3
METODOS DE SOLUÇAO

3.1
Introdução

Existem vários métodos de solução de equações não-lineares, cada qual com uma justificativa racional. Ao contrário dos métodos de solução de sistemas lineares, estes métodos não garantem, em geral, a convergência para o resultado correto de qualquer problema. O analista deve ser capaz, baseado na sua experiência, de escolher o método mais adequado para o problema em questão. Além disso, mesmo escolhido o método, alguma dificuldade aparece na determinação de parâmetros do tipo tolerâncias, incrementos de carga e número máximo de iterações.

Este capítulo apresenta a técnica de solução para sistemas de equações algébricas não-lineares obtidas após a integração das equações de equilíbrio do sistema discreto. O capitulo começa com uma revisão dos procedimentos existentes que podem ser usados para obter uma solução adequada.

3.2
Revisão de procedimentos de solução

A dificuldade na análise não-linear é que a rigidez e força interna, as quais têm que ser levadas em conta para o procedimento de solução dependem dos deslocamentos. Vários procedimentos têm sido desenvolvidos com diferentes maneiras de tratar esta dependência, mas isto é freqüentemente difícil de realizar, essencialmente para problemas com não linearidades severas e condições locais de carregamento e descarregamento. Se o fenômeno fundamental presente no comportamento da estrutura pode ser capturado pelo procedimento de solução, aproximações e simplificações podem ser introduzidas para melhorar a eficiência do procedimento da análise. No entanto a eficiência é freqüentemente sacrificada para alcançar estabilidade no processo de solução. Conseqüentemente muitas alternativas têm sido exploradas e não é a intenção revisar todos os procedimentos de solução neste trabalho. Neste capítulo é inicialmente revisado o procedimento incremental iterativo para análises estáticas de estruturas não-lineares. Isto define a formulação básica para procedimentos de solução. O procedimento de Newton Raphson é o procedimento clássico.

3.3
Procedimento de Solução Incremental e Iterativo

Análise não-linear por elementos finitos recai em geral no sistema seguinte:

$$[K] \quad \{u\} = \{P\} - \{Q\} \tag{3.1}$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{u\}$ é o vetor de deslocamento incremental nodal, e $\{P\}$ e $\{Q\}$ são os vetores de força externa e força equilibrada respectivamente como mostra a figura (3.1). Para análises não-lineares, $[K]$ e $\{Q\}$ dependem dos deslocamentos e tensões na estrutura. Quando uma estrutura esta em equilíbrio, a diferença entre as forças internas e as cargas externas é zero. Caso contrário as forças estão desbalanceadas de uma quantidade $\{U\}$. Sendo

$$\{U\} = \{P\} - \{Q\} \tag{3.2}$$

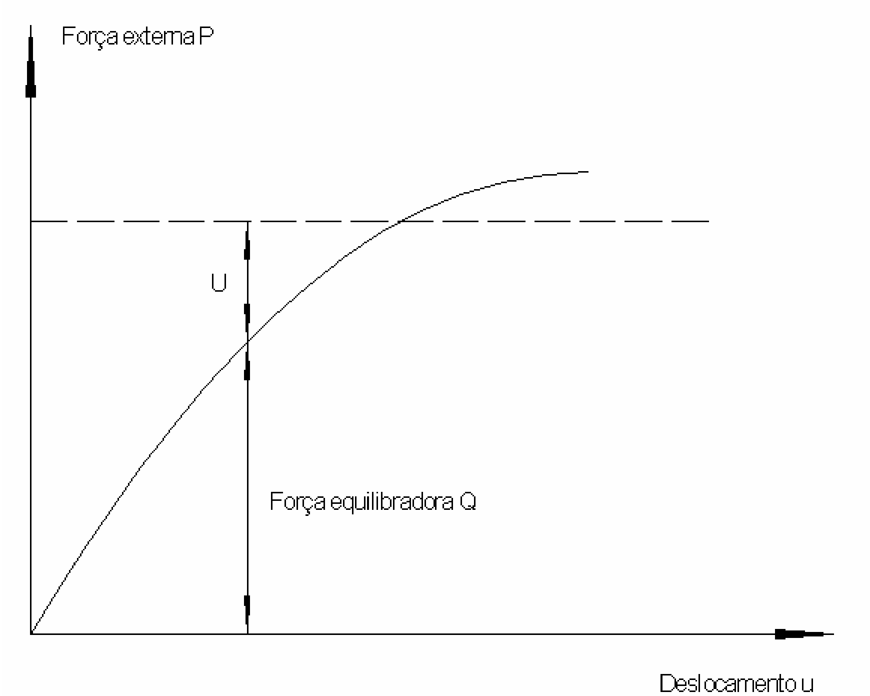

Figura 3.1 Força equilibradora.

Em principio para carregamentos monotônicos o equilíbrio poderia ser possível impondo a carga externa total em um único passo, mas isto não é muito aplicável porque procedimentos iterativos freqüentemente levam muitas iterações para convergir para uma solução para grandes passos de carga. Adicionalmente, para matérias com comportamento não-linear a trajetória de equilíbrio depende deste comportamento. Assim sendo, para assegurar a exatidão na predição fazem-se necessários pequenos incrementos de força ou deslocamentos.

O procedimento é usualmente chamado um procedimento incremental, é ilustrado na figura (3.2). A partir do vetor de deslocamentos globais conhecido do incremento n, o deslocamento incremental é calculado na seguinte forma

$$[K]\ \{\Delta u\} = \{\Delta P\} + \{P_{\mathrm{n}}\} - \{Q\} \tag{3.3}$$

onde o total da carga externa é descomposto em uma contribuição $\{P_{\mathrm{n}}\}$, que já esta presente no começo do passo de carga considerado e uma carga incremental $\{\Delta P\}$.

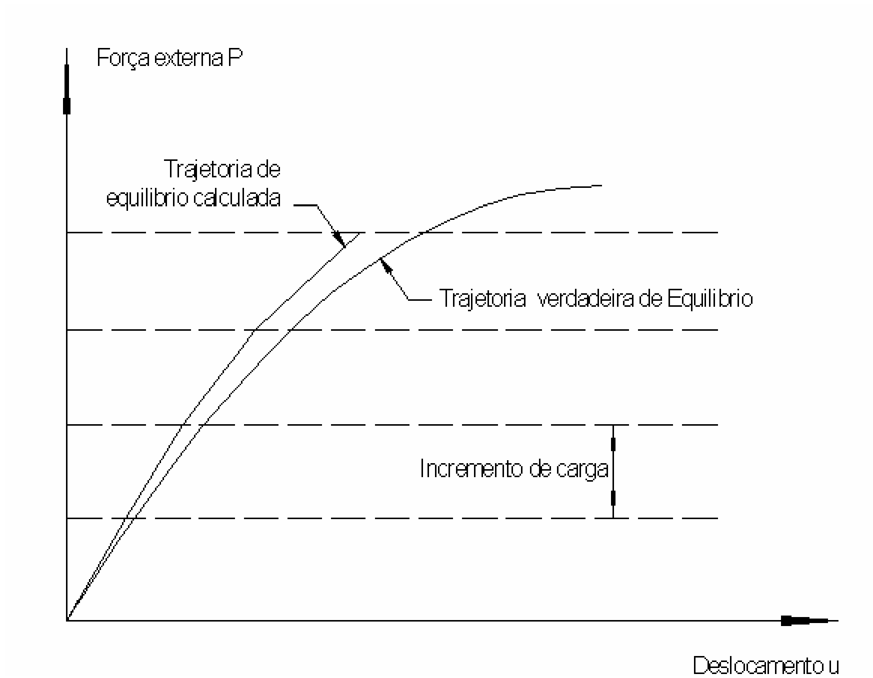

Figura 3.2 Trajetória de equilíbrio

Na solução por procedimentos incrementais não iterativos um significativo erro acumulado na trajetória em relação à trajetória de equilíbrio verdadeiro pode ocorrer como mostra a figura (3.2). Há duas principais fontes de acúmulo de erro. Uma parcela do erro está associada às cargas desbalanceadas remanescentes ao final de cada incremento de carga, já que raramente convergência perfeita para o equilíbrio é obtida. Essas cargas desbalanceadas são levadas ao longo de todos os passos subseqüentes de carga, o que implica que os erros são acumulados e podem ao final causar um erro significativo. A outra fonte de erro numérico vem da aproximação na obtenção da matriz de rigidez tangencial, obtida da linearização de equações não lineares de equilíbrio ao início do passo de carga que só é valido falando estritamente do começo do passo de carga. A matriz de rigidez tangente é obtida com base nos deslocamentos do incremento anterior, e um erro é, portanto introduzido e acumulado. Essa gradual separação da solução numérica da solução verdadeira pode ser minimizada pela introdução de iterações de equilíbrio a cada passo de carga, definindo um procedimento iterativo incremental.

Num procedimento de solução iterativo incremental uma primeira estimativa para deslocamentos incrementais é feita através da seguinte expressão:

$$\{\Delta u_1\} = [K]^{-1} (\{\Delta P\} + \{P_n\} - \{Q_0\}) \tag{3.4}$$

onde sub-índice 1 para $\{\Delta u\}$ significa a estimativa da primeira iteração para o vetor de deslocamentos incrementais. Da mesma forma o sub-índice 0 (zero) no vetor força incremental $\{Q\}$ indica o fato de que o vetor é calculado usando as tensões no começo do passo de carga ou no final do passo de carrega prévio. A partir do vetor $\{\Delta u_1\}$, uma primeira estimativa para $\{\Delta \varepsilon_1\}$ deformação incremental pode ser calculada, e tensões incrementais $\{\Delta \sigma_1\}$ podem ser avaliadas através de leis constitutivas. Em uma formulação em elementos finitos as forças internas depois da primeira iteração são dadas por:

$$\{Q_1\} = \int [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}} (\{\sigma_0\} + \{\Delta \sigma_1\})\, \mathrm{dV} \tag{3.5}$$

onde $[\mathrm{B}]$ é o operador de deformação deslocamento e $[\sigma_0]$ é a tensão na configuração de convergência previa. Em geral, forças equilibradas $\{Q_1\}$não estão em equilíbrio com as cargas externas $\{\Delta P\}+\{P_n\}$. Por esta razão a correção para deslocamentos incrementais é necessária.

$$\{\mathrm{d}u_2\} = [K]^{-1} (\{\Delta P\} + \{P_n\} - \{Q_1\}) \tag{3.6}$$

o deslocamento acumulado incremental é

$$\{\Delta u_2\} = \{\Delta u_1\} + \{\mathrm{d}u_2\} \tag{3.7}$$

Repetição de este processo pode ser formulada matematicamente como:

$$\{du_{j+1}\} = [K]^{-1} (\{\Delta P\} + \{P_n\} - \{Q_j\}) \tag{3.8}$$

$$\{\Delta u_{j+1}\} = \{\Delta u_j\} + \{du_{j+1}\} \tag{3.9}$$

$$\{\Delta\varepsilon_{j+1}\} = [B]\{\Delta u_{j+1}\} \tag{3.10}$$

$$\{\Delta\sigma_{j+1}\} = f(\{\Delta\varepsilon_{j+1}\}) \tag{3.11}$$

$$\{\sigma_{j+1}\} = \{\sigma_0\} + \{\Delta\sigma_{j+1}\} \tag{3.12}$$

Este processo iterativo finalmente resulta em tensões que estão em equilíbrio com a carga externa aplicada, dentro da tolerância adotada.

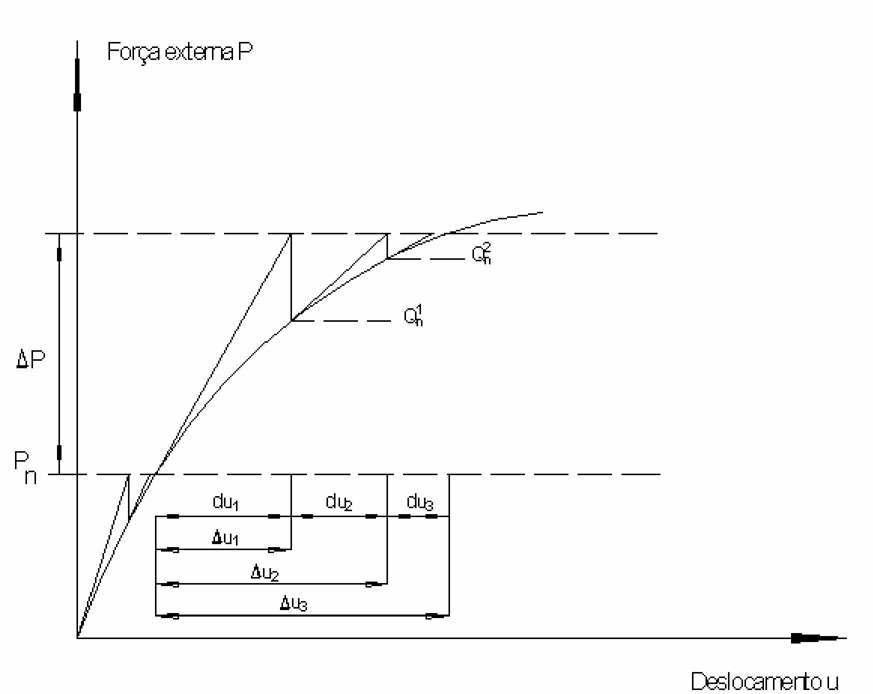

Figura 3.3 Procedimento incremental iterativo.

3.3.1
Procedimento Iterativo de Newton Raphson

A iteração de Newton-Raphson é um dos procedimentos iterativos clássicos. Na iteração Newton-Raphson completa a matriz tangente de rigidez é atualizada e calculada a cada iteração como mostra a figura (3.4). A vantagem deste esquema é a convergência quadrática. A desvantagem é o custo elevado para avaliar e calcular a matriz de rigidez a cada iteração, sendo por vezes desnecessário.

É reconhecido que a atualização da matriz de rigidez a cada iteração como na iteração Newton-Raphson completa, não é sempre necessária por que a matriz de rigidez está sendo usada para iterar até atingir o equilíbrio, em tanto que as tensões são determinadas segundo as deformações e o resultado do vetor das forças equilibradoras é calculado em base destas tensões.

Isto tem motivado várias pesquisas para buscar métodos que dispensam a construção e decomposição da matriz de rigidez tangente a cada iteração. Há em geral duas classes de métodos semelhantes. Na primeira classe a rigidez é obtida montando uma nova tangente de rigidez. Basicamente é assumido que a matriz de rigidez muda pouco. Aquela matriz de rigidez obtida em uma iteração particular é útil como uma aproximação suficientemente exata da matriz tangente de rigidez para várias iterações subseqüentes. A segunda classe de métodos consiste nos chamados métodos Quase-Newton ou Secante-Newton. Esses métodos aplicam atualizações na matriz tangencial por existir semelhança nas matrizes de rigidez, nas iterações subseqüentes. Neste caso a matriz de rigidez é calculada usando uma aproximação secante multidimensional.

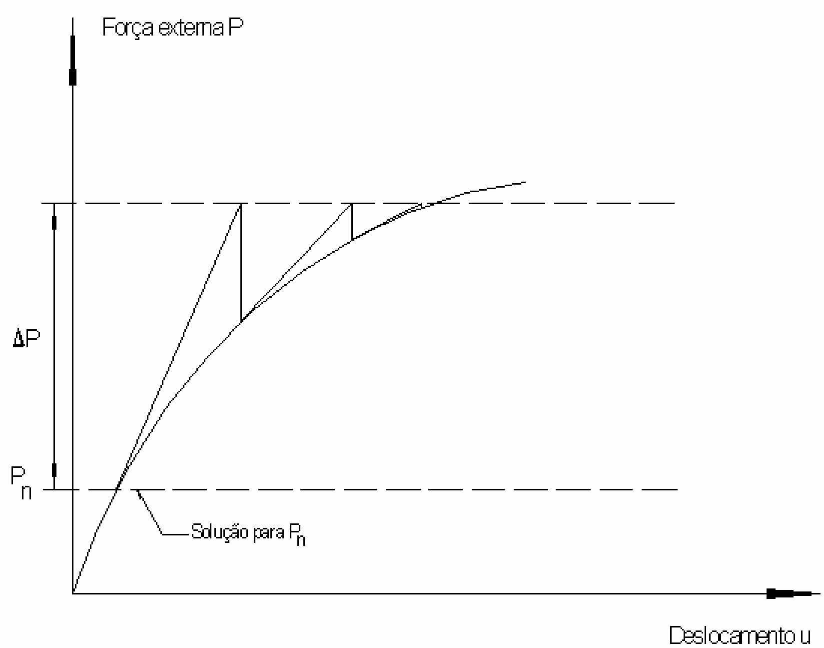

Figura 3.4 Iteração Newton Raphson completa.

Um exemplo das alternativas ao esquema da iteração Newton-Raphson completa que existe dentro da primeira classe definida acima, é modificar a iteração Newton-Raphson adotando para as iterações de um incremento de carga a matriz de rigidez obtida para a primeira iteração. Este procedimento está ilustrado na figura (3.5).

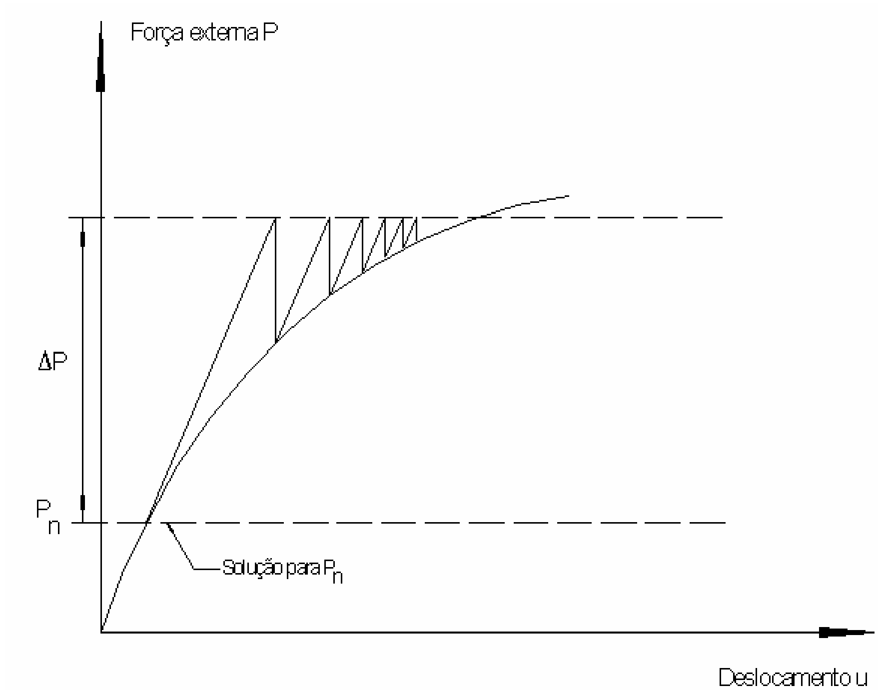

Figura 3.5 Iteração Newton Raphson modificada.

Aqui a matriz de rigidez é atualizada e decomposta só ao começo de todo passo de carga. Está modificação perde as características quadráticas da iteração Newton-Raphson completa. A taxa de convergência é menor. No entanto a simplificação na geração da matriz de rigidez leva a um ganho no tempo de processamento de cada iteração.

3.4
Atualização da geometria.

A cada elemento é associado um sistema de eixos local que orienta o elemento viga-duto no plano. Este sistema é composto por dois vetores unitários,

$\hat{x}$ e $\hat{y}$ ortogonais entre si, com origem no nó inicial (nó 1) do elemento e é atualizado no início de cada incremento de carga. O vetor $\hat{x}$ indica o eixo longitudinal x e aponta na direção do nó final (nó 3) do elemento, o vetor $\hat{y}$, define o eixo perpendicular ao vetor $\hat{x}$ no plano do elemento.

Pode-se, a partir destes dois vetores, montar a matriz de transformação de coordenadas globais para locais.

3.5
Critérios de Convergência

A adoção de uma estratégia de solução baseada em métodos iterativos requer a utilização de um critério que estabeleça o fim do processo de iteração. Ao final de cada iteração a solução obtida deve ser analisada para avaliar se a solução convergiu dentro das tolerâncias admissíveis ou se esta divergindo. Se tolerâncias muito grandes são adotadas resultados imprecisos são obtidos; tolerâncias muito apertadas requerem um esforço computacional grande e a precisão dos resultados torna-se exagerada. Um critério de convergência ineficiente pode interromper o processo de iteração por detectar uma falsa divergência da solução como também forçar a busca de uma solução inatingível. Alguns critérios de convergência são brevemente discutidos a seguir.

Um critério que avalia a convergência do processo iterativo em deslocamentos é dado por:

$$\frac{\left\|\Delta u^{i}\right\|_{2}}{\left\|{}^{t+\Delta t}u\right\|_{2}} \leq tol \tag{3.13}$$

onde tol é a tolerância de convergência para os deslocamentos.

Como ${}^{t+\Delta t}u$ é desconhecido considera-se ${}^{t+\Delta t}u^{i}$ como uma aproximação para ${}^{t+\Delta t}u$.

Em análises nas quais os deslocamentos mudam pouco em cada iteração mas continuam mudando por varias iterações, este critério é falho. Um exemplo deste comportamento é o de análises de estruturas que aumentam sua rigidez com os deslocamentos. A solução pode estar longe quando a convergência é obtida por este critério.

Um outro critério de convergência é obtido pela avaliação do vetor de cargas desequilibradas. Este critério verifica se as cargas desequilibradas estão dentro de uma tolerância do incremento de carga aplicado, ou seja,

$$\left\| {}^{t+\Delta t}Q - {}^{t+\Delta t}Q^{i} \right\|_2 \le tol.\left\| {}^{t+\Delta t}Q - {}^{t}P \right\|_2 \qquad (3.14)$$

A verificação das forças pode requerer uma atenção especial para problemas de inconsistências de unidades no vetor de forças uma vez que forças e momentos estão presentes neste vetor. A solução para deslocamentos não é considerada neste critério. No caso de estruturas em plastificação com baixo modulo de encruamento, embora as cargas desequilibradas possam ser pequenas, os deslocamentos podem estar errados.

Observa-se a necessidade da consideração do equilíbrio tanto das forças quanto de deslocamentos para se atingir a solução com boa precisão. Um terceiro critério, se baseia no trabalho das forças desequilibradas realizado sobre os deslocamentos incrementais, ou seja no incremento de energia interna. Este critério é comparado com o incremento de energia interna inicial. Considera-se que a convergência é atingida quando:

$$\Delta u^{i}\left({}^{t+\Delta t}Q - {}^{t+\Delta t}P^{i-1}\right) \le tol.\left(\Delta u^{1}\left({}^{t+\Delta t}Q - {}^{t}P\right)\right) \qquad (3.15)$$

Este critério não apresenta as deficiências dos anteriores sendo o implementado neste trabalho.