

3 Monitoramento de perfis lineares

Neste capítulo, na seção 3.1, são apresentados alguns exemplos de processos cuja característica de qualidade pode ser representada por um perfil linear. Os exemplos contextualizam a importância do monitoramento de perfis. O modelo de regressão linear simples, no qual uma característica de qualidade tem uma relação linear com outra variável é apresentado na seção 3.2. Uma vez que o gráfico proposto é um gráfico baseado na distribuição χ^2 , esta distribuição é apresentada na seção 3.3. E, por fim, na seção 3.4, é apresentado o gráfico proposto, isto é, o gráfico de controle multivariado χ^2 com tamanho de amostra variável (TAV) para o monitoramento de perfis, mais especificamente, para o monitoramento do intercepto e da inclinação, no qual a estatística “plotada” é dada pelas estimativas obtidas pelo método de mínimos quadrados.

3.1. Perfis como características de qualidade do processo

Os gráficos de controle são úteis para monitorar processos caracterizados por uma ou mais características de qualidade de interesse. Entretanto, a característica de qualidade de um processo pode ser caracterizada por um perfil ou uma relação funcional envolvendo uma variável resposta e uma ou mais variáveis explicativas. O monitoramento de perfis é utilizado para verificar a estabilidade desta relação ao longo do tempo. Quando o perfil não sofre alteração, diz-se que o processo encontra-se em controle. Contudo, se ocorrer alguma variação excessiva, diz-se que o processo encontra-se fora de controle, havendo a necessidade da realização de procedimentos de investigação e medidas de intervenção ou corretivas.

Nesta seção são apresentados três exemplos de processos de produção em que é necessário utilizar, ao invés de um simples número, uma função ou um perfil para monitorar as suas respectivas características de qualidade.

Exemplo 1: Calibração de um sistema de cromatografia iônica

Stover & Brill (1998) estudaram a fase I de gráficos de controle de perfis lineares, onde é feita a estimação dos parâmetros do modelo de regressão linear simples, usando dados históricos do processo quando o mesmo apresenta-se estável. Aplicaram gráfico de controle em laboratórios de cromatografia com o intuito de determinar a frequência apropriada de calibração para um típico sistema de cromatografia iônica com detecção suprimida de condutividade.

Os autores constataram que os analistas ao usarem cromatógrafos para quantificar as espécies químicas, frequentemente, calibravam os instrumentos diariamente ou antes de cada uso. Stover & Brill (1998) suspeitaram que uma cromatografia iônica é suficientemente estável para reduzir a frequência de calibração. Segundo eles, para um sistema estável, o uso indiscriminado de curvas de calibração diárias pode ser prejudicial ao desempenho do método. Propuseram, então, que, se a calibração não muda com o tempo, o melhor desempenho do método pode ser obtido através de uma curva de calibração fixa até que uma alteração estatisticamente significativa ocorra na medição do instrumento.

O estudo apresentou resultados de 44 curvas de calibração para três espécies de fosfato (ortofosfato, pirofosfato e tripolifosfato) quantificadas por um sistema de cromatografia iônica com supressão de condutividade e com eluição usando gradiente de NaOH. Foram usados quatro níveis de calibração. Para cada curva de calibração foram estimados, por mínimos quadrados, o intercepto e a inclinação. As curvas de calibração fixas, para cada espécie de fosfato, foram definidas através da média das primeiras estimativas do intercepto e da inclinação.

Stover & Brill (1998) verificaram que as espécies ortofosfato e pirofosfato apresentaram respostas estáveis ao longo de dez semanas de estudo, enquanto que a frequência ótima de calibração para o tripolifosfato ficou em uma semana. O tripolifosfato apresentou resposta que tendia a decrescer com o aumento do tempo de eluição do NaOH.

Baseados nos resultados deste estudo, Stover & Brill (1998) concluíram que, para os casos em que a resposta é estável, o uso de uma única curva de calibração durante vários meses pode ocasionar igual ou maior precisão do método em comparação com o emprego da calibração diária dos instrumentos. Com relação às frequências ideais de calibração, chegaram à conclusão de que

para o ortofosfato e o pirofosfato são iguais ou superiores a dez semanas e para o tripolifosfato, devem ser semanais.

Ao final, concluíram também que a rotina de monitoramento de um processo pode ser feita de modo mais econômico através do emprego dos gráficos de controle, enfatizando, ainda, a utilidade da adoção de um programa geral de Controle Estatístico de Qualidade para melhor compreensão das causas de erro nos métodos de cromatografia iônica.

Exemplo 2: Processo de fabricação de semicondutores

Kang & Albin (2000) fizeram uso do gráfico de controle χ^2 com o objetivo de monitorar o processo de produção de semicondutores envolvendo a calibração de um controlador de fluxo de massa (MFC – mass flow controller), no qual o desempenho do processo é caracterizado por uma função linear.

O problema relatado por Kang & Albin (2000) ocorre nas etapas de gravação de microplaquetas em um wafer. O wafer é colocado em uma câmara e exposto a gases que retiram material do wafer que não tenha sido protegido por material fotorresistente, criando assim, um padrão requerido para aquela camada de microplaquetas. Durante o processo, o equipamento crítico que controla o fluxo de gases é o MFC. Existem quatro tipos de gases, cada qual com seu próprio MFC.

Para monitorar o desempenho de um MFC costuma-se, em intervalos regulares de tempo, interromper o processo de produção para desconectar o MFC e, se necessário, recalibrá-lo. Isto ocasiona uma parada no processo de aproximadamente quatro horas por cada interrupção. Devido a essas interrupções, segundo Sheriff (1995), um MFC que custa 1500 dólares pode causar perdas superiores a 250 mil dólares durante a sua vida útil de 6 a 7 anos.

Na alternativa proposta por Kang & Albin (2000), a desconexão de um MFC somente será necessária quando o método de controle estatístico indicar a presença de causas externas que possam estar atuando no processo de forma a deixá-lo fora de controle. Quando tal fato ocorrer, deve-se interromper o processo para recalibrar o MFC.

O monitoramento do processo é baseado em uma relação advinda de um princípio físico (lei de gás ideal). Se um MFC está sob controle, então a pressão P medida na câmara é aproximadamente uma função linear do fluxo de massa X alocado pelo MFC:

$$P = P_0 + \left(\frac{Q_{max}RTt}{V} \right) X$$

onde a inclinação depende do fluxo máximo (Q_{max}), tipo do gás (R), volume da câmara (V), temperatura (T), tempo (t), e o intercepto representa a pressão inicial.

O processo de monitoramento proposto por Kang e Albin (2000) demora apenas de 20 a 30 minutos e, além disso, um MFC só precisará ser desconectado quando o mesmo estiver fora de controle. Em intervalos de tempo regulares o processo de fabricação é parado e todos os gases são evacuados da câmara. Para cada gás, separadamente, um MFC é ajustado para alguns níveis de fluxo de gás e a correspondente pressão na câmara é medida. Uma amostra j é composta por um conjunto de dados (x_i, y_{ij}) , onde x_i correspondem aos fluxos de gás e y_{ij} são as medidas de pressão na câmara. Em seguida, os dados da amostra são *plotados* para obter o perfil da amostra. Se o MFC estiver em controle, a amostra deve seguir uma função próxima da função linear teórica. Porém, se algum dos MFC's apresentar descontrole, deve-se interromper o processo e desconectar o MFC descontrolado para recalibrá-lo.

Exemplo 3: Manufatura de madeira

Há décadas, de acordo com Staudhammer et al. (2007), os gráficos de controle de Shewhart têm ajudado os fabricantes de madeira a monitorar o processo de serragem e a produzir madeiras com padrões de tamanho consistentes.

Usualmente o controle estatístico do processo é realizado manualmente, com a retirada de um pequeno grupo de tábuas do processo de serragem, em intervalos freqüentes e medidas com um calibrador digital. Todavia, tecnologias em tempo real, usando sensores de distância a laser sem contato, foram introduzidas, recentemente, para aperfeiçoar programas de controle estatístico em fábricas de madeira, aumentando o volume de dados apropriados para este tipo de controle.

Staudhammer et al. (2007) introduziram um novo sistema de controle estatístico de processo que monitora simultaneamente múltiplas superfícies de madeira e atinge, especificamente, os três defeitos mais comuns à serragem, usando medições em tempo real com sensores de distância a laser.

Defeitos ocorrem com freqüência no processo de serragem de madeiras e têm uma variedade de causas. Os três mais comuns são: *Taper*, *Snipe/Flare* e *Snake*. *Taper* ocorre quando há um desalinhamento na máquina, tornando a tábua gradualmente mais grossa ou gradualmente mais fina, ao longo do seu comprimento. *Snipe* e *Flare* são também causados por desalinhamento do aparelho, sendo que *Snipe* ocorre quando o desalinhamento provoca uma seção triangular a ser removida da extremidade da madeira serrada. *Flare* ocorre quando esta seção triangular é deixada na extremidade da madeira serrada, engrossando-a. *Snake* é a presença de ondulações ao longo da tábua.

O aparelho usado por Staudhammer et al. (2007) incluía um carro móvel e um codificador, bem como quatro sensores de distância a laser, colocados dois de cada lado do carro e posicionados para realizarem medições 2,54cm acima da parte inferior de uma tábua e 2,54cm abaixo do topo de uma tábua.

A amostra de madeira serrada consistia de 110 peças de madeira selecionadas de forma aleatória com dimensões de 80mm de espessura e 135mm de largura. A separação da madeira foi feita em uma serra quadrangular, onde várias soluções de corte eram possíveis, com uso de uma serra semelhante a uma espécie de fita de metal dentada, guiada por rodas (*bandsaw*), de lâminas redondas dentadas colocadas sobre um cabo (*circular saws*) e de tambores de metal cortantes com facas colocadas sobre cabeças rotativas (*chipper heads*). Os resultados foram obtidos separadamente para cada uma das quatro combinações de configuração de serra por lado:

- BB (ambos os lados da tábua cortados com *bandsaw*, $n=41$ tábuas)
- BC (lado 1 cortado com *bandsaw* e lado 2 com *chipper heads*, $n=24$ tábuas)
- CB (lado 1 cortado com *chipper heads* e lado 2 com *bandsaw*, $n=24$ tábuas)
- RR (ambos os lados cortados com *circular saws*, $n=21$ tábuas)

Os dados brutos consistiram da medição da distância de cada um dos quatro *lasers* para a superfície da madeira L_{ij} , onde $i = 1,2$ é o lado da tábua e $j = 1,2$ é a posição do *laser*. As quatro configurações possíveis foram: L_{11} , L_{12} , L_{21} , L_{22} . Os dados foram filtrados para detectar erros de medição usando técnicas de processamento de imagem e, posteriormente, foram convertidos para $(Y_{11}, Y_{12},$

Y_{21} , Y_{22}) que tiveram como referência o centro da tábua para medir a distância até a superfície da tábua.

Os autores sugeriram gráficos de controle não tradicionais, baseados na decomposição das medidas em tendência, ondulação e rugosidade. Os gráficos propostos foram usados para monitorar o parâmetro de inclinação de um modelo de regressão linear múltipla e a ondulação através de observações de cada pedaço de madeira. Com dados de sensores de distância a laser em tempo real, tendências lineares foram extraídas dos dois fluxos de dados tomados de cada lado de cada tábua e usados para monitorar especificamente *taper*, *snipe* e *flare*. *Taper* pode ser detectado examinando a tendência ao longo de todo o comprimento da tábua, enquanto que *snipe* e *flare* se restringem aos 15 cm finais da tábua. Na presença destes defeitos, as séries de dados tomados de ambas as posições do laser, do topo e da parte inferior da tábua, teriam uma tendência a acréscimo ou decréscimo. Portanto uma regressão linear ajustada simultaneamente para ambas as séries teria um coeficiente associado com a direção da serragem o qual seria significativamente diferente de zero.

Usando os dados dos sensores de distância a laser de cada lado de cada tábua, uma superfície foi simultaneamente ajustada aos dados para ambas as posições do laser (parte inferior e topo da tábua). Logo, para um grupo b de tábuas, um modelo de regressão para detectar tendências lineares foi uma função da distância horizontal ao longo da tábua, x_1 , e de um indicador da posição do laser, x_2 , ($x_2 = 0$ para a posição do laser na parte inferior e $x_2 = 1$ para a posição do laser no topo). As medições y_{klm} , da k -ésima tábua ($k = 1$ a b), posição do laser l ($l = 1$ ou 2) e da m -ésima observação ao longo da tábua ($m = 1$ a n_{kl}) do comprimento total da tábua foram descritos através da função linear:

$$y_{klm} = \tau_{0k} + \tau_{1k} x_1 + \tau_{2k} x_2 + \varepsilon_{klm}$$

onde τ_{0k} , τ_{1k} e τ_{2k} são os coeficientes de regressão estimados usando observações ao longo do comprimento total da k -ésima tábua e ε_{klm} é o termo de erro aleatório. Para esclarecer sobre diferenças específicas de serragem, modelos de regressão foram ajustados separadamente para cada lado de cada uma das quatro configurações de serragem. Outro modelo de regressão foi ajustado para descrever as observações somente na parte final das tábuas, ou seja, nas extremidades das tábuas, para detectar *snipe* e *flare*:

$$y_{klm} = \eta_{0k} + \eta_{1k} x_1 + \eta_{2k} x_2 + \psi_{klm}$$

onde η_{0k} , η_{1k} e η_{2k} são os coeficientes de regressão estimados usando os últimos 15 cm de observações ao longo do comprimento total da k -ésima tábua e ψ_{klm} é o termo de erro aleatório.

Os autores denominaram os dois gráficos de gráfico D_τ e gráfico D_η . Como os gráficos propostos objetivaram detectar defeitos específicos ligados à tendência, apenas os coeficientes de inclinação foram monitorados.

O gráfico D_τ monitora a estimativa do coeficiente de regressão associado com a distância horizontal ao longo da tábua (\hat{t}_{1k}) por configuração de serragem e lado da tábua. Como \hat{t}_{1k} apresentou distribuição aproximadamente normal foram estabelecidos limites de controle para cada configuração de serragem e lado da tábua com base no erro padrão dos valores de \hat{t}_{1k} . Na condição sob controle, espera-se que a tendência ao longo de cada tábua seja igual a zero ($E(\hat{t}_1) = 0$).

O gráfico D_η monitora a estimativa da inclinação para cada tábua em cada configuração de serragem e lado ($\hat{\eta}_{1k}$). Como $\hat{\eta}_{1k}$ também apresentou distribuição aproximadamente normal os limites de controle para este gráfico foram estabelecidos de forma similar ao gráfico D_τ .

Além da tendência, as medições das superfícies das tábuas foram decompostas em componentes de rugosidade e ondulação. A rugosidade encontrada nos dados dos sensores de *laser* pode indicar defeitos de baixa frequência como *snake*. Para detectar *snake*, primeiro eliminou-se a tendência dos dados e, posteriormente, com a aplicação de filtro de média-móvel com janela de 50 observações obteve-se estimativas para as componentes de rugosidade e ondulação (w_p).

Os autores propuseram um terceiro gráfico para monitorar a ondulação de cada tábua (gráfico D_{wp}). Neste gráfico, assumiu-se que os valores da ondulação das tábuas por cada configuração de serragem e lado da tábua apresentam uma distribuição normal. O monitoramento do gráfico D_{wp} foi feito através dos limites de controle que foram calculados a partir do desvio padrão dos valores da ondulação.

Os autores concluíram que os gráficos D_τ e D_η foram eficazes para detectar os defeitos *taper* e *flare/snipe* respectivamente. O gráfico D_{wp} foi considerado um bom ponto de partida para detectar padrões de ondulação originados pelo defeito *snake*, exceto quando a frequência da ondulação era alta e a amplitude, baixa.

3.2. Modelo de regressão simples

Nesta seção, é apresentado o modelo de regressão do processo que está sendo monitorado, cuja característica de qualidade tem uma relação linear com uma variável no processo de produção. Assume-se, então, que a característica de qualidade é representada por um modelo de regressão linear simples, o qual é dado por:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (3.1)$$

onde β_0 e β_1 são constantes, x é uma variável independente e ε é uma variável aleatória normal com média nula e variância σ^2 , $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

De tempos em tempos, extrai-se do processo uma amostra, indexada por j , de tamanho n , ou seja, n leituras da variável y nos valores de x denotados por x_1, \dots, x_n . Deste modo, o modelo pode ser expresso como:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

A diferença entre a característica da qualidade do processo e a parte determinística do modelo é dada pelo erro aleatório:

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

Para cada amostra j retirada do processo, as seguintes suposições acerca do modelo são assumidas:

- $x_i, 1 \leq i \leq n$, com $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, não é uma variável aleatória, são valores pré-fixados para todas as amostras extraídas do processo;
- β_0 é o coeficiente linear ou intercepto da reta;
- β_1 é o coeficiente angular ou inclinação da reta.
- Os erros ε_{ij} são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição normal de média zero e variância σ^2 , ou seja:

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \quad 1 \leq i \leq n, j \geq 1 \quad (3.3)$$

Nestas condições, para cada i e j , Y_{ij} , definido pela eq. (3.2) é uma variável aleatória e fica garantida a independência entre as observações, supondo que os valores de Y_{ij} são obtidos por amostragem aleatória de uma população infinita.

Então:

$$Cov(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik}) = E\left\{\left(\varepsilon_{ij} - E(\varepsilon_{ij})\right)\left(\varepsilon_{ik} - E(\varepsilon_{ik})\right)\right\} = E(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik}) = 0 \quad \forall j \neq k \quad (3.4)$$

Dado um valor específico de x_i , a esperança e a variância de Y_{ij} são dadas por:

$$E(Y_{ij}/x_i) = E(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 x_i + E(\varepsilon_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad (3.5)$$

$$Var(Y_{ij}/x_i) = Var(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{ij}) = Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 \quad (3.6)$$

Portanto, $Y_{ij}/x_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$.

Escrevendo o modelo para cada amostra j e para cada observação i , tem-se:

$$Y_{1j} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_{1j}$$

$$Y_{2j} = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_{2j}$$

⋮

$$Y_{nj} = \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_{nj}$$

Usando notação matricial, o modelo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} Y_{1j} \\ Y_{2j} \\ \vdots \\ Y_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \varepsilon_{2j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nj} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$Y_j = X\beta + \varepsilon_j \quad (3.7)$$

Na equação (3.7), tem-se que:

- o vetor Y_j que representa uma amostra aleatória de tamanho n , é dado por n variáveis aleatórias

$$Y_j = [Y_{1j} \ Y_{2j} \ \dots \ Y_{nj}]^T;$$

- a matriz de variáveis regressoras, que contém a informação das posições fixas x_i , $i = 1, \dots, n$, nas quais o vetor Y é medido cada vez que se forma uma amostra j , é dada por

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix};$$

- o vetor de parâmetros do modelo quando o processo está em controle, é dado por

$$\beta = [\beta_0 \ \beta_1]^T;$$

- o vetor de erros aleatórios, cujos componentes são variáveis aleatórias independentes, tem distribuição normal multivariada e é representado por

$$\varepsilon_j = [\varepsilon_{1j} \ \varepsilon_{2j} \ \dots \ \varepsilon_{nj}]^T;$$

Das eqs. (3.3) e (3.7), tem-se que a esperança dos vetores aleatórios ε_j e Y_j são respectivamente, $E(\varepsilon_j) = 0$ e $E(Y_j) = X\beta$.

A matriz de covariância do vetor Y_j é a matriz de covariância de ε_j , que é dada por:

$$\begin{aligned} V &= E \left\{ (\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)) (\varepsilon_j - E(\varepsilon_j))^T \right\} = E(\varepsilon_j \varepsilon_j^T) \\ &= E \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \varepsilon_{2j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nj} \end{bmatrix} [\varepsilon_{1j} \ \varepsilon_{2j} \ \dots \ \varepsilon_{nj}] \right) = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_{1j}\varepsilon_{1j}) & E(\varepsilon_{1j}\varepsilon_{2j}) & \dots & E(\varepsilon_{1j}\varepsilon_{nj}) \\ E(\varepsilon_{2j}\varepsilon_{1j}) & E(\varepsilon_{2j}\varepsilon_{2j}) & \dots & E(\varepsilon_{2j}\varepsilon_{nj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\varepsilon_{nj}\varepsilon_{1j}) & E(\varepsilon_{nj}\varepsilon_{2j}) & \dots & E(\varepsilon_{nj}\varepsilon_{nj}) \end{pmatrix} \quad (3.8) \end{aligned}$$

Pela eqs. (3.3) e (3.4), a matriz de covariância V fica:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Logo,

$$\varepsilon_j \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (3.9)$$

$$Y_j \sim N(X\beta, \sigma^2 I) \quad (3.10)$$

3.2.1. Estimação pelo método dos mínimos quadrados

Nesta subseção, é apresentado o método dos mínimos quadrados para definir um estimador para os parâmetros β da variável aleatória Y dada na equação (3.10).

Consideramos o modelo dado pela equação (3.2), onde uma característica da qualidade Y_{ij} tem relação aproximadamente linear com uma variável regressora x_i presente no processo de produção. O método dos mínimos quadrados consiste em minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre o valor atribuído à característica de qualidade pela reta de regressão, $\beta_0 + \beta_1 x_i$, e a característica Y_{ij} medida. Para uma amostra j os desvios são dados por:

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

Assim, busca-se obter valores para os coeficientes β_0 e β_1 de tal forma que seja mínima a soma:

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \beta_0 + \beta_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{ij})^2$$

Calculando-se as derivadas de S em relação a β_0 e β_1 :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \beta_0 + \beta_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \beta_0 + \beta_1 x_i) x_i$$

Igualando a zero as equações acima tem-se, para cada amostra j , um estimador para β_0 e β_1 :

$$-2 \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \hat{\beta}_{j0} - \hat{\beta}_{j1} x_i) = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \hat{\beta}_{j0} - \hat{\beta}_{j1} x_i) x_i = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^n Y_{ij} - n \hat{\beta}_{j0} - \hat{\beta}_{j1} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{ij} x_i - \hat{\beta}_{j0} \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_{j1} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 0$$

Resolvendo as equações, obtemos os estimadores do intercepto e da inclinação da reta de regressão:

$$\hat{\beta}_{j0} = \bar{Y}_j - \hat{\beta}_{j1} \bar{x} \quad (3.11)$$

$$\hat{\beta}_{j1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_{ij} - \bar{Y}_j)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.12)$$

onde, usualmente, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e $\bar{Y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ij}$

Define-se

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_{ij} - \bar{Y})$$

Desta forma, os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros da reta de regressão podem ser dados por:

$$\hat{\beta}_{j0} = \bar{Y}_j - \hat{\beta}_{j1} \quad (3.13)$$

$$\hat{\beta}_{j1} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (3.14)$$

Prova-se que $\hat{\beta}_{j0}$ e $\hat{\beta}_{j1}$ são estimadores não tendenciosos para os parâmetros β_0 e β_1 , respectivamente:

$$E(\hat{\beta}_{j0}) = \beta_0 \quad (3.15)$$

$$E(\hat{\beta}_{j1}) = \beta_1 \quad (3.16)$$

As variâncias e a covariância de $\hat{\beta}_{j0}$ e $\hat{\beta}_{j1}$ são dadas por:

$$\sigma_0^2 = \text{Var}(\hat{\beta}_{j0}) = \sigma^2(n^{-1} + \bar{x}^2 S_{xx}^{-1}) \quad (3.17)$$

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(\hat{\beta}_{j1}) = \sigma^2 S_{xx}^{-1} \quad (3.18)$$

$$\sigma_{01} = \text{Cov}(\hat{\beta}_{j0}, \hat{\beta}_{j1}) = -\sigma^2 \bar{x} S_{xx}^{-1} \quad (3.19)$$

Os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros da reta de regressão $\hat{\beta}_{j0}$ e $\hat{\beta}_{j1}$ são funções lineares da característica da qualidade Y_{ij} , que possui distribuição normal. Segundo o teorema das combinações lineares, uma variável aleatória obtida pela combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes tem também distribuição normal. Então, $\hat{\beta}_{j0}$ e $\hat{\beta}_{j1}$ possuem distribuição normal:

$$\hat{\beta}_{j0} \sim N(\beta_0, \sigma_0^2)$$

$$\hat{\beta}_{j1} \sim N(\beta_1, \sigma_1^2)$$

Além disso, prova-se que $\hat{\beta}_{j_0}$ e $\hat{\beta}_{j_1}$ são estimadores não tendenciosos e têm variância mínima dentre todos os estimadores lineares não tendenciosos (Montgomery & Runger, 1999).

Generalizando, para o caso do modelo escrito na forma matricial, dado pela equação (3.7), o estimador de mínimos quadrados para o vetor β , é dado por:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

$$\text{onde: } \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} n\bar{Y} \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i \end{bmatrix}$$

A distribuição do estimador de mínimos quadrados do vetor β é dada por:

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})$$

3.3.

A distribuição χ^2

Sejam as variáveis aleatórias normais $Z_i \sim N(0,1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ independentes. A função aleatória definida por $\chi^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ é chamada distribuição χ^2 (qui-quadrado) com n graus de liberdade, usualmente denotada por χ_n^2 . Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a variável aleatória definida por $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ terá distribuição $N(0,1)$. Além disso, $Z = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2$ terá distribuição χ^2 com um grau de liberdade, χ_1^2 .

Considere agora $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T \sim N(0, \mathbf{I}_2)$, ou seja, com distribuição normal bivariada com média zero e matriz de covariância igual à matriz identidade 2×2 . A distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade é definida por:

$$\chi_2^2 = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = Z_1^2 + Z_2^2$$

Seja \mathbf{X} um vetor aleatório com distribuição normal bivariada $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz simétrica e não-negativa definida com posto 2. Pelo teorema da decomposição espectral (Strang (1988)), uma matriz simétrica \mathbf{Q} de dimensão $n \times n$ pode ser expressa em termos de seus n pares de autovalores e autovetores (λ, e) . Sendo assim, pode-se escrever $\boldsymbol{\Sigma}$ da seguinte forma:

$$\Sigma = \lambda_1 e_1 e_1^T + \lambda_2 e_2 e_2^T$$

onde (λ_i, e_i) $i = 1, 2$, são os pares de autovalor, autovetor de Σ .

A partir da decomposição espectral, pode-se construir uma matriz ortogonal P , isto é, $PP^T = P^T P = I$ ou $P^T = P^{-1}$, e uma matriz diagonal Λ constituída pelos autovalores de Σ , denominados λ_1 e λ_2 . Garante-se a existência das matrizes P e Λ tais que:

$$\Sigma = P\Lambda P^T \quad (3.20)$$

Por ser uma matriz de covariância, Σ é necessariamente não-negativa definida, sendo assim, $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2$. Além disso, por hipótese Σ tem posto 2 e, conseqüentemente $\lambda_i > 0, i = 1, 2$.

Seja R uma matriz diagonal 2x2 com elementos da diagonal principal $r_1 = \sqrt{\lambda_1}$ e $r_2 = \sqrt{\lambda_2}$. Desta forma, $\Lambda = RR$. De acordo com a eq. (3.20), tem-se:

$$\Sigma = PRRP^T = PRR^T P^T = PR(PR)^T = \Gamma\Gamma^T$$

onde $\Gamma = PR$. A matriz Γ faz o papel do desvio padrão no caso unidimensional, para efeitos de padronização.

Definindo:

$$\psi = \Gamma^{-1}(X - \mu)$$

demonstra-se que $\psi \sim N(0, I_2)$, já que:

$$E(\psi) = E(\Gamma^{-1}(X - \mu)) = \Gamma^{-1}E(X - \mu) = \Gamma^{-1}(E(X) - \mu) = 0$$

A matriz de covariância de ψ (γ) é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma &= E[(\psi - E(\psi))(\psi - E(\psi))^T] \\ &= E[\Gamma^{-1}(X - \mu)(\Gamma^{-1}(X - \mu))^T] \\ &= E[\Gamma^{-1}(X - \mu)(X - \mu)^T(\Gamma^{-1})^T] \\ &= \Gamma^{-1}E[(X - \mu)(X - \mu)^T](\Gamma^{-1})^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma^{-1} \Sigma (\Gamma^T)^{-1} \\
&= \Gamma^{-1} \Gamma \Gamma^T (\Gamma^T)^{-1} = I
\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\psi} \sim N(0, I_2)$, conclui-se que $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} = \psi_1^2 + \psi_2^2 \sim \chi_2^2$. Além disso, tem-se:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} &= (\Gamma^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}))^T \Gamma^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T (\Gamma^{-1})^T \Gamma^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T (\Gamma^T)^{-1} \Gamma^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T (\Gamma \Gamma^T)^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T (\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})
\end{aligned}$$

Logo a estatística $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T (\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ tem distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade: $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T (\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_2^2$

3.4.

Gráfico de controle χ^2 com tamanho de amostra variável

Nesta seção, apresenta-se o gráfico de controle χ^2 com tamanho de amostra variável para o monitoramento de um perfil linear ao longo da fase II.

Assim como o gráfico com parâmetros fixos empregado em Kang & Albin (2000), o gráfico proposto tem também por objetivo monitorar os parâmetros β_0 e β_1 de um perfil linear.

3.4.1.

Perfil linear monitorado

O perfil linear que está sendo monitorado neste trabalho é dado por:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Assume-se que os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e σ^2 do modelo, quando o processo está em controle, são conhecidos, mais especificamente, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_*$ e $\sigma = \sigma_*$ e, que a matriz de variáveis regressoras, \mathbf{X} , seja dada (em particular, $\boldsymbol{\Sigma}$ é conhecida). Deseja-se então, a partir das observações verificar se o processo continua em controle, isto é, se os parâmetros não sofreram alterações.

Conforme estudado em Kang & Albin (2000), neste trabalho também são analisadas mudanças ou desvios no vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \beta_1]^T$ do modelo de perfil linear assumido.

Quando o processo está fora de controle, o vetor de parâmetros é denotado por:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = [\beta_*^0 + \delta_0 \sigma_*, \beta_*^1 + \delta_1 \sigma_*]^T \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{d} = (\delta_0 \delta_1)$ representa o vetor de deslocamento, δ_k ($k = 0,1$) é a quantidade de desvios-padrão do erro que o parâmetro β_k ($k = 0,1$) se deslocou de seu valor de controle.

3.4.2. Estatística utilizada no monitoramento

O gráfico de controle proposto neste trabalho faz uso de dois tamanhos de amostras distintos, n_1 e n_2 , sendo $n_1 < n_0 < n_2$, onde n_0 representa o tamanho da amostra para o gráfico de controle χ^2 com parâmetro fixo.

Levando em consideração o modelo definido na seção 3.2 e as suposições associadas ao mesmo, considera-se que o perfil Y é medido nos valores da variável $x = x_i$, $i = 1, \dots, n_k$, onde $n_k = n_1$ ou $n_k = n_2$, dependendo do tamanho da amostra que se está utilizando. Então, para cada amostra j de tamanho n_k , $k = 1,2$, estimam-se por mínimos quadrados ordinários os parâmetros β_0 e β_1 , obtendo o vetor

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = [\hat{\beta}_{j0}, \hat{\beta}_{j1}]$$

As expressões de $\hat{\beta}_{j0}$ e $\hat{\beta}_{j1}$ são dadas por:

$$\hat{\beta}_{j0} = \bar{Y} - \hat{\beta}_{j1} \bar{X} \quad (3.22)$$

$$\hat{\beta}_{j1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n_k} (x_i - \bar{x})^2}, k = 1,2 \quad (3.23)$$

O vetor $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ tem distribuição normal com valor esperado estabelecido pelas equações (3.15) e (3.16); já os elementos da matriz de variância-covariância são dados pelas equações (3.17), (3.18) e (3.19):

$$E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j) = \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01} \\ \sigma_{01} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} \sigma^2 \quad (3.25)$$

O gráfico de controle χ^2 com variação no tamanho de amostra monitora os parâmetros β_0 e β_1 através da estatística χ_j^2 . Para verificar se o processo está em controle, isto é, se os seus parâmetros não sofreram alterações, a estatística utilizada para o monitoramento no gráfico de controle, é dada por:

$$\chi_j^2 = [\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j - \boldsymbol{\beta}_*]' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j - \boldsymbol{\beta}_*] \quad (3.26)$$

onde $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j = [\hat{\beta}_{j0}, \hat{\beta}_{j1}]$, a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ e o vetor $\boldsymbol{\beta}_*$ tem valores conhecidos.

Quando o processo está em controle, χ_j^2 tem distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade e LSC= $\chi_{2,\alpha}^2$, onde $\chi_{2,\alpha}^2$ é o 100 (1- α) percentil da distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade. A probabilidade do erro do tipo I (α), ou seja, a probabilidade de χ_j^2 ser maior do que o LSC, dado que o processo se encontra em controle é:

$$\alpha = P(\chi_j^2 \geq LSC \mid \widehat{\boldsymbol{\beta}}_j \sim N(\boldsymbol{\beta}_*, \boldsymbol{\Sigma}))$$

Em intervalos de tempo regulares, extrai-se, aleatoriamente, uma amostra j de tamanho n_1 ou n_2 e calculam-se as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão, obtendo-se o vetor $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j$. Posteriormente, é feito o cálculo da estatística χ_j^2 , a qual é plotada no gráfico χ^2 . Se $\chi_j^2 < \chi_{2,\alpha}^2$, assume-se que o processo está sob controle. Caso contrário, o processo pode estar fora de controle e deve-se investigar e corrigir as causas que podem ter levado a esta situação.

3.5.

Gráfico de controle χ^2 com tamanho de amostra variável

O gráfico de controle χ^2 com variação no tamanho de amostra possui, além do limite superior de controle (LSC), um limite de aviso w abaixo do LSC. Ao contrário do gráfico de controle empregado por Kang & Albin (2000), que possui tamanho de amostra fixo (n_0), o gráfico de controle proposto neste

trabalho faz uso de dois tamanhos de amostras distintos, n_1 e n_2 , sendo $n_1 < n_0 < n_2$.

Com relação ao tamanho de amostra a ser usado, tem-se que, se $0 < \chi_{j-1}^2 < w$, a amostra j terá tamanho n_1 , se $w < \chi_{j-1}^2 < LSC$, a amostra j terá tamanho n_2 e, finalmente, se $\chi_{j-1}^2 > LSC$, o processo pode estar fora de controle. Neste caso, uma investigação deve ser iniciada para verificar se de fato existem causas não aleatórias atuando no processo, a fim de que uma ação corretiva possa ser tomada. Quando o processo se inicia, o primeiro tamanho de amostra é escolhido ao acaso, com probabilidade dada por:

$$p_0 = P(\chi_j^2 < w | \chi_j^2 < LSC) \quad (3.28)$$