



**Renan Marks de Oliveira Pereira**

**Aspectos da Modelagem da Propagação de  
Fraturas com o Método dos Elementos Finitos  
Estendido (XFEM)**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Deane de Mesquita Roehl

Co-orientador: Dr. Eleazar Cristian Mejía Sanchez

Rio de Janeiro

Março de 2018



**Renan Marks de Oliveira Pereira**

**Aspectos da Modelagem da Propagação de  
Fraturas com o Método dos Elementos Finitos  
Estendido (XFEM)**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil. Avaliada pela Comissão Examinadora abaixo assinada

**Prof<sup>a</sup>. Deane de Mesquita Roehl**

Orientadora

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Dr. Eleazar Cristian Mejía Sanchez**

Co-Orientador

Instituto TECGRAF – PUC-Rio

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Rodrigo Bird Burgos**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 06 de março de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e dos orientadores.

### **Renan Marks de Oliveira Pereira**

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) em 2015. Durante a graduação atuou como pesquisador de iniciação científica na área de estruturas metálicas e estagiou no setor de construção civil e de inovação tecnológica. No ano de 2016 ingressou no curso de Mestrado em Engenharia Civil, da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e no grupo de Modelagem e Simulação Multifísica do Instituto Tecgraf / PUC-Rio, onde vem desenvolvendo trabalhos na linha de pesquisa da Mecânica da Fratura Computacional.

#### Ficha Catalográfica

Pereira, Renan Marks de Oliveira

Aspectos da Modelagem da Propagação de Fraturas com o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) / Renan Marks de Oliveira Pereira ; Orientadora: Deane de Mesquita Roehl ; Co-Orientador: Eleazar Cristian Mejía Sanchez. – 2018.

116 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Método dos Elementos Finitos Estendido. 3. Propagação de Fraturas. 4. Materiais Quase-Frágeis. 5. Métodos Numéricos I. Roehl, Deane de Mesquita. II. Sanchez, Eleazar Cristian Mejía. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Aos meus pais Marcia e Marcos, pelo apoio, amor  
e confiança. Aos meus irmãos Vitor e Júlia, que  
espero inspirar de alguma forma.

## Agradecimentos

Aos meus pais Marcia e Marcos, por todo amor, atenção, carinho e incentivo durante toda a minha vida.

À minha orientadora e professora Deane Roehl, pela confiança, dedicação, estímulo, parceria, e inúmeros conhecimentos transmitidos para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Cristian Mejía pelos conselhos e por todo o suporte necessário para a realização desta pesquisa.

Aos meus colegas do Instituto Tecgraf: Renato, Francisco, Julio, Roberto e Nilthson que foram de grande ajuda.

A todos meus colegas, professores e funcionários da PUC-Rio.

À CAPES e a PUC-Rio, pelos auxílios concedidos que possibilitaram a realização deste trabalho.

Ao Instituto Tecgraf pela oportunidade de aprender e pesquisar sobre um tema desafiador e de relevância.

## Resumo

Pereira, Renan Marks de Oliveira; Roehl, Deane de Mesquita (Orientadora); Sanchez, Eleazar Cristian Mejía (Co-Orientador). **Aspectos da Modelagem da Propagação de Fraturas com o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM)**. Rio de Janeiro, 2018. 116p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O processo de fraturamento de materiais quase-frágeis requer atenção especial para a predição da direção de propagação de fraturas. A simulação do fraturamento com o método dos elementos finitos (MEF) tem como desvantagem a dependência da trajetória da fratura com respeito à malha adotada. Além disso, há certa dificuldade para os modelos numéricos representarem a fratura em modo misto por conta dos parâmetros envolvidos. O Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) é uma técnica que combina o MEF com funções de enriquecimento para representar descontinuidades no campo de deslocamentos. Neste contexto, discutem-se nesta dissertação os critérios para a nucleação e propagação de fraturas e sua implementação no contexto do XFEM. As implementações foram feitas no framework GeMA, um software desenvolvido no Tecgraf / PUC-Rio. Os critérios de propagação de fraturas implementados baseiam-se na abordagem das tensões e permitem controlar diferentes geometrias e tamanhos da área de avaliação na ponta da trinca. Um estudo paramétrico é apresentado para modelar uma viga de concreto sob carregamento não proporcional com fratura em modo misto. Foram consideradas diferentes questões como: discretização da malha, zona de avaliação, iniciação e propagação de fraturas e técnicas de controle de solução. Além disso, outros modelos com diferentes condições de contorno foram analisados para validar os critérios em situações complexas. As constatações paramétricas obtidas através do estudo da viga se mostraram válidas para os demais modelos avaliados. As implementações dos critérios de propagação de fraturas no XFEM, demonstraram excelentes concordâncias nas simulações das trajetórias de fraturamento, comparado com os dados experimentais.

## Palavras-chave

Método dos Elementos Finitos Estendido; Propagação de Fraturas; Materiais Quase-frágeis; Métodos Numéricos

## Abstract

Pereira, Renan Marks de Oliveira; Roehl, Deane de Mesquita (Advisor); Sanchez, Eleazar Cristian Mejía (Co-Advisor). **Aspects of Modeling Fracture Propagation with the Extended Finite Element Method (XFEM)**. Rio de Janeiro, 2018. 116p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The fracture process of quasi-brittle materials requires special attention for the prediction of the direction of fracture propagation. The fracture simulation with the finite element method (FEM) has as its disadvantage the dependence of the fracture trajectory with respect to the mesh adopted. Besides, there is some difficulty for numerical models to represent the fracture in mixed mode because of the parameters involved. The Extended Finite Element Method (XFEM) is a technique which combines the FEM with enrichment functions to represent discontinuities in the displacement field. In this context, this dissertation discusses the criteria for nucleation and propagation of fractures and their implementation in the context of XFEM. The implementations were made in the GeMA framework, a software developed at Tecgraf / PUC-Rio. The implemented crack growth criteria is based on the stress approach and allows to control different geometries and sizes of the evaluation area in the crack tip. A parametric study is presented for modeling a concrete beam under nonproportional loading with mixed-mode fracture. Different situations were taken into account such as mesh refinement, geometry and size of the evaluation region, crack initiation and propagation and solution control techniques. Also, several models with different loading and boundary conditions were made to validate the criteria under complex situations. The parametric findings obtained through the study of the beam proved to be valid for the other models. The implementations of the fracture propagation criteria in the XFEM demonstrated excellent agreement in the simulations of the fracture trajectories compared to the experimental data.

## Keywords

Extended Finite Element Method; Fracture Propagation; Quasi-brittle Materials; Numerical Methods

# Sumário

1 Introdução	20
1.1. Relevância e Motivação	20
1.2. Objetivos e Metodologia	22
1.3. Estrutura da dissertação	23
2 Métodos de Representação de Fraturas	25
2.1. Mecânica da Fratura Computacional	25
2.1.1. Modos de carregamento	26
2.1.2. Adaptação no Método dos Elementos Finitos	27
2.2. Mecânica da Fratura Coesiva	29
2.2.1. Elementos de Interface	29
2.2.2. Modelo Constitutivo dos Elementos Coesivos	30
2.3. O Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM)	32
2.3.1. A Formulação do XFEM	33
2.3.2. O Método dos Nós Fantasma	41
2.4. Fraturas Coesivas com a técnica do XFEM	42
3 Mecanismos de Propagação de Fraturas	45
3.1. Propagação de fraturas baseados em Critérios de Tensão	49
3.2. Implementação de um Critério para Propagação de Fraturas	52
3.2.1. Introdução	52
3.2.2. O GeMA ( <i>Geo Modelling Analysis Tool</i> )	53
3.2.3. Critérios Locais de Propagação	54
3.2.4. Critérios Não Locais de Propagação	56
4 Aplicações e Resultados	63
4.1. Flexão em quatro pontos sob carregamento não proporcional	63
4.1.1. Influência do tamanho da região de avaliação do campo de tensões –semicírculo	65



4.1.2. Nova estratégia para propagação de fraturas	71
4.1.3. Influência da malha de elementos finitos	75
4.1.4. Influência das funções de distribuição dos pesos	83
4.1.5. Influência da geometria da região de avaliação	85
4.1.6. Análises comparativas entre o XFEM com os elementos de interfaces coesivas	87
4.2. Placa com dois furos	92
4.3. Placa com dois entalhes submetida a carregamentos combinados	96
4.4. Viga engastada com entalhe excêntrico	99
4.5. Placa com formato em L	102
5 Considerações Finais	105
5.1. Conclusões	105
5.2. Sugestões	107
6 Referências bibliográficas	108

## Lista de figuras

Figura 1.1 – Fraturamento em estruturas constituídas de diferentes tipos de materiais: a) Concreto (Murray, et al., 2007), b) Madeira , c) Aço (EERI, 2011)	20
Figura 1.2 – Relação Tensão-Deformação de materiais frágeis e dúcteis	21
Figura 2.1 - Comportamento das tensões reais e ideais na fratura	25
Figura 2.2 – Representação de descontinuidades no método dos elementos finitos: a) abordagem discreta e b) abordagem contínua. (Bendezú, 2015)	26
Figura 2.3 – Modos de abertura de fratura	27
Figura 2.4 - Elementos singulares tipo quarter-points	28
Figura 2.5 – Rosetas de elementos triangulares <i>quarter-points</i> em uma malha de elementos finitos.	28
Figura 2.6 – Geometria do elemento de interface de (Goodman, et al., 1968)	29
Figura 2.7 - Elementos de interface em uma malha de elementos finitos	30
Figura 2.8 - Lei Constitutiva Intrínseca do Elemento Coesivo	31
Figura 2.9 – Diferentes modelos intrínsecos de funções de amolecimento para elementos coesivos	31
Figura 2.10 – Funções de campo assintóticas de ponta	39
Figura 2.11 – Enriquecimento dos nós com as funções Heaviside e de ponta (adaptado de (Moës, et al., 1999)).	39
Figura 2.12 – Função level set para representação da fraturas	40
Figura 2.13 –Função distância do sinal	40
Figura 2.14 – Ponta da fratura em coordenadas polares	41
Figura 2.15 – Conectividade e subdomínios de um elemento enriquecido no método dos nós fantasmas	42

Figura 2.17 - Lei de amolecimento bilinear de modo misto (adaptado: (Harper & Hallett, 2008))	43
Figura 2.18 – Modelos extrínsecos de zona coesiva: a) linear	
b) bi linear c) exponencial	44
Figura 3.1 – Zona de processo de fratura representada pelo modelo de zona coesiva	46
Figura 3.2 - Método dos segmentos coesivos (adaptado: Remmers, et al., (2003))	48
Figura 3.3 - Método “ <i>cracking node</i> ” (Song & Belytschko, 2009)	48
Figura 3.4 – Componentes das tensões na fratura em um elemento	52
Figura 3.5 – Método de avaliação local por centroide	55
Figura 3.6 – Método de avaliação local na ponta da trinca	55
Figura 3.7 – Método de avaliação não local, representação das regiões de análise na ponta e na cauda da fratura	57
Figura 3.8 – Distribuição dos pesos na função Gaussiana (Wells & Sluys, 2001)	58
Figura 3.9 – Distribuição dos pesos na função Gaussiana (Mergheim, et al., 2005)	59
Figura 3.10 – Distribuição dos pesos na função Cúbica	60
Figura 3.11 – Diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões	60
Figura 3.12 - Esquema de consideração de pontos de integração na região não local	62
Figura 4.1 – Condições de contorno de carregamento da viga sob carregamento modo misto. a) Idealizado b) Experimental (adaptado de (Gálvez, et al., 1998))	63
Figura 4.2 – Tipos de condições de contorno e carregamento: a) Tipo 1 ( $K = 0$ ), b) Tipo 2 ( $K = \infty$ )	64
Figura 4.3 – Região detalhada para comparação de trajetórias de fratura	65
Figura 4.4 – Variação nos tamanhos das regiões não locais de avaliação das tensões para propagação de fratura: região 1 ( $r = 1lel$ ) ; região 2 ( $r = 2lel$ ); região 3 ( $r = 3lel$ )..	66
Figura 4.5 – Malha de elementos finitos com 1820 elementos	66

Figura 4.6 – Trajetória das fraturas para os raios com tamanhos característicos de a 1 (7,5mm) , 2 (15mm) e 3 (22,5mm) elementos, respectivamente.	67
Figura 4.7 – Curva de resposta do material Carga vs abertura da boca de fratura (CMOD), para os raios com tamanhos característicos de 1, 2 e 3 elementos, respectivamente.	68
Figura 4.8 – Distribuição das tensões principais na viga no momento da propagação do primeiro segmento de fratura, adotando diferentes raios de semicírculo: a) região 1 (raio = 7,5 mm) , b) região 2 (raio = 15 mm), c) região 3 (raio = 22,5 mm)	69
Figura 4.9 – Detalhe do campos das tensões máximas principais na região 1 no momento da propagação do primeiro segmento de fratura (Incremento 9)	69
Figura 4.10 – Detalhe do campos das tensões principais na região 2 no momento da propagação do primeiro segmento de fratura (Incremento 13)	70
Figura 4.11 – Detalhe do campos das tensões principais na região 3 no momento da propagação do primeiro segmento de fratura (Incremento 17)	70
Figura 4.12 – Curva Carga vs Abertura da fratura (CMOD) das fraturas com a antiga e nova estratégia	72
Figura 4.13 – Comparação entre as trajetórias das fraturas com a antiga e nova estratégia	72
Figura 4.14 – Distribuição das tensões principais na viga adotando diferentes raios no semicírculo: a) região 1 , b) região2 ), c) região 2 (região 1 para propagação) , d) região 3 e) região 3 (região 1 para propagação)	73
Figura 4.15 – Comparativo do campo de tensões no instante da propagação de fratura semicírculo: a) região 2 (15mm) para direção e propagação b) região 2 (15 mm) para direção e região 1 (7,5mm) para propagação	74
Figura 4.16 – Malha 2 com 7240 elementos	75

Figura 4.17 – Variação nos tamanhos das regiões não locais de avaliação das tensões para propagação de fratura na Malha 2: região 1 ( $r = 2lel$ ) ; região 2 ( $r = 4lel$ ); região 3 ( $r = 6lel$ ).	76
Figura 4.18 – Variação nos tamanhos das regiões não locais de avaliação das tensões para propagação de fratura na Malha 2: região 1' ( $r = 1lel$ ) ; região 2' ( $r = 2lel$ ); região 3' ( $r = 3lel$ ).	77
Figura 4.19 – Comparativo das trajetórias de fraturas da região 1 ( $R.1 = 7,5mm$ ) na malha 1 ( $r = lel$ ) e na malha 2 ( $r = 2lel$ ), e da região 1' ( $R.1' = 3,75mm$ ) na malha 2 ( $r = lel$ ).	77
Figura 4.20 – Campo de tensões máximas principais na malha 2 com região1 (R.1), de raio = 7,5 mm, no momento da propagação do primeiro segmento de fratura.	78
Figura 4.21 – Campo de tensões máximas principais na malha 2 com região1' (R.1') de raio = 3,75 mm no momento de propagação de fratura.	79
Figura 4.22 – Comparativo das curvas P x CMOD da região 1 (7,5 mm) na malha 1 e 2, e da região 1' (3,75 mm) na malha 2.	80
Figura 4.23 – Comparativo na curva de resposta do material entre o tamanho do incremento adotado	81
Figura 4.24 – Comparativo na trajetória de fratura para diferentes incrementos	82
Figura 4.25– Comparação das trajetórias de fratura para diferentes tamanhos de regiões não locais	83
Figura 4.26 – Comparação das curvas PxCMOD para as três funções de distribuição para a Malha 1 com região 2 para direção e região 1 para propagação	84
Figura 4.27 – Comparação das trajetórias de fratura das quatro funções de distribuição para a Malha 1 com região 2 para direção e região 1 para propagação	85
Figura 4.28 – Diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões	86
Figura 4.29 – Curva Carga x CMOD para diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões	86

Figura 4.30 – Trajetórias de fratura para diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões	87
Figura 4.31 – Malha de elementos finitos com elementos de interfaces coesivas	88
Figura 4.32 – Malha de elementos finitos com elementos de interfaces coesivas e uma trajetória definida a partir da envoltória experimental	88
Figura 4.33 – Comparação de métodos de solução da análise para os modelos com a trajetória definida e indefinida na discretização dos elementos de interface	89
Figura 4.34 – Degradação dos elementos de interfaces coesivas ( zero = íntegro, um = totalmente danificado)	90
Figura 4.35 – Campo das tensões principais na região com elementos de interfaces coesivas	91
Figura 4.36 – Comparação entre as curvas Força-CMOD dos modelos com XFEM e com elementos coesivos	92
Figura 4.37 – Placa com dois furos e dois entalhes iniciais horizontais	93
Figura 4.38 – Malha estruturada com 4860 elementos quadrilaterais	93
Figura 4.39 - Trajetória das fraturas com o uso do remeshing adaptativo (Khoei, et al., 2008)	94
Figura 4.40 - Trajetória das fraturas com o uso do XFEM e fatores de intensidade de tensão (Khoei, 2015)	95
Figura 4.41 - Trajetórias das fraturas com o uso dos critérios não locais no XFEM do GeMA	95
Figura 4.42 - Distribuições dos deslocamentos verticais na metade dos incrementos de passo	96
Figura 4.43 – Condições de contorno e geometria do teste na placa com dois entalhes	97
Figura 4.44 – Comparação das trajetórias dos modelos a, b e c	99
Figura 4.45 – Geometria e condições de contorno da viga em balaço	100
Figura 4.46 – Viga analisada com diferentes regiões de avaliação: a) Direção da trajetória da fratura calculada com uma região de raio	

equivalente a $1el$ ( $r = 3,3$ mm) b) Direção da trajetória da fratura	
calculada com uma região de raio equivalente a $31el$ ( $r = 9,9$ mm)	101
Figura 4.47 – Campo de tensões máximas principais na viga	101
Figura 4.48 – Comparação entre as trajetórias de fratura obtidas	
no XFEM do GeMA e no XFEM de Zi & Belytschko (2003)	102
Figura 4.49 – Geometria e condições de contorno da placa em L	102
Figura 4.50 – Comparação entre as trajetórias de fratura	
encontradas no XFEM do GeMA e as envoltórias experimentais	103
Figura 4.51 – Comparação entre as curvas Carga-Deslocamento	
do modelo experimental e do GeMA	104
Figura 4.52 – Evolução da distribuição do campo de tensões	
máximas principais na placa no decorrer da análise.	104

## Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Numero de testes válidos e estáveis	64
Tabela 4.2 – Comparativo dos ângulos de propagação do primeiro segmento de fratura	71
Tabela 4.3 – Comparativo das cargas de pico e máximas tensões principais na propagação do primeiro segmento de fratura	75



## Lista de Abreviaturas e Símbolos

### Abreviaturas

CMOD	Crack Mouth Opening Displacement
DEM	Diffuse Element Method
EFG	Element Free Galerkin
FEM	Finite Element Method
FPZ	Fracture Process Zone
GeMA	Geo Modelling Analysis
GFEM	Generalized Finite Element Method
LBIE	Local Boundary Integral Equation
LSM	Level Set Method
LSMM	Least-Squares Meshfree Method
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEM	Meshless Finite Element Method
MFEP	Mecânica da Fratura Elasto-Plástica
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
MFNL	Mecânica da Fratura Não Linear
MNF	Método dos Nós Fantasma
MZC	Modelo de Zona Coesiva
PUM	Partition Unity Method
RKEM	Reproducing Kernel Element Method
RKPM	Reproducing Kernel Particle Method
XFEM	Extended Finite Element Method

### Símbolos

$\tilde{\nabla}$	Operador gradiente
$\Omega^{PU}$	Domínio da partição de unidade
$\mathbf{B}_{\text{enr}}$	Matriz deformação-deslocamento dos elementos enriquecidos
$\mathbf{K}_{\text{blend}}$	Matriz de rigidez convencional e enriquecida

$\mathbf{K}_{enr}$	Matriz de rigidez enriquecida
$\mathbf{K}_{std}$	Matriz de rigidez convencional
$\mathbf{N}_{enr}$	Matriz das Funções de forma dos elementos enriquecidos
$\mathbf{u}_{enr}$	Vetor dos deslocamentos dos graus de liberdade adicionais
$\mathbf{u}_{std}$	Vetor dos deslocamentos dos graus de liberdade convencionais
$G_I$	Energia em modo I
$G_{IC}$	Energia crítica em modo I
$G_{II}$	Energia em modo II
$G_{IIC}$	Energia crítica em modo II
$G_f$	Energia de fratura
$f_c$	Tensão de resistência a compressão
$f_t$	Tensão de resistência à tração
$n_G$	Número de pontos de Gauss
$r_c$	Raio da região circular
$t_n$	Tensões normais ao plano da fratura
$t_s$	Tensões cisalhantes à fratura
$t_t$	Tensões cisalhantes à fratura
$\vec{u}$	Vetor da distância entre o ponto de Gauss e a ponta da trinca
$\vec{v}$	Vetor correspondente ao último segmento de fratura
$\delta_0$	Deslocamento inicial
$\delta_{max}$	Deslocamento máximo
$\varepsilon_{max}$	Deformação máxima
$\varepsilon_n$	Deformações normais ao plano da fratura
$\varepsilon_s$	Deformações cisalhantes à fratura
$\varepsilon_t$	Deformações cisalhantes à fratura
$\theta_p$	Ângulo das tensões principais
$\sigma_{max}$	Tensão máxima
$\sigma_x$	Tensão normal na direção x
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\sigma_y$	Tensão normal na direção y
$\tau_{xy}$	Tensão cisalhante na direção xy
T	Superfície de carregamento

<b>B</b>	Matriz deformação-deslocamento
<b>F</b>	Vetor de forças
<b>N</b>	Matriz das Funções de forma
<b>u</b>	Vetor dos deslocamentos
<b>v</b>	Função de peso arbitrária
<b>A</b>	Área do ponto de integração
<b>E</b>	Módulo de Young
<b><math>H(x)</math></b>	Função Heaviside
<b>b</b>	Forças de corpo
<b>r</b>	Distância do ponto de integração a ponta da trinca
<b><math>w(r)</math></b>	Função peso
<b><math>\alpha</math></b>	Ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$
<b><math>\nu</math></b>	Coefficiente de Poisson

# 1

## Introdução

### 1.1. Relevância e Motivação

Define-se como a falha mecânica de um material a perda da capacidade de carga ou degradação do mesmo. A partir das propagações microscópicas para macroscópicas, pode-se constatar o colapso no material e ainda a perda de rigidez da estrutura (Dasgupta & Pecht, 1991). Portanto, a falha dos materiais pode ter um grande impacto na integridade das estruturas.

Um material pode apresentar falhas mecânicas devido a sobrecargas estáticas, flambagem, plastificação, impactos, fadiga, corrosão, desgaste, etc. O fraturamento dos materiais, em muitos casos, pode ser consequência desses modos de falha, como ilustra a Figura 1.1. Os mecanismos envolvidos no processo de fratura são significativamente complexos e vêm atraindo uma extensiva pesquisa experimental ao longo dos anos.

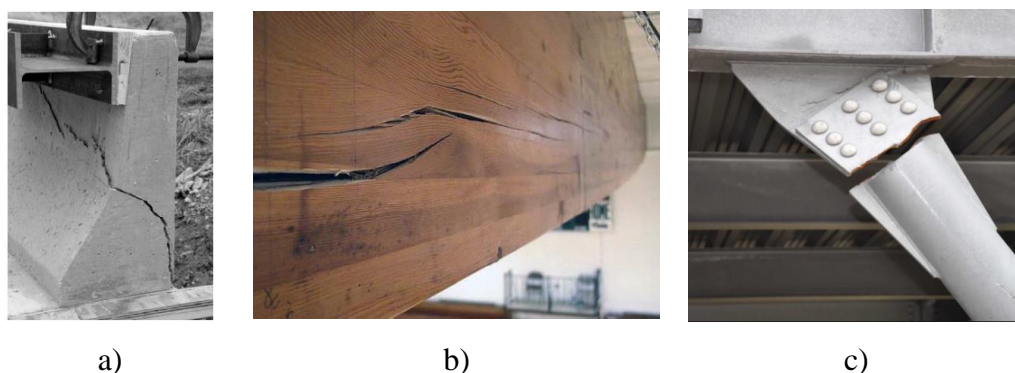


Figura 1.1 – Fraturamento em estruturas constituídas de diferentes tipos de materiais: a) Concreto (Murray, et al., 2007), b) Madeira, c) Aço (EERI, 2011)

A nucleação e propagação de fraturas é uma característica que pode ser descrita conforme a relação constitutiva do material em questão. Sob condições críticas, o campo de tensões na estrutura pode demonstrar diferentes

comportamentos devido à presença de fraturas e fissuras no material, segundo a relação tensão-deformação do mesmo. Desta forma, classificam-se os materiais como frágeis/quase-frágeis, e dúcteis (Dowling, 2013). As relações constitutivas dos materiais frágeis e dúcteis são ilustradas na Figura 1.2, através das curvas de respostas tensão-deformação dos mesmos.

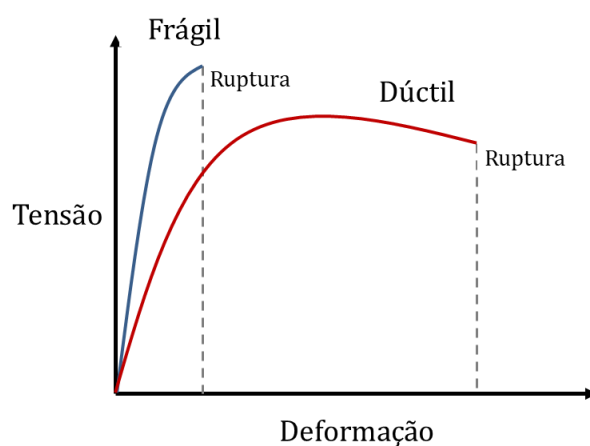


Figura 1.2 – Relação Tensão-Deformação de materiais frágeis e dúcteis

Com o objetivo de executar simulações cada vez mais precisas e econômicas, busca-se reproduzir detalhadamente as características dos materiais empregados nos projetos. Com a evolução capacidade de processamento computacional, métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) se tornaram cada vez mais notórios, devido ao potencial desses métodos para retratar problemas complexos. Entretanto, no âmbito da mecânica da fratura computacional, devido à quantidade de parâmetros relacionados aos modelos constitutivos e às não linearidades presentes, a modelagem do processo de propagação de fraturas ainda se mantém como um desafio.

Diversas abordagens foram desenvolvidas para a modelagem de problemas que envolvam o fraturamento de estruturas. Convencionalmente, a propagação das fraturas é representada por uma descrição geométrica da descontinuidade no MEF (Martha, et al., 1993) ou pela representação gráfica de um critério de fratura em métodos *meshfree* (Fries & Matthies, 2004). No MEF, o rastreamento da fratura geralmente requer a reconstrução da malha (*remeshing*). De modo a reproduzir o desenvolvimento de um processo de fratura em simulações estáticas, necessita-se gerar uma nova malha, para cada novo segmento a ser incorporado à fratura (Khoei,

et al., 2008). Portanto, lidar com múltiplas fraturas, e mapear todos os segmentos de fratura na malha é extremamente complexo.

Na abordagem convencional utilizando o MEF, à medida que a fratura propaga, surge a necessidade de compatibilizar sua geometria com a topologia da malha de elementos finitos (Araújo, 1999). Adicionalmente, além do esforço na reconstrução da malha a partir da ponta da fratura, cuidados especiais são necessários de modo a garantir acurácia na predição da trajetória de fratura, deslocamentos e campos de tensão representados através do MEF.

A simulação numérica de problemas com propagação de fraturas em estruturas de materiais frágeis e quase-frágeis tem sido uma tarefa onerosa em análises convencionais com o método dos elementos finitos. Adicionalmente, o refinamento da malha não-singular é necessário e os elementos singulares *quarter-points* devem ser configurados em torno da ponta da fissura para capturar com precisão os campos singulares de tensão. A tarefa de *remeshing* deve ser executada à medida que as fissuras se propagam para que as bordas do elemento correspondam ao caminho da fratura (Miranda, et al., 2003). Além disso, algumas variáveis históricas devem ser mapeadas entre malhas diferentes em termos de estudos não-lineares.

No Grupo de Simulação Multifísica e Multi-Escala do Instituto Tecgraf / PUC-Rio, estudos sobre modelagens computacionais de fraturas vem sendo amplamente desenvolvidos, como mostram os trabalhos de Rueda (2013), Silva (2015), Bendezú (2015), Castaño (2016) e Escobar (2016).

## **1.2. Objetivos e Metodologia**

Objetiva-se neste trabalho, avaliar os critérios de propagação de fraturas disponíveis na literatura e implementar os critérios para uso em associação ao método dos elementos finitos estendido (XFEM). Avaliam-se as vantagens e desvantagens preponderantes das combinações dos critérios implementados.

Ademais, busca-se analisar os aspectos relacionados ao estudo do campo de tensões e deformações envolvidos na mecânica da fratura computacional.

Para atingir estes objetivos, foram necessárias as seguintes realizações:

- A elucidação sobre o processo físico de fraturamento de diferentes materiais
- O estudo sobre as diferentes formas de representação de meios fraturados
- Compreender os critérios numéricos utilizados para a inicialização de fraturas.
- O entendimento da formulação e aplicação do Método dos Elementos Finitos Estendidos.
- O estudo sobre os modelos de zona coesiva
- A implementação de critérios de propagação de fraturas no sistema de simulação numérica GeMA (*Geo Modelling Analysis*), desenvolvido no Tecgraf.
- Comparar e validar resultados numéricos com experimentais e numéricos desenvolvidos por outros autores.

### 1.3.

#### **Estrutura da dissertação**

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos, de modo a cobrir as etapas envolvidas na modelagem computacional de propagação de fraturas. Esta introdução compõe o capítulo 1.

No capítulo 2 aborda-se a representação computacional de fraturas, esmiuçando as vantagens e desvantagens dos métodos propostos por diferentes autores.

No capítulo 3 apresentam-se os critérios envolvidos no processo de propagação de fraturas. Adicionalmente, discute-se a implementação desses métodos no sistema GeMA, e ilustram-se alguns aspectos que foram propostos para as aplicações.

O capítulo 4 traz as aplicações adotadas para avaliar o desempenho dos critérios de propagação de fraturas empregados em associação com elementos XFEM no GeMA. Adicionalmente, foram analisados os parâmetros envolvidos na concepção de modelos numéricos para a representação de fraturas em modo misto.

Buscou-se representar modelos com grandes variações no campo de tensões, provenientes de carregamentos não proporcionais e combinados, e em estruturas com interferências no fluxo de tensões.

Finalmente, no capítulo 5 expõe-se os comentários conclusivos desta dissertação. Ademais, propostas para dar sequência às pesquisas no tema são feitas nas considerações finais.



## 2 Métodos de Representação de Fraturas

### 2.1. Mecânica da Fratura Computacional

Os materiais podem apresentar falhas mecânicas como consequência de fratura, corrosão, colapso plástico, abrasão, etc. Desde o século passado, grande esforço tem sido dedicado ao estudo da Mecânica da Fratura, no que diz respeito ao surgimento e desenvolvimento de fraturas.

A concepção da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) foi feita por Irwin (1957) com base em conceitos como fatores de intensidade de tensão, fatores de intensidade de tensão crítica e taxa de liberação de energia, em materiais quase-frágeis. Posteriormente, outros autores como Barenblatt (1959) introduziram o conceito sobre os processos que ocorrem na ponta da fratura, como a formação de pequenas zonas plásticas, em relação a sua diferenciação do restante do material, conforme diferentes condições de carregamento e de contorno.

Por conta da geometria da fratura, surgem altas concentrações de tensão ao redor de sua ponta. Este comportamento é ilustrado na Figura 2.1. O conceito da MFLE em sua essência, negligencia os fenômenos inelásticos que podem ocorrer na ponta da trinca.

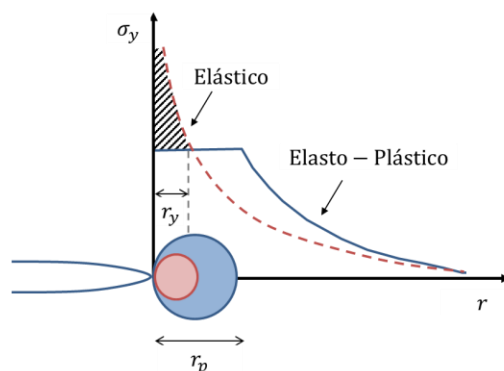


Figura 2.1 - Comportamento das tensões reais e ideais na fratura

No entanto, há casos onde as premissas da MFLE não são válidas, de modo que a região do processo de fissuração na ponta da trinca não é negligenciável em relação ao tamanho da estrutura. Para estes tipos de materiais, a partir dos anos 60 foram apresentadas soluções com o desenvolvimento da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP). Contribuições consideráveis foram apresentadas por Rice (1968), onde o foi possível a generalização da taxa de liberação de energia de materiais não-lineares.

Na utilização de métodos numéricos para a representação de meios fraturados, classificam-se dois diferentes tipos de discretização para representação do domínio: contínua ou acoplada (contínuo-descontínuo). Como ilustra a Figura 2.2a, uma descontinuidade pode ser representada geometricamente através de uma explicitação do modelo constitutivo na malha de elementos finitos. Desta forma, explicita-se através de dois modelos constitutivos distintos, comportamentos diferentes para o meio contínuo e para a descontinuidade (fratura). Entretanto, como ilustra a Figura 2.2b, a representação contínua, a descontinuidade não é explicitada geometricamente na malha. Portanto, atribui-se as regiões da fratura e do meio envolvente, um mesmo modelo constitutivo. Ressalta-se que o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) e modelos de contínuo equivalente (“*smeared cracks*”) adotam esta metodologia.

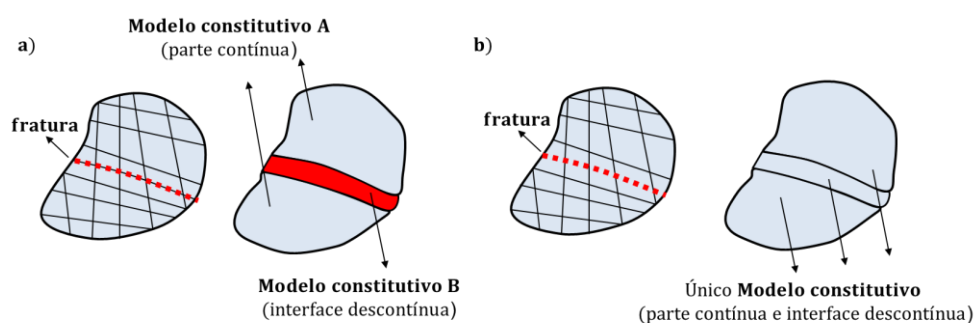


Figura 2.2 – Representação de descontinuidades no método dos elementos finitos: a) abordagem discreta e b) abordagem contínua. (Bendezú, 2015)

### 2.1.1. Modos de carregamento

Na mecânica da fratura, entende-se que uma fratura ocorre como consequência da separação do material, que pode ser ocasionada por processos de abertura ou de cisalhamento. As condições de contorno e carregamento definem para um material os modos formação da fratura, como visto na Figura 2.3. São eles:

- Modo I: abertura de uma fratura simétrica com respeito ao plano  $x - z$ , por efeitos de tração
- Modo II: separação antissimétrica das superfícies do material devido ao deslocamento relativo na direção  $x$ , por efeito de esforços de cisalhamento. Normal à ponta da fratura
- Modo III: separação antissimétrica das superfícies do material devido ao deslocamento relativo na direção  $z$ , por efeito de esforços de cisalhamento. Tangencial à ponta da fratura

Ademais, usualmente os modos de fratura não ocorrem individualmente, de forma que em aplicações práticas o fraturamento ocorra em modo misto, ou seja, os efeitos acontecem a partir de modos combinados.

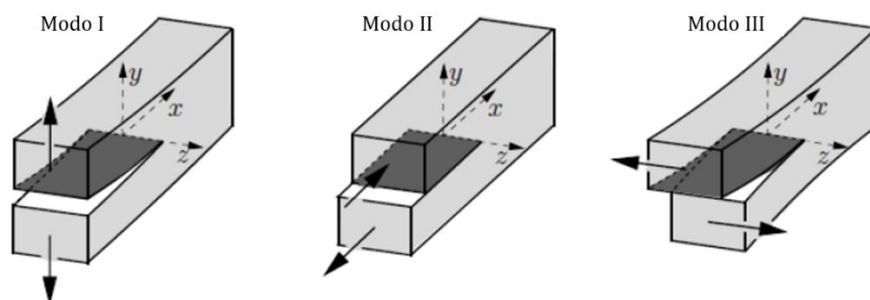


Figura 2.3 – Modos de abertura de fratura

### 2.1.2. Adaptação no Método dos Elementos Finitos

A representação explícita do fraturamento em uma estrutura com o método dos elementos finitos convencional, se dá a partir de árduas tarefas computacionais. Devido a singularidades encontradas no campo de tensões ao redor da ponta da

fratura, a modelagem deste processo torna-se altamente complexa. De modo a solucionar esta adversidade, elementos singulares, denominados *quarter-points* foram propostos pelos autores Henshell & Shaw (1975) e Barsoum (1976), como mostra a Figura 2.4.

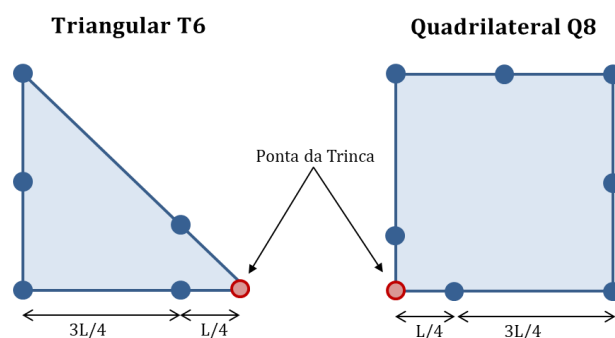


Figura 2.4 - Elementos singulares tipo quarter-points

Os elementos triangulares, entretanto, como consequência de uma melhor adaptação às condições de geometria do problema, apresentam melhores resultados numéricos quando comparados com os elementos quadrilaterais (Barsoum, 1976). Enfatiza-se que nessa estratégia, como ilustra a Figura 2.5, é prática comum a criação de rosetas contendo oito elementos triangulares que formam um ângulo de  $45^\circ$  entre si (Miranda, et al., 2003).

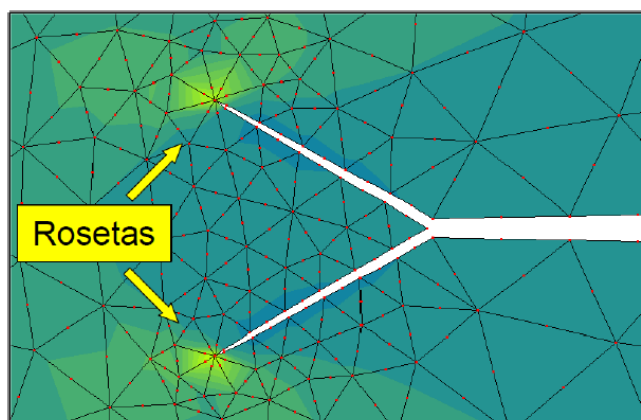


Figura 2.5 – Rosetas de elementos triangulares *quarter-points* em uma malha de elementos finitos.

## 2.2. Mecânica da Fratura Coesiva

### 2.2.1. Elementos de Interface

Originalmente desenvolvido por Goodman *et al.* (1968), o elemento de interface inicialmente foi utilizado para avaliação de juntas em rochas. Como mostra a Figura 2.6, o elemento apresenta espessura nula e possui quatro nós com dois graus de liberdade em cada, para deslocamentos normais e tangenciais.

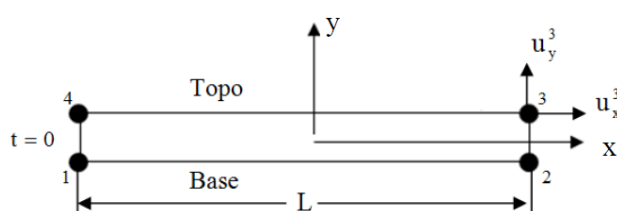


Figura 2.6 – Geometria do elemento de interface de (Goodman, et al., 1968)

Os autores Ghaboussi *et al.* (1973) formularam um elemento de espessura não nula e simetria axial, com graus de liberdade independentes. Em 1979 os autores Pande & Sharma estenderam a formulação de Ghaboussi *et al.* (1973), para um elemento quadrático de oito nós. O elemento de interface proposto por Desai *et al.* (1984) diferencia-se por apresentar espessura delgada, cuja principal vantagem é a sua fácil implementação computacional. Baseado no elemento de Ghaboussi *et al.*, Beer (1984) propôs um elemento com espessura nula e formulação isoparamétrica.

Finalmente, as adaptações propostas por Day & Potts (1994) contribuíram para a formulação de um elemento de interface baseado no modelo de Goodman *et al.*, com espessura nula, que supera os problemas de geração de malhas devido às peculiaridades de compatibilização dos elementos, referentes às coordenadas dos nós em lados adjacentes. Resultados de aplicações utilizando estes modelos foram amplamente discutidos nos trabalhos de Rueda (2013) e Escobar (2016). Ressalta-se que a mesma formulação utilizada nestas aplicações foi adotada nos elementos de interface coesiva implementados no GeMA, como ilustra a Figura 2.7.

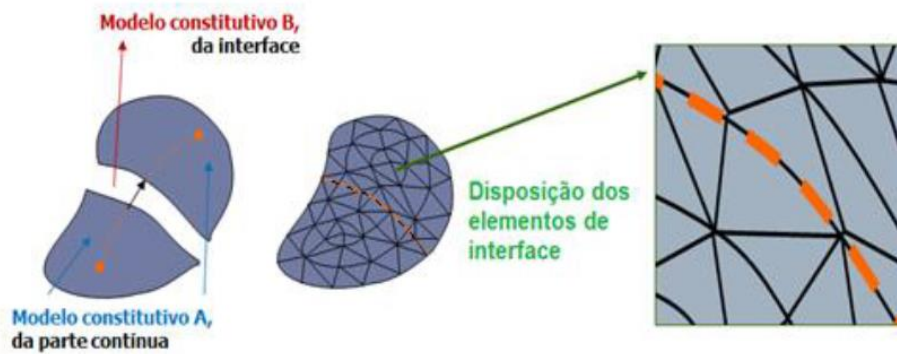


Figura 2.7 - Elementos de interface em uma malha de elementos finitos

### 2.2.2. Modelo Constitutivo dos Elementos Coesivos

Os modelos de fratura coesiva foram inicialmente introduzidos por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) e têm sido muito utilizados na Mecânica da Fratura Não Linear (MFNL) de materiais quase-frágeis (Carpinteri, 2001). Nos modelos de fraturas coesivas, as singularidades encontradas no MFLE devido aos efeitos na ponta da fratura, são evitadas por conta das tensões coesivas presentes nas superfícies da fratura, existentes a zona de processo de fraturamento (*fracture process zone* – FPZ). Desta forma, as tensões coesivas ficam em função da abertura da fratura e apresentam amolecimento conforme essa abertura aumenta.

Juntamente ao MEF convencional, permite-se a modelagem de propagação de fraturas em conjunto com um modelo de zona coesiva (Elices, et al., 2002). Assume-se que no modelo de zona coesiva, o crescimento da fratura seja representado através da relação tração-separação. Como ilustra a Figura 2.8, o elemento coesivo apresenta três fases distintas:

1. Fase de carregamento: O material encontra-se íntegro, sem dano.
2. Fase de amolecimento: Início do dano, e processo de degradação do material, através da relação Tensão–Deslocamento.
3. Fase de descarregamento: À medida que a carga é retirada, a abertura retorna ao seu ponto inicial. Ressalta-se que na medida que o elemento é novamente carregado, a fase de carregamento dar-se-á através da trajetória descrita pela fase de descarregamento.

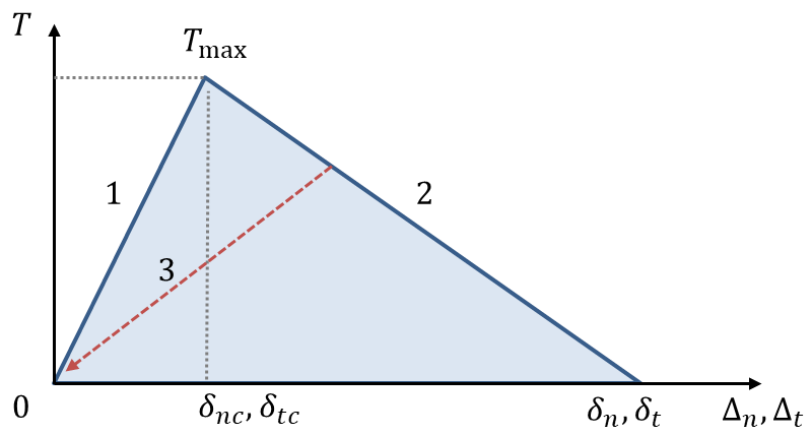


Figura 2.8 - Lei Constitutiva Intrínseca do Elemento Coesivo

Desta forma, com o uso de elementos de interface coesivos, permite-se a representação da propagação de fraturas sem a necessidade de atualizar a malha. Supõe-se que neste modelo, uma vez que a tensão  $\sigma_y$  do material é atingida, o mesmo começa a degradar até uma separação crítica, momento no qual ocorre a fratura. Enfatiza-se que essa separação pode ser representada por funções descendentes de diferentes formas, como ilustra a Figura 2.9, onde a região definida pelo gráfico, representa a energia liberada no processo de fraturamento. Como os elementos de interface são inseridos entre elementos finitos convencionais (Ver Figura 2.7), ressalta-se que a trajetória da fratura necessita ser definida *a priori*, de modo a reproduzir o fenômeno de fraturamento corretamente.

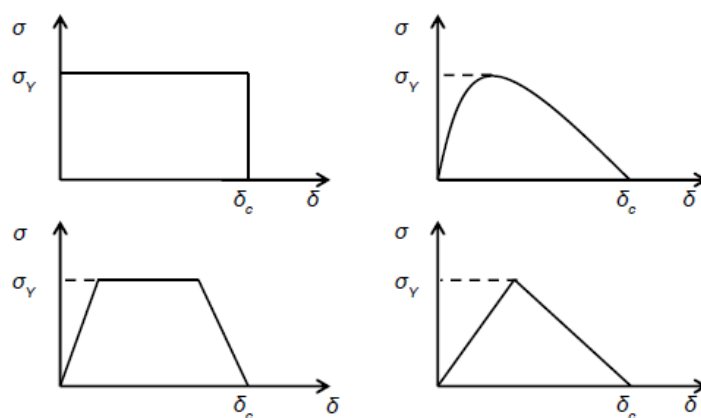


Figura 2.9 – Diferentes modelos intrínsecos de funções de amolecimento para elementos coesivos

### 2.3.

#### O Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM)

Introduzido por Belytschko & Black (1999) e Moës *et al.* (1999) o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) consiste no enriquecimento das funções de forma com funções de *Heaviside* e com graus de liberdade adicionais frente ao método convencional de elementos finitos. O XFEM fundamenta-se no Método de Partição de Unidade (Melenk & Babuška, 1996) (Babuska & Melenk, 1997). Com isso, a inserção da geometria da fratura no modelo é feita de maneira independente da configuração da malha.

O XFEM supera as desvantagens apresentadas pelo FEM tradicional, uma vez que não apresenta necessidade de atualizar a malha conforme a fratura propaga, e desta maneira permite aliviar grande parte do custo relacionado à adaptação de malha. Salienta-se que como o método mantém a base do método dos elementos finitos, propriedades como simetria e esparsidade das matrizes são preservadas, e, como consequência, ganha-se em termos de precisão e custo computacional para processamento do modelo (Sukumar & Prévost, 2003).

Destaca-se que a capacidade de utilização do XFEM pode ser ampliada, caso seja combinado com funções que permitam representar a localização da fratura como o *Level Set Method* (LSM) (Stolarska, et al., 2001), (Ventura, et al., 2003). A partir da definição de valores sinal da distância em pontos discretizados no domínio, o LSM permite que uma seção seja mapeada tanto aberta quanto fechada. O método adequa-se ao método dos elementos finitos, onde os nós na malha de elementos podem ser usados como pontos para as funções level set.

Como o comportamento da descontinuidade relaciona-se com a forma da fronteira, comumente adotam-se funções de enriquecimento formuladas com funções level set. Possibilita-se a representação da descontinuidade tanto no corpo quanto na ponta da fratura através de funções LSM.

Sukumar *et al.* (2000), expandiu o método dos elementos finitos estendidos para casos tridimensionais, adotando a mesma formulação utilizada em casos bidimensionais com funções de enriquecimento de ponta de fratura. Entretanto, essas funções levaram em consideração o plano normal à ponta da fratura, e foram



desenvolvidas em termos de coordenadas polares. Resultados muito bons foram encontrados com essa metodologia.

Duarte *et al.* (2001), com funções de enriquecimento baseadas no critério de visibilidade (Krysl & Belytschko, 1999), apresentou um método tridimensional para propagação dinâmica de fraturas no XFEM/GFEM. (Areias & Belytschko, 2005) e (Gasser & Holzapfel, 2005) contribuíram com melhorias e aplicações nas formulações tridimensionais do XFEM/GFEM.

Stazi *et al* (2003), expôs exemplos considerando fraturas curvas em materiais frágeis, adotando elementos quadráticos. Notou-se que os enriquecimentos nodais nos graus de liberdade enriquecidos devem ser incorporados com funções de forma lineares, até mesmo quando a formulação dos elementos finitos convencionais for construída com funções de forma quadráticas. Atribui-se esses efeitos por conta do efeito “blending” entre os elementos convencionais e os enriquecidos.

### 2.3.1.

#### A Formulação do XFEM

Nesta seção, introduz-se de forma resumida a formulação do Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM) e suas funções de enriquecimento, assim como sua estrutura junto às equações nos elementos finitos.

#### 2.3.1.1.

##### A Forma forte e fraca

O equilíbrio em cada ponto de um corpo na forma forte pode ser descrito conforme equação (2.1):

$$\tilde{\nabla} \sigma + \mathbf{b} = 0 \quad (2.1)$$

onde  $\sigma$  é o tensor de tensões e  $\mathbf{b}$  o vetor das forças de corpo. Considera-se na formulação do elemento a forma fraca das equações de equilíbrio, ou a forma virtual da energia da formulação forte do comportamento do corpo. Isso pode ser feito

multiplicando uma função de peso arbitrária,  $\mathbf{v}$ , e integrando-a por todo o volume do corpo  $\mathbf{V}$ , como mostrado na equação (2.14).

$$\int_V (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{v}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV \quad (2.2)$$

Onde  $\mathbf{t}$  é o vetor de forças de superfície atuantes na superfície  $S$  de carregamento e  $\tilde{\nabla}$  é o operador gradiente .

### 2.3.1.2.

#### Inclusão dos enriquecimentos na formulação do XFEM

Ao definir a função de enriquecimento  $\mathbf{v}$ , e através do método de Galerkin, com a função peso e através do enriquecimento considerado, escreve-se as seguintes equações:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{c} + \mathbf{N}_{\text{enr}}\mathbf{q} \quad (2.3)$$

$$\tilde{\nabla} \mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{c} + \mathbf{B}_{\text{enr}}\mathbf{q} \quad (2.4)$$

Onde  $\mathbf{c}$  é a quantidade nodal convencional, e  $\mathbf{q}$  a parte relacionada ao termo enriquecido. Adicionalmente,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  correspondem a matrizes de funções de forma e deformação-deslocamento tradicionais, respectivamente. Analogamente,  $\mathbf{N}_{\text{enr}}$  e  $\mathbf{B}_{\text{enr}}$  representam as mesmas matrizes, para as parcelas dos enriquecimentos.

Ao substituir, as equações (2.3) e (2.4), que descrevem a função de peso, na equação (2.2), temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}^T \left[ \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \right] + \\ & \mathbf{q}^T \left[ \int_V \mathbf{B}_{\text{enr}}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{N}_{\text{enr}}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}_{\text{enr}}^T \mathbf{b} dV \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Entretanto, como  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{q}$  são arbitrários, a equação (2.5) pode ser dividida em duas partes, representadas por duas equações distintas.

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \quad (2.6)$$

$$\int_V \mathbf{B}_{\text{enr}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{N}_{\text{enr}}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}_{\text{enr}}^T \mathbf{b} dV \quad (2.7)$$

As equações (2.6) e (2.7), representam os termos do método dos elementos finitos tradicional, e dos enriquecidos, respectivamente. Consequentemente, o ao relacionar constitutivamente as tensões e deformações, pode ser inserindo o vetor dos deslocamentos, mostrado na equação (2.8) , nas equações (2.6) e (2.7).

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}_{\text{std}} + \mathbf{N}_{\text{enr}} \mathbf{u}_{\text{enr}} \quad (2.8)$$

Ao resolver estas equações, surgirão quatro tipos de matrizes de rigidez, uma relaciona a matriz de rigidez tradicional do MEF, duas diferentes combinações entre a tradicional e as enriquecidas, e uma somente de termos enriquecidos. As matrizes que envolvem ambos os termos, comumente são chamadas de “blended”. Desta forma, o sistema de equações de equilíbrio pode ser escrito conforme equação (2.9):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{std}} & \mathbf{K}_{\text{blend}} \\ \mathbf{K}_{\text{blend}}^T & \mathbf{K}_{\text{enr}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\text{std}} \\ \mathbf{u}_{\text{enr}} \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \quad (2.9)$$

Onde,

$$\mathbf{K}_{\text{std}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K}_{\text{blend}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{enr}} dV \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K}_{\text{enr}} = \int_V \mathbf{B}_{\text{enr}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{enr}} dV \quad (2.12)$$

### 2.3.1.3. Método de Partição de Unidade

Define-se como partição de unidade um conjunto de funções  $f_i(x)$ , associadas com respectivos pontos discretos  $i$ , cujo somatório é um valor unitário sobre um domínio específico  $\Omega^{PU}$ . Duarte & Oden (1996) demonstraram a possibilidade de interpolação de um campo sobre um corpo  $\Omega$  usando partições de unidade.

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega^{PU} \quad (2.13)$$

O método de partição de unidade permite introduzir funções arbitrárias  $\psi(x)$  no domínio, que por equivalência à definição de completude podem ser reproduzidas exatamente da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)\psi(x) = \psi(x) \quad (2.14)$$

Ademais, no método dos elementos finitos, o conjunto de funções de forma isoparamétricas consiste na concepção do método de partição de unidade, e discretizando o campo de deslocamentos no domínio, temos:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i \quad (2.15)$$

Adicionando a parcela das funções de enriquecimento do XFEM nesta expressão, tem-se:

$$\begin{aligned}
u^h(x) &= u_{FEM}(x) + u_{ENR}(x) \\
&= \sum_{i \in I} N_i(x) u_i + \sum_{j \in J} N_j[H(x)] a_j \\
&\quad + \sum_{k \in K_1} N_k(x) \left[ \sum_{l=1}^4 b_k^{l_1} F_l^1(x) \right] + \\
&\quad + \sum_{k \in K_2} N_k(x) \left[ \sum_{l=1}^4 b_k^{l_2} F_l^2(x) \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

O índice J indica o conjunto de nós cujo domínio é completamente atravessado pela fratura, e assim, através da função de *Heaviside*  $H(x)$ , capazes de representar a descontinuidade no campo de deslocamentos. Além disso,  $u_i$  representa os graus de liberdade convencionais, enquanto  $a_j$ ,  $b_k^{l_1}$  e  $b_k^{l_2}$  os graus de liberdade adicionais referentes às faces e as pontas da fratura, respectivamente. Ambas as pontas da fratura, sob seu domínio de influência, correlacionam-se com um conjunto de nós que são representados por  $K_1$  e  $K_2$ , cujas respectivas funções de enriquecimento de ponta da fratura são  $F_l^1(x)$  e  $F_l^2(x)$ .

#### 2.3.1.4. Funções de enriquecimento

O Método dos Elementos Finitos Estendido é utilizado em problemas que envolvem descontinuidades, que podem ser classificadas como fracas ou fortes. Uma descontinuidade fraca apresenta deslocamento contínuo, e descontinuidade nas deformações. Já a descontinuidade forte apresenta descontinuidade tanto nos deslocamentos quanto nas deformações.

Matematicamente, existem diversas funções de enriquecimento, que podem ser empregadas em diferentes circunstâncias, conforme a natureza do problema, como nos casos de fraturas, interfaces de fases, deslocamentos e fronteiras de grãos (Belytschko, et al., 2009).

Baseado no método de Galerkin de enriquecimento de elementos (Fleming, et al., 1997), Belytschko & Black (1999) foram os pioneiros no estudo de fraturas utilizando a estrutura do XFEM. No mesmo ano, Moës *et al.* (1999) introduziram o

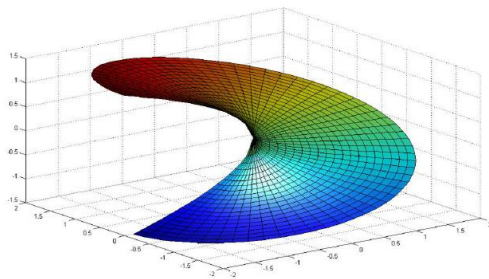
conceito do uso de funções Heaviside como funções de enriquecimento para a representação de fraturas. Desta maneira, utiliza-se a função de *Heaviside* para a representação do corpo da fratura, e um conjunto mais complexo de funções para mapear o campo de deslocamentos na ponta da fratura, como mostra a eq. (2.15).

A função de grau unitário “*unitstep*” é capaz de mapear a posição da descontinuidade, como mostra a eq. (2.17):

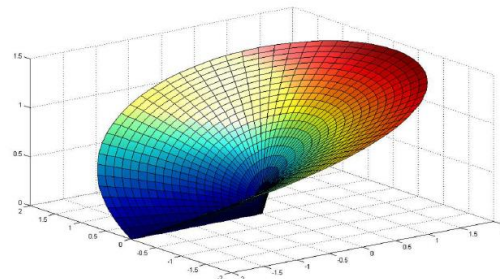
$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{acima da fratura} \\ -1 & \text{abaixo da fratura} \end{cases} \quad (2.17)$$

Na equação acima, percebe-se que o enriquecimento introduz a descontinuidade por conta da fratura. Já nos casos onde o elemento não é totalmente atravessado por uma fratura, estas mesmas funções Heaviside não satisfazem as aproximações no campo de deslocamentos dentro do domínio. Entretanto, obtém-se o campo de deslocamentos a partir da teoria da mecânica da fratura linear elástica, originalmente introduzidos por Fleming *et al* (1997), e posteriormente adaptado por Belytschko & Black (1999) para o XFEM, expressando-os através de quatro funções de enriquecimento, em termos do sistema local de coordenadas da ponta da fratura  $(r, \theta)$  como mostrado na Figura 2.10:

$$\{F_i(r, \theta)\}_{i=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right\} \quad (2.18)$$



$$\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



$$\sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

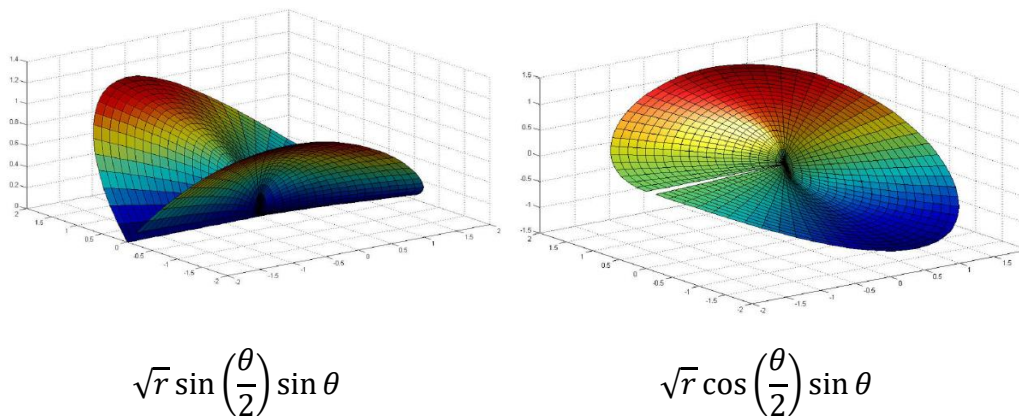


Figura 2.10 – Funções de campo assintóticas de ponta

Nota-se que a primeira função da Figura 2.10 ( $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$ ), apresenta descontinuidade entre as faces da fratura, e com isto, se faz possível a representação da fratura, quando a ponta está no interior do elemento.

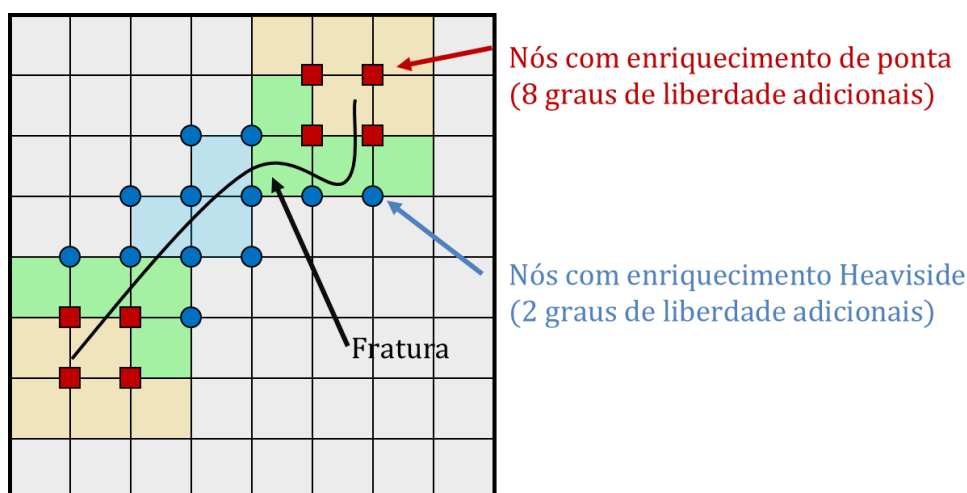


Figura 2.11 – Enriquecimento dos nós com as funções Heaviside e de ponta (adaptado de (Moës, et al., 1999)).

A definição da posição das descontinuidades com acurácia, ou seja, do conjunto dos nós a serem enriquecidos no XFEM é de enorme importância (Stolarska, et al., 2001). Nesse quesito, o Level Set Method (Osher & Fedkiw, 2001) é um dos mais utilizados como complementos para o XFEM.

Como o XFEM não necessita adequar o domínio a malha de elementos finitos, faz-se necessária a utilização de um método para mapear a localização da fratura. Desta maneira, duas funções level set podem ser definidas: uma função normal

para o corpo da fratura  $\phi(x)$ , e uma função tangencial para as pontas desta  $\psi(x)$ . As duas funções de enriquecimento dadas nas equações (2.18), podem ser calculadas em função de  $\phi(x)$  e  $\psi(x)$ , como mostra a eq. (2.19) e ilustra a Figura 2.12.

$$H(x) = H(\psi(x)) = \begin{cases} +1 & \phi(x) \geq 0 \\ -1 & \phi(x) < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

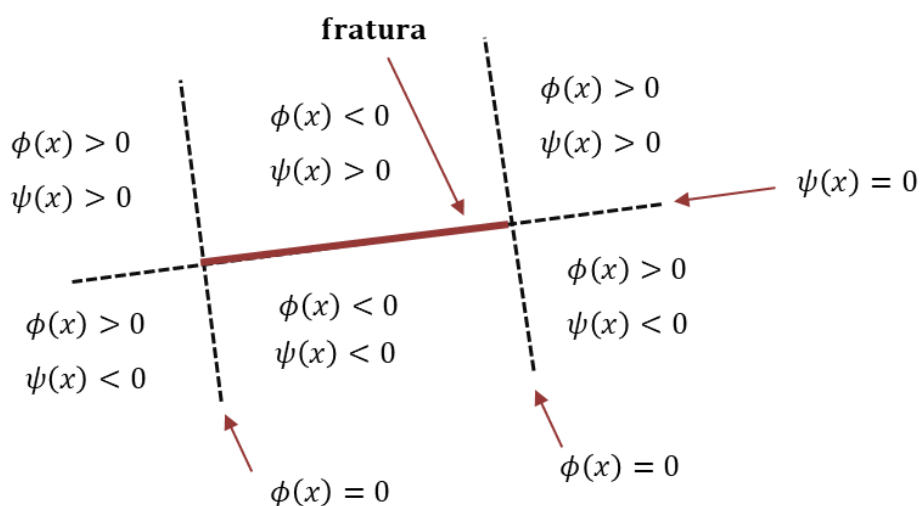


Figura 2.12 – Função level set para representação da fraturas

A função  $\phi(x)$  pode ser definida através da relação apresentada na eq. (2.20), como mostrado na Figura 2.13.

$$\phi(x) = \|x - \bar{x}\| \text{sign} \left( n_{\Gamma_d} \cdot (x - \bar{x}) \right) \quad (2.20)$$

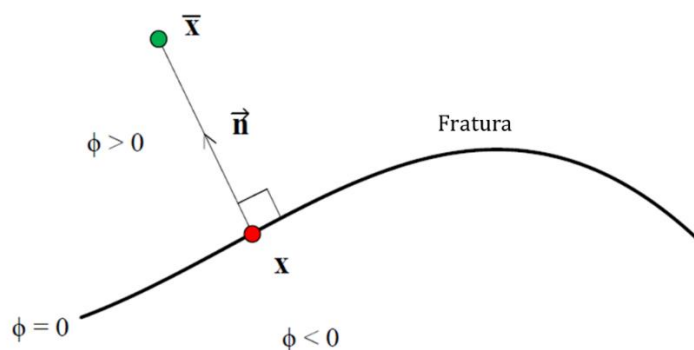


Figura 2.13 – Função distância do sinal



Ademais, as coordenadas polares de ponta da fratura são representadas através das relações apresentadas nas equações (2.21) e (2.22), como ilustrado na Figura 2.14.

$$r = \sqrt{\psi^2(x) + \phi^2(x)} \quad (2.21)$$

$$\theta = \arctan \frac{\psi(x)}{\phi(x)} \quad (2.22)$$

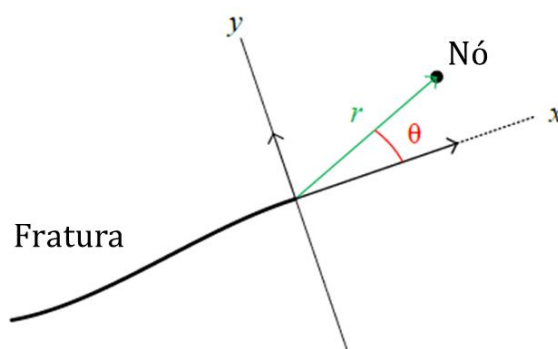


Figura 2.14 – Ponta da fratura em coordenadas polares

### 2.3.2. O Método dos Nós Fantasma

Inicialmente introduzido por Hansbo & Hansbo (2004) e posteriormente modificado por Song *et al* (2006), o Método dos Nós Fantasma (MNF) é análogo ao XFEM (Areias & Belytschko, 2005). Fundamentalmente, a diferença entre ambos os métodos, é que no MNF a descontinuidade é representada através da sobreposição de elementos com nós convencionais e fantasmas. Na medida que diversos elementos se combinam, o comportamento de descontinuidade é representado. Entende-se que um elemento é definido apenas na área onde o mesmo é contínuo. Como mostra a Figura 2.15, ambos elementos A e B contém tanto nós reais  $n_i$  quanto nós fantasmas  $n'_i$ , que são ativos somente em seus subdomínios,

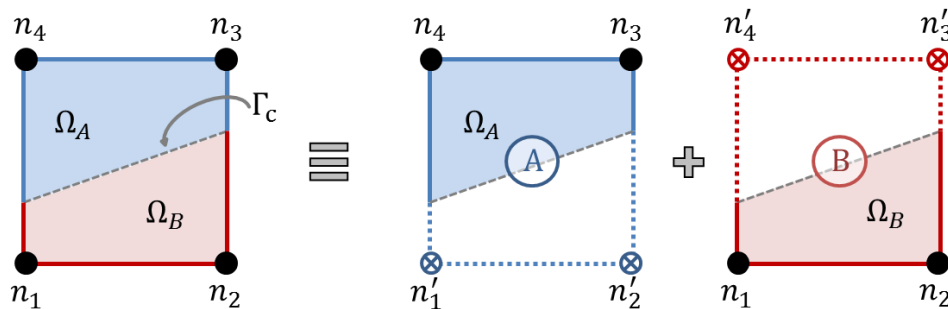


Figura 2.15 – Conectividade e subdomínios de um elemento enriquecido no método dos nós fantasmas

Adicionalmente, o campo de deslocamentos é computado separadamente para cada elemento, utilizando seus deslocamentos nodais e suas funções de forma convencionais, como mostra a equação (2.23).

$$u(x) = \begin{cases} N(x)u_A, & x \in \Omega_A \\ N(x)u_B, & x \in \Omega_B \end{cases} \quad (2.23)$$

Desta maneira, a abertura da fratura é representada através da diferença no campo de deslocamentos entre os elementos A e B, mostrado na eq. (2.24).

$$[u](x) = N(x)(u_A - u_B), \quad x \in \Gamma_c \quad (2.24)$$

## 2.4.

### Fraturas Coesivas com a técnica do XFEM

O Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) inicialmente foi desenvolvido para o uso bidimensional na MFLE (Belytschko & Black, 1999). Em 2001, Wells & Sluys aplicaram o conceito do modelo de fraturas coesivas ao XFEM, limitando-os à casos onde a fratura encontra-se nas arestas dos elementos. O esquema de fratura coesiva na técnica do XFEM foi implementado por Moës & Belytschko para elementos triangulares em 2002. Os autores obtiveram boas comparações entre curvas carga-deflexão de modelos numéricos e experimentais.

Inicia-se o processo de decoesão do elemento ao adicionar-se um novo segmento de fratura. Desta forma, o elemento é degradado de modo que o dano

computado seja variado monotonicamente de zero a um. Diferentes tipos de evolução do dano podem representar a propagação de fraturas nos diferentes modos de fraturamento. As formulações matemáticas para os critérios de propagação de fraturas em modo misto são mais complexas de modo a contemplar os modos I e II e a interação entre eles (Harper & Hallett, 2008). Entretanto, existem equações que englobam ambos os modos, e suas respectivas energias, como a Power Law (Wu & Reuter, 1965), descrita na equação (2.25) e a proposta por Benzeggagh & Kenane (1996) na eq. (2.26). A Figura 2.16 ilustra a interação de ambos os modos no processo de degradação.

$$G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \cdot \left( \frac{G_{II}}{G_I + G_{II}} \right)^\eta = G_f \quad (2.26)$$

Onde  $G_I$  e  $G_{II}$  representam a energia de fraturamento correspondentes aos modos I e II respectivamente. Já o parametro  $\eta$  representa um critério semi-empírico que pode ser encontrado através da relações energéticas de fratura para diferentes participações dos modos.

Figura 2.16 - Lei de amolecimento bilinear de modo misto (adaptado: (Harper & Hallett, 2008))

maneira, ao atingir o valor definido no critério de propagação de fratura o elemento perde seu comportamento elástico linear e assume a função especificada.

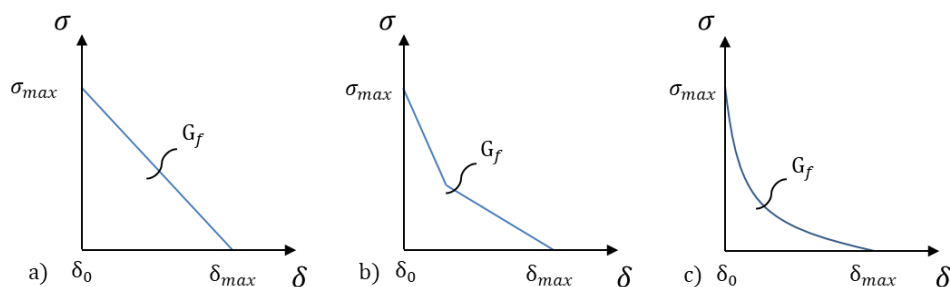


Figura 2.17 – Modelos extrínsecos de zona coesiva: a) linear b) bi linear c) exponencial

A representação do comportamento do material através de um adequado modelo de zona coesiva é o principal desafio para reproduzir computacionalmente o fenômeno de degradação que ocorre fisicamente (Moody, et al., 2002). Para um determinado material, podem ser necessárias mudanças nos parâmetros de tração-separação, de acordo com a escala do modelo, correspondente aos ensaios experimentais.

Enfatiza-se que devido a mudanças nos parâmetros de tração-separação do modelo de zona coesiva, divergências podem ser encontradas nos resultados decorrentes de simulações numéricas (Elices, et al., 2002). Ademais, através de um estudo numérico utilizando o MEF, a relação entre tração-separação foi analisada por Schneider (2009), concluindo-se que é de suma importância o formato da função de amolecimento, que representa a degradação das propriedades do material.

### 3

## Mecanismos de Propagação de Fraturas

A falta de um critério bem definido para o fraturamento é uma das lacunas a serem exploradas na mecânica da fratura (Broek, 1982). As tensões e deformações na ponta da trinca podem ser analisadas através de conceitos encontrados na mecânica aplicada. Entretanto, a propagação de fraturas não é um critério bem estabelecido em função dessas tensões e deformações. Usualmente, assume-se que na medida em que as tensões na ponta da trinca atinjam um determinado valor crítico, ocorra a propagação da fissura. Ressalta-se que há pelo menos 5 décadas, os critérios de fraturamento com relação à distância a ponta da trinca, envolvendo tensões e deformações foram objetos de estudo por McClintock (1961), Kraft (1964) e Rosenfield & Hahn (1968).

Os critérios de fraturamento baseiam-se em modelos físicos estabelecidos a partir do conhecimento dos mecanismos de fratura. Entretanto, nenhum desses modelos é necessário no critério de balanço de energia, apesar desse condicionante de energia indicar quando a propagação de fratura pode ocorrer. O estudo da mecânica da fratura busca entender as causas do processo de fratura e prover um critério para o fraturamento, de acordo com a técnica envolvida no processo.

De modo a avaliar e prever o campo de tensões na ponta da trinca, Irwin (1957) e Williams (1957) desenvolveram um método que consiste em relacionar a quantidade de energia disponível para a fratura, em termos dos campos de tensão e deslocamento no entorno da área de interesse, denominados fatores de intensidade de tensão,  $K$ . Ressalta-se que esse conceito é teoricamente válido apenas para materiais frágeis com comportamento elástico.

Desenvolvida por Cherepanov (1967) e Rice (1968) a integral  $J$  é um método baseado na lei de conservação de energia para determinar os fatores de intensidade de tensão, em regiões onde a ponta da fratura não obedece mais as premissas lineares elásticas. Desta forma, sob condições quase-estáticas e para materiais lineares elásticos, com pequena zona de plastificação na ponta da fratura,

a fratura em um corpo sujeito a um carregamento monotônico, apresenta taxa de liberação de energia de deformação igual a integral J (Yoda, 1980).

A Mecânica da Fratura Linear Elástica é uma ótima técnica para solução de problemas onde a não linearidade na ponta da fratura, devido ao micro fissuramento ou plasticidade pode ser desconsiderada. Entretanto, há situações em que a reprodução destas características é fundamental para o desenvolvimento de modelos fidedignos. Para certos materiais, com comportamento quase-frágil, como o concreto, materiais cerâmicos e cimentícios e diferentes tipos de rochas, a zona não linear na ponta da fratura pode ser reproduzida através de pequenas adaptações no processo de modelagem computacional (Bažant & Planas, 1998).

Uma maneira de reproduzir a não linearidade da zona de processo de fratura na ponta da trinca é adotando um Modelo de Zona Coesiva (MZC), cuja formulação descreva a dissipação de energia que ocorre no processo (Barenblatt, 1962). Assume-se que a zona onde o material sofre degradação, conforme o modelo de dano, se mantém apta a transferir tensões com o meio contínuo. Adicionalmente, conforme proposto por Hillerborg *et al* (1976), define-se como a ponta fictícia da fratura, a posição que separa o material intacto da zona de processo de fratura, enquanto a ponta real da fratura, indica-se no limite entre a região totalmente danificada com a em processo de dano, como ilustrado na Figura 3.1.

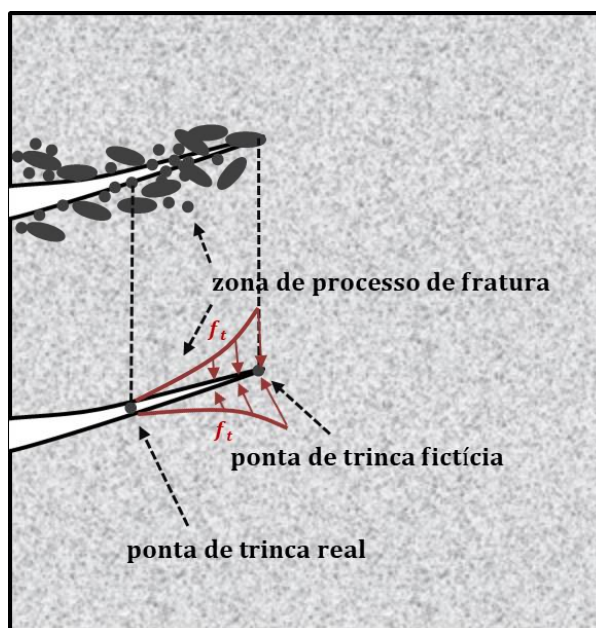


Figura 3.1 – Zona de processo de fratura representada pelo modelo de zona coesiva

A relação constitutiva pode ser adotada de modo que o material se comporte de maneira linear-elástica na região onde não houver fraturas, e na zona de processo de fraturas, a tração de superfície coesiva for função do salto dos deslocamentos. Desta forma, a relação constitutiva coesiva abrange em seu modelo tanto a resistência do material  $f_t$ , quanto a energia no processo de fratura  $G_f$ .

As propagações de fraturas coesivas têm sido amplamente modeladas com o método dos elementos finitos, e estas podem ser feitas de duas maneiras. A primeira metodologia baseia-se em um algoritmo de inter-elemento, que consiste na inserção de um elemento com modelo constitutivo coesivo entre elementos, na medida que necessita refazer toda a malha de elementos finitos (Xu & Needleman, 1994). A segunda, fundamentada em um algoritmo intra-elemento, enriquece a formulação do MEF com funções adicionais, de modo a reproduzir o salto no campo de deslocamentos. Essa técnica aplica o conceito de partição de unidade, de modo a incluir as funções de enriquecimento, que é o caso do XFEM, o enfoque deste trabalho.

Independentemente da posição da fratura com a estrutura da malha de elementos finitos, a técnica do XFEM foi desenvolvida para modelar a descontinuidade no campo de deslocamentos conforme a trajetória da fratura. Embora a técnica tenha sido originalmente desenvolvida para modelar a propagação de fraturas com contato por fricção (Dolbow, et al., 2001), sua versão para problemas com fratura coesiva também foi formulada (Wells & Sluys, 2001) (Moës & Belytschko, 2002). De modo a reproduzir a iniciação e propagação de fraturas descontínuas, através da técnica de partição de unidade, foi desenvolvido por Remmers, et al (2003) um critério de propagação de fraturas baseado no método dos segmentos coesivos (Ver Figura 3.2).

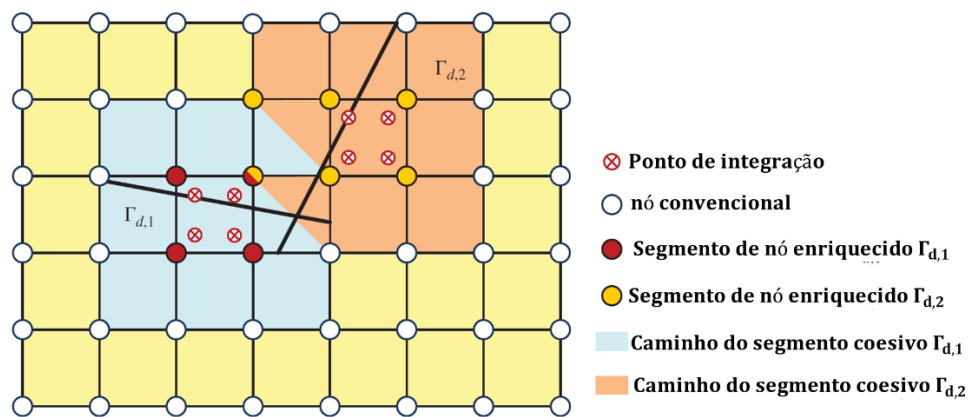


Figura 3.2 - Método dos segmentos coesivos (adaptado: Remmers, et al., (2003))

Analogamente, o método proposto por Song & Belytschko (2009) também incorpora a fratura através de segmentos, passando-os através dos nós dos elementos, como mostra a Figura 3.3. Nota-se que não necessariamente há continuidade em nenhum dos dois métodos apresentados. Desta forma, é necessário que seja feito um tratamento de modo a unificar todos estes segmentos, demandando certo custo computacional.

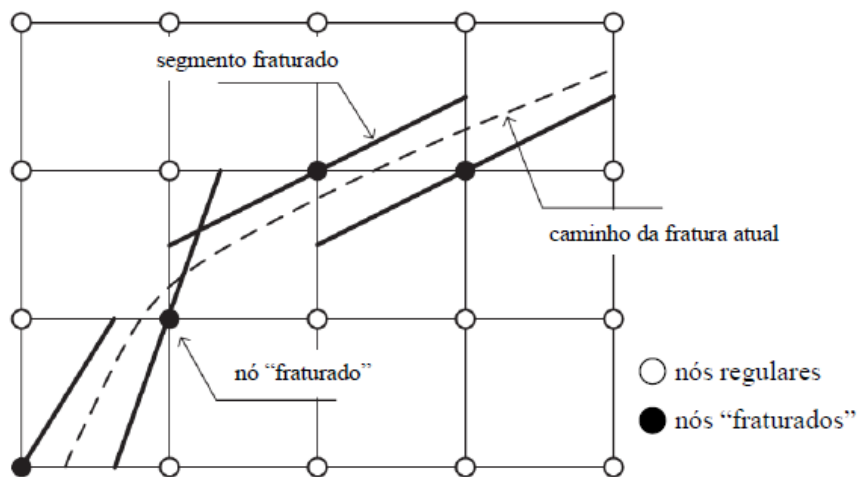


Figura 3.3 - Método "cracking node" (Song & Belytschko, 2009)

Nos últimos anos, experimentou-se um ressurgimento na formulação de modelos de mecânica de fraturas, particularmente para colocá-las em um quadro matematicamente sólido. Adicionalmente, existem diversos questionamentos relacionados à nucleação e à evolução das fraturas, especialmente na modelagem de materiais compósitos e nas formulações tridimensionais. Novas classes de



modelos apareceram, como modelos de fissuras “*smeared*”, peridinâmica e abordagens de campos de fase para fratura. A mecânica de fratura computacional refere-se à criação de métodos numéricos para reproduzir fielmente propagações de fratura reais previstas, através destes modelos.

Os modelos de fratura e falha baseados em gradientes e avaliação não local receberam atenção considerável ao longo da última década. Estes incluem métodos de dano gradientes, métodos integrados não locais, métodos de “thick level-set” e métodos de campos de fase para fratura. Todos esses métodos efetivamente regularizam as fraturas, distribuindo o dano em uma região. Essa representação contínua da fratura permite que os métodos lidem com desafios complexos na fratura, tais como nucleação, ramificação e coalescência de fissuras (Moreau, et al., 2017).

Os aspectos relacionados à implementação do XFEM e critérios de propagação de fraturas baseados em fatores de intensidade de tensão foram amplamente discutidos no trabalho desenvolvido por Silva (2015). Bendezú (2015) considerou a aplicação de Modelos de Zona Coesiva juntamente ao XFEM para modelagem de fraturas em aplicações de alta complexidade.

### **3.1. Propagação de fraturas baseados em Critérios de Tensão**

Cada material na natureza possui características próprias de resistência, e a partir de esforços atuantes, uma vez que determinado limite é atingido, considera-se que ocorre sua falha. As estruturas sob determinados carregamentos originam a nucleação e propagação de fraturas em modo misto. Desta maneira, o modelo de zona coesiva empregado geralmente é dominado por tensões normais à superfície do corpo da fratura de modo a controlar a energia envolvida no processo.

Determina-se o valor de carga limite que desencadeia a propagação de fissuras através de metodologias propostas na literatura. Em uma destas abordagens, parte-se do princípio do critério de análise do campo de tensões, avaliando os valores encontrados na ponta da fissura, e na medida em que estes atingem a resistência à tração do material, a fissura propaga. Entretanto, a contribuição da parcela das tensões cisalhantes torna-se importante na predição

correta do ângulo no qual a fratura se desenvolve. Nos modelos convencionais de MZC a lei de tração-separação tem início com carga nula, e com isso, a representação de fratura em modo misto não se faz possível. Xu & Yuan (2009), (2011) uniram o XFEM com um MZC, de modo a simular a propagação de fraturas em modo misto.

Uma vez que o elemento é enriquecido, inicia-se a degradação deste a partir de critério baseado em tensões ou deformações. Desta forma, define-se como avaliação para o início do processo de fraturamento do elemento os seguintes critérios:

- Máxima tensão/deformação principal
- Máxima tensão/deformação nominal
- Tensão/deformação nominal quadrática

Os critérios de máxima tensão e deformação principal, podem ser descritos através das equações. (3.1) e (3.2):

$$f = \left\{ \frac{\langle \sigma_{max} \rangle}{\sigma_{max}^0} \right\} \quad (3.1)$$

$$f = \left\{ \frac{\langle \varepsilon_{max} \rangle}{\varepsilon_{max}^0} \right\} \quad (3.2)$$

Onde  $\sigma_{max}^0$  e  $\varepsilon_{max}^0$  mostradas representam as máximas tensão e deformação admissíveis, respectivamente. Já  $f$  representa a relação entre a tensão/deformação atuante e a resistência do material correspondente. O símbolo  $\langle \rangle$  corresponde ao operador de Macaulay, que transforma em nulo qualquer valor negativo. Utiliza-se este operador de modo que tensões/deformações provenientes de compressão não desencadeiem a propagação de fraturas e a degradação do elemento.

Assume-se que a resposta inicial do material é linear-elástica, desta forma, como as deformações associam-se diretamente às tensões, a deformação “máxima principal” é correspondente à tensão máxima principal, mostrada na equação (3.3).

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.3)$$

A direção da propagação da fissura ocorre perpendicular ao ângulo de rotação do plano das tensões principais máximas, como mostra a equação (3.4):

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (3.4)$$

Os critérios de Máxima tensão e deformação nominal podem ser descritos através das equações (3.5) e (3.6), respectivamente:

$$f = \max\left\{\frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}, \frac{t_s}{t_s^0}, \frac{t_t}{t_t^0}\right\} \quad (3.5)$$

$$f = \max\left\{\frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0}, \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}, \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0}\right\} \quad (3.6)$$

Os critérios de Máxima tensão e deformação nominal quadráticos, podem ser descritos através das equações (3.7) e (3.8), respectivamente:

$$f = \left\{\frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}\right\}^2 + \left\{\frac{t_s}{t_s^0}\right\}^2 + \left\{\frac{t_t}{t_t^0}\right\}^2 \quad (3.7)$$

$$f = \left\{\frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0}\right\}^2 + \left\{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}\right\}^2 + \left\{\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0}\right\}^2 \quad (3.8)$$

Onde  $t$  e  $\varepsilon$  são os vetores nominais de tensão (referente à tração) e deformação, respectivamente, cujos componentes  $(t_n, t_s, t_t)$  e  $(\varepsilon_n, \varepsilon_s, \varepsilon_t)$  correspondem à parcela normal à superfície da fratura, e as duas parcelas cisalhantes, de cada um dos vetores, na devida ordem, como ilustra a Figura 3.4. Os vetores  $(t_n^0, t_s^0, t_t^0)$  e  $(\varepsilon_n^0, \varepsilon_s^0, \varepsilon_t^0)$  correspondem aos máximos valores nominais admissíveis dos componentes supracitados. O comportamento elástico pode ser

escrito conforme relação mostrada na equação (3.9). No caso bidimensional, descarta-se a parcela referente ao plano Z, de cada um dos vetores.

$$t = \begin{Bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} & E_{nt} \\ E_{ns} & E_{ss} & E_{st} \\ E_{nt} & E_{st} & E_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \end{Bmatrix} = E \varepsilon \quad (3.9)$$

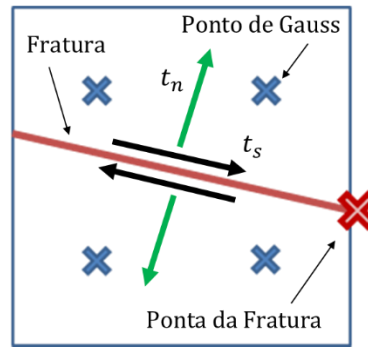


Figura 3.4 – Componentes das tensões na fratura em um elemento

Ressalta-se que um novo segmento de fratura é introduzido, na medida que o critério apresentado na equação (3.10) é satisfeito:

$$1 \leq f \leq 1 + f_{tol} \therefore \text{novo segmento de fratura} \quad (3.10)$$

Onde  $f_{tol}$  é a tolerância a ser definida pelo usuário. Salienta-se que caso o valor de  $f$  ultrapasse o valor de  $1 + f_{tol}$ , aconselha-se diminuir o valor incremento, relativo à técnica de solução adotada na análise.

## 3.2. Implementação de um Critério para Propagação de Fraturas

### 3.2.1. Introdução

Neste trabalho, implementou-se numericamente no GeMA, procedimentos que avaliam as tensões provenientes de pontos de integração à frente da ponta da trinca. Os métodos a serem descritos podem ser utilizados em malhas estruturadas e não estruturadas de elementos triangulares ou quadrangulares.

No decorrer do processo da análise incremental adotada, ao final de cada incremento verificam-se a partir do método escolhido pelo usuário, se o critério envolvendo tensões ou deformações atinge a resistência do material. Uma vez que tal critério é satisfeito, prossegue-se com a inserção de uma descontinuidade ao longo de todo elemento à frente da ponta da fissura. Desta maneira, somente após o término do incremento um novo segmento pode ser adicionado, de modo a manter o sistema equilibrado.

Ressalta-se que existem limitações numéricas devidas ao fato de como o segmento de fratura é introduzido. Na medida que são avaliadas as tensões, possibilita-se que, de acordo com a malha adotada, seja necessário a propagação em mais de um elemento, ao final de um incremento. Desta forma, podem ocorrer saltos de tensão na malha por conta da inserção de segmentos menores que os adequados. Entretanto, a experiência reflete que isto em nada influencia na robustez do algoritmo. Acrescenta-se que conforme a malha é refinada, os saltos de tensões tendem a ser minorados. No entanto, estas variações do estado do campo de tensões podem ocasionar em problemas na computação de direções para propagação da fratura. Estes problemas serão discutidos e tratados no capítulo quatro, referentes às aplicações numéricas.

Na forma como o XFEM está implementado existem duas maneiras para inicialização de uma fratura. A primeira, caso ocorra a inserção de uma fratura inicial, avalia-se o campo de tensões/deformações à frente da ponta deste segmento. A segunda, caso nada seja especificado, verificam-se todos elementos da malha, de modo que se inicialize a fissuração. Neste trabalho, todos modelos serão analisados no GeMA a partir de um segmento já introduzido na malha.

Classificam-se como local e não local, as regiões definidas para a avaliação das tensões/deformações utilizadas no critério de propagação de fratura. Os critérios locais consistem em avaliar o campo de tensões existente na ponta da fratura. No critério não local, uma região é definida para avaliação das tensões/deformações e essas são ponderadas através de pesos especificados por funções de distribuição.

### 3.2.2.

#### **O GeMA (*Geo Modelling Analysis Tool*)**

Inicialmente proposto por Mendes (2016) e desenvolvido no Instituto Tecgraf/PUC-Rio, o ambiente computacional do GeMA (*Geo Modelling Analysis*) constitui-se de uma biblioteca que integra simuladores multifísicos. O software em questão, usa técnicas de engenharia de software que permitem aos engenheiros se concentrarem na programação da simulação física. Desta forma, a estrutura do GeMA cuida do gerenciamento de dados e de outras funções de suporte necessárias para o desenvolvimento de programas mais eficientes.

A arquitetura GeMA escrita em C++ orientada a objetos, suporta múltiplos paradigmas de simulação e acoplamento, com particular ênfase dada aos métodos de elementos finitos. A estrutura também conta com alguns conceitos importantes de extensibilidade, através do uso combinado de plug-ins e interfaces abstratas, orquestração configurável e prototipagem rápida através do uso da linguagem Lua (Mendes, et al., 2016).

### **3.2.3. Critérios Locais de Propagação**

No critério de avaliação local por centroide, avaliam-se as tensões dos pontos de integração no elemento a frente da ponta da fratura, como ilustrado na Figura 3.5. Consequentemente, na medida que se satisfaz o critério adotado de resistência do material, é inserido um segmento de fratura na malha, a partir da ponta já existente. Ademais, extrai-se destes mesmos dados, informações para o cálculo da direção de propagação da trinca neste mesmo ponto.

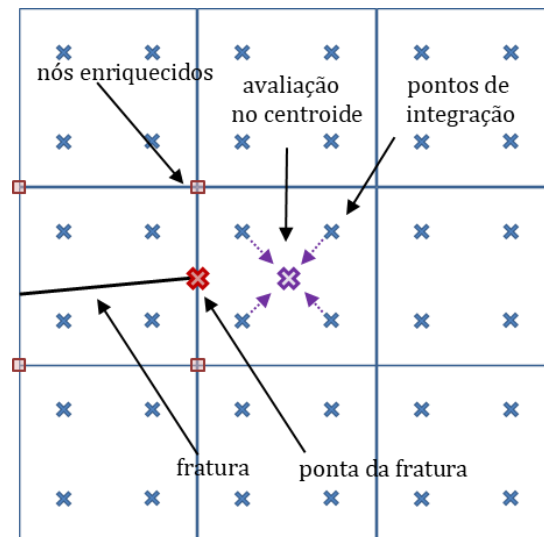


Figura 3.5 – Método de avaliação local por centroide

No critério de avaliação na ponta da fratura, tanto a inserção quanto o sentido do segmento da fratura são averiguados localmente, exatamente onde a ponta da fratura se encontra. As tensões avaliadas na ponta da fratura são provenientes do elemento previamente fraturado, e do elemento a frente da ponta da trinca, como mostra a Figura 3.6. Portanto, as tensões são avaliadas diretamente na ponta a partir das tensões extrapoladas dos pontos de integração dos elementos adjacentes. Enfatiza-se que esse critério é recomendado para situações onde a discretização da malha de elementos finitos não seja refinada e/ou não seja estruturada.

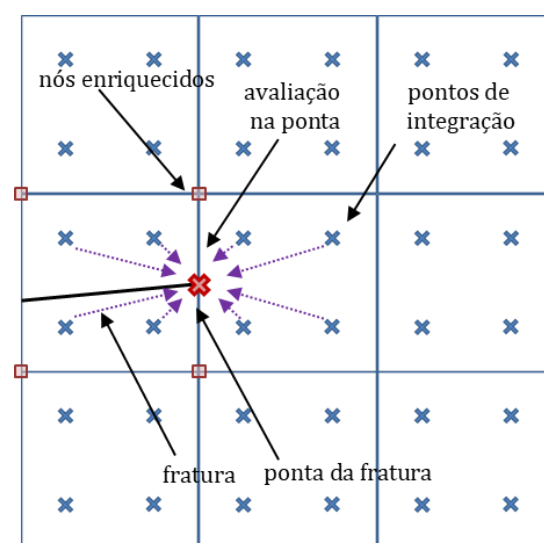


Figura 3.6 – Método de avaliação local na ponta da trinca

Outra possibilidade é a combinação dos critérios de ponta e centroide, de modo a aproveitar as vantagens de cada um dos critérios locais. Desta maneira, as tensões calculadas na ponta da trinca são consideradas para indicar o início da sua propagação e o estado de tensões avaliado no centroide do elemento à frente para definir a trajetória.

#### **3.2.4. Critérios Não Locais de Propagação**

A determinação da direção correta da propagação da fratura é fundamental para uma análise precisa. Normalmente, a ponta da trinca não se encontra em um local onde há precisão numérica das tensões, como ocorre nos pontos de integração. Portanto, o campo de tensões local pode não ser confiável o suficiente para fornecer as informações necessárias para os cálculos de propagação de fratura.

De modo a superar o problema apresentado, no método de avaliação não local, instancia-se a propagação da fratura a partir da determinação dos valores nos pontos de integração dos elementos em uma região definida à frente da ponta da fratura, como mostra a Figura 3.7. Ao final de cada incremento de passo, se o valor máximo exceder o limite pré-definido de dano-fratura, um novo segmento de fratura é incorporado, de modo a estender a fratura já existente.

Entretanto, como a função de Heaviside é utilizada apenas para representar campos descontínuos, sem o enriquecimento de ponta, a fratura propaga-se até encontrar a borda do elemento. Dentre os possíveis formatos geométricos da região de análise, adotou-se inicialmente o formato semicircular como observado na Figura 3.7.



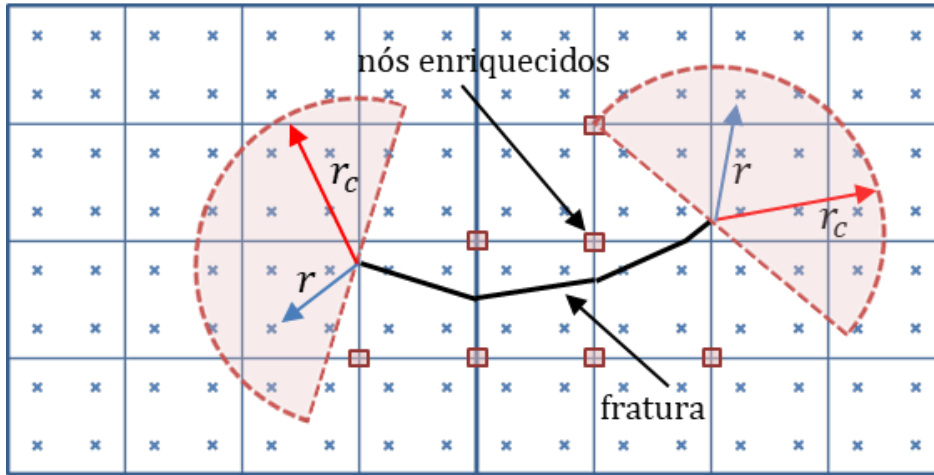


Figura 3.7 – Método de avaliação não local, representação das regiões de análise na ponta e na cauda da fratura

Ademais, permite-se a suavização do campo de tensões/deformações em função da distância do ponto de integração à ponta da fratura. Desta forma, permite-se um melhor controle sobre a avaliação do tensor de tensões não local, evitando que pontos de tensões altas que não possuam grandes influências na propagação de fratura sejam considerados erroneamente. Como evidenciado por Wells & Sluys (2001) e Mergheim *et al.* (2005), funções de distribuição de pesos como a Gaussiana, e Cúbica, tratam diretamente nas ponderações da região, relacionando o raio do círculo adotado  $r_c$ , com a distância  $r$  de cada ponto de Gauss à ponta da trinca.

Ressalta-se que os usos destas funções consistem em um método para regularizar as tensões, de modo a definir com mais precisão a direção das tensões principais. A ponderação é feita através equação (3.11), a partir da tensão do ponto de integração com a função de peso e a área de influência de cada ponto de Gauss.

$$\bar{\sigma} = \left( \sum_{i=1}^{n_G} w_i A_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n_G} \sigma_i w_i A_i \quad (3.11)$$

Onde  $\bar{\sigma}$  é tensor de tensões ponderado,  $n_G$  o número de pontos de Gauss contidos na região de análise,  $w$  a função peso adotada e  $A$  o determinante do jacobiano do ponto de integração em questão.

Mostram-se as funções de distribuição, considerando superfícies de 100x100 unidades de área, com um raio da região de análise de 30 unidades de comprimento.

A função de distribuição de peso Gaussiana apresentada por Wells & Sluys (2001), é descrita na equação (3.12), e ilustradas na Figura 3.8.

$$w(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}r_c^3} \exp\left(\frac{-r^2}{2r_c^2}\right) \quad (3.12)$$

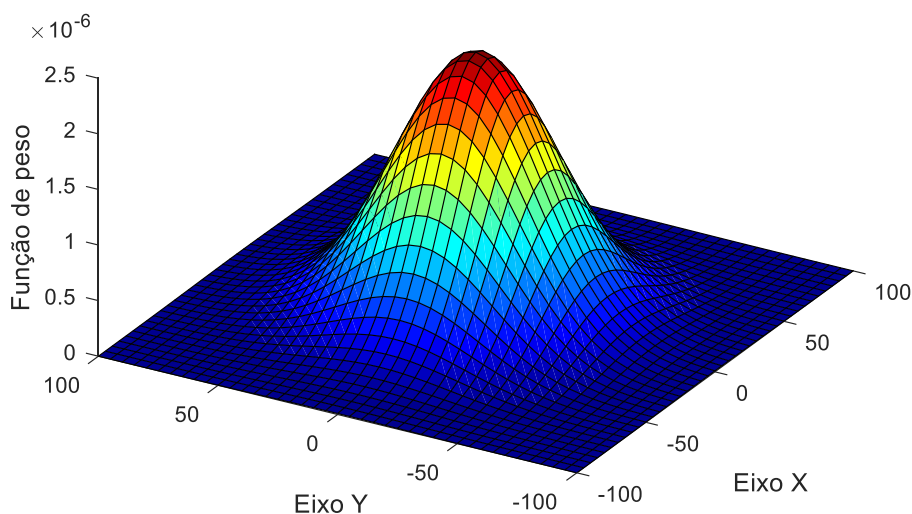


Figura 3.8 – Distribuição dos pesos na função Gaussiana (Wells & Sluys, 2001)

Já função de distribuição de peso Gaussiana apresentadas por Mergheim *et al* (2005), apresenta uma relação diferente no decaimento dos pesos atribuídos, que pode ser constatado na equação (3.13) e conforme mostra a Figura 3.9.

$$w(r) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}r_c} \exp\left(\frac{-r^2}{4r_c^2}\right) \quad (3.13)$$

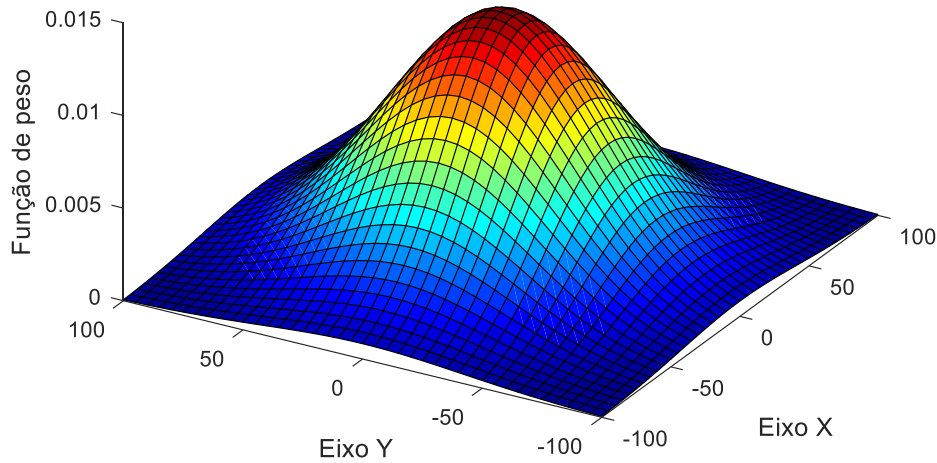


Figura 3.9 – Distribuição dos pesos na função Gaussiana (Mergheim, et al., 2005)

Onde,  $w$  é o peso, em função de  $r$ , que é distância do ponto de integração para a ponta da fratura. A intensidade da redução do impacto das tensões é controlada por  $r_c$ , que é o raio da região. Observa-se que os diferentes autores apresentam variações na forma em que os pesos são distribuídos.

A função de distribuição de pesos Cúbica, divide-se em duas regiões a partir da distância do ponto de integração à ponta da fratura, com relação a medida do raio. Desta forma, a equação (3.14) distingue a o impacto de cada ponto de Gauss na ponderação das tensões a serem avaliadas. Na Figura 3.10 percebe-se que as tensões próximas à ponta da fratura possuem maior relevância do que na distribuição Gaussiana. Desta maneira, de acordo com o problema a ser avaliado, cada função de distribuição agrega mais valor às simulações.

$$w(r) = \begin{cases} 4(r/r_c - 1)(r/r_c)^2 + 2/3, & 0 < r < r_c/2 \\ 4/3 (1 - r/r_c)^3, & r_c/2 \leq r \leq r_c \\ 0, & r_c < r \end{cases} \quad (3.14)$$

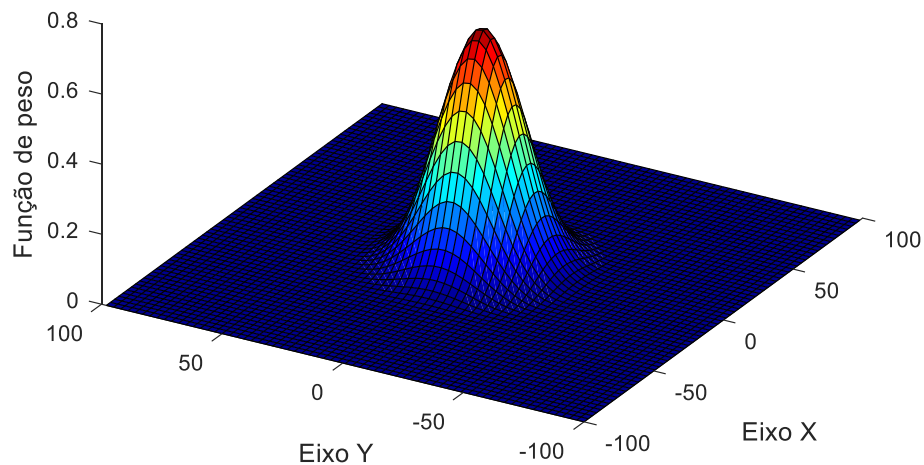
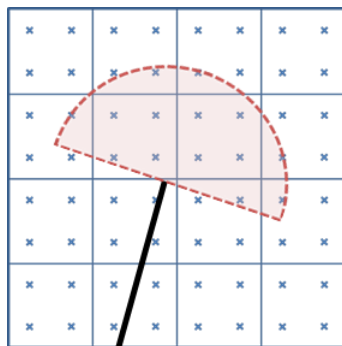
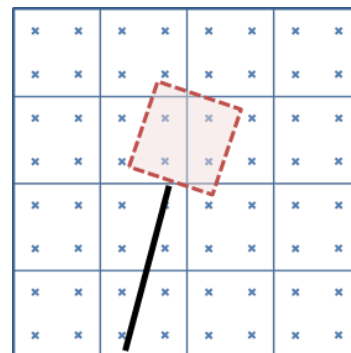


Figura 3.10 – Distribuição dos pesos na função Cúbica

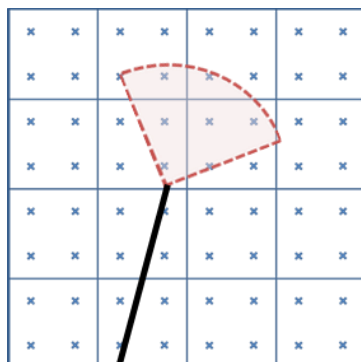
Ressalta-se que as funções de distribuição de peso podem ser aplicadas nos mais diferentes formatos de região. Nos exemplos acima foi mencionado sobre a utilização de uma região semicircular, entretanto, a angulação de exploração desse raio pode ser explorada das mais diversas formas, como mostra a Figura 3.11



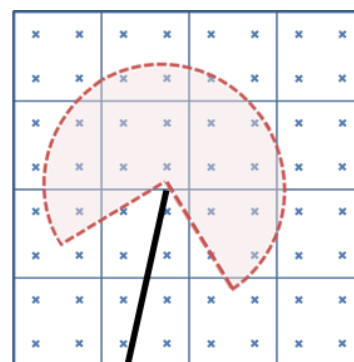
Não local circular 180°



Não local quadrilateral



Não local circular 90°



Não local circular 270°

Figura 3.11 – Diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões

As regiões circulares foram implementadas no GeMA através de algumas considerações, como ilustra a Figura 3.12. Desta forma, por meio das coordenadas pontos de integração e das coordenadas dos nós fantasmas que contém a fratura, dois vetores são considerados. O vetor  $\vec{u}$  representa a distância entre o pontos de Gauss e a ponta da fratura, correspondente a  $r$ , que pode ser encontrado como mostra a equação (3.16), e  $\vec{v}$  é o vetor correspondente ao último segmento de propagação da fratura.

$$\vec{u} = (x_{ig} - x_{tip}, y_{ig} - y_{tip}) \quad (3.15)$$

$$r = \sqrt{(x_{ig} - x_{tip})^2 + (y_{ig} - y_{tip})^2} \quad (3.16)$$

$$\vec{v} = (x_{tip} - x_{(tip-1)}, y_{tip} - y_{(tip-1)}) \quad (3.17)$$

Desta forma, para determinar o ângulo da região de análise, basta especificar o ângulo de  $\alpha$ , que pode ser obtido conforme eq. (3.18). No exemplo do semicírculo, as relações mostradas nas eq. (3.19) e (3.18) devem ser atendidas.

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (3.18)$$

$$Se \ r \leq r_c \ \& \ \alpha \leq 90 \therefore \text{Ponto de integração} \in \text{semicírculo} \quad (3.19)$$

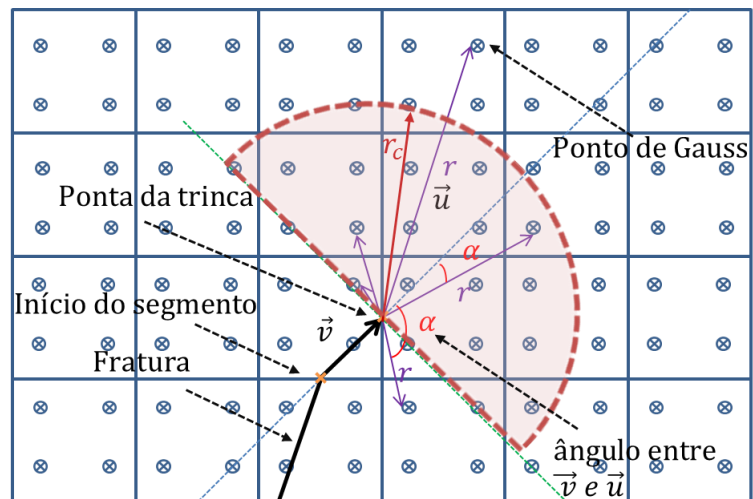


Figura 3.12 - Esquema de consideração de pontos de integração na região não local

## 4 Aplicações e Resultados

Neste capítulo, são analisados diferentes modelos com fraturas visando avaliar os métodos não locais de propagação de fraturas, em concordância com o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM). Parte desse trabalho consistiu na implementação dos métodos de propagação no programa GeMA, desenvolvido no Instituto Tecgraf/PUC-Rio para realizar as simulações numéricas (Mendes, et al., 2016). Os problemas selecionados para a avaliação dos métodos de propagação buscam estudar fratura em modo misto com trajetórias complexas.

### 4.1. Flexão em quatro pontos sob carregamento não proporcional

Estudos experimentais conduzidos por Gálvez *et al.* (1998) trazem resultados de fratura de uma viga de concreto sob carregamento não proporcional em modo misto. Para esses experimentos, foram desenvolvidos modelos numéricos em estado plano de tensões. Como mostra a Figura 4.1a, idealmente, duas forças independentes com carregamentos não proporcionais são aplicadas. Devido às condições de ensaio na estrutura, estas diversas combinações de carregamento, possibilitam a obtenção de diferentes caminhos de fratura na viga em questão. Experimentalmente, para realizar este ensaio, os autores propuseram a substituição da carga P2, por um apoio elástico de rigidez K, como observado na Figura 4.1b.

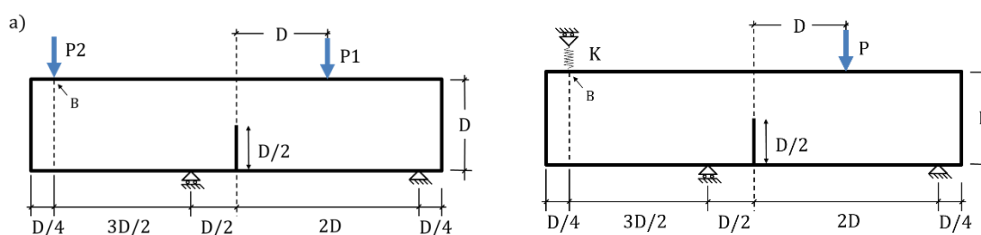


Figura 4.1 – Condições de contorno de carregamento da viga sob carregamento modo misto. a) Idealizado b) Experimental (adaptado de (Gálvez, et al., 1998))

Dois tipos de modelos foram propostos pelos autores, a partir da variação da rigidez do apoio elástico na extremidade superior esquerda da viga, como apresenta a Figura 4.2. Foram classificados como tipo 1, as condições de contorno cujo apoio elástico possui  $K = 0$ , e como tipo 2 com o apoio elástico infinitamente rígido ( $K = \infty$ )

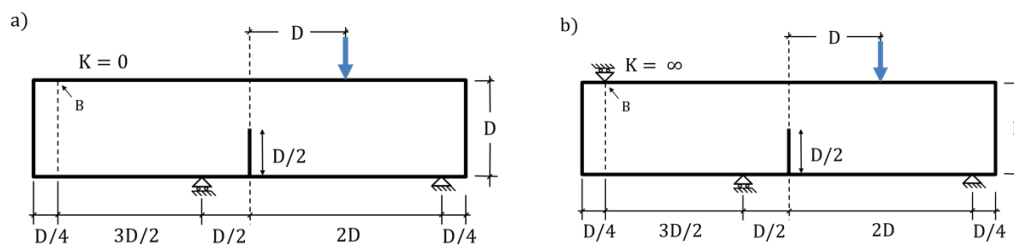


Figura 4.2 – Tipos de condições de contorno e carregamento: a) Tipo 1 ( $K = 0$ ), b) Tipo 2 ( $K = \infty$ )

Três diferentes tamanhos de viga foram analisados, adotando-se a altura da viga,  $D$ , como parâmetro de proporcionalidade. Desta maneira, classificam-se como D1, D2 e D3, vigas com valores de altura  $D$  iguais a 75, 150 e 300 milímetros, respectivamente. As três amostras possuem espessura de 50 milímetros. Foram fornecidas na referência as envoltórias das trajetórias experimentais, encontradas a partir de testes válidos e estáveis, conforme descrito na Tabela 4.1. Adicionalmente, também foram fornecidas as curvas experimentais de resposta do material, como a curva Força x abertura de fratura (CMOD – *Crack Mouth Opening Displacement*), que foram utilizadas como referência para os modelos desenvolvidos.

Amostra	Tipo 1	Tipo 2
D1	6	4
D2	6	6
D3	4	5

Tabela 4.1 – Numero de testes válidos e estáveis

A partir de ensaios mecânicos feitos por Gálvez nas amostras D1, foram disponibilizados os resultados das propriedades mecânicas dos ensaios. As



propriedades do material adotadas foram: módulo de Young  $E = 38 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ , resistência máxima à tração  $f_t = 3.0 \text{ MPa}$ , resistência máxima à compressão  $f_c = 57.0 \text{ MPa}$  energia crítica de fratura  $G_f = 69 \text{ N/m}$ .

Enfatiza-se que os mais diversos testes foram conduzidos de modo a sanar questionamentos sobre os aspectos da modelagem com a utilização do XFEM. Compararam-se as trajetórias de fraturas, evidenciando graficamente a região especificada conforme a Figura 4.3. O estudo dos parâmetros envolvidos, foi feito a partir das vigas Tipo 1 ( $K=0$ ), com características geométricas da amostra D2.

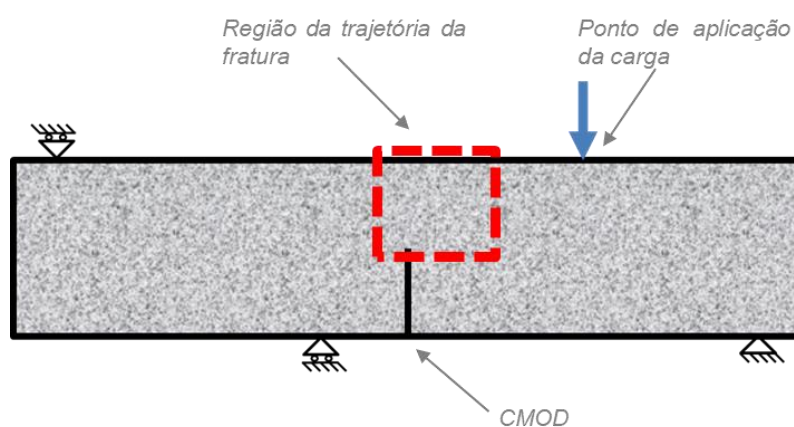


Figura 4.3 – Região detalhada para comparação de trajetórias de fratura

#### 4.1.1. Influência do tamanho da região de avaliação do campo de tensões – semicírculo

Como apresentado no Capítulo 3, estuda-se através de diferentes tamanhos de semicírculo, o efeito do tamanho da região de avaliação das tensões para a propagação de fratura. Enfatiza-se que os dados levados em consideração na análise são provenientes dos valores das tensões, cujos pontos de integração dos elementos se encontram dentro da região definida pelo semicírculo. Inicialmente, fez-se a verificação das tensões principais, com um semicírculo de raio equivalente à dimensão do tamanho característico do elemento. Em seguida, duplicou-se, e por fim triplicou-se este tamanho, conforme exemplificado na Figura 4.4.

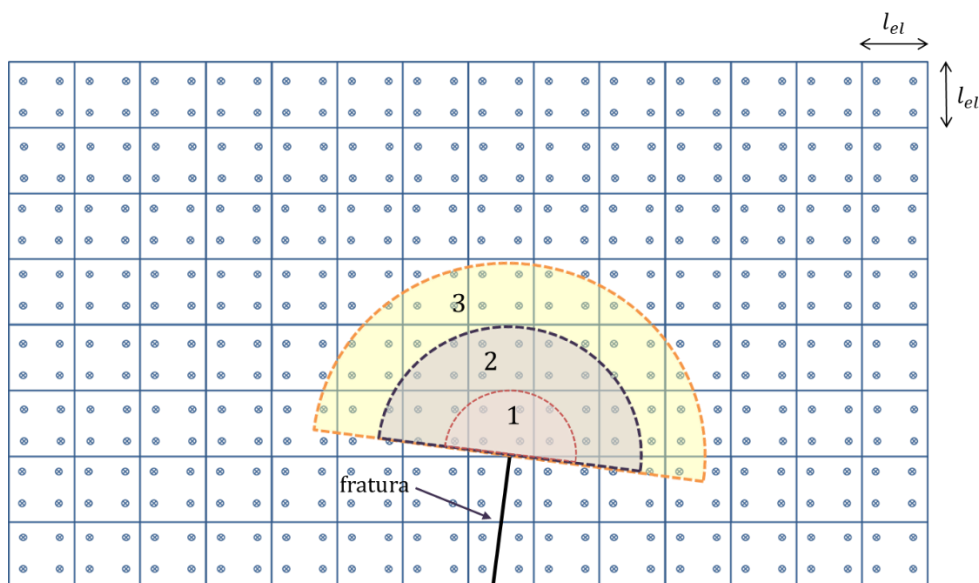


Figura 4.4 – Variação nos tamanhos das regiões não locais de avaliação das tensões para propagação de fratura: região 1 ( $r = 1l_{el}$ ); região 2 ( $r = 2l_{el}$ ); região 3 ( $r = 3l_{el}$ ).

Neste item, os testes foram realizados em uma malha de elementos finitos regular e estruturada, sob estado plano de tensão, com 1820 elementos Q4, conforme Figura 4.5. Adotou-se o método de controle de arco, com incrementos limitados a 5% do valor de referência, ou seja, incrementos de no máximo 0,05 no total de 1. A atualização da geometria da estrutura foi considerada durante o processo incremental nas simulações.

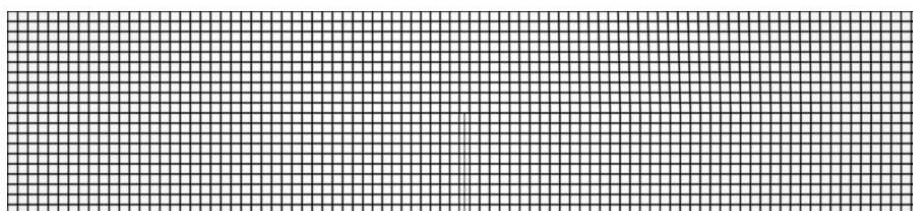


Figura 4.5 – Malha de elementos finitos com 1820 elementos

Nota-se que à medida em que o raio é aumentado, a fratura tende a mudar de trajetória. Nesta análise, quanto maior a região considerada, mais a fratura tendeu a desviar da trajetória da envoltória experimental, como é observado na Figura 4.6.

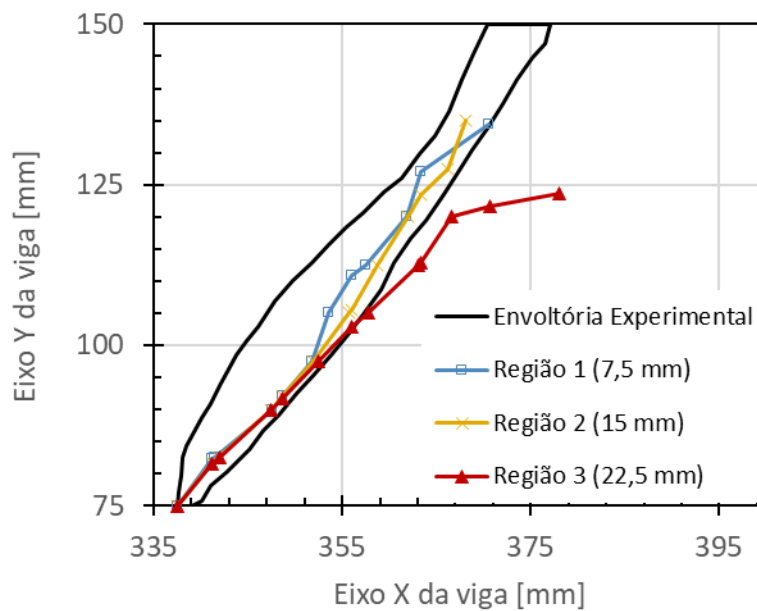


Figura 4.6 – Trajetória das fraturas para os raios com tamanhos característicos de a 1 (7,5mm) , 2 (15mm) e 3 (22,5mm) elementos, respectivamente.

Observa-se na Figura 4.7 que conforme o raio foi expandido, ocorreu um aumento substancial na carga de pico, responsável pelo fraturamento do primeiro elemento. Esse fenômeno deve-se ao fato de serem incorporados à ponderação valores de tensão mais baixos quando a região de avaliação aumentou. Destaca-se que o emprego de um modelo elástico sem degradação do meio contínuo, pode levar a tensões superiores aos limites da resistência do material, por conta da incrementação adotada. Portanto, a adoção de um modelo elastoplástico ou de dano após um valor crítico, limitaria essas tensões a valores mais realistas.

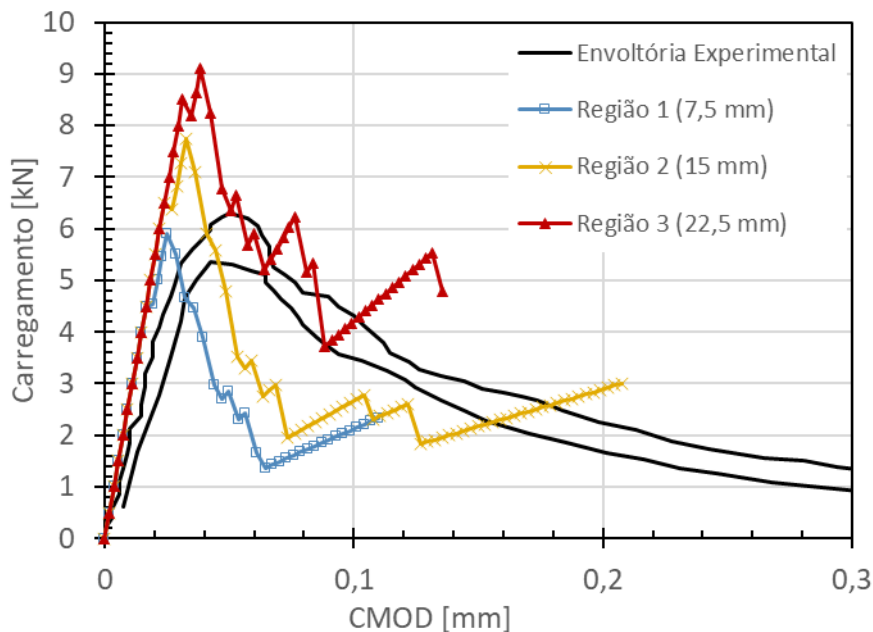


Figura 4.7 – Curva de resposta do material Carga vs abertura da boca de fratura (CMOD), para os raios com tamanhos característicos de 1, 2 e 3 elementos, respectivamente.

Conforme observado na Figura 4.8, percebe-se que à medida que o raio é expandido, é necessário aumentar a carga e consequentemente o nível de tensões, para que haja propagação. Isto justifica o aumento no pico da curva de resposta do material. Entende-se que estas tensões não correspondem às suportadas pelo material de fato, isto é, provem de uma resistência espúria atribuída ao método de avaliação. Nas imagens abaixo, a escala de cores foi limitada de modo que a cor mais fria (azul) represente tensões nulas, ou de compressão, e a mais quente represente tensões principais maiores ou iguais à tensão de resistência do material.

Explorou-se de modo mais detalhado o comportamento do campo de tensões à frente da ponta da fratura, nas três regiões de análise em discussão. Observa-se que na análise não local na região 1, mostrada na Figura 4.9 uma das tensões nos pontos de Gauss apresenta valor aproximadamente 50% acima da resistência à tração do material. Na região 2, nota-se que as tensões tendem a aumentar de modo que no mesmo ponto de Gauss comentado anteriormente, ocorra um acréscimo de 119% em seu valor, como mostra o detalhe na Figura 4.10. Já na região 3, o ponto de integração em questão, que é o que possui maior variação, salta para um aumento de 187% no valor máximo suportado pelo material, como visto na Figura 4.11.

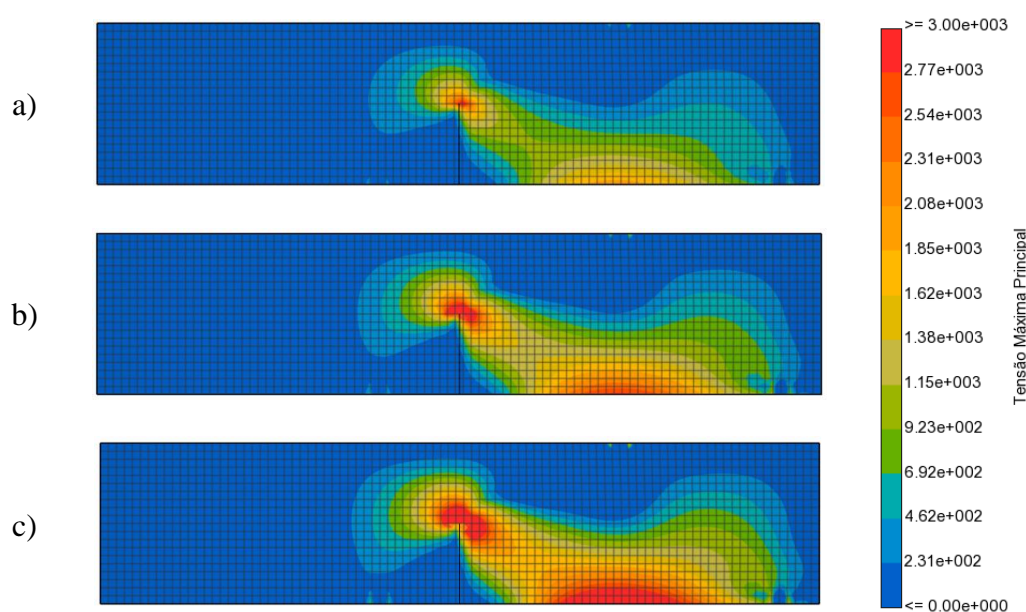


Figura 4.8 – Distribuição das tensões principais na viga no momento da propagação do primeiro segmento de fratura, adotando diferentes raios de semicírculo: a) região 1 (raio = 7,5 mm), b) região 2 (raio = 15 mm), c) região 3 (raio = 22,5 mm)

Ademais, percebe-se uma mudança nos incrementos que ocorre a propagação da fratura, que é justificado pelo aumento no carregamento, e como consequência, mais passos necessários na análise para que esta ocorra. Para região 1, nove incrementos são necessários, 13 incrementos de passo na região 2, e já na região 3, 17 incrementos.

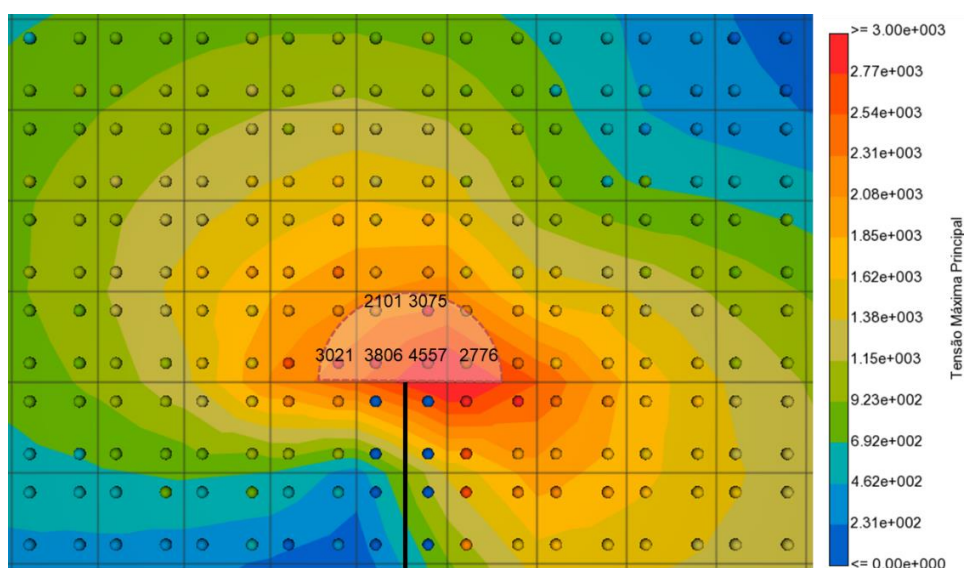


Figura 4.9 – Detalhe do campos das tensões máximas principais na região 1 no momento da propagação do primeiro segmento de fratura (Incremento 9)



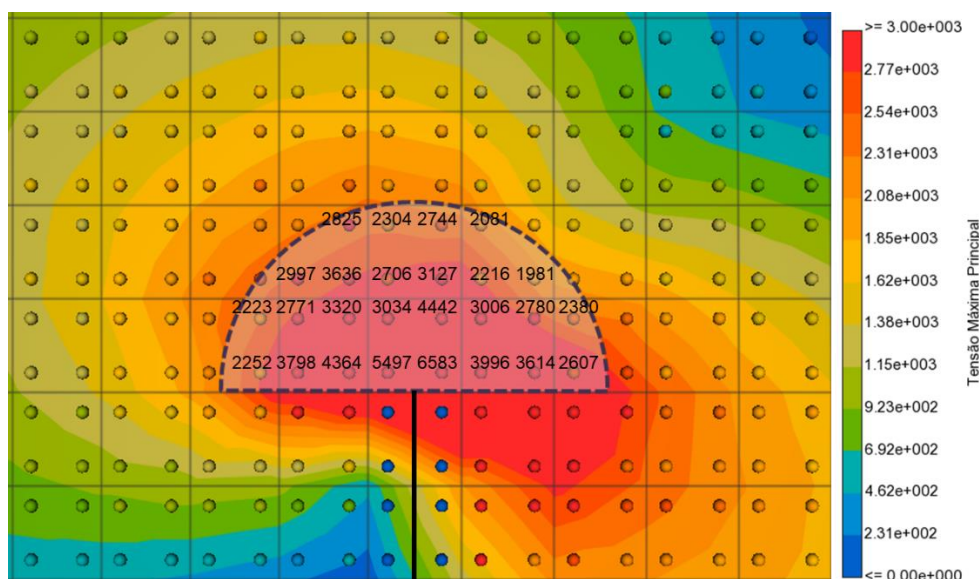


Figura 4.10 – Detalhe do campos das tensões principais na região 2 no momento da propagação do primeiro segmento de fratura (Incremento 13)

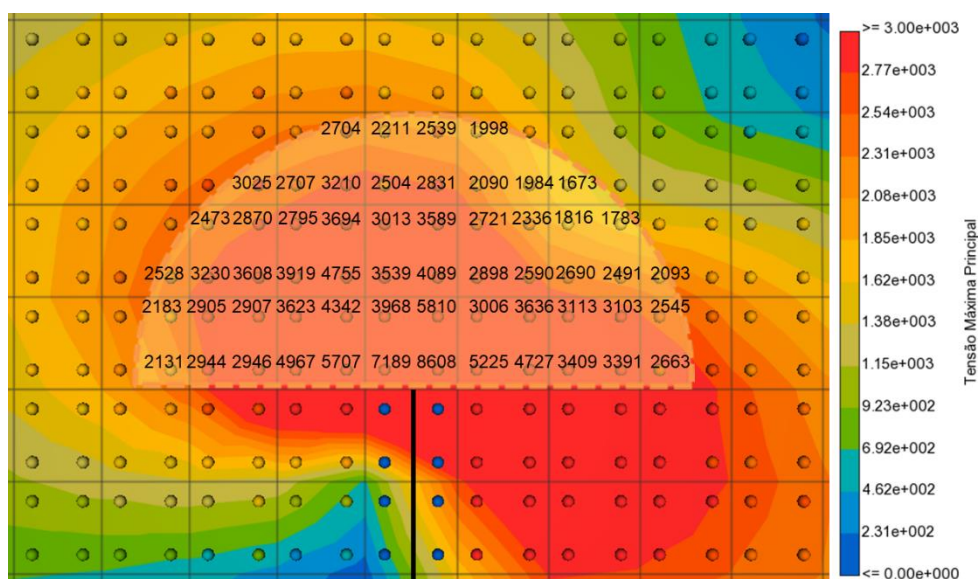


Figura 4.11 – Detalhe do campos das tensões principais na região 3 no momento da propagação do primeiro segmento de fratura (Incremento 17)

A mudança de trajetória da fratura por conta da variação do raio do semicírculo foi um aspecto avaliado. Desta forma, compararam-se as diferenças provenientes do ângulo de propagação do primeiro segmento incorporado à fratura. A Tabela 4.2 mostra os ângulos destes segmentos em relação ao eixo vertical, e os desvios relativos à região de avaliação 1.

Região	Incremento	Ângulo (°)	Desvio (%)
1	9	-27.106293182880297	-
2	13	-28.914185230190046	6.67%
3	17	-29.735224044923111	9.70%

Tabela 4.2 – Comparativo dos ângulos de propagação do primeiro segmento de fratura

Entende-se que o tamanho da região de avaliação das tensões possui grande influência na a determinação da direção da propagação de fratura, já que o campo de tensões da estrutura possui influência direta para o cálculo do ângulo.

#### 4.1.2.

#### **Nova estratégia para propagação de fraturas**

Como mostrado anteriormente, percebeu-se que conforme os raios eram aumentados, maior era o pico da curva de resposta do material, e atribuiu-se este fenômeno a tensões espúrias que excediam a tensão de resistência do material. A partir desta análise, desenvolveu-se uma nova estratégia para comparação das tensões principais no material com a tensão de resistência à ruptura deste. As tensões em um semicírculo de raio menor são empregadas para avaliar a condição de propagação de fratura, enquanto a direção de propagação será determinada a partir de uma região maior.

Como nas análises anteriores, três valores diferentes foram considerados para a região de avaliação de tensões. Diante desta nova estratégia, avaliou-se o raio 2 para direção de propagação e raio 1 para avaliação do critério de resistência, e também o raio 3 para direção, com raio 1 para avaliação do critério.

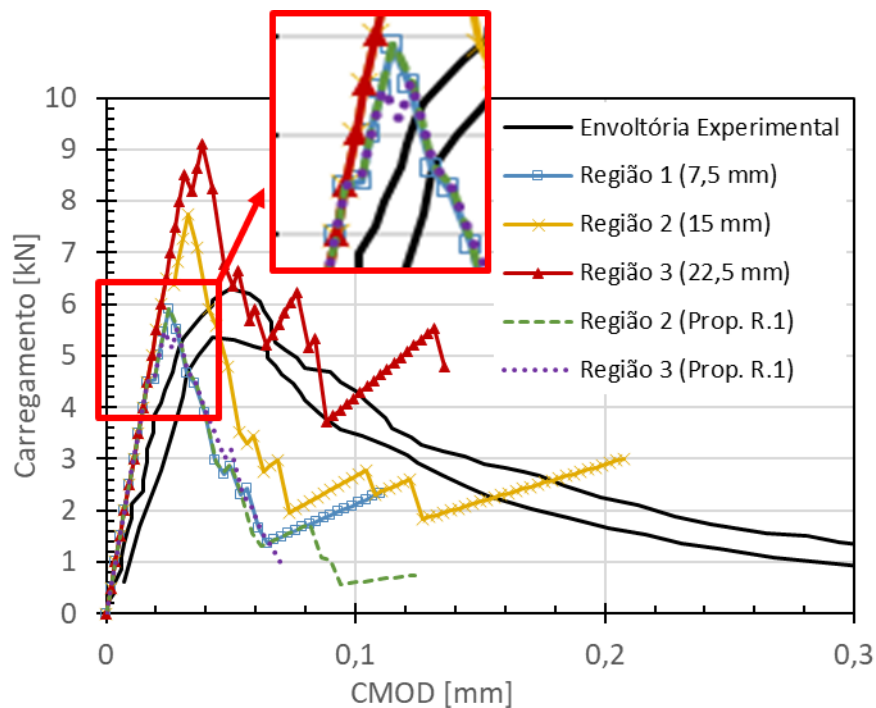


Figura 4.12 – Curva Carga vs Abertura da fratura (CMOD) das fraturas com a antiga e nova estratégia

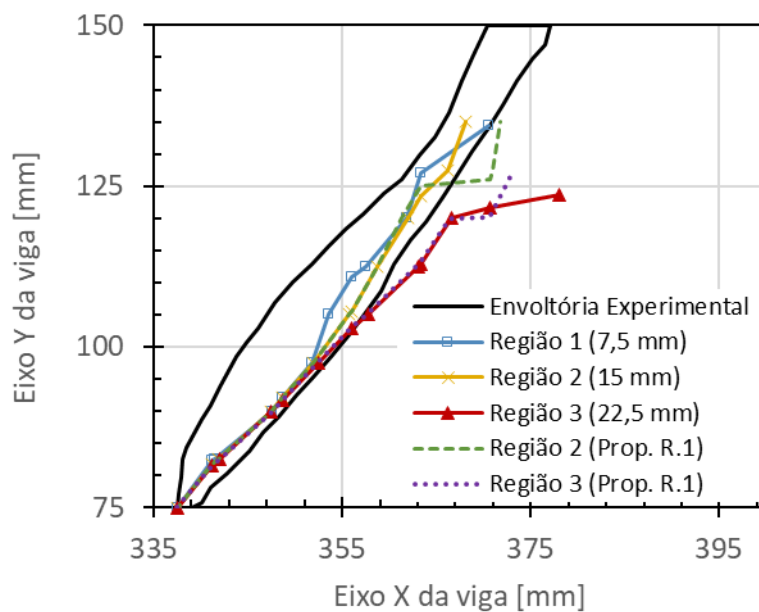


Figura 4.13 – Comparação entre as trajetórias das fraturas com a antiga e nova estratégia

Como comentado previamente, nota-se que conforme o raio de avaliação do critério de resistência foi modificado, evitou-se o surgimento de tensões espúrias, e



com isso, conteve-se o crescimento da curva de resposta do material. Já a direção de propagação de fratura, como é observado na Figura 4.13 tendeu a manter o mesmo caminho obtido com um raio maior. Entretanto, outros fatores também são importantes, como o modelo constitutivo da fratura, presença de dano na malha, e o próprio refinamento da malha de elementos finitos. Com isso, conclui-se que para certas análises, este tipo de estratégia possui grande impacto em questões de proximidade da realidade, pois assemelha-se de um critério local para avaliar as tensões de propagação, e utiliza de tensões não locais para calcular a trajetória, assim abrangendo a capacidade de captar tensões que afetem uma possível mudança de direção que não necessariamente se concentrem no entorno da ponta da trinca.

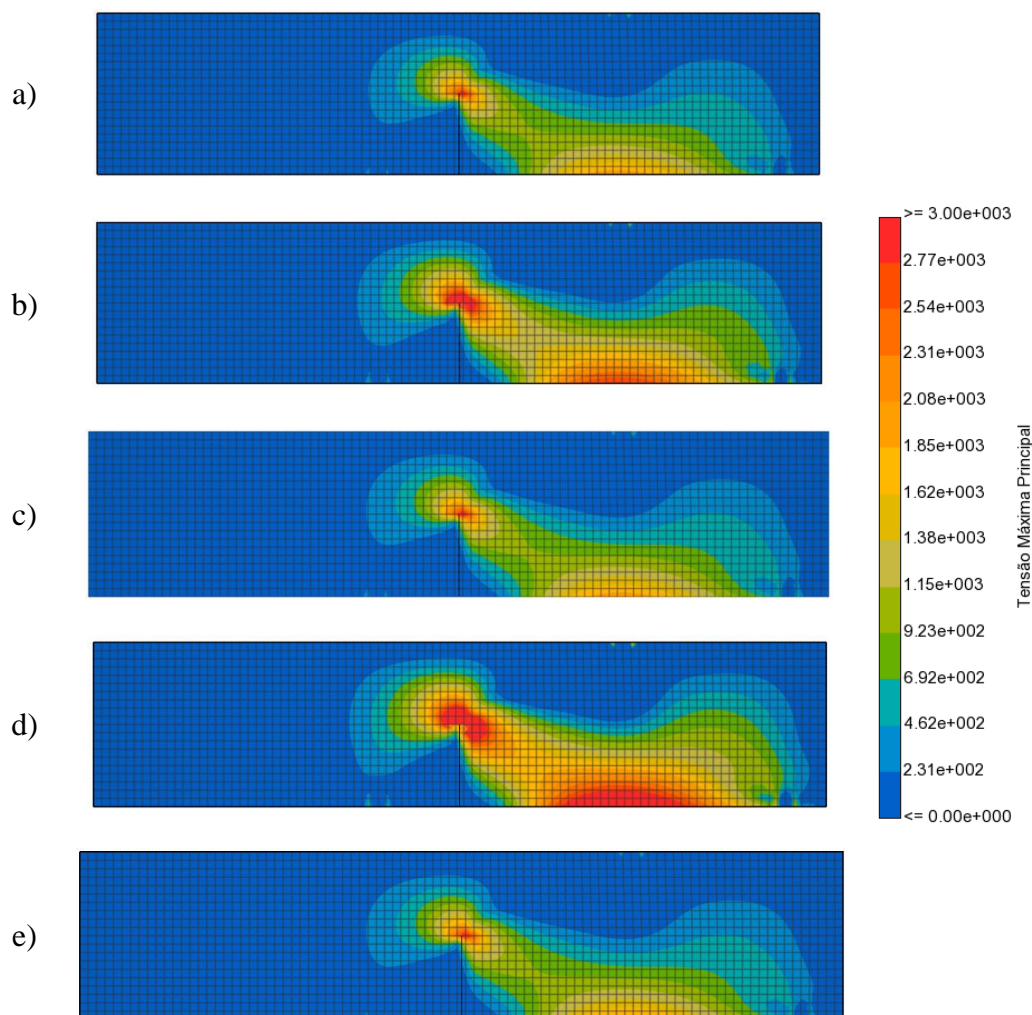


Figura 4.14 – Distribuição das tensões principais na viga adotando diferentes raios no semicírculo: a) região 1 , b) região2 ), c) região 2 (região 1 para propagação) , d) região 3 e) região 3 (região 1 para propagação)

Percebe-se no gráfico Carga vs CMOD (Ver Figura 4.12) que há uma redução substancial na carga de pico da estrutura por conta da utilização de um novo método para avaliação da propagação de fratura. Nota-se que ocorre uma redução significativa nas tensões que excediam a resistência do material, como por exemplo na Região 2, onde em um ponto de Gauss que outrora excedia em 119%, com essa adaptação no método decaiu para 18%, como é mostrado na Figura 4.15 e detalhado na Tabela 4.3.

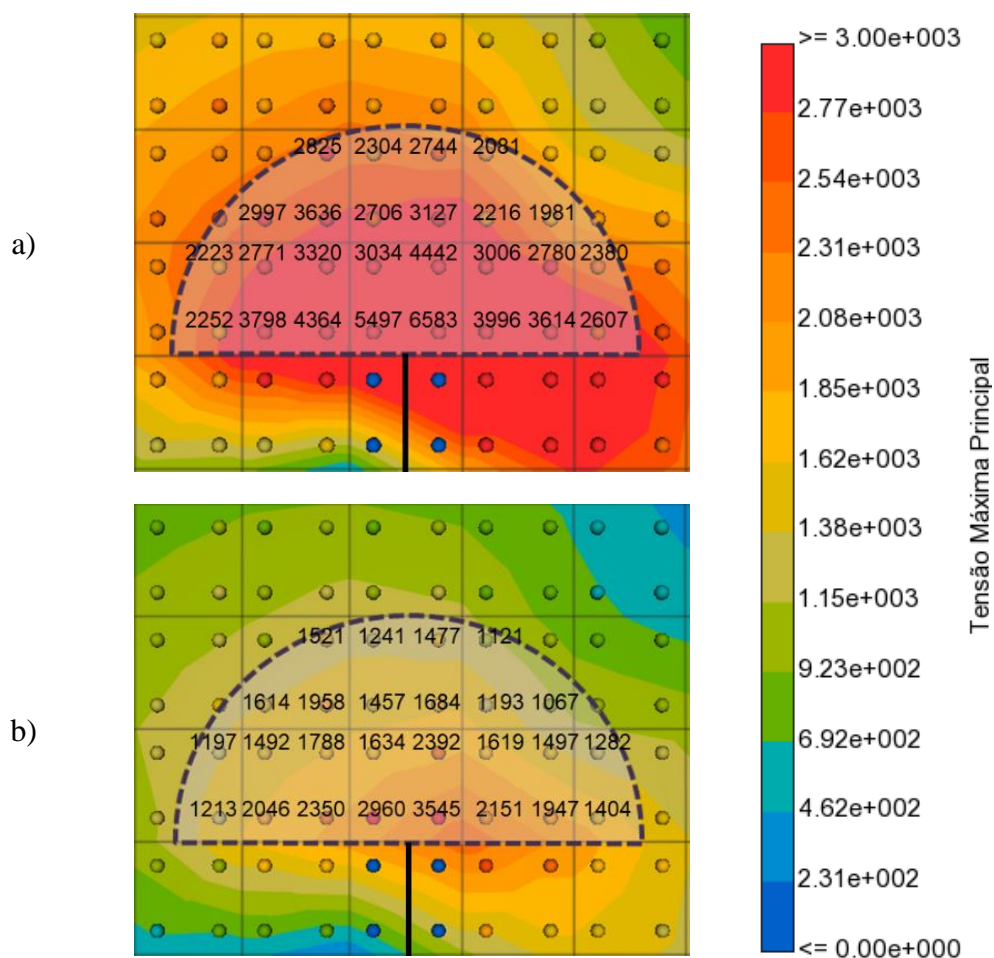


Figura 4.15 – Comparativo do campo de tensões no instante da propagação de fratura semicirculo: a) região 2 (15mm) para direção e propagação b) região 2 (15 mm) para direção e região 1 (7,5mm) para propagação

Região	Incremento	Carga de pico (kN)	Tensão Máxima Principal em um Ponto de Gauss (MPa)
1	9	5,91	4557
2	13	7,73	6583
3	17	9,09	8608
2 (Prop.1)	9	5,92	3545
3 (Prop. 1)	9	5,47	3212

Tabela 4.3 – Comparativo das cargas de pico e máximas tensões principais na propagação do primeiro segmento de fratura

#### 4.1.3. Influência da malha de elementos finitos

Compreende-se que em uma análise no método dos elementos finitos, o refinamento da malha é crucial na precisão dos resultados. Desta forma, neste item, duas malhas com refinamentos diferentes foram avaliadas, ambas regulares e estruturadas. A malha 1, corresponde à malha avaliada no item anterior, como visto na Figura 4.5, com elementos com comprimento característico de 7,5mm, totalizando 1820 elementos. A malha 2 possui elementos com comprimento característico de 3,75mm, totalizando 7240 elementos, como mostrado na Figura 4.16. Todas as análises foram feitas preservando as configurações de controle descritas no item anterior.

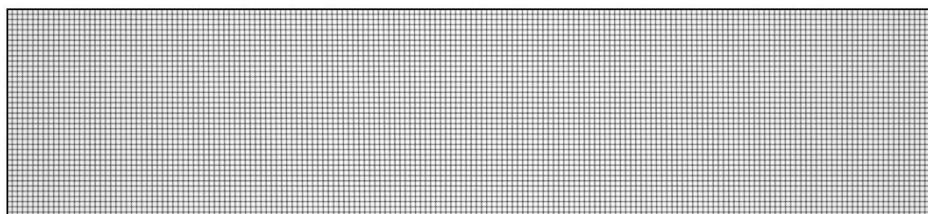


Figura 4.16 – Malha 2 com 7240 elementos

Preservaram-se os mesmos tamanhos de região de análise de tensões para a propagação de fratura, ou seja, a região 1 cujo semicírculo possui raio equivalente ao tamanho característico de um elemento na malha 1, corresponde na malha 2 ao tamanho característico de dois elementos, como mostrado na Figura 4.17. Da mesma forma que no estudo anterior, as tensões nas regiões foram tratadas de maneira uniforme, ou seja, sem a aplicação de pesos através de funções de distribuição.

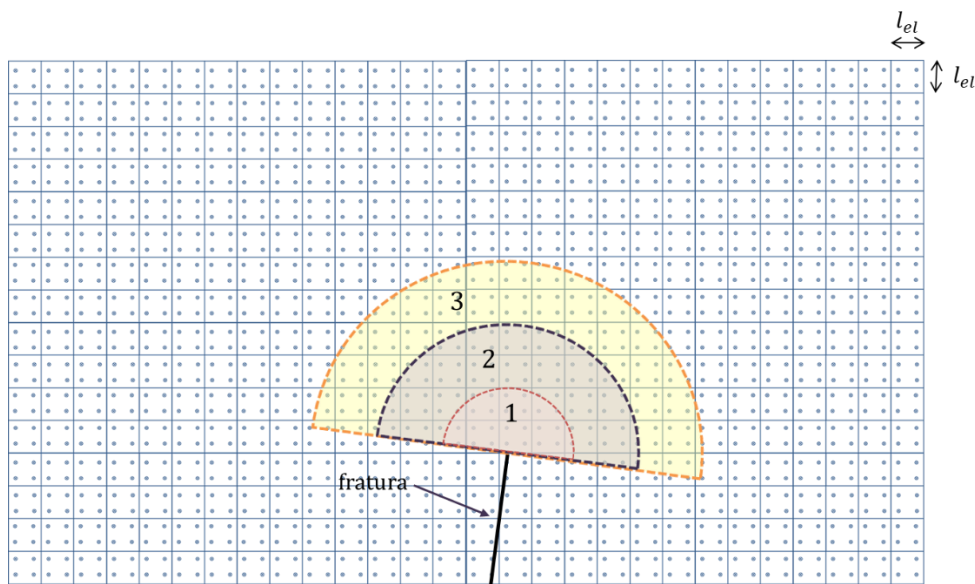


Figura 4.17 – Variação nos tamanhos das regiões não locais de avaliação das tensões para propagação de fratura na Malha 2: região 1 ( $r = 2l_{el}$ ); região 2 ( $r = 4l_{el}$ ); região 3 ( $r = 6l_{el}$ ).

De maneira análoga, também foram avaliadas as tensões em 1', 2' e 3', para elementos referentes à malha 2. Desta maneira, possibilita-se comparar a relação do tamanho da região de análise com relação à estrutura, e com relação ao tamanho de elemento adotado, como exemplificado na Figura 4.18.

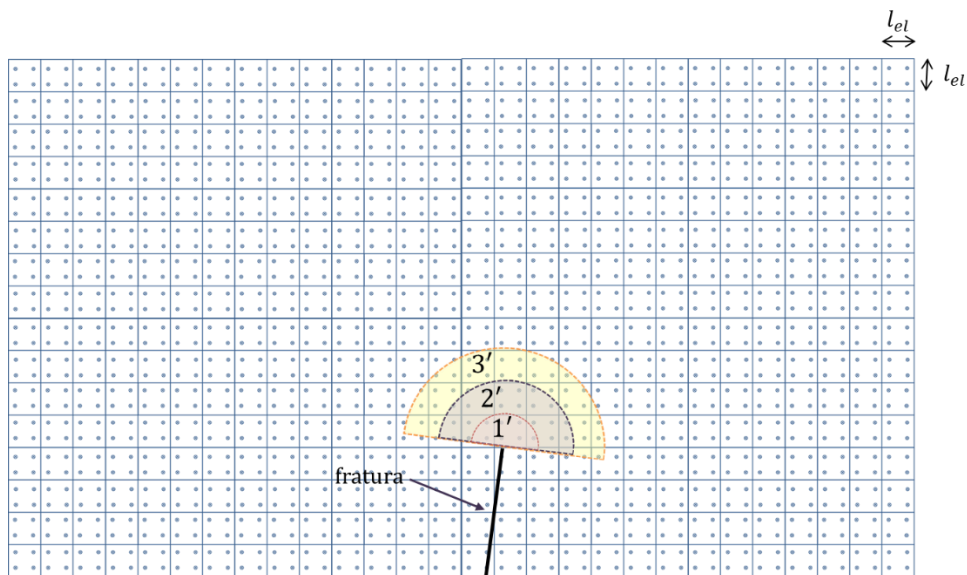


Figura 4.18 – Variação nos tamanhos das regiões não locais de avaliação das tensões para propagação de fratura na Malha 2: região 1' ( $r = l_{el}$ ); região 2' ( $r = 2l_{el}$ ); região 3' ( $r = 3l_{el}$ ).

Nota-se na Figura 4.19 que no caso o raio correspondente a um elemento na malha 2, a fratura desvia da trajetória experimental. Neste caso, percebe-se a necessidade de uma ampliação do campo de análise de tensões para determinação da direção na qual a fratura propaga.

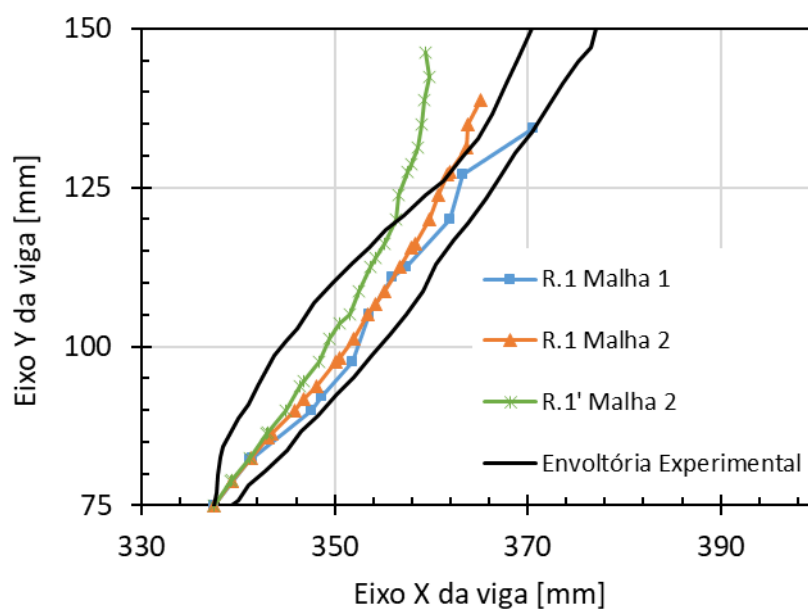


Figura 4.19 – Comparativo das trajetórias de fraturas da região 1 ( $R.1 = 7,5mm$ ) na malha 1 ( $r = l_{el}$ ) e na malha 2 ( $r = 2l_{el}$ ), e da região 1' ( $R.1' = 3,75mm$ ) na malha 2 ( $r = l_{el}$ ).

Adicionalmente, o fato de utilizar a região 1 da malha 1 (raio =  $2l_{el}$ ) para análises na malha 2, eleva as tensões abruptamente, como foi discutido nos itens anteriores, por conta de tensões elevadas que não condizem com a realidade que aparecem nos pontos de Gauss, como mostra a Figura 4.20.

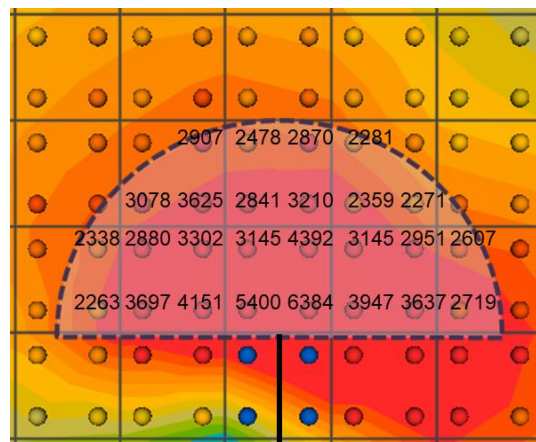


Figura 4.20 – Campo de tensões máximas principais na malha 2 com região1 (R.1), de raio = 7,5 mm, no momento da propagação do primeiro segmento de fratura.

Devido às limitações de como o algoritmo do XFEM foi implementado, a fratura só consegue propagar um segmento por incremento, ou seja, só consegue romper apenas um elemento, e ainda a ponta da fratura deve permanecer na aresta do mesmo. Novamente, essas limitações implicam, na medida que se reduz o critério de propagação ao tamanho de um elemento com comprimento característico, o aumento excessivo das tensões é reduzido (Figura 4.21). Conclui-se que, de modo a evitar tensões muito elevadas o critério de propagação deve ser adotado conforme estratégia mostrada no item anterior. Adicionalmente, à medida que se refina da malha, o raio do semicírculo deve abranger um comprimento relativo ao tamanho da estrutura, e não ao tamanho do elemento.



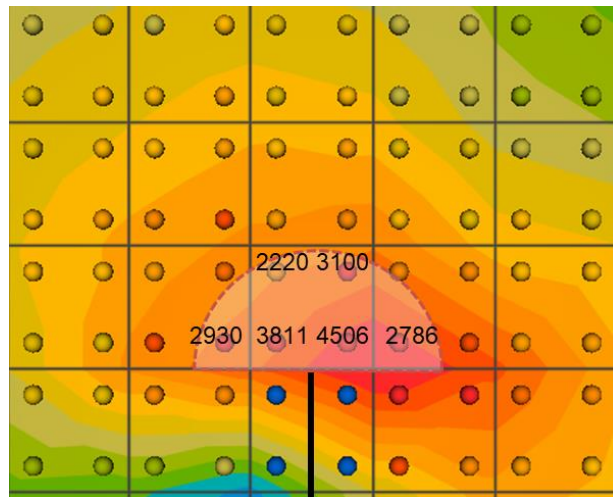


Figura 4.21 – Campo de tensões máximas principais na malha 2 com região 1' (R.1') de raio = 3,75 mm no momento de propagação de fratura.

Observa-se na Figura 4.22, que na malha 2 ocorre um o aumento no carregamento suportado pela estrutura, conforme aumento do tamanho da região de avaliação, da mesma forma que foi constatado no estudo anterior, referente às tensões irreais. Entretanto, na malha mais refinada, os valores máximos das curvas de resposta do material diminuíram, comparando o mesmo tamanho de regiões de avaliação de tensões. Adicionalmente, percebe-se que ocorre uma suavização no efeito “serrilhado” da curva. Atribui-se a este efeito, a maior quantidade de elementos na malha, que por sua vez, reduz as bruscas variações na curva, provenientes do fraturamento de cada elemento.

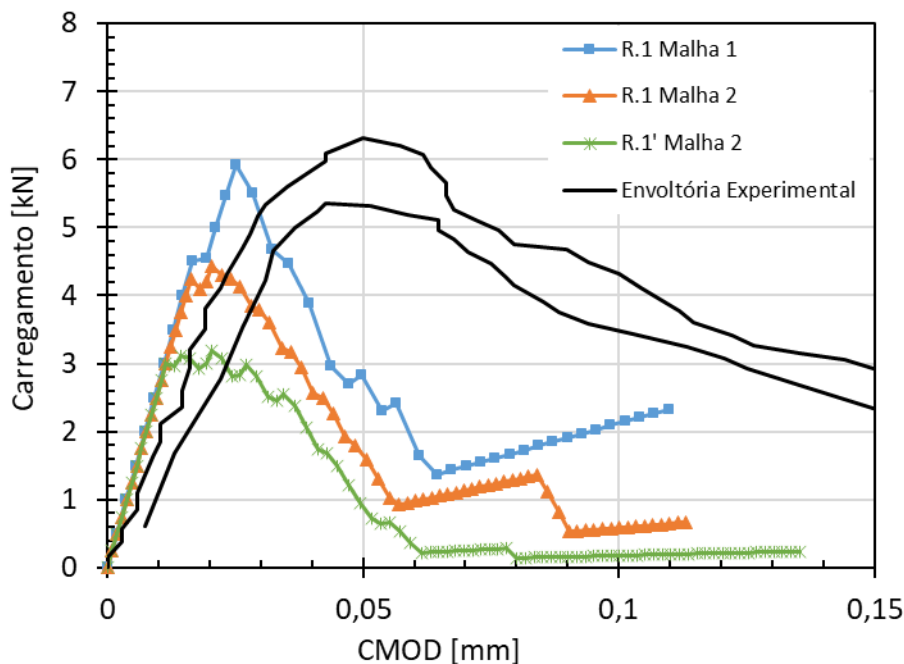


Figura 4.22 – Comparativo das curvas P x CMOD da região 1 (7,5 mm) na malha 1 e 2, e da região 1' (3,75 mm) na malha 2.

Cabe ressaltar que para o caso da malha 2, os incrementos foram de 0,025, comparados a 0,05 na malha 1. Isto se dá pelo fato, da quantidade de elementos ter aumentado, e com isso, a necessidade de uma menor taxa de carregamento para que uma maior quantidade de elementos possa ser rompida de maneira mais controlada. Atenta-se que este efeito ocorre por conta de uma limitação na forma em que o algoritmo está implementado, e que se não evitada pode implicar em diferenças numéricas diretamente ligadas aos resultados obtidos.

Uma vez que os modelos analisados consideram fratura frágil, sem coesão, o efeito do rompimento de um elemento causa um impacto notável na curva de resposta do material. Estas diferenças nos carregamentos e descarregamentos são obtidas na medida em que os elementos vão sendo atravessados por uma fratura. Os ramos ascendentes representam o acúmulo de energia de deformação elástica, enquanto os descendentes a liberação de energia por fratura de um elemento. Desta forma, os tamanhos dos incrementos podem causar grande impacto nos resultados das curvas de resposta dos modelos.

Uma análise de sensibilidade dos incrementos foi feita para a estrutura, mantendo o método de comprimento de arco como controle da solução. Abaixo,



exemplifica-se a implicação que ocorre caso o tamanho do incremento na malha 2 seja o mesmo da malha 1, ou seja, mantendo incrementos de 0,05. As análises foram feitas utilizando como critério de propagação e direção a região semicircular 1, de raio 7,5 mm. Avaliou-se três casos de tamanhos de incrementos, sendo estes 0,025, 0,05 e 0,075 de um total de 1,0.

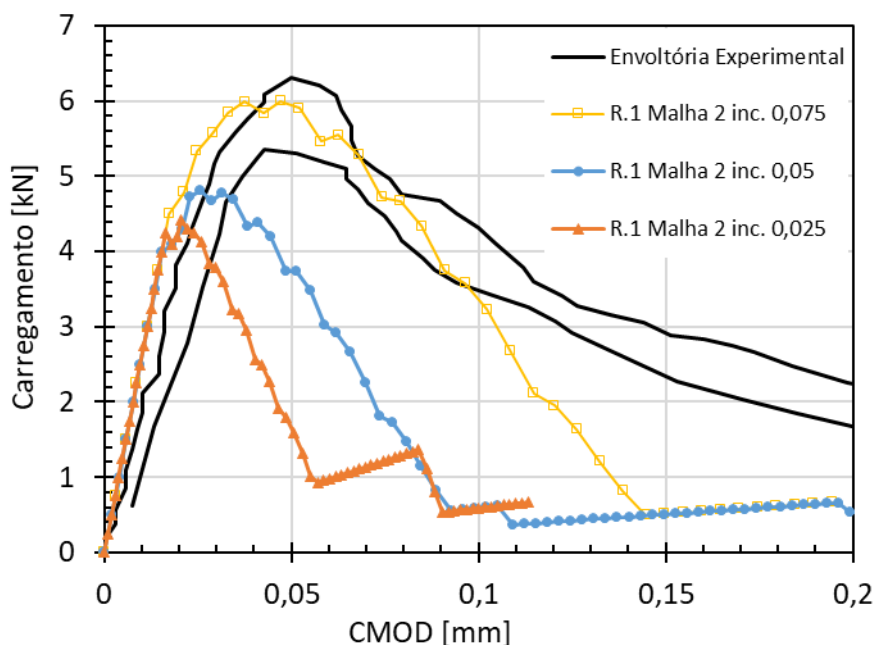


Figura 4.23 – Comparativo na curva de resposta do material entre o tamanho do incremento adotado

Observa-se na Figura 4.23 que conforme os incrementos aumentaram para 0,075, a curva encontrada apresentou a carga máxima e formato mais condizente com o experimental. Isto se deve ao método de controle adotado para solução e a como os incrementos são tratados. Ressalta-se que o método avalia a convergência em função do tamanho dos incrementos definidos, ou seja, o comprimento de arco é adaptado conforme o incremento do passo especificado. Enfatiza-se que o método de controle de comprimento de arco foi utilizado devido ao fato de não haver modelo constitutivo de amolecimento na descontinuidade que representa o processo de fraturamento.

Cabe ressaltar que o campo de tensões, no surgimento do primeiro segmento de fratura é praticamente o mesmo para os diferentes incrementos. Difere-se,

portanto, a taxa de decaimento da incrementação do comprimento de arco, visto que a mesma está atrelada ao tamanho do incremento especificado. Uma vez que não há modelo constitutivo na fratura, ou seja, assim que o material atinge a tensão de ruptura do mesmo, permite-se a inserção de uma fratura real, este problema é encontrado. Entretanto, observa-se na Figura 4.24 que na avaliação da trajetória de fratura, em pouco afeta este processo de incrementação.

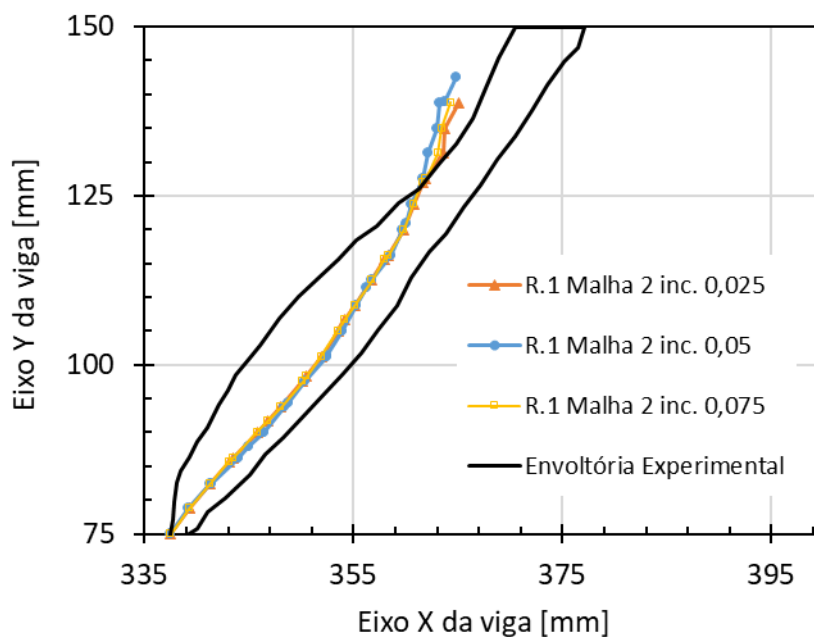


Figura 4.24 – Comparativo na trajetória de fratura para diferentes incrementos

Todavia, um raio pequeno impossibilita uma boa análise do campo de tensões para conduzir a fratura na direção mais próxima do que acontece em modelos reais. Entretanto, na medida que se adota um raio maior do que o necessário, a fratura tende a ser atraída mais abruptamente na direção de onde o fluxo de tensões máximas principais é maior. Com isso, percebe-se que há um tamanho ideal de raio a ser adotado no caso de uma região não local semicircular.

Para este tipo de análise, a relação encontrada foi de um semicírculo com raio equivalente à 3,6% do comprimento característico da estrutura. Contudo, devem ser levadas em consideração as condições de contorno do problema à ponta da fratura, de modo que interferências no fluxo principal de tensões principais possa ser captado. Posteriormente outros exemplos serão levados em consideração para

verificar essa relação. Portanto, observando a Figura 4.25 conclui-se que para análise da trajetória de fraturas é fundamental um bom conhecimento do campo de tensões ao redor da ponta da trinca, em função da magnitude do modelo avaliado.

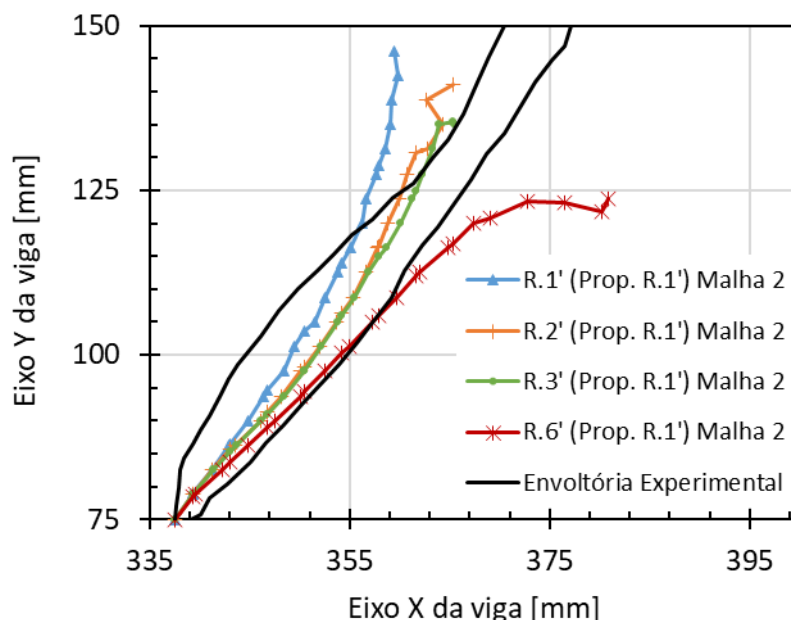


Figura 4.25– Comparação das trajetórias de fratura para diferentes tamanhos de regiões não locais

#### 4.1.4. Influência das funções de distribuição dos pesos

De conhecimento na literatura, e como se observou nos itens anteriores, as maiores tensões tendem a se concentrar na ponta da trinca. Com isso, buscou-se aplicar funções de distribuição, de modo a ponderar e dar mais relevância para as tensões que se encontram nos pontos de Gauss mais próximos da ponta. Desta forma, como explicado no capítulo três, as funções Gaussiana e Cúbica foram avaliadas em conjunto com a Uniforme. Explicita-se a influência destas funções na curva de resposta do material, e na direção de propagação da fratura.

Seguindo os modelos de comparação dos itens anteriores, verificou-se a influência destas funções mantendo o mesmo método de controle e incrementos, na malha 1, em uma região de análise semicircular com a região 1 para a comparação

das tensões de resistência do material, e região 2 para computação da direção de propagação do segmento de fratura.

Observa-se na Figura 4.26 que as curvas Uniforme e Gaussiana possuem a mesma tendência, apesar da Gaussiana, por priorizar mais as tensões mais próximas da ponta, romper o primeiro elemento antes. Entretanto, nota-se que a função cúbica tende a manter o pico mais baixo conforme o raio é expandido, e isto deve-se ao fato da função de distribuição priorizar os pontos de integração mais próximos da trinca. Uma vez que a ponderação é feita, não ocorrem grandes aumentos nas tensões ao redor da ponta da trinca, como observado nas distribuições gaussiana e uniforme. Com isso, utilizando-se a função cúbica a fratura tende a propagar mais rapidamente, adotando um comportamento mais “local” para a análise do campo de tensões, e nesta análise perdendo a vantagem da consideração não local para a direção e propagação.

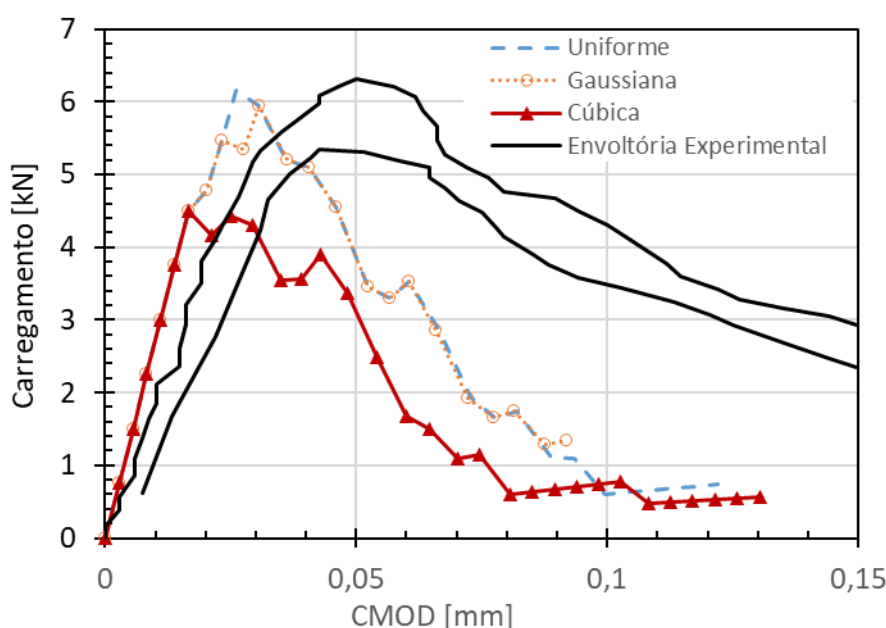


Figura 4.26 – Comparação das curvas PxCMOD para as três funções de distribuição para a Malha 1 com região 2 para direção e região 1 para propagação

Entende-se que a função cúbica pode ter extrema importância ao adotar uma região ampla, que ao encontrar tensões altas em pontos isolados distantes da ponta da trinca, não exerçam grandes influências na mudança de trajetória da propagação de fraturas. Como constatado no item anterior, a função cúbica exerce um papel

como o de um raio menor para averiguação da direção de propagação, como é observado na Figura 4.27. Desta forma, percebe-se que ao fixar um raio para análise não local de tensões conforme dimensão da estrutura, se faz mais prático variar as funções de priorização das tensões ao redor da ponta da trinca, através da implementação de pesos em suas ponderações.

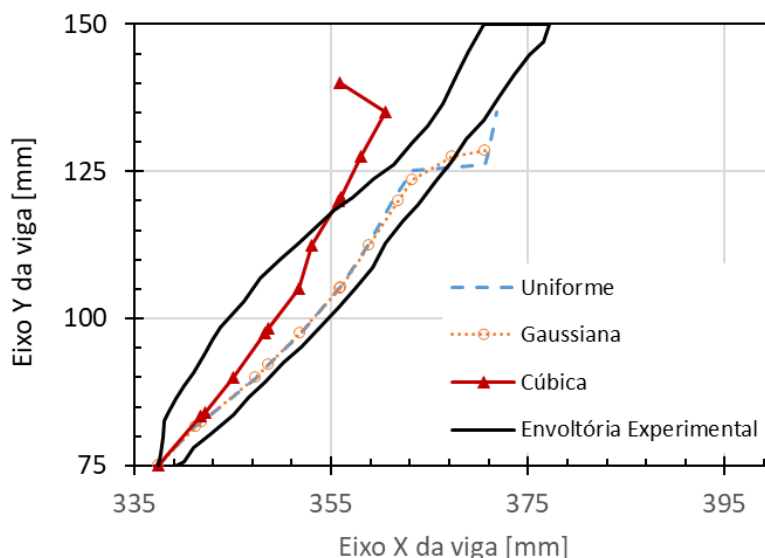


Figura 4.27 – Comparação das trajetórias de fratura das quatro funções de distribuição para a Malha 1 com região 2 para direção e região 1 para propagação

#### 4.1.5. Influência da geometria da região de avaliação

Neste item serão avaliadas as trajetórias de fratura considerando diferentes regiões de análise. Todos os itens anteriores foram avaliados em uma região não local semicircular. Serão levados em consideração quatro diferentes regiões de análise, sendo três não locais semicirculares de 90, 180 e 270 graus, e uma não local quadrilateral, perpendicular à ponta da fratura, cujo comprimento característico varia de acordo com o refinamento da malha, como discutidos no capítulo anterior e mostrados na Figura 4.28. Foram avaliados considerando a malha 2, com a região 2 para direção e região 1 para propagação de fraturas.

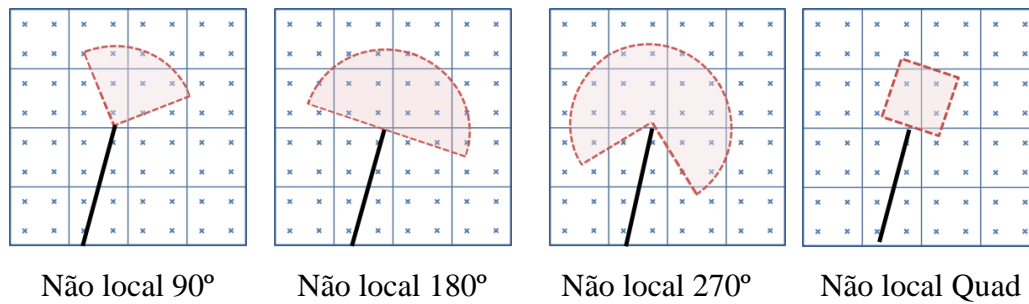


Figura 4.28 – Diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões

Observa-se na Figura 4.29 que as curvas ficaram muito próximas, tratando-se de comportamento. Entretanto, percebe-se que para as análises feitas com o não local quad e não local circular com feixe de 90°, as análises foram interrompidas por erros numéricos durante a convergência do processo de solução. Adicionalmente, percebe-se que a adequação da região semicircular de 180° para 270° apresentou melhorias na curva em questão.

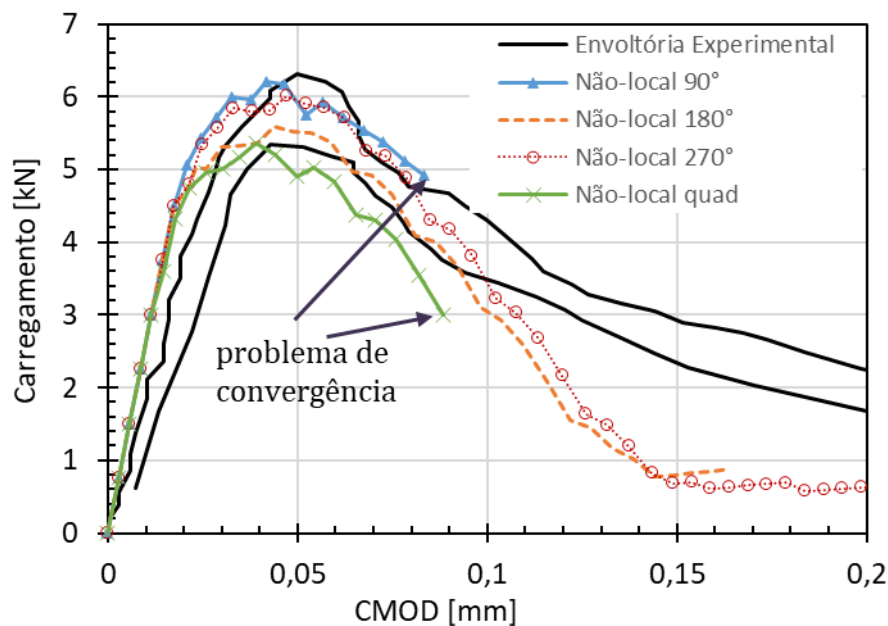


Figura 4.29 – Curva Carga x CMOD para diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões

Nota-se na Figura 4.30 que as trajetórias utilizando o feixe de 90° e o não local quad apresentaram tendências de desvio da envoltória experimental, além dos outros problemas mencionados anteriormente. Portanto, conclui-se que tanto o os

critérios não locais de 180 como de 270 graus demonstraram capacidade de representar uma trajetória de fratura sob carregamento em modo misto.

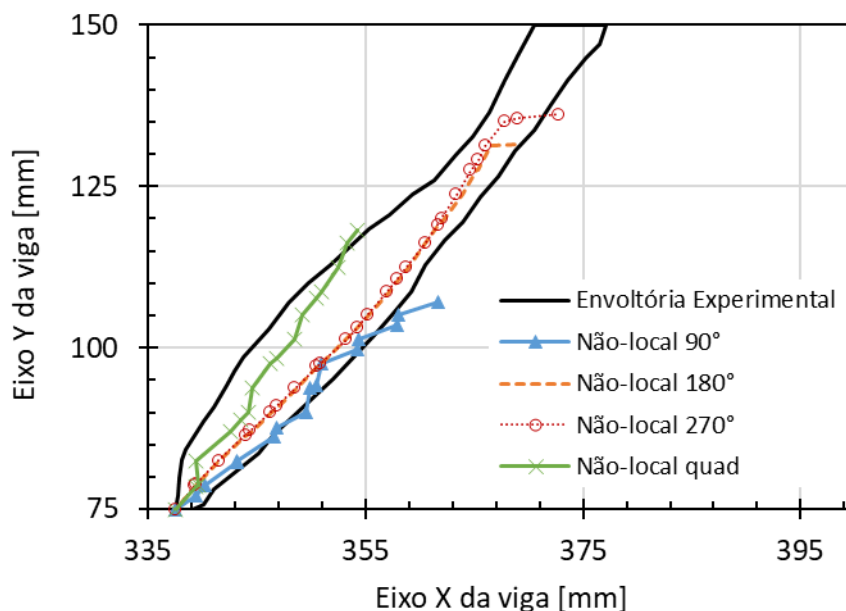


Figura 4.30 – Trajetórias de fratura para diferentes tipos de geometria para avaliação das tensões

#### 4.1.6.

#### **Análises comparativas entre o XFEM com os elementos de interfaces coesivas**

Neste estudo, buscou-se comparar dois diferentes métodos de representação de fraturas implementados no GeMA: o XFEM e o método dos elementos de interfaces coesivas. Como discutido no capítulo dois, modelar descontinuidades através de elementos de interface pode ser uma tarefa complexa, em casos onde a trajetória da fratura não é previamente conhecida. Para as análises com elementos de interface, adotou-se malhas refinadas com 12844 elementos triangulares. Desta forma, dois modelos foram propostos: um contendo elementos de interface entre todos os elementos tradicionais na região de interesse (Ver Figura 4.31), e outro aplicando elementos de interface em um modelo com uma trajetória de propagação discretizada na malha e nos elementos ao redor, como ilustra a Figura 4.32.



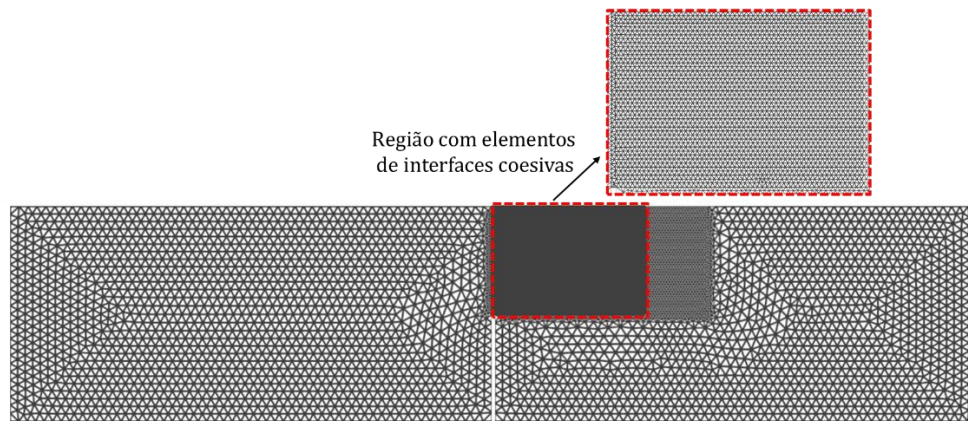


Figura 4.31 – Malha de elementos finitos com elementos de interfaces coesivas

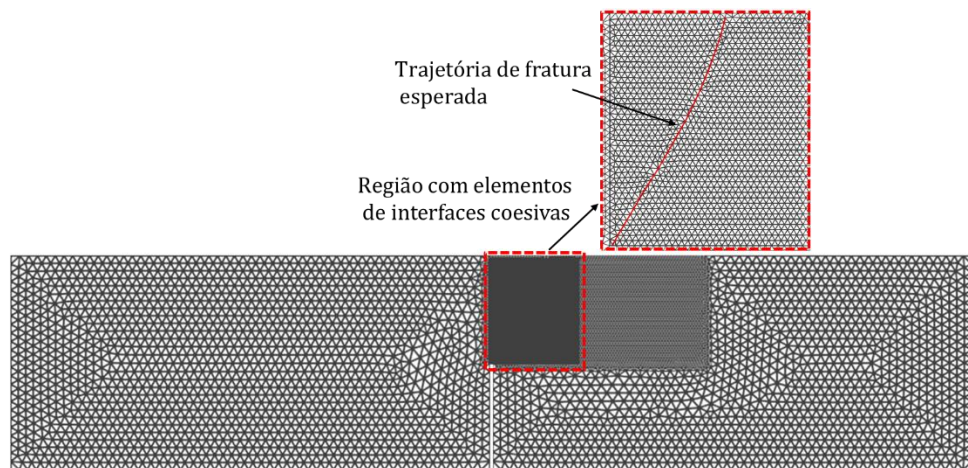


Figura 4.32 – Malha de elementos finitos com elementos de interfaces coesivas e uma trajetória definida a partir da envoltória experimental

Nas simulações em que a trajetória não foi definida, ocorreram problemas de convergência na resolução do sistema de equações, como mostra a Figura 4.33. Testaram-se os controles de comprimento de arco e de dissipação de energia.



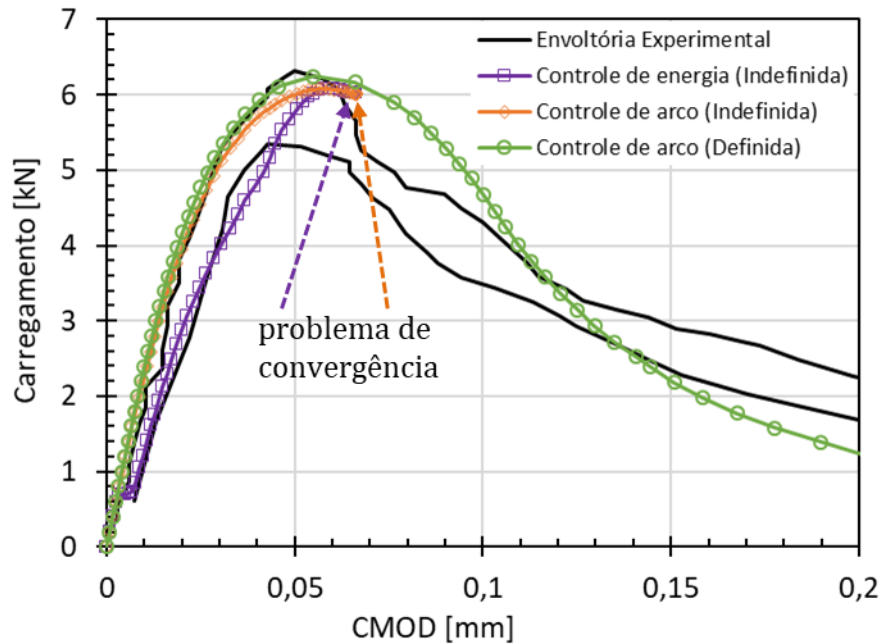


Figura 4.33 – Comparação de métodos de solução da análise para os modelos com a trajetória definida e indefinida na discretização dos elementos de interface

Considera-se que na medida que diversos elementos começam o processo de degradação, na região de amolecimento, uma trajetória não consegue ser definida com precisão, pois diversas possibilidades de propagação se iniciam (Ver Figura 4.34). Entende-se que o problema passa a apresentar alta complexidade, e seriam necessários outros métodos de controle para contornar estas particularidades, como por exemplo a combinação de controles, como proposto por Muñoz & Roehl (2017).

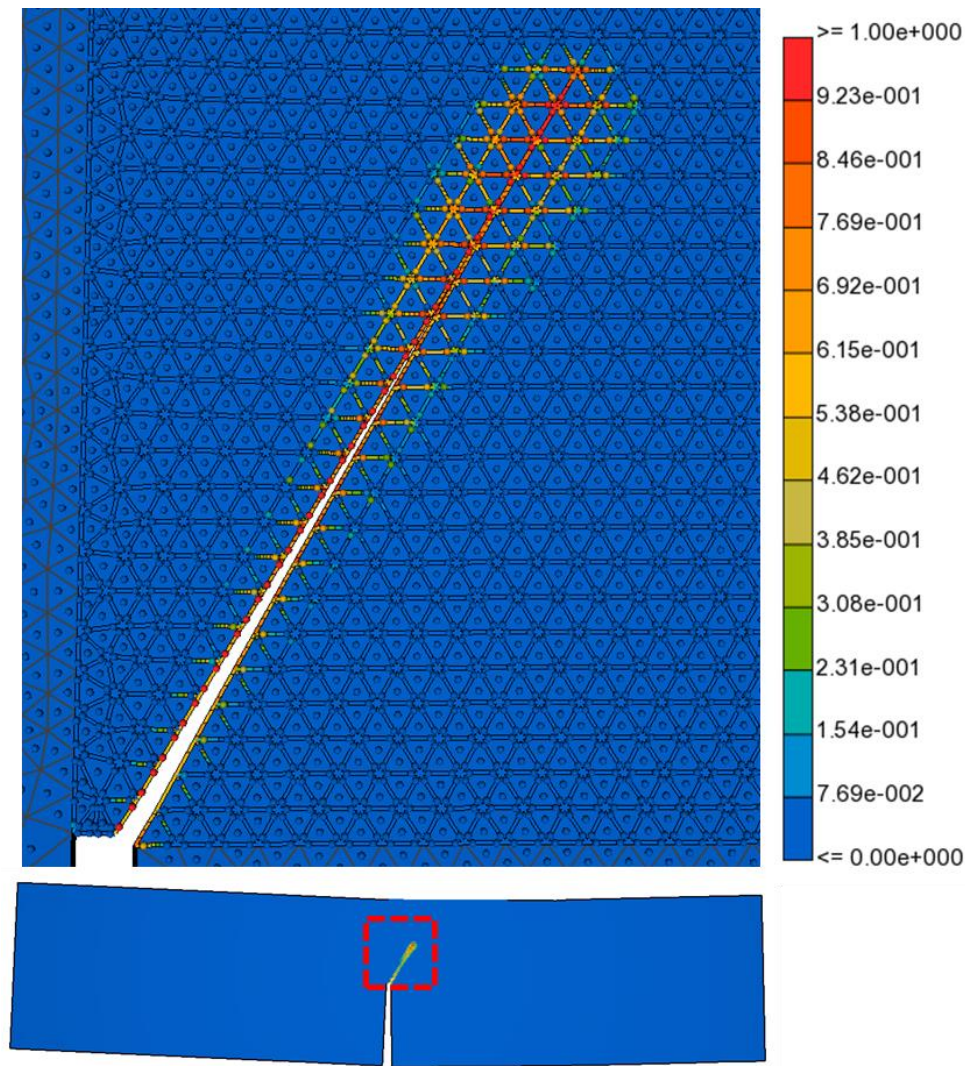


Figura 4.34 – Degradação dos elementos de interfaces coesivas ( zero = íntegro, um = totalmente danificado)

Na Figura 4.35, percebe-se que ocorrem descontinuidades no campo de tensões máximas principais. Isto acontece devido a presença de elementos de interface em todas as arestas dos elementos convencionais existentes na malha (dentro da região de interesse). Consequentemente, a visualização gráfica com o pós-processador POS3D (Celes, et al., 1990) do campo de tensões é prejudicada, ao reproduzir e interpolar as tensões provenientes dos diferentes tipos de elementos. Adicionalmente, na medida que os elementos de interface começam a degradar a sua capacidade resistiva, os elementos convencionais permanecem intactos. Portanto, devido às diferenças de rigidez dos materiais, diversos caminhos de fraturas tendem a surgir. Ademais, a compatibilização entre as tensões entre

elementos convencionais vizinhos e elementos degradados interceptando o campo de tensões, gera dificuldades no processo de extrapolação do campo de tensões. Desta forma, evidencia-se que esta estratégia para determinar trajetórias de fraturas com a utilização de elementos de interface apresenta diversos empecilhos numéricos.

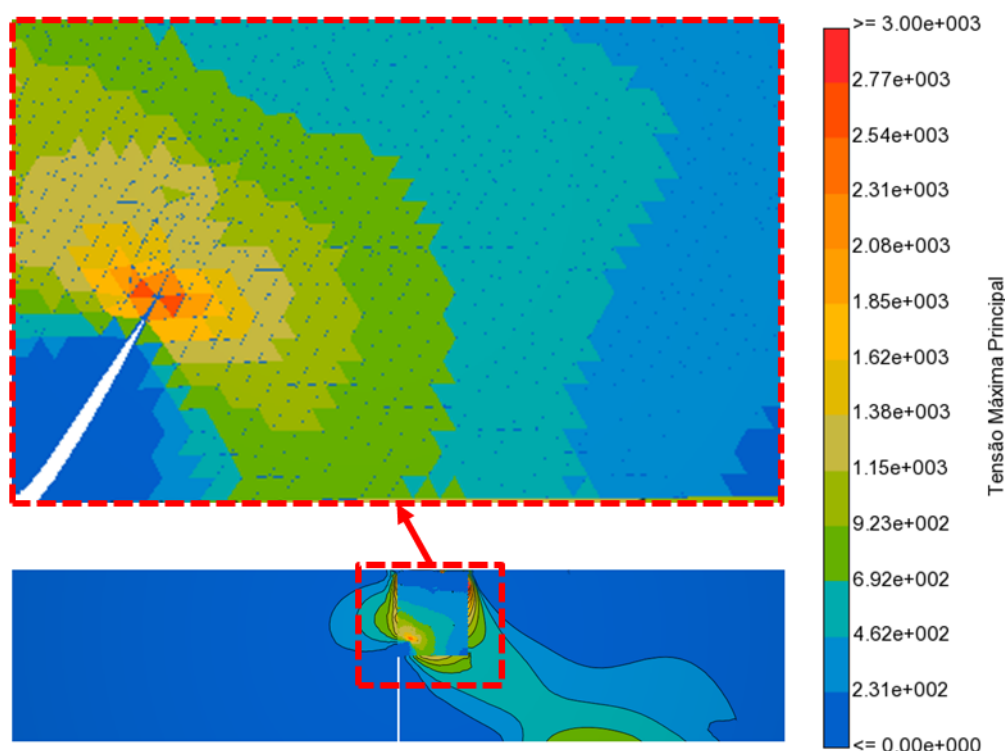


Figura 4.35 – Campo das tensões principais na região com elementos de interfaces coesivas

Ressalta-se que para a construção do gráfico na Figura 4.36 foi utilizada uma curva de amolecimento linear nos elementos de interface. Ao adotar diferentes funções de amolecimento, o comportamento da curva poderia apresentar resposta mais compatível com a envoltória experimental. Entretanto, é importante ressaltar que este não era o objetivo deste estudo. A curva dos elementos de interface apresentada é proveniente da modelagem onde a discretização para inserção destes elementos fez-se apenas na trajetória pré-definida.

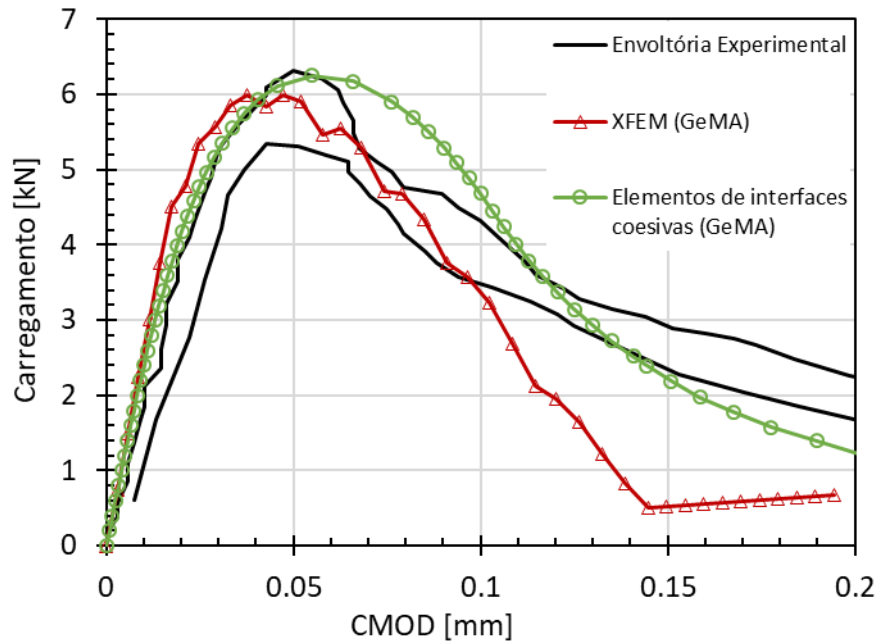


Figura 4.36 – Comparação entre as curvas Força-CMOD dos modelos com XFEM e com elementos coesivos

## 4.2. Placa com dois furos

Explora-se outros modelos analisados através da mecânica da fratura linear elástica, que em questão é uma placa com dois furos em diferentes posições. Khoei *et al.* (2008) mostra em seu artigo a placa modelada através de uma técnica de remeshing adaptativo em múltiplas fraturas e condições de contorno complexas. Já no trabalho apresentado por Khoei (2015), o mesmo autor compara as trajetórias de propagação de fratura do seu modelo de XFEM na mecânica da fratura linear com os resultados encontrados por remeshing. Ressalta-se que o autor utiliza em sua implementação fatores de intensidade de tensão como critério de propagação de fraturas.

No modelo, a placa é constituída do aço 4340 com propriedades lineares elásticas, com  $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0,3$ . Ambas fraturas possuem comprimento de 1 mm na configuração inicial, e são orientadas horizontalmente, como mostra a Figura 4.37.

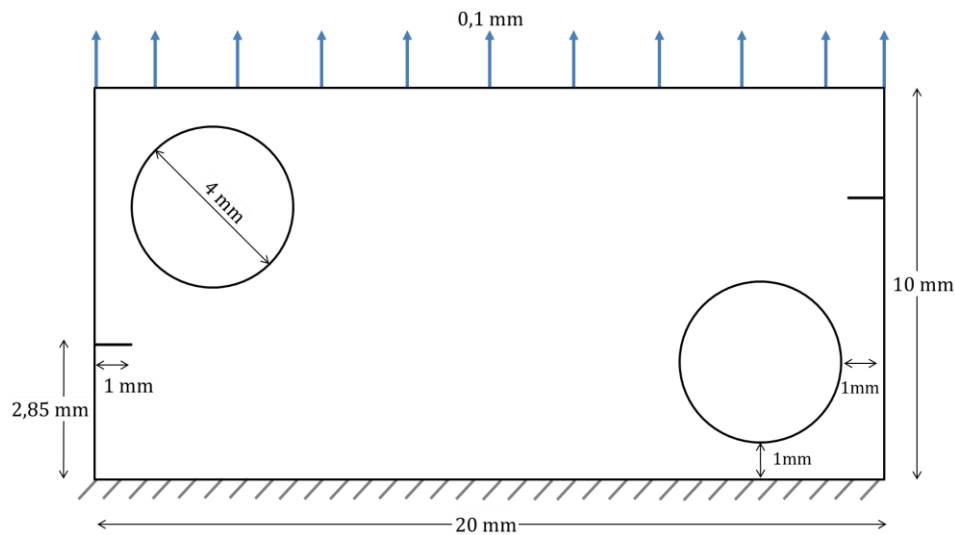


Figura 4.37 – Placa com dois furos e dois entalhes iniciais horizontais

Um deslocamento prescrito vertical de 0,1 mm foi aplicado em toda a superfície superior da placa, restringindo os deslocamentos horizontais no topo, e nas duas direções na base. Analisou-se a placa com uma malha estruturada com 4860 elementos quadrilaterais, cada um com comprimento característico de aproximadamente 0,2 milímetros, como mostra a Figura 4.38.

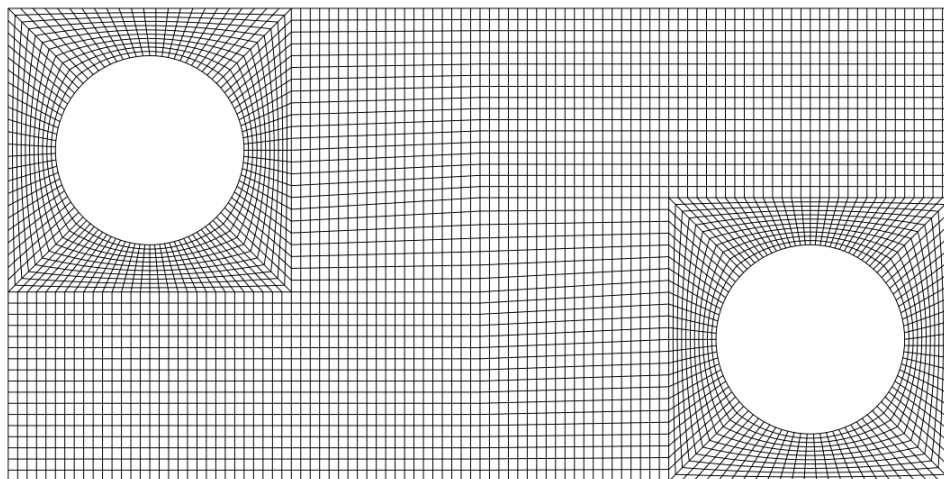


Figura 4.38 – Malha estruturada com 4860 elementos quadrilaterais

Embora as condições de contorno e geometria sejam simétricas, caso a discretização da malha de elementos finitos não seja, o campo de tensões também não será, e consequentemente a propagação de fraturas não ocorrerá igualmente nas duas pontas. Atenta-se que nestas condições de discretização, na medida que ocorre



a propagação em um lado antecipadamente, advém um desequilíbrio no outro. Portanto, na medida que se continua carregando a estrutura, a configuração final das trajetórias de fraturas não serão simétricas, como esperado

Adotando as melhores definições encontradas no item 5.1, empregou-se estes parâmetros para proceder com a análise da placa com furo. A partir da relação de 3,5% do comprimento característico da estrutura, foi definida uma região de análise não local circular com  $270^\circ$ , de raio equivalente à 0,5 milímetros. Para verificação das tensões de propagação, adotou-se a mesma estratégia definida no item 4.1.2, considerando apenas um semicírculo com raio equivalente ao elemento da frente da ponta da fratura. Adicionalmente, utilizou-se a função cúbica de distribuição de pesos para ponderação no campo de tensões, uma vez que a trajetória pode ser alterada bruscamente, e tensões elevadas podem ser encontradas longe da ponta da fratura existente, como comentado no item 4.1.4. Foram desconsiderados os efeitos de plasticidade prévios à ruptura do material, da mesma forma feita por Khoei *et al* (2008).

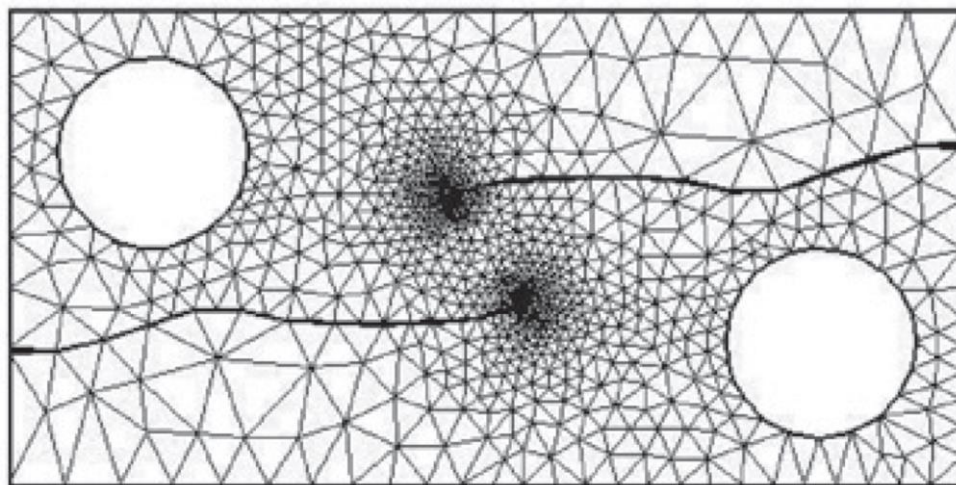


Figura 4.39 - Trajetória das fraturas com o uso do remeshing adaptativo (Khoei, et al., 2008)

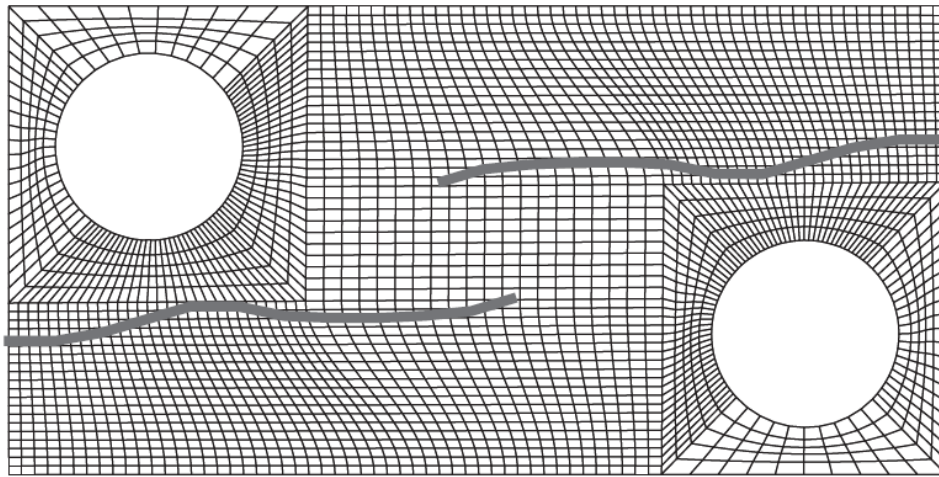


Figura 4.40 - Trajetória das fraturas com o uso do XFEM e fatores de intensidade de tensão (Khoei, 2015)

Foram disponibilizadas as trajetórias encontradas pelo autor através do processo de remeshing adaptativo, como mostrado na Figura 4.39. Como mencionado, também foram possível comparar com as trajetórias do XFEM implementado pelo mesmo autor (ver Figura 4.40). Por fim, nota-se na Figura 4.41 uma excelente concordância com as trajetórias do autor, é obtida através dos critérios de propagação implementados no XFEM do GeMA. Demonstra-se a capacidade de detecção e variações bruscas de trajetórias, além da possibilidade de propagação de múltiplas trajetórias simultaneamente.

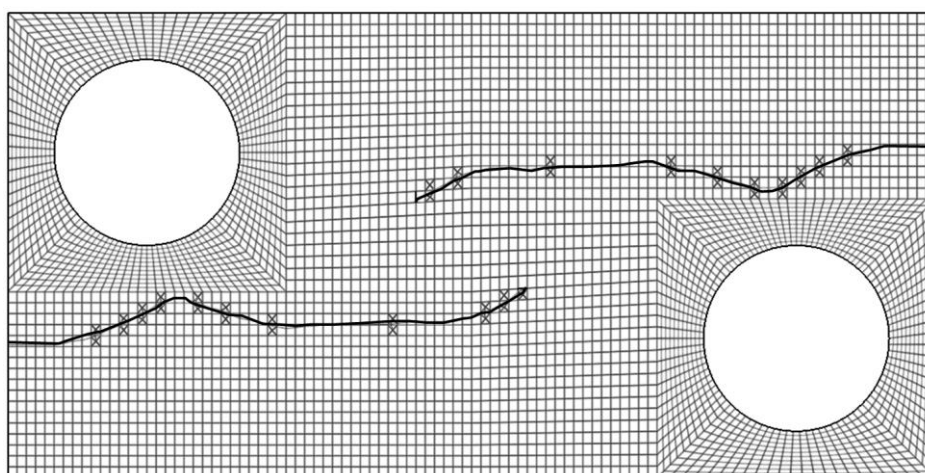


Figura 4.41 - Trajetórias das fraturas com o uso dos critérios não locais no XFEM do GeMA

Ao comparar o campo das distribuições dos deslocamentos verticais na Figura 4.42, nota-se que a forma como a propagação de fraturas é controlada é de extrema importância para as representações destas. Embora as trajetórias se assemelhem, e o campo de deslocamentos apresentem pouca disparidade, o processo como os segmentos são incorporados à fratura principal é de fator preponderante para uma avaliação qualitativa. Ademais, entende-se que ambos os métodos são capazes de reproduzir com eficácia a propagação de múltiplas fraturas de alta complexidade.

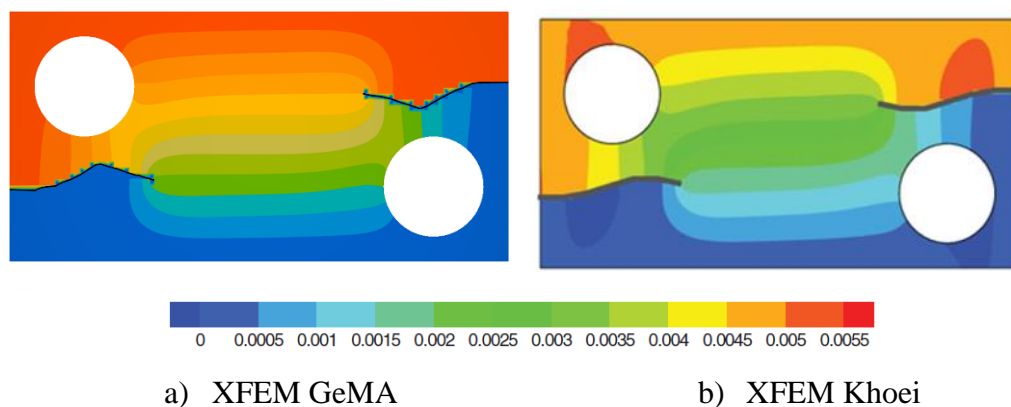


Figura 4.42 - Distribuições dos deslocamentos verticais na metade dos incrementos de passo

### 4.3.

#### Placa com dois entalhes submetida a carregamentos combinados

O objetivo a ser explorado nesta aplicação numérica, é verificar a metodologia aplicada ao XFEM no GeMA, para casos onde a fratura ocorra em modo misto. Resultados provenientes de ensaios experimentais conduzidos por Nooru-Mohamed (1992) serviram como base de comparação aos modelos numéricos desenvolvidos. A Figura 4.43 mostra as condições de contorno do problema, a geometria da peça ensaiada. O modelo numérico foi reproduzido em malha de elementos finitos estruturada contendo 1640 elementos quadrilaterais. O autor realizou testes em uma placa de concreto, de 50 milímetros de espessura, cujas propriedades mecânicas foram: módulo de Young  $E = 30 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência máxima à tração  $f_t = 3,0 \text{ MPa}$ , resistência máxima à compressão  $f_c = 57,0 \text{ MPa}$  energia crítica de fratura  $G_f = 110 \text{ N/m}$ .



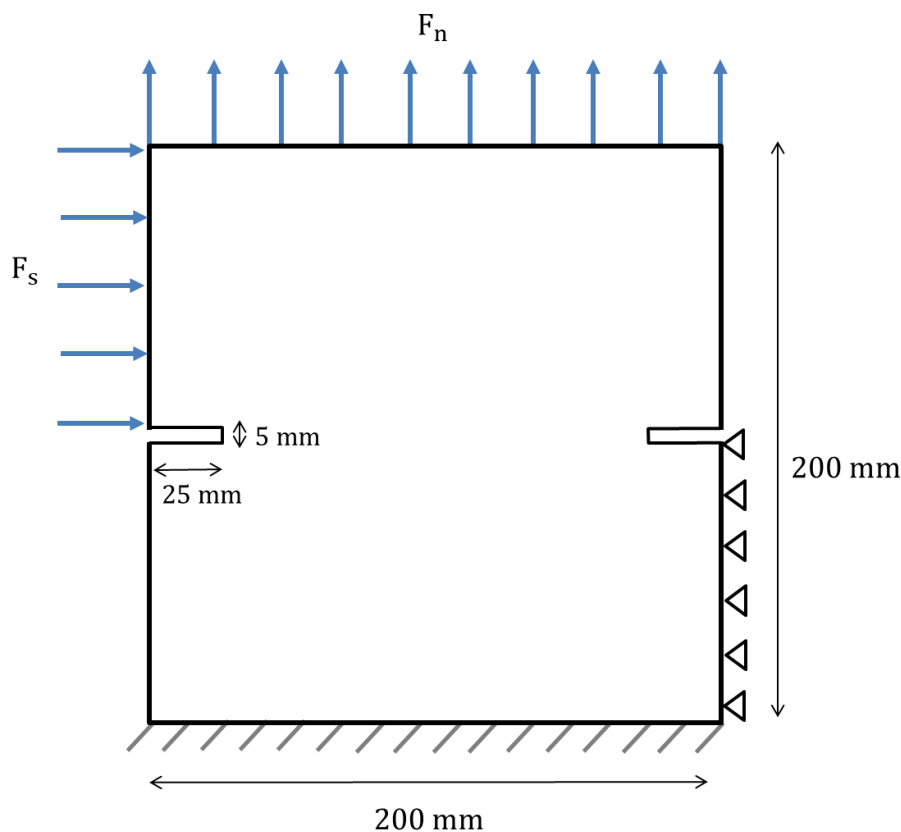


Figura 4.43 – Condições de contorno e geometria do teste na placa com dois entalhes

Como mostra a Figura 4.43, foram aplicadas em conjunto forças horizontais e verticais. Para o carregamento horizontal  $F_s$  foram adotados três valores:  $5kN$ ,  $10kN$  e  $27,5kN$ . Subsequentemente, uma força axial vertical  $F_n$  foi aplicada no topo da estrutura, de modo a manter a força lateral cisalhante constante.

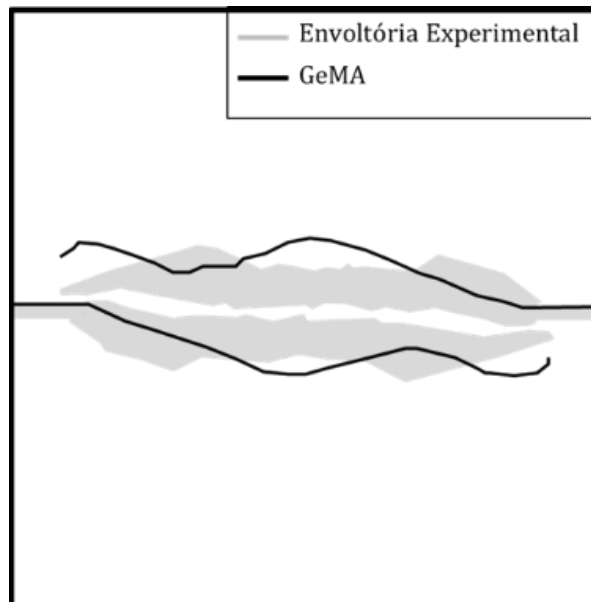
A partir das configurações paramétricas de análise não local, discutidas no item 4.1, simulou-se numericamente este ensaio, com uma região não local de 12 milímetros e função peso cúbica. As análises foram feitas em uma malha de elementos finitos quadrilaterais sob condição de estado plano de tensões.

Observa-se na Figura 4.44 que para os ensaios b e c, ótimas concordâncias foram encontradas para as trajetórias das fraturas. Já no ensaio A, as fraturas apresentaram leve desvio da envoltória experimental. Essa discrepância pode ser atribuída às peculiaridades inerentes as configurações no ensaio de experimento específico. Ressalta-se que a modelagem de propagação de fraturas com o método não local e utilizando o campo de tensões para o cálculo das máximas tensões principais apresenta grande eficiência para previsão dos caminhos de fraturamento.

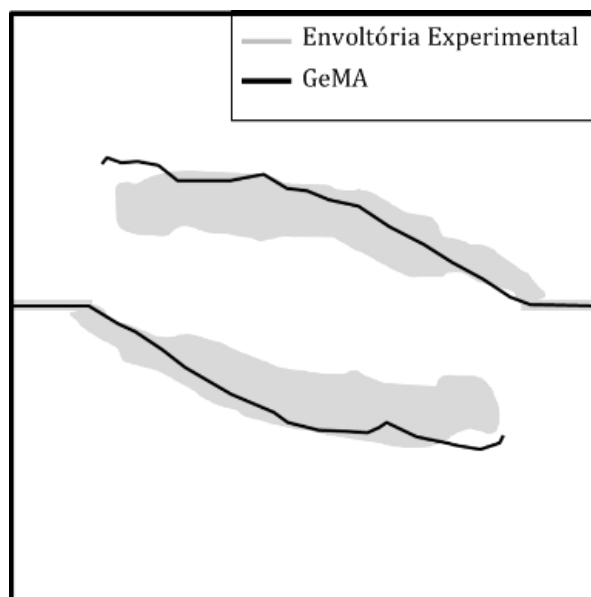
Evidencia-se que na metodologia implementada é possível a simulação de modelos com carregamentos não-proporcionais e de esforços combinados aplicados.

Em resumo, esse exemplo mostra que com as devidas considerações que a modelagem apresenta, é possível reproduzir com eficácia as trajetórias de fraturas utilizando unicamente as máximas tensões principais como critério de propagação. Ressalta-se que nenhuma atribuição específica foi implementada para considerar o efeito da resistência às tensões de cisalhamento. Desta forma, conclui-se que o método implementado na estrutura do XFEM do GeMA é altamente capaz de modelar numericamente situações em modo misto de estruturas sob diversas condições de carregamento e de contorno.

a)  $F_s = 5 \text{ kN}$



b)  $F_s = 10 \text{ kN}$



c)  $F_s = 27,5 \text{ kN}$

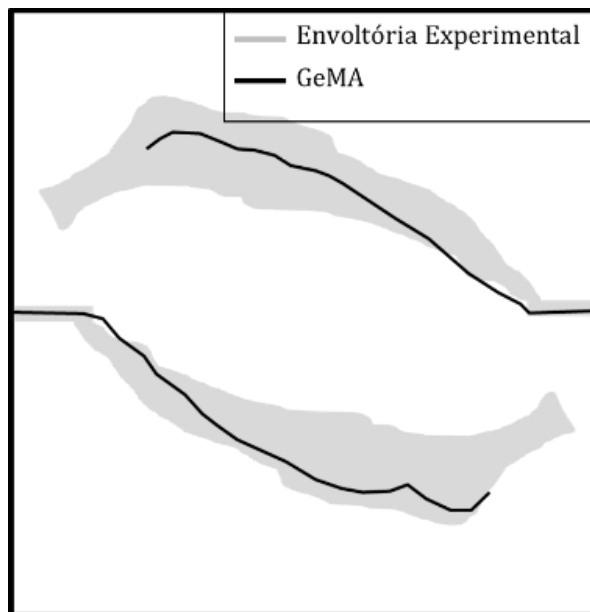


Figura 4.44 – Comparação das trajetórias dos modelos a, b e c

#### 4.4.

#### Viga engastada com entalhe excêntrico

De modo a avaliar as direções de propagação de fraturas, um exemplo de uma viga em balanço com um entalhe excêntrico foi adotado, como mostra a Figura 4.45. Foi modelada uma viga de concreto contendo as seguintes propriedades mecânicas: módulo de Young  $E = 36,5 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,18$ , resistência máxima à tração  $f_t = 3,0 \text{ MPa}$  e energia crítica de fratura  $G_f = 50 \text{ N/m}$ .

A viga foi modelada sob estado plano de tensões, utilizando uma malha regular estruturada contendo 1380 elementos quadrilaterais. Cada elemento possui comprimento característico de  $l_{el} = 3,3$  milímetros. Foram utilizadas as condições de análise conforme estudo paramétrico mostrado nos itens anteriores. A região de análise possui geometria circular com  $270^\circ$ , e empregou-se a função cúbica de distribuição de peso.

Os autores (Zi & Belytschko, 2003) apresentam as trajetórias de fraturas obtidas para diferentes refinamentos de malha de elementos. Comparou-se o caminho de propagação de fratura encontrado pelos autores, correspondente a malha com o mesmo refinamento utilizado no GeMA (1380 elementos).

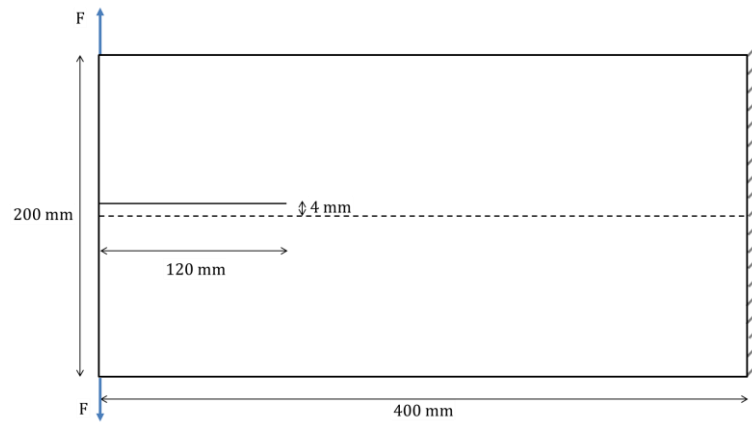
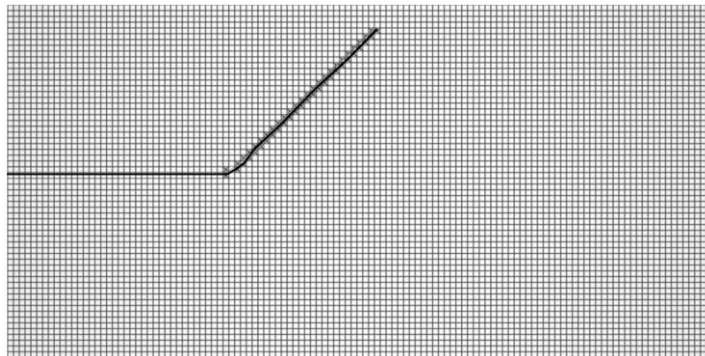


Figura 4.45 – Geometria e condições de contorno da viga em balanço

Na Figura 4.46 observam-se as diferenças nas trajetórias das fraturas, provenientes do aumento da região de avaliação das tensões que determinam as direções de propagação. Neste exemplo, claramente é observado que uma região de análise muito próxima à ponta da fratura não consegue captar da melhor forma possível a mudança na composição do campo de tensões da estrutura, conforme a mesma é carregada.

a) Região 1



b) Região 3

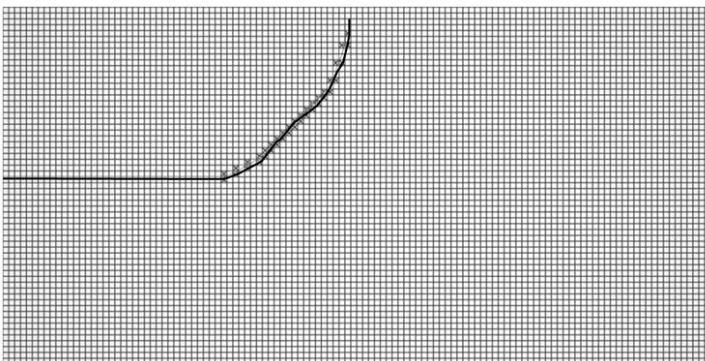


Figura 4.46 – Viga analisada com diferentes regiões de avaliação: a) Direção da trajetória da fratura calculada com uma região de raio equivalente a  $l_{el}$  ( $r = 3,3$  mm) b) Direção da trajetória da fratura calculada com uma região de raio equivalente a  $3l_{el}$  ( $r = 9,9$  mm)

Como mostra a Figura 4.47, a região no entorno da ponta da fratura não apresenta uma distribuição proporcional no campo das tensões máximas principais. Desta forma, percebe-se que uma região muito pequena não consegue captar e conduzir a fratura para uma direção que seja mais próxima da realidade.

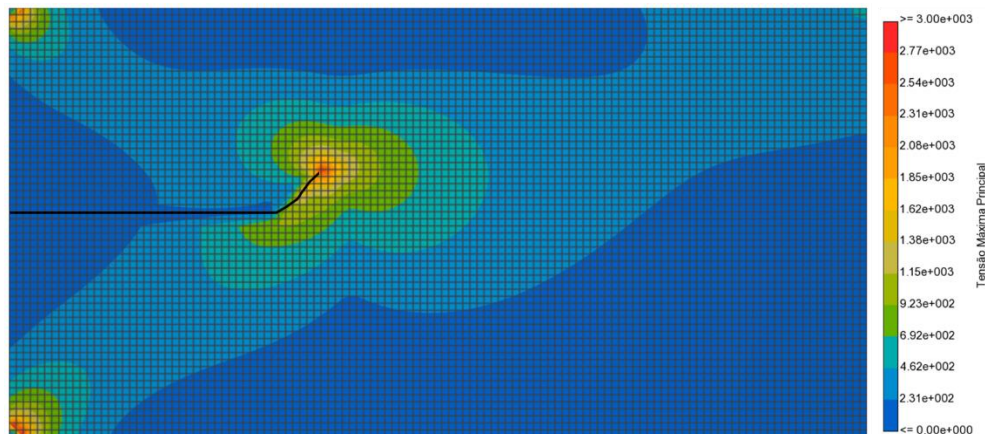


Figura 4.47 – Campo de tensões máximas principais na viga

Percebe-se na Figura 4.48 que foi possível reproduzir com o GeMA a mesma tendência nas trajetórias de fraturas. Compreende-se que existem diferenças na formulação do XFEM dos autores como: a presença de fraturas coesivas e elementos com enriquecimentos adicionais. Estas diferenças influenciam na obtenção das respostas de trajetórias de fraturas encontradas, embora ambos os caminhos converjam para o mesmo ponto no fim da análise.

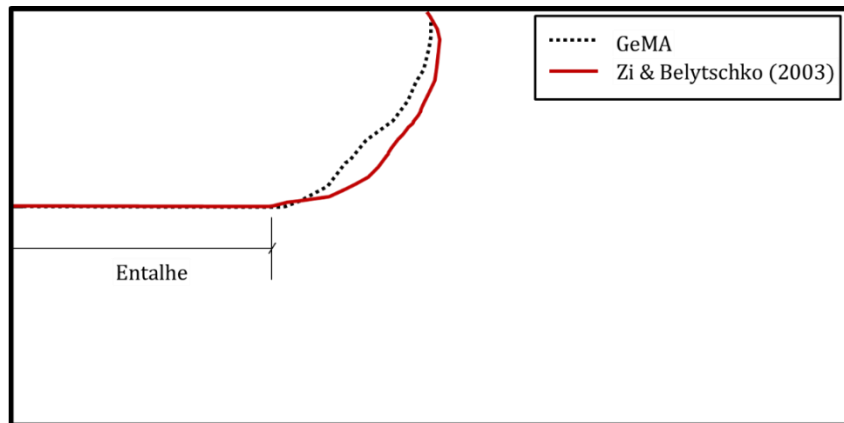


Figura 4.48 – Comparação entre as trajetórias de fratura obtidas no XFEM do GeMA e no XFEM de Zi & Belytschko (2003)

#### 4.5. Placa com formato em L

Outro exemplo avaliado foi a placa em formato L, como mostra a Figura 4.49, representado o ensaio experimento conduzido por Winkler (2001). Foi modelada uma placa de concreto com propriedades mecânicas de: módulo de Young  $E = 20 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,18$ , resistência à tração  $f_t = 2,9 \text{ MPa}$  e energia crítica de fratura  $G_f = 130 \text{ N/m}$ .

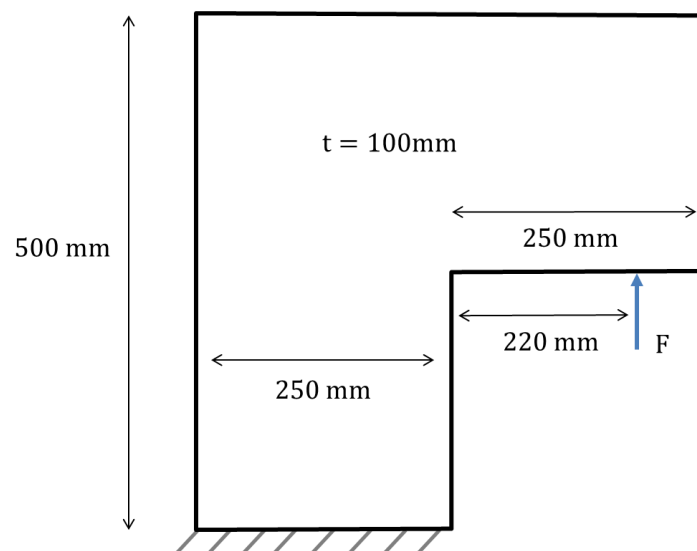


Figura 4.49 – Geometria e condições de contorno da placa em L

A placa foi modelada com uma malha regular contendo 7500 elementos quadriláteros. Cada elemento possui comprimento característico de  $l_{el} = 5,0$  milímetros. Nesta malha, adotou-se uma região circular de  $270^\circ$  com raio de 20 milímetros para avaliação dos pontos de integração de trajetórias. Adotou-se o controle de comprimento de arco, com uma carga de referência de 10 kN. Os incrementos de passo definidos como 0,05 do total de 1. Ressalta-se que as não linearidades geométricas foram levadas em consideração para a resolução deste problema.

Observa-se na Figura 4.50 que a trajetória de propagação de fratura encontra-se totalmente dentro da envoltória experimental. Entende-se que os critérios de propagação adotados, em conjunto com os outros parâmetros estudados previamente, apresentaram êxito para a solução de problemas desta complexidade.

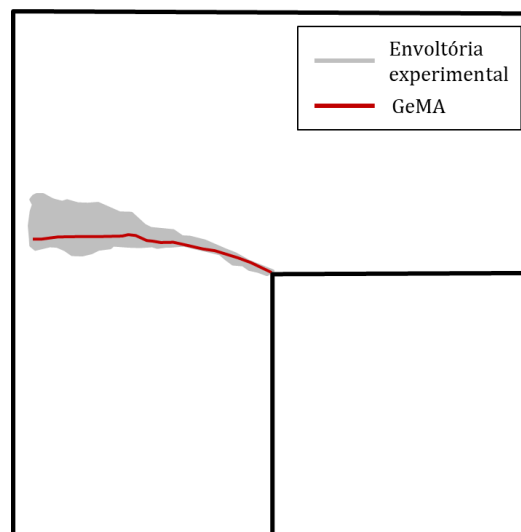


Figura 4.50 – Comparação entre as trajetórias de fratura encontradas no XFEM do GeMA e as envoltórias experimentais

Nota-se na Figura 4.51 que resultados satisfatórios foram encontrados para a curva de resposta de material, através do XFEM do GeMA em conjunto com os processos de solução da análise também implementados no programa.

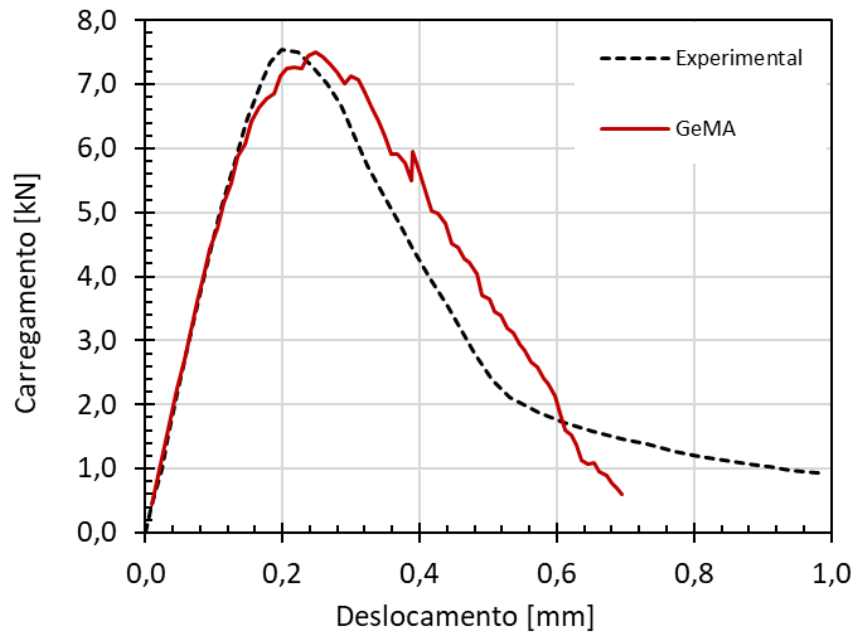


Figura 4.51 – Comparação entre as curvas Carga-Deslocamento do modelo experimental e do GeMA

Conclui-se que com os métodos implementados, foram obtidas respostas bem próximas à realidade para o problema em questão. Ressalta-se que a partir de uma análise paramétrica sobre problemas desta complexidade, e em conjunto com os critérios não locais adotados e funções de distribuição de peso, possibilitou-se contornar peculiaridades referentes às propriedades constitutivas do material. A Figura 4.52 mostra a evolução da propagação da fratura na placa e que as tensões máximas principais foram controladas durante o decorrer da análise

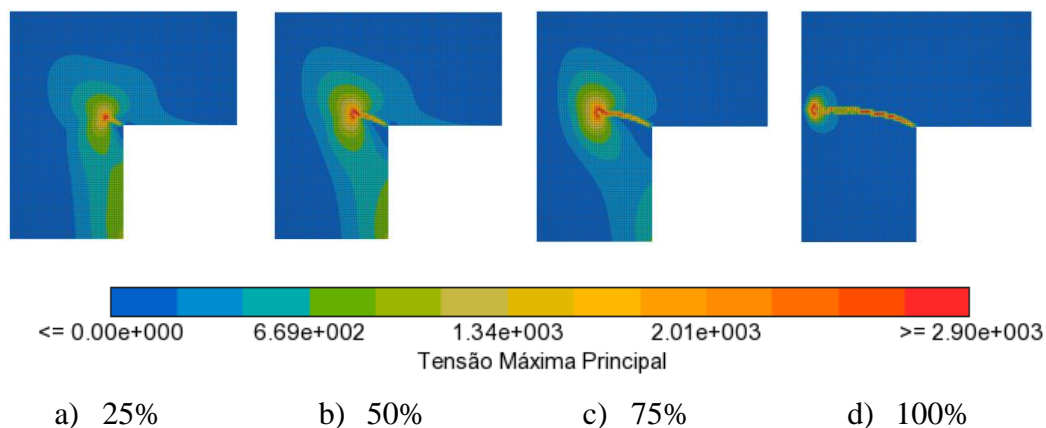


Figura 4.52 – Evolução da distribuição do campo de tensões máximas principais na placa no decorrer da análise.



## 5

### Considerações Finais

#### 5.1. Conclusões

Este trabalho abordou os aspectos envolvidos na simulação da propagação de fraturas em estruturas, enfatizando os critérios adotados para a representação destas descontinuidades. Exploraram-se através do Método dos Elementos Finitos Estendidos, conceitos relacionados à influência das regiões de avaliação de critérios, baseando-se em critérios de tensão para a nucleação de propagação de fraturas. Enfatizam-se que os mais diversos parâmetros relacionados à simulação numérica foram abordados de modo a sanar questionamentos sobre a criação de modelos numéricos.

Foram explorados conceitos relacionados ao comportamento de materiais frágeis e quase-frágeis. Constatou-se que os critérios de propagação de fratura implementados no GeMA são altamente eficazes em simulações numéricas que envolvam fratura em modo misto. Adicionalmente, sugeriu-se uma adaptação no critério de nucleação de fraturas utilizando regiões de avaliação de tensões não locais. Desta forma, atenuaram-se as limitações relacionadas à ausência de um modelo constitutivo capaz de representar o processo na zona de fraturamento. A adaptação implementada no critério mostrou-se adequada para solucionar o surgimento de um campo de tensões espúrias no modelo numérico.

Nas simulações realizadas com os critérios de propagação de fraturas implementados em conjunto com o XFEM do GeMA, foi possível encontrar trajetórias de fraturas condizentes com as envoltórias experimentais. Diferentes testes foram levados em consideração, com as mais variadas geometrias e condições de contorno e de carregamento. Optou-se por simular exemplos cujas trajetórias fossem decorrentes de fraturamento em modo misto, por conta da complexidade numérica em reproduzir a propagação e mudança de trajetória das mesmas. Cabe ressaltar que o XFEM do GeMA foi capaz de superar as adversidades numéricas

decorrentes das descontinuidades no meio contínuo com alta eficiência computacional.

Percebeu-se a necessidade de um algoritmo para a adaptação dos incrementos no processo incremental de solução da análise, de modo a evitar um estudo prévio de convergência. Entende-se que a falta de uma incrementação adaptativa nos passos a serem adicionados para o controle de solução, afetam o processo de solução da análise, e consequentemente a curva de resposta do material obtida numericamente.

Diferentes geometrias de região de análise foram avaliadas, e a região circular com ângulo de 270 graus mostrou-se a mais eficaz no que se diz respeito à mudança de trajetória de fraturas. A geometria de análise em questão mostrou maior capacidade de captar diferentes variações no campo de tensões da estrutura, e com isso, determinar o melhor sentido ao segmento a ser incorporado à fratura principal.

Constatou-se uma relação de proporcionalidade do tamanho da região de avaliação das tensões, em relação ao tamanho da estrutura, de modo que, como sugerido na literatura, adotar raio equivalente a três elementos pode levar a predições equivocadas nas trajetórias de fraturas. Portanto, entende-se que utilizar raios muito grandes, ou muito pequenos, influencia negativamente nas simulações com fraturamento em modo misto.

Adotar funções de distribuição de pesos relativos à distância dos pontos de integração da malha de elementos finitos à ponta da fratura mostrou ser de grande valia para uma análise com maior precisão numérica. Isto se dá pelo fato de funções privilegiarem as tensões mais próximas a ponta da fratura, e com isso, não permitir que influências externas nucleiem novos segmentos.

No que se diz respeito ao controle da solução do sistema, o método do controle de deslocamentos prescritos possui versatilidade para simulações envolvendo descontinuidades em estruturas. Entretanto, enfatiza-se que o método apresenta problemas de convergência em casos em que ocorram o fenômeno de “*snap-back*”. Portanto, ressalta-se a importância de conhecer as características do problema a ser avaliado, para um melhor controle da solução global.

Finalmente, quando comparado com elementos coesivos de interface, o XFEM demonstrou praticidade e eficiência, para situações onde o caminho a ser percorrido pela fratura é desconhecido. Ademais, o método se mostrou eficaz para

a modelagem de estruturas sob carregamentos não proporcionais em situações de propagação de fraturas em modo misto.

## 5.2. Sugestões

Como discutido no capítulo de aplicações, o acoplamento do XFEM juntamente a um modelo de dano evitaria o surgimento de tensões espúrias no meio contínuo. Ademais, um modelo constitutivo de dano no material simularia com mais proximidade da realidade os efeitos que ocorrem devido à zona de processos de fratura.

As implementações de modelos de zona coesiva no XFEM complementariam o método de solução, de modo a evitar que a fratura abrisse rapidamente. Com isso, as curvas de resposta do material obtidas corresponderiam melhor às experimentais.

Adaptações nos métodos “*level-set*” seriam de extrema importância para análises futuras, como a implementação do enriquecimento de ponta. Evidentemente, este tipo de enriquecimento excluiria a necessidade da propagação de fraturas elemento por elemento. Portanto, diversas outras considerações poderiam ser exploradas com essa nova funcionalidade.

A expansão da formulação do XFEM de bidimensional para tridimensional permitiria análises mais detalhadas de estruturas mais complexas.

A implementação de novos critérios de propagação de fraturas no GeMA proveria interessantes discussões no que se diz respeito à eficiência e eficácia nos métodos de solução nas análises.

A implementação de modelos constitutivos específicos para os materiais adotados seria interessante para análises mais precisas e consistentes.

Adotar modelos de encruamento e plasticidade seriam cruciais na análise de materiais dúcteis. Ademais, a implementação de critérios de fadiga adicionaria mais possibilidades de análises no GeMA, devido a outras condições de carregamentos.

## 6 Referências bibliográficas

ABAQUS, 2014. *Abaqus 6.14 Documentation*. Pawtucket, RI, USA: Dassault Systèmes.

Araújo, T. D. P., 1999. *Análise Elasto-Plástica Adaptativa de Estruturas com Trincas (Tese de Doutorado)*, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Areias, P. & Belytschko, T., 2005. A comment on the article: a finite element method for simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics.. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 1275-1276 .

Areias, P. M. A. & Belytschko, T., 2005. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Volume 63, pp. 760-788.

Babuska, I. & Melenk, J. M., 1997. The Partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 40, pp. 727-758.

Barenblatt, G., 1959. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general. *Appl Math Mech*, Volume 23, pp. 622-636.

Barenblatt, G. I., 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advanced Applied Mechanics*, Volume 7, pp. 55-129.

Barsoum, R. S., 1976. On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 10, pp. 25-37.

Bazant, Z. P. & Planas, J., 1998. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. Boca Raton, FL, CRC Press.

Beer, G., 1984. An Isoparametric Joint Interface Element for Finite Element Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(4), pp. 585-600.

Belytschko, T. & Black, T., 1999. Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 45, pp. 601-620.

Belytschko, T., Gracie, R. & Ventura, G., 2009. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4), pp. 1-24.

Bendezú, M. A. L., 2015. *Simulação Numérica do Fraturamento de rocha por Explosão Considerando o Modelo de Zona Coesiva (Tese de Doutorado)*, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Benzeggagh, M. L. & Kenane, M., 1996. Measurement of Mixed-Mode Delamination Fracture Toughness of Unidirectional Glass/Epoxy Composites with Mixed-Mode Bending Apparatus. *Composites Science and Technology*, Volume 56, pp. 439-449.

Broek, D., 1982. *Elementary engineering fracture mechanics*. 3rd ed. Hague: Martinus Nijhoff Publishers.

Carpinteri, A., 2001. Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 50(12), pp. 2667-2682.

Carpinteri, A., Cornetti, P., Barpi, F. & Valente, S., 2003. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 70, pp. 1809-1839.

Castano, M. A. R., 2016. *Modelagens 2D e 3D para avaliação de reativação de falhas geológicas em reservatórios de petróleo (Dissertação de Mestrado)*, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Celes, W., Martha, L. F. C. R. & Gattass, M., 1990. Pós-processador Genérico de Elementos Finitos. *XI Congresso Íbero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, pp. 569-577.

Cherepanov, G., 1967. Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 31, pp. 476-488.

Dasgupta, A. & Pecht, M., 1991. Material failure mechanisms and damage models. *Reliability, IEEE Transactions*, 40(5), pp. 531-536.

Day, R. A. & Potts, D. M., 1994. Zero Thickness Interface Elements: Numerical Stability and Application. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18(4), pp. 689-708.

Desai, S. C., Zaman, M. M., Lightner, J. G. & Siriwardane, H. J., 1984. Thin-layer element for interfaces and joints. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8(1), pp. 19-43.

Dolbow, J., Moës, N. & Belytschko, T., 2001. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Volume 190, pp. 6825-6846.

Dowling, N. E., 2013. *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue*. 4th ed. s.l.:Pearson.

Duarte, C. A., Hamzeh, O. N. L., J., T. & Tworzydło, W. W., 2001. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Volume 190, pp. 2227-2262.

Duarte, C. & Oden, J., 1996. Hp clouds - An hp meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Volume 12, pp. 673-705.

Dugdale, D., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Solids*, Volume 8, pp. 100-108.

EERI, 2011. *EQ Clearing House*. [Online]  
Available at: <http://www.eqclearinghouse.org/2011-03-11-sendai/2011/08/03/eeri->

[steel-structures-reconnaissance-group/pgarage-gussetfracture/](http://steel-structures-reconnaissance-group/pgarage-gussetfracture/)

[Acesso em 20 Janeiro 2018].

Elices, M., Guinea, G. V., Gómez, J. & Planas, J., 2002. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 69, pp. 137-163.

Escobar, R. G., 2016. *Investigação do Fraturamento Hidráulico por Modelagens Analítica e Numérica (Dissertação de Mestrado)*, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Fleming, M., Chu, Y., Moran, B. & Belytschko, T., 1997. Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(8), pp. 1483-1504.

Fries, T. & Matthies, H. G., 2004. *Classification and Overview of Meshfree Methods*, Braunschweig: Institut für Wissenschaftliches Rechnen, Technische Universität Braunschweig.

Gálvez, J. C., Elices, M., Guinea, G. & Planas, J., 1998. Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading.. *International Journal of Fracture*, Volume 94, pp. 267-284.

Gasser, T. C. & Holzapfel, G. A., 2005. Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Volume 194, pp. 2859-2896.

Ghaboussi, J., Wilson, E. L. & Isenberg, J., 1973. Finite element for rock joints and interfaces. *Journal of the soil mechanics and foundations division*, 99(10), pp. 833-748.

Goodman, R. E., Taylor, R. L. & Brekke, T. L., 1968. A model for mechanics of jointed rock. *Journal of the soil mechanics and foundations division*, 94(3), pp. 637-659.

Hansbo, A. & Hansbo, P., 2004. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. Volume 193, pp. 3523-3540.

Harper, P. W. & Hallett, S. R., 2008. Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 75, pp. 2774-4792.

Henshell, R. D. & Shaw, K. G., 1975. Crack tip Finite Elements are Unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 9, pp. 495-507.

Hillerborg, A., Modéer, M. & Petersson, P.-E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, Volume 6, pp. 773-782.

Irwin, G. R., 1957. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 24, pp. 361-370.

Khoei, A. R., 2015. *Extended Finite Element Method Theory: and Applications*. 1st ed. s.l.:John Wiley & Sons, Ltd..

Khoei, A. R., Azadi, H. & Moslemi, H., 2008. Modeling of crack propagation via an automatic adaptive mesh refinement based on modified superconvergent patch recovery technique. *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 2921-2945.

Kraft, J. M., 1964. Crack toughness and strain hardening of steels. *Appl. Materials Research*, Volume 3, pp. 88-101.

Krysl, P. & Belytschko, T., 1999. The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Volume 44, pp. 767-780.

Legay, A., Wang, H. W. & Belytscho, T., 2005. Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8), pp. 991-1008.

Martha, L. F., Wawrzynek, P. A. & Ingraffea, A. R., 1993. Arbitrary Crack Representation Using Solid Modeling. *Engineering with Computers*, Volume 9, pp. 63-82.



McClintock, F. A., 1961. Fracture testing of high strength sheet materials. *Mat. Research and Standards*, pp. 277-279.

Melenk, J. & Babuška, I., 1996. The partition of unity finite element method basic theory and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Volume 139, pp. 289-314.

Mendes, C. A. T., 2016. *GeMA, um novo framework para a prototipação, desenvolvimento e integração de simulações multifísicas e multiescalas em grupos multidisciplinares (Tese de Doutorado)*, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Mendes, C. A. T., Gattass, M. & Roehl, D., 2016. *The GeMA Framework - An Innovative Framework for the Development of Multiphysics and Multiscale Simulations*. Crete Island, Proceedings of the VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.

Mergheim, J., Kuhl, E. & Steinmann, P., 2005. A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2), pp. 276-289.

Miranda, A. C. et al., 2003. Fatigue Life and Crack Path Predictions in Generic 2D Structural Components. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 70, pp. 1259-1279.

Moës, N. & Belytschko, T., 2002. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 813-833.

Moës, N., Dolbow, J. & Belytschko, T., 1999. A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 46, pp. 131-150.

Moody, N., Reedy, E. & Kent, M., 2002. *Physical basis for interfacial traction-separation laws*, Albuquerque: Sandia National Laboratories.

Moreau, K., Moës, N., Chevaugeon, N. & Salzman, A., 2017. Concurrent development of local and non-local damage with the Thick Level Set approach:

Implementation aspects and application to quasi-brittle failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 327(1), pp. 306-326.

Muñoz, L. F. P. & Roehl, D., 2017. A Continuation method with combined restrictions for nonlinear structure analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, Volume 130, pp. 53-64.

Murray, Y. D., Odeh, A. A. & Bligh, R., 2007. *Evaluation of LS-DYNA Concrete Material Model 159*, McLean: U.S. Department of Transportation - Federal Highway Administration.

Nooru-Mohamed, M., 1992. *Mixed-mode fracture of concrete: An experimental approach*, Delft: Technische Universiteit Delft.

Osher, S. & Fedkiw, R. P., 2001. Level set methods: AN overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, 169(2), pp. 463-502.

Pande, G. N. & Sharma, K. G., 1979. On joint/interface elements and associated problems of ill-conditioning, Short communications. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 3, pp. 293-300.

Remmers, J. J. C., de Borst, R. & Needleman, A., 2003. A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, Volume 31, pp. 69-77.

Rice, J. B., 1968. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 35, pp. 379-386.

Rosenfield, A. R. & Hahn, G. T., 1968. Sources of fracture toughness. *ASTM STP*, Volume 432, pp. 5-32.

Rueda, J. A., 2013. *Reativação de falhas geológicas com modelos numéricos discretos e distribuído (Dissertação de Mestrado)*, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Schneider, I., 2009. Derivation of separation laws for cohesive models in the course of ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(10), pp. 1450-1459.

Silva, P. A. B. V., 2015. *Uma Implementação do Método Estendido dos Elementos Finitos para Análise de Propagação de Fraturas Bidimensionais (Dissertação de Mestrado)*, Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Song, J.-H., Areias, P. M. A. & Belytschko, T., 2006. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 67, pp. 868-893.

Song, J.-H. & Belytschko, T., 2009. Cracking node method for dynamic fracture with finite elements. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Volume 77, pp. 360-385.

Stazi, F. L., Budyn, E., Chessa, J. & Belytschko, T., 2003. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, Volume 31, pp. 38-48.

Stolarska, M., Chopp, D. L., Moës, N. & Belytschko, T., 2001. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Volume 51, pp. 943-960.

Stolarska, M., Chopp, D., Moës, N. & Belytschko, T., 2001. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 51, pp. 943-960.

Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. & Belytschko, T., 2000. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Volume 48, pp. 1549-1570.

Sukumar, N. & Prévost, J., 2003. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I: computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 7513-7537, p. 40.

Ventura, G., Budyn, E. & Belytschko, T., 2003. Vector level sets for description of propagating crack in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 58, pp. 1571-1592.

Wells, G. N. & Sluys, L. J., 2001. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 50, pp. 2667-2682.

Williams, M. L., 1957. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 109-114.

Winkler, B. J., 2001. *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten betonstrukturen auf der grundlage eines objektiven werkstoffgesetzes für beton (Ph.D. thesis)*, Innsbruck: University of Innsbruck.

Wu, E. M. & Reuter, R. C., 1965. *Crack Extension in Fiberglass Reinforced Plastics*, Illinois: T. & AM Report No. 275, University of Illinois.

Xu, X. & Needleman, A., 1994. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 42, pp. 1397-1434.

Xu, Y. & Yuan, H., 2009. Computational analysis of mixed-mode fatigue crack growth in quasi-brittle materials using extended finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 76, pp. 165-181.

Xu, Y. & Yuan, H., 2011. Applications of normal stress dominated cohesive zone models for mixed-mode crack simulation based on extended finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 78, pp. 544-558.

Yoda, M., 1980. The J-Integral Fracture Criterion under Opening and Tearing Modes and Unloading Effects. *International Journal of Fracture*, 13(3), pp. 647-656.

Zi, G. & Belytschko, T., 2003. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 57, pp. 2221-2240.