4
Medida de desempenho do gráfico de controle

Neste capítulo, são apresentadas as ferramentas que nos permitem comparar o desempenho do gráfico utilizado por Kang & Albin (2000) para monitorar perfis lineares, o gráfico de controle χ^2 com parâmetros fixos (PF), com o gráfico proposto nesta dissertação, a saber, o gráfico de controle χ^2 com tamanho de amostra variável (TAV) para perfis lineares. A medida de desempenho empregada será o número médio de amostras até um sinal *NMA* (Montgomery, 2001). Neste trabalho, o sinal é dado por um ponto que representa a estatística χ^2 acima do LSC.

4.1. Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov pode ser descrita como um conjunto de estados, $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$. O processo inicia-se em um destes estados e move-se sucessivamente de um estado para outro. Se a cadeia encontra-se no estado s_i, no tempo h, então a probabilidade p_{ij} de que ela se mova para o estado s_j no tempo $h+1$, não depende de h, e somente depende do estado atual s_i. Cada movimento entre os estados é denominado de passo e as probabilidades p_{ij} são denominadas probabilidades de transição. Assim, em qualquer tempo h, uma cadeia de Markov finita pode ser caracterizada por uma matriz de probabilidades de transição. Uma distribuição de probabilidade específica o estado inicial do processo.

Um estado s_i de uma cadeia de Markov é chamado de absorvente se o processo encontrar-se no mesmo estado e for impossível mover-se para qualquer outro, isto é, $p_{ii} = 1$. Uma cadeia de Markov é dita absorvente se possuir pelo menos um estado absorvente e se, de qualquer estado, for possível mover-se para o estado absorvente. Em uma cadeia de Markov absorvente, os estados não absorventes são chamados de transientes.

Neste trabalho, considerou-se a existência de três estados:

- Estado 1 representa o estado onde $0 < \chi_j^2 < w$
- Estado 2 representa o estado onde $w < \chi_j^2 < LSC$
- Estado 3 representa o estado onde $\chi_j^2 > LSC$

Os estados 1 e 2 são estados transientes e o estado 3 é absorvente.

4.1.1. Processo fora de controle

Caso ocorra um deslocamento nos parâmetros β_0, β_1 e/ou em σ, isto é, $\sigma = \gamma\sigma_*$, $\gamma > 1$, então a variável $U_j = \frac{\chi_j^2}{\gamma^2}$ tem distribuição qui-quadrado não centrada com parâmetro de não centralidade definido por:

$$\tau_k = \frac{1}{\gamma^2}(n_k(\delta_0 + \delta_1 \bar{X})^2 + \delta_1^2 S_{xx}), \quad k = 1,2 \tag{4.1}$$

Quando $\gamma = 1$,

$$\tau_k = n_k(\delta_0 + \delta_1 \bar{X})^2 + \delta_1^2 S_{xx}, \quad k = 1,2 \tag{4.2}$$

Se não ocorrer deslocamentos em $\boldsymbol{\beta}$, então $\frac{\chi_j^2}{\gamma^2}$ tem distribuição qui-quadrado centrada, mesmo na situação em que $\gamma > 1$.

Ressalta-se, conforme já posto no capítulo 3, que, quando o processo está em controle, χ_j^2 tem distribuição qui-quadrado centrada com dois graus de liberdade.

Para o cálculo do número médio de amostras até um sinal é necessário calcular as probabilidades de transição apresentadas na subseção 4.1.2

4.1.2. Probabilidades de transição

Considerando os estados 1, 2 e 3 definidos na seção 4.1, caso ocorra um deslocamento $\boldsymbol{d} = (\delta_0\ \delta_1)$ em $\boldsymbol{\beta}_*$, a matriz de probabilidades de transição é definida por:

$$\boldsymbol{P_d} = \begin{bmatrix} P_{11}^d & P_{12}^d & P_{13}^d \\ P_{21}^d & P_{22}^d & P_{23}^d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde P_{ij}^d é a probabilidade de transição do estado *i* (estado anterior) para o estado *j* (estado atual).

A matriz de probabilidades de transição entre os estados transientes é dada por:

$$\boldsymbol{Q_d} = \begin{bmatrix} P_{11}^d & P_{12}^d \\ P_{21}^d & P_{22}^d \end{bmatrix}$$

As probabilidades de transição da matriz $\boldsymbol{Q_d}$ são dadas por:

$$P_{11}^d(n_1) = P\left(\chi_j^2\ (\tau_1) < w\right)$$

$$P_{12}^d(n_1) = P\left(w < \chi_j^2\ (\tau_1) < LSC\right)$$

$$P_{21}^d(n_2) = P\left(\chi_j^2\ (\tau_2) < w\right)$$

$$P_{22}^d(n_2) = P\left(w < \chi_j^2\ (\tau_2) < LSC\right)$$

onde, por exemplo, $P_{12}^d(n_1)$ é a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 2 dado que houve deslocamento em β_0 e/ou β_1.

Quando ocorrem mudanças (γ) em σ_* as probabilidades de transição da matriz $\boldsymbol{Q_d}$ passam a ser definidas como:

$$P_{11}^d(n_1) = P\left(U_j(\tau_1) < \frac{w}{\gamma^2}\right)$$

$$P_{12}^d(n_1) = P\left(\frac{w}{\gamma^2} < U_j(\tau_1) < \frac{LSC}{\gamma^2}\right)$$

$$P_{21}^d(n_2) = P\left(U_j(\tau_2) < \frac{w}{\gamma^2}\right)$$

$$P_{22}^{d}(n_2) = P\left(\frac{w}{\gamma^2} < U_j(\tau_2) < \frac{LSC}{\gamma^2}\right)$$

4.2.
Obtenção do *NMA*

Em intervalos regulares de tempo, seleciona-se uma amostra aleatória *j*, calculam-se as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão e a estatística χ_j^2, a qual é *plotada* no gráfico de controle. O *NMA* é o número esperado de amostras até que um sinal seja emitido pelo gráfico, ou seja, até que apareça uma amostra que gere valor de χ_j^2 acima do LSC.

A cada ponto *plotado* no gráfico, as seguintes hipóteses são testadas:

H_0: o processo está sob controle
H_1: o processo está fora de controle

Quando o processo está sob controle (H_0 é verdadeira) e $\chi_j^2 > LSC$, um sinal de alarme falso de que o processo está fora de controle é emitido; neste caso deseja-se que o valor de *NMA* seja elevado. Em contrapartida, quando o processo está fora de controle (H_1 é verdadeira) e $\chi_j^2 > LSC$, é emitido um sinal de alarme verdadeiro de que o processo está fora de controle e, para que desvios no processo sejam rapidamente detectados, valores de *NMA* pequenos são desejados. O valor do *NMA* depende do deslocamento nos valores dos parâmetros do processo, ou seja, depende do vetor $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = [\beta_*^0 + \delta_0\sigma_*, \beta_*^1 + \delta_1\sigma_*]'$ e de $\sigma = \gamma\sigma_*$.

Pelas propriedades da Cadeia de Markov (Çinlar, 1975), o número esperado de visitas pelos estados transientes é dado por,

$$\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q_d})^{-1}\boldsymbol{1}$$

onde:

$\boldsymbol{Q_d}$ é a matriz de transição sem os elementos associados ao estado absorvente,
$\boldsymbol{B}$ é o vetor de probabilidades iniciais $[p_0, 1 - p_0]$,
p_0 é a probabilidade acumulada abaixo de *w*, ou seja, $p_0 = P(\chi_j^2 < w \mid \chi_j^2 < LSC)$, $\chi_j^2 \sim \chi^2$ central com dois graus de liberdade,
$\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade de ordem 2,

$\mathbf{1} = [1 \ \ 1]'$.

O número médio de amostras até um sinal, quando ocorre um deslocamento em β_0 e/ou β_1, é dado pela expressão a seguir:

$$NMA\ (\delta_0, \delta_1) = \boldsymbol{B}\ (I - \boldsymbol{Q_d})^{-1}\mathbf{1} \tag{4.3}$$

Substituindo p_0 e as probabilidades de transição de $\boldsymbol{Q_d}$ na eq.(4.3) chega-se à seguinte expressão para o *NMA* quando o processo está fora de controle:

$$\mathrm{NMA}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{w}, \delta_0, \delta_1) = \left(P\left(\chi_j^2 < w \mid \chi_j^2 < LSC\right), 1 - P\left(\chi_j^2 < w \mid \chi_j^2 < LSC\right)\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11}^d(n_1) & P_{12}^d(n_1) \\ P_{21}^d(n_2) & P_{22}^d(n_2) \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

A expressão apresentada na eq. (4.4) depende das funções de probabilidade acumulada de uma distribuição qui quadrado centrada com 2 graus de liberdade $(p = 2)$, $F\ (x, p)$ e de uma distribuição qui quadrado não centrada $G\ (x; p, \tau)$. Expressões para estas funções podem ser encontradas em Johnson & Kotz (1969).

Nota-se que, quando existe deslocamento $(\boldsymbol{d})$ em $\boldsymbol{\beta}_*$, o *NMA* depende da função de probabilidade acumulada da distribuição $\chi_j^2\ (\tau_1)$ ou $\chi_j^2\ (\tau_2)$, ou seja, depende do tamanho da amostra.

Para comparar o desempenho de gráficos de controle, no caso o gráfico de controle qui-quadrado com TAV e o gráfico de controle qui-quadrado com PF para monitoramento de perfis lineares, a medida de desempenho que está sendo utilizada é o *NMA*, para valores específicos de δ_0 e δ_1. Entretanto, para que as comparações sejam justas, a mesma quantidade de recursos com inspeção e alarmes falsos, quando o processo está em controle, deve ser imposta. Isto é feito impondo a seguinte restrição:

$$p_0 n_1 + (1 - p_0) n_2 = n_0 \tag{4.5}$$