório de funções de base:

$$u = \sum_{i=1}^N c_i f_i \quad (2.9)$$

onde f_i são as funções de base e c_i os coeficientes da expansão a serem determinados.

Substituindo-se (2.9) em (2.8), resulta:

$$F(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i \left[\int_S -\nabla f_i \cdot \nabla f_j + \lambda f_i f_j \right] \quad (2.10)$$

A função u deve minimizar o funcional $F(u)$, conseqüentemente:

$$\frac{\partial}{\partial c_j} F(u) = 0 \quad (2.11)$$

para $j = 1, 2, \dots, N$.

Efetuada-se em (2.10) as derivações indicadas em (2.11), obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas lineares:

$$[A][C] = \lambda [B][C] \quad (2.12)$$

onde os elementos das matrizes quadradas $[A]$ e $[B]$ são dados por:

$$a_{ij} = \int_S \nabla f_i \cdot \nabla f_j \, dS \quad (2.13a)$$

$$b_{ij} = \int_S f_i f_j \, dS \quad (2.13b)$$

e o vetor C contém os coeficientes c_i .

O sistema indicado em (2.12) constitui um problema de autovalores generalizado. Uma vez determinados os autovalores e os autovetores do sistema (2.12), obtém-se os valores de λ e c_i .

2.2.

Determinação dos Campos Modais pelo Método de Rayleigh-Ritz

Nesta seção, descreve-se o procedimento para determinação dos campos modais em guias de seção transversal arbitrária, aplicando o método definido na seção anterior.

Considere-se um guia de onda de seção transversal arbitrária conforme mostrado na figura 2.1. As soluções gerais para os campos no interior do guia podem ser construídas a partir das soluções da equação homogênea de Helmholtz [23]:

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0 \quad (2.14)$$

onde, $\psi = \psi_T(x, y)f(z)$ é uma função de onda escalar e $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, sendo ω a frequência angular em rad/s.

As condições de contorno aplicadas ao problema são as seguintes:

$$\left. \frac{\partial \psi_T(x, y)}{\partial n} \right|_C = 0 \quad (\text{Neumann, modos TE}) \quad (2.15a)$$

$$\psi_T(x, y)|_C = 0 \quad (\text{Dirichlet, modos TM}) \quad (2.15b)$$

onde C é o contorno da seção transversal do guia e $\frac{\partial}{\partial n}$ significa a derivada em relação à normal do contorno C .

A equação (2.14) pode ser parcialmente separada, resultando no seguinte par de equações:

$$\nabla_T^2 \psi_T + k_c^2 \psi_T = 0 \quad (2.16a)$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \beta^2 f(z) = 0 \quad (2.16b)$$

onde β é a constante de propagação e k_c o número de onda de corte de um dado modo de propagação. As constantes de separação k_c e β estão relacionadas por:

$$\beta^2 = k_0^2 - k_c^2 \quad (2.17)$$

As soluções da equação (2.16b) são da forma:

$$f(z) = A e^{(\pm j)\beta z} \quad (2.18)$$

correspondendo a ondas que se propagam na direção $(\mp) z$.

As soluções da equação (2.16a) são obtidas aplicando o método de Rayleigh-Ritz, definido na seção anterior.

Para os modos TE, a condição de contorno dada por (2.15a) é uma condição natural e, portanto, satisfeita pela aplicação direta das funções de base. Neste capítulo, serão utilizadas funções de base polinomiais:

$$f_i = x^m y^n \quad (2.19)$$

Observa-se que as funções de base dependem dos pares m e n , ou seja, o índice i corresponde ao par ordenado (m, n) .

As soluções $\psi_T(x, y)$ são então expressas por:

$$\psi_T(x, y) = \sum_i c_i f_i = \sum_{m=m_{min}}^{N_{max}} \sum_{n=n_{min}}^{N_{max}-m} c_{mn} x^m y^n \quad (2.20)$$

onde N_{max} é o grau máximo dos polinômios utilizados na expansão e c_{mn} são os coeficientes da expansão a serem determinados.

Para guias simétricos, em relação a um ou ambos eixos coordenados, as soluções $\psi_T(x, y)$ serão classificadas em modos pares e ímpares em relação a cada eixo coordenado.

O critério utilizado para classificar um modo de par (ímpar) em relação a um dado eixo coordenado, é o de que a componente y do campo elétrico modal correspondente seja uma função par (ímpar) em relação a esse eixo.

Para os modos TE, polinômios de grau par (ímpar) em x (y) geram modos pares (ímpares) em x (y).

Os valores mínimos dos índices m e n , m_{min} e n_{min} , são definidos de acordo com a paridade dos modos. Assim, para modos pares em x (y), $m_{min} = 0$ ($n_{min} = 0$), efetuando-se o somatório sobre m (n) par. Analogamente, para modos ímpares em x (y), $m_{min} = 1$ ($n_{min} = 1$), e o somatório é efetuado para valores ímpares do índice.

N_{max} deve ser suficiente grande para assegurar a convergência dos resultados.

Para os modos TM, a condição de contorno indicada em (2.15b) não é satisfeita pela aplicação direta das funções polinomiais. Para tanto, as funções de

base devem ser multiplicadas por uma função, $g(x, y)$, que seja nula nas paredes condutoras do guia, mas que não se anule em pontos no interior do guia.

Em [9] é descrita uma técnica para obtenção de tais funções. No presente trabalho nos restringiremos a aplicações em que $g(x, y)$ pode ser expressa por um polinômio do 1º grau, como guias de onda triangulares, por exemplo.

O cálculo numérico dos elementos das matrizes $[A]$ e $[B]$ é realizado nos itens 2.2.1 e 2.2.2, respectivamente.

2.2.1. Determinação dos Elementos a_{ij}

Os elementos a_{ij} são determinados efetuando-se a integração indicada em (2.13a).

O contorno do guia, como citado anteriormente, é aproximado por um polígono convexo com N_{seg} lados. O lado k do polígono é expresso pelo segmento de reta:

$$y = a_k x + b_k, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (2.21)$$

onde $a_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$ e $b_k = y - a_k x$; x_k , x_{k+1} , y_k e y_{k+1} estão indicados na figura 2.2.

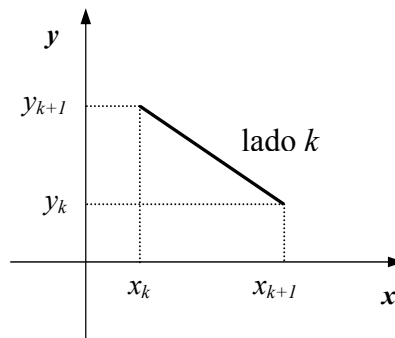


Figura 2.2 – Determinação dos coeficientes angular e linear da reta.

Para os modos TE, as funções de base são definidas em (2.19), sendo o vetor gradiente dessas funções dado por:

$$\nabla f_i = m x^{m-1} y^n \vec{a}_x + n x^m y^{n-1} \vec{a}_y \quad (2.22)$$

onde \vec{a}_x e \vec{a}_y são os vetores unitários nas direções x e y , respectivamente.

Substituindo-se (2.22) em (2.13a), resulta:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{seg}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_0^{a_k x + b_k} m_1 m_2 x^{m_1+m_2-2} y^{n_1+n_2} + n_1 n_2 x^{m_1+m_2} y^{n_1+n_2-2} dx dy \quad (2.23)$$

Os índices i e j representam os pares ordenados (m_1, n_1) e (m_2, n_2) , respectivamente.

Integrando-se a equação (2.23) em relação a y , obtém-se a seguinte expressão para os elementos a_{ij} :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{seg}} \frac{m_1 m_2}{n_1 + n_2 + 1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} x^{m_1+m_2-2} [a_k x + b_k]^{n_1+n_2+1} dx + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2 - 1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} x^{m_1+m_2} [a_k x + b_k]^{n_1+n_2-1} dx \quad (2.24)$$

As integrais indicadas em (2.24) são resolvidas numericamente.

Para os modos TM, nos casos aqui considerados, as funções de base são multiplicadas por polinômios do 1º grau que se anulam nas paredes do guia.

2.2.2. Determinação dos elementos b_{ij}

Os elementos b_{ij} são determinados efetuando-se a integração indicada em (2.13b).

Para os modos TE, as funções de base são definidas em (2.19). Substituindo-se (2.19) em (2.13b), obtém-se a seguinte expressão para os elementos b_{ij} :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{seg}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_0^{a_k x + b_k} x^{m_1+m_2} y^{n_1+n_2} dx dy \quad (2.25)$$

Integrando-se a equação (2.25) em relação a y , resulta:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{seg}} \frac{1}{n_1 + n_2 + 1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} x^{m_1+m_2} [a_k x + b_k]^{n_1+n_2+1} dx \quad (2.26)$$

A integral indicada em (2.26) é resolvida numericamente.

Uma vez determinados os elementos a_{ij} e b_{ij} , os números de onda de corte k_c podem ser calculados resolvendo-se, computacionalmente, o sistema de autovalores generalizado indicado em (2.12).

A subrotina utilizada na solução do sistema (2.12) foi a DGVCGR do IMSL.

2.3. Resultados Numéricos

A formulação descrita anteriormente para a determinação dos campos modais em guias de seção arbitrária, foi implementada computacionalmente em linguagem FORTRAN.

Foram estudadas três configurações para a seção transversal: circular, elíptica e triangular. As estruturas circular e elíptica apresentam simetria em ambos eixos coordenados e a estrutura triangular apenas em relação ao eixo dos x .

O contorno das seções circular e elíptica foi aproximado por uma série de segmentos lineares, cujo critério de aproximação é manter a área da seção transversal igual àquela do guia sem aproximação. Foram considerados 30 segmentos na representação do contorno dos guias.

Para os exemplos aqui considerados, o grau máximo dos polinômios utilizados como funções de base, N_{max} , foi 10.

Na tabela 2.1 são apresentados os números de onda de corte dos 10 primeiros modos TE em um guia de onda circular de 1 mm de raio. Os resultados, quando comparados com os valores exatos, apontam um erro máximo de 0,245%.

A convergência dos resultados, em função do grau máximo dos polinômios funções de base, N_{max} , em um guia de onda circular de 1 mm de raio, é mostrada na tabela 2.2. Nessa tabela estão indicados os valores dos números de onda de corte do modo TE_{11} e o erro do cálculo numérico. Para grau máximo dos polinômios maior que 20, verificou-se o aparecimento de modos espúrios, inclusive com autovalores negativos. Isto resulta de imprecisões nas integrações numéricas de polinômios de graus elevados, limitando o número de modos computados. Para $N_{max} = 20$, o número total de modos computados, incluindo modos pares ou ímpares em cada direção, é 120.

A tabela 2.3 apresenta as frequências de corte dos 11 primeiros modos TE em um guia de onda elíptico com eixos de 10,0 cm e 6,614 cm. Os resultados obtidos foram comparados com [11], apontando discrepâncias menores que 0,5%.

Como última aplicação, considerou-se um guia de onda triangular equilátero de 1 mm de lado. Os números de onda de corte dos 11 primeiros modos TE e TM estão na tabela 2.4 e 2.5, respectivamente. Os resultados obtidos foram comparados com os valores exatos, dados em [24], tendo apresentado erro menor que 0,1% para os modos TE e 0,03% para os modos TM.

Modo	Valor Exato de k_c	Valor Calculado de k_c	Erro (%)
(1,1)	1,841184	1,836682	0,245
(2,1)	3,054237	3,060396	0,202
(0,1)	3,831706	3,831762	0,001
(3,1)	4,201189	4,193807	0,176
(4,1)	5,317553	5,323891	0,119
(1,2)	5,331443	5,324115	0,137
(5,1)	6,415616	6,412299	0,052
(2,2)	6,706133	6,712175	0,090
(0,2)	7,015587	7,016240	0,009
(6,1)	7,501266	7,502429	0,016

Tabela 2.1 – Valores de números de onda de corte, modos TE, para um guia de onda circular de 1 mm de raio.

Grau Máximo dos Polinômios	k_c do Modo TE_{11}	Erro (%)
4	1,837169	0,218
6	1,836687	0,244
8	1,836683	0,244
10	1,836682	0,245
12	1,836682	0,245
14	1,836681	0,245
16	1,836680	0,245
18	1,836676	0,245
20	1,836669	0,245

Tabela 2.2 – Valores de números de onda de corte do modo TE_{11} , em função do grau máximo dos polinômios, para um guia de onda circular de 1 mm de raio.

Modo	Frequência de Corte (GHz)	
	De acordo com [11]	Método Proposto
Par TE_{11}	0,889668	0,892305
Ímpar TE_{11}	1,299789	1,298155
Par TE_{21}	1,603495	1,609820
Ímpar TE_{21}	1,841098	1,838708
Par TE_{31}	2,287841	2,298325
Ímpar TE_{31}	2,421751	2,418813
Par TE_{01}	2,499336	2,494434
Par TE_{41}	2,949422	2,963414
Ímpar TE_{41}	3,021076	3,018193
Par TE_{12}	3,06712	3,065787
Par TE_{51}	3,593	3,610326

Tabela 2.3 – Valores de frequências de corte, para modos TE, em um guia de onda elíptico com eixos de 10,0 cm e 6,614 cm.

Modo	Valores de k_c		
	De acordo com [24]	Método Proposto	Erro (%)
TE_{01}	4,188790	4,188790	0,000
TE_{10}	7,254984	7,255197	0,000
TE_{11}, TE_{02}	8,377580	8,377580	0,000
TE_{12}	11,083539	11,082509	0,000
TE_{03}	12,566370	12,566407	0,002
TE_{13}, TE_{20}	14,510395	14,510593	0,001
TE_{21}	15,102898	15,106022	0,021
TE_{22}, TE_{04}	16,755161	16,770459	0,091

Tabela 2.4 – Valores de números de onda de corte, para modos TE, em um guia de onda triangular equilátero com lado de 1 mm.

Modo	Valores de k_c		
	De acordo com [24]	Método Proposto	Erro (%)
TM ₁₀	7,254984	7,255197	0,000
TM ₁₂ ,	11,083539	11,082497	0,000
TM ₁₃ , TM ₂₀	14,510395	14,510395	0,000
TM ₂₁	15,102898	15,102900	0,000
TM ₁₄	18,258513	18,258733	0,001
TM ₂₃	19,195448	19,195976	0,003
TM ₃₀	21,765592	21,771440	0,027
TM ₁₅ , TM ₂₄ , TM ₃₁	22,164994	22,169132	0,019

Tabela 2.5 – Valores de números de onda de corte, para modos TM, em um guia de onda triangular equilátero com lado de 1 mm.