

2 Métodos hiperbólicos de localização

Atualmente, a maioria dos fornecedores de tecnologia de localização para redes celulares se baseiam em técnicas de TDoA. Dentre os tipos de sistemas mais empregados para a localização em de terminais móveis os sistemas baseados em TDoA, conhecidos como sistemas hiperbólicos, colocam-se em posição de destaque devido às vantagens que apresentam em relação aos demais. Esses sistemas estimam a posição de um móvel a partir de parâmetros cuja medida pode ser realizada com base em sinais capturados pelas ERBs existentes sem a necessidade de instalação de equipamentos adicionais.

Obtidas as medidas de TDoA, a posição do móvel pode ser estimada a partir de um conjunto de equações hiperbólicas cuja solução, em geral, não é trivial. Vários algoritmos foram propostos para solucionar este problema, apresentando diferenças de complexidade e desempenho.

Este capítulo aborda os dois principais algoritmos encontrados na literatura para solucionar as equações hiperbólicas para a determinação da posição da fonte. É feita ainda uma descrição das medidas de desempenho que permitem avaliar estes algoritmos.

2.1 Revisão Bibliográfica

Em 1976 W. H. Foy [12] propôs uma solução para as equações hiperbólicas, com base linearização por série de Taylor, retendo-se os primeiros termos. Para muitas situações a linearização das equações não introduz grandes erros na determinação da posição da fonte. Contudo, a linearização pode introduzir erros significativos ao se determinar a posição em certas geometrias.

Em 1987, J. O. Smith and J. S. Abel [13] propuseram a utilização da interpolação esférica (Spherical Interpolation ou SI) e Intersecção Plana (Plane Intersection ou PX) para a solução das equações hiperbólicas. H. C. Schau and A. Z. Robinson [14] utilizaram a interseção esférica (Spherical Intersection ou SX) para solução das equações hiperbólicas. Os métodos SI e SX fornecem uma solução fechada para a posição da fonte. O método PX fornece também uma solução LS (mínimos quadrados) fechada para sistemas de equações formadas por triplas de TDoA's e tem um desempenho comparável ao SI.

Em 1990, J. S. Abel [15] propôs a utilização do método conhecido como DAC (Divide and Conquer). O DAC consiste em dividir o conjunto de TDoA's estimados em grupos, cada qual com tamanho igual ao número de incógnitas. As soluções para as incógnitas são obtidas para cada grupo e combinadas de forma apropriada para obter-se uma solução final.

Em 1994, Y. T. Chan and K. C. Ho [16] propuseram um método para solucionar as equações hiperbólicas, conhecido como método de Chan, este método propõe uma solução fechada. Quando um conjunto de 3 ERBs é utilizado o método apresenta soluções ambíguas requerendo alguma informação adicional sobre a região de localização do móvel. Em sistemas celulares esta informação pode, na maioria dos casos, ser a identificação da célula ou setor onde o móvel se encontra, que está sempre disponível. Quando se utilizam 4 ou mais ERBs a solução corresponde à aproximação para um estimador de máxima verossimilhança (ML).

Em 2001, A. R. Marques e M. G. M. Maia [17] apresentaram uma avaliação de desempenho desses 5 algoritmos citados acima. A conclusão é que os métodos que apresentam melhor desempenho em ambiente LOS são os métodos de linearização por série de Taylor e o método de Chan.

2.2

Estimação da diferença de tempo de chegada (TDoA)

A diferença de tempos de chegada entre duas ERBs pode ser obtida através da estimativa do ToA em cada uma delas. Isto requer, entretanto, o conhecimento do instante de transmissão pela MS para que os sinais recebidos em cada ERB tenham uma referência de tempo comum. Para contornar este problema outros métodos baseados na correlação entre os sinais recebidos podem ser utilizados.

O método convencional determina a TDoA maximizando a correlação cruzada entre os sinais recebidos do par de ERBs [18,19,20]. Outros métodos como correlação cruzada cíclica (CYC-COR), alinhamento espectral coerente (SPEC00A) e taxa de correlação espectral limitado em banda (BL -SPEC00R) usam métodos de correlação cruzada que exploram a ciclo de estacionaridade dos sinais [21]. Há ainda estimadores baseados na fase dos sinais [22], mínimos quadrados [23,24], número médio quadrático [25] e maximização de

probabilidade [26]. A metodologia de obtenção da TDoA não será explorada em detalhes neste trabalho.

2.3 Solução das equações hiperbólicas

2.3.1 Formulação geral do problema

Uma vez obtidas estimativas das TDoA's, as diferenças de distâncias correspondentes são calculadas considerando a velocidade de propagação do sinal, que é, para efeitos práticos, considerada igual à velocidade da luz no vácuo ($v \cong c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$). A partir das diferenças de distância assim obtidas, é possível escrever um conjunto de equações hiperbólicas cuja solução fornecerá a estimativa de posição do móvel. Os diversos algoritmos propostos na literatura técnica para resolver este conjunto de equações não lineares possuem diferenças de complexidade e desempenho.

A formulação geral para solução do problema assume um cenário composto por uma estação móvel transmissora (MS) e M estações rádio base (ERBs) receptoras. Tomando como referência uma ERB designada pelo índice 1, define-se o vetor $\underline{d} = [d_{21}, d_{31}, \dots, d_{M1}]^T$ que tem como componentes as diferenças entre os tempos de chegada do sinal móvel à ERB de referência e a cada uma das M-1 ERBs restantes, ou seja, $d_{i1} = d_i - d_1$, $i = 2, \dots, M$.

Sejam (x, y) as coordenadas do móvel e (X_i, Y_i) as coordenadas da i -ésima ERB. A distância entre o móvel e a i -ésima ERB será dada por

$$R_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2} \quad (2.3.1)$$

A diferença das distâncias do móvel à i -ésima ERB e a ERB de referência é, portanto,

$$R_{i1} = cd_{i1} = R_i - R_1 = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2} - \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2} \quad (2.3.2)$$

onde c é a velocidade de propagação do sinal (igual à velocidade da luz, para o caso em questão) e R_1 é a distância entre a fonte e a primeira ERB (desconhecida). Assim, a expressão 2.3.2 define um conjunto de M-1 equações hiperbólicas não lineares cuja solução fornece a posição (x, y) da fonte.

As estimativas de TDoA possuem um grau de incerteza, associado aos erros de medida devidos aos efeitos de reflexão, difração e multipercursos no canal móvel celular. Estas incertezas podem ser modeladas assumindo que o vetor \underline{d} é composto pela soma do vetor \underline{d}^0 , que contém os valores de TDoA's que seriam obtidos em um ambiente ideal, com o vetor $\underline{n} = [n_{21}, n_{31}, \dots, n_{M1}]^T$ que representa os erros nas medidas provocados pelo ambiente real, ou seja,

$$\underline{d} = \underline{d}^0 + \underline{n} \quad (2.3.3)$$

onde $\underline{d}^0 = [d_{21}^0, d_{31}^0, \dots, d_{M1}^0]^T$.

Seguindo [17], será assumido também que o vetor \underline{n} é Gaussiano de matriz covariância \mathbf{Q} e valor esperado $E[\underline{n}] = \underline{0}$ sendo $\underline{0}$ um vetor onde todas as componentes são nulas. Quanto à matriz covariância \mathbf{Q} , supõe-se que os erros em cada tempo de chegada medido possam ser modelados por variáveis aleatórias Gaussianas n_i , $i = 1, \dots, M$ identicamente distribuídas de media nula e variância \mathbf{S}_n^2 . Assim, $E[n_i] = E[n_j] - E[n_i] = 0$, $\text{var}(n_i) = \text{var}(n_j) + \text{var}(n_i) = 2\mathbf{S}_n^2$ e $\text{cov}(n_i, n_j) = \text{var}(n_i) = \mathbf{S}_n^2$ com $i, j = 2, \dots, M$, $i \neq j$. A partir destas suposições [17] a matriz covariância \mathbf{Q} será dada por

$$\mathbf{Q} = 0.5\mathbf{S}_d^2 [\mathbf{I} + \underline{\mathbf{1}}\underline{\mathbf{1}}^T] \quad (2.3.4)$$

onde, $\mathbf{S}_d^2 = 2\mathbf{S}_n^2$, \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem $M-1$ e $\underline{\mathbf{1}} = [1, \dots, 1]^T$.

2.3.2 Métodos para solução das equações hiperbólicas

Considerando um conjunto de ERBs posicionadas de forma arbitrária em relação ao móvel, a precisão e consistência da solução obtida pela resolução do sistema de equações não lineares definido pela equação 2.3.2 depende, além do método de solução, do número de ERBs considerado. Caso sejam utilizadas duas estimativas de diferença de distâncias e duas equações para posicionamento do móvel em um plano, ou três estimativas e três equações para seu posicionamento num cenário tridimensional, o sistema é consistente e uma

única solução pode ser determinada. Caso, entretanto, se deseje utilizar um maior número de estimativas de modo a melhorar a precisão do posicionamento, o sistema torna-se inconsistente e não existe, necessariamente uma única solução.

Os principais métodos encontrados na literatura para solução de sistemas hiperbólicos em problemas de localização de estações móveis são os métodos de linearização por série de Taylor [12], Interpolação Esférica (Spherical Interpolation ou SI) e Intersecção Plana (Plane Intersection ou PX) de Abel [13], Intersecção Esférica (Spherical Intersection ou SX) de Schau e Robinson [14,27], Divide and Conquer (DAC) [15] e o método de Chan [16].

Testes detalhados de todos estes métodos são apresentados em [17], onde se conclui que a linearização por série de Taylor e o método de Chan apresentam o melhor desempenho, ao menos em situações LOS. As seções seguintes, baseadas em [17] apresentam o detalhamento destes dois métodos que serão utilizados neste trabalho para obter as estimativas de posição em ambientes microcelulares.

Método de Linearização por série de Taylor

No método de linearização por série de Taylor [12] a expansão em série das equações hiperbólicas e a consideração apenas dos termos de primeira e segunda ordem permite a transformação do problema não linear original em um problema linear para obtenção de uma solução de mínimos quadrados (LS).

Conhecidas as medidas de TDoA e escolhida uma aproximação inicial para a posição do móvel, o desvio da estimativa de posição da fonte é dado por

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = (G_t^T Q^{-1} G_t)^{-1} G_t^T Q^{-1} \underline{h}_t \quad (2.3.5)$$

onde,

$$\underline{h}_t = \begin{bmatrix} R_{21} - (\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1) \\ R_{31} - (\tilde{R}_3 - \tilde{R}_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{M1} - (\tilde{R}_M - \tilde{R}_1) \end{bmatrix}$$

$$G_T = \begin{bmatrix} (X_1 - x)/\tilde{R}_1 - (X_2 - x)/\tilde{R}_2 & (Y_1 - y)/\tilde{R}_1 - (Y_2 - y)/\tilde{R}_2 \\ (X_1 - x)/\tilde{R}_1 - (X_3 - x)/\tilde{R}_3 & (Y_1 - y)/\tilde{R}_1 - (Y_3 - y)/\tilde{R}_3 \\ \vdots & \vdots \\ (X_1 - x)/\tilde{R}_1 - (X_M - x)/\tilde{R}_M & (Y_1 - y)/\tilde{R}_1 - (Y_M - y)/\tilde{R}_M \end{bmatrix}$$

e Q é a matriz de covariância das estimativas de TDoA. Os valores de \tilde{R}_i , $i = 1, \dots, M$ são dados por

$$\tilde{R}_i = \sqrt{(X_i - x_o)^2 + (Y_i - y_o)^2} \quad (2.3.6)$$

onde (x_o, y_o) corresponde, na primeira iteração, à estimativa inicial de posição do móvel. Nas iterações seguintes, x_o e y_o são atualizados para $x_o + \Delta_x$ e $y_o + \Delta_y$ utilizando os valores (Δ_x, Δ_y) obtidos na iteração anterior. Considera-se que o algoritmo convergiu quando Δ_x e Δ_y resultam inferiores a uma tolerância pré-estabelecida.

O método de linearização por série de Taylor apresenta como desvantagens num grande esforço computacional e a necessidade de que a estimativa inicial (x_o, y_o) seja próxima da posição real da fonte para que haja convergência. Na prática, uma informação sempre disponível no sistema celular é a identificação da célula ou setor em que o usuário se encontra o que, juntamente com a área de cobertura de cada célula, limita as possibilidades de posição do móvel. Em macro células esta limitação dificilmente será suficiente para prover uma estimativa inicial próxima da posição real do móvel, mas a informação pode ser útil no caso de configurações micro-celulares.

Método de Chan

O método de Chan fornece uma solução fechada para a situação em que três ERBs são utilizadas e uma aproximação de máxima verossimilhança para 4 ou mais ERBs.

No método de Chan, a distância entre o móvel e a i ésima ERB é reescrita na forma:

$$R_i^2 = (X_i - x)^2 + (Y - y)^2 = K_i - 2X_i x - 2Y_i y + x^2 + y^2, \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (2.3.7)$$

onde,

$$K_i = (X_i)^2 + (Y_i)^2 \quad (2.3.8)$$

Lembrando que $R_{i1} = cd_{i1} = R_i - R_1$ tem-se $R_i^2 = (R_{i1} - R_1)^2 = R_{i1}^2 - 2R_{i1}R_1 + R_1^2$ e substituindo em 2.3.7, obtém-se

$$R_{i1}^2 + 2R_{i1}R_1 + R_1^2 = K_i - 2X_{i1}x - 2Y_{i1}y + x^2 + y^2 \quad (2.3.9)$$

Fazendo $i=1$ em 2.3.7 e subtraindo de 2.3.9 tem-se:

$$R_{i1}^2 + 2R_{i1}R_1 = K_i - K_1 - 2X_{i1}x - 2Y_{i1}y \quad i=2,3,\dots,M \quad (2.3.10)$$

onde $X_{i1} = X_i - X_1$ e $Y_{i1} = Y_i - Y_1$.

A expressão 2.3.10 representa um conjunto de equações lineares cujas incógnitas são x, y e R_1 para o qual Chan propôs soluções distintas para 3 ERBs ($M=3$) e 4 ou mais ERBs. Estas soluções são descritas a seguir.

Com três ERBs 2.3.10 corresponde a duas equações a partir das quais pode-se expressar x e y função de R_1 na forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X_{21} & Y_{21} \\ X_{31} & Y_{31} \end{bmatrix} x \left\{ \begin{bmatrix} R_{21} \\ R_{31} \end{bmatrix} R_1 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{21}^2 - K_2 + K_1 \\ R_{31}^2 - K_3 + K_1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.3.11)$$

Substituindo este resultado em 2.3.7 para $i = 1$ resulta uma equação do 2º grau em R_1 . Obtendo-se a raiz positiva desta equação e substituindo em 2.3.11 chega-se à estimativa de posição do móvel. Dependendo da geometria pode-se obter duas raízes positivas, o que vai requerer alguma informação adicional sobre a localização da fonte para resolver a ambigüidade. Novamente, a identificação da célula ou setor em que o usuário se encontra e a área de cobertura de cada célula podem ser as informações necessárias, neste caso mesmo para macro células, uma vez que se trata de um problema de solução de ambigüidade e não de valor inicial do algoritmo.

Para quatro ou mais ERBs, o sistema é sobredeterminado porque o número de estimativas de TDoA é maior que o número de incógnitas. Devido aos

erros de medida, as curvas definidas pelas equações 2.3.10 não irão interceptar-se no mesmo ponto. Deve ser obtida uma solução para a posição que represente a melhor aproximação da posição do móvel.

O método proposto por Chan parte de um vetor erro derivado da equação 2.3.10, é dado por

$$\underline{y} = \underline{h} - G_a z_a^0 \quad (2.3.12)$$

onde

$$\underline{h} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{21}^2 - K_2 + K_1 \\ R_{31}^2 - K_3 + K_1 \\ \vdots \\ R_{M1}^2 - K_M + K_1 \end{bmatrix}$$

$$G_a = \begin{bmatrix} X_{21} & Y_{21} & R_{21} \\ X_{31} & Y_{31} & R_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{M1} & Y_{M1} & R_{M1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{z}_a = [x, y, R_1]^T$$

O superíndice 0 indica, como anteriormente, o valor exato. Da equação 2.3.2 tem-se

$$R_{i1} = cd_{i1} = cd_{i1}^0 + cn_{i1} = R_{i1}^0 + cn_{i1}$$

Usando $R_{i1} = R_{i1}^2 + R_1^0$ a equação 2.3.12 se transforma em

$$\underline{y} = cB\underline{n} + 0.5c^2\underline{n} \oplus \underline{n} \quad (2.3.13)$$

$$B = \text{diag}[R_2^0, R_3^0, \dots, R_M^0]$$

onde o símbolo Θ representa o produto de Schur (multiplicação de dois vetores de mesma dimensão, da qual resulta um novo vetor de mesma dimensão que os

anteriores e onde o elemento da i -ésima linha é igual ao produto dos elementos da i -ésima linha dos dois vetores).

Na prática, a condição $cn_{11} \ll R_i^2$ geralmente é satisfeita. Assim, assumindo que as incertezas nas medidas de TDoA's sejam modeladas por vetor Gaussiano de matriz covariância Q e ignorando o termo de segunda ordem à direita na equação 2.3.13, ψ se torna um vetor Gaussiano com matriz covariância dada por

$$\mathbf{y} = E[\underline{\mathbf{y}}\underline{\mathbf{y}}^T] = c^2 BQB \quad (2.3.14)$$

Os elementos de \underline{z}_a são relacionados através da equação 2.3.7, o que significa que a equação 2.3.12 é um sistema de equações não lineares nas variáveis x e y . Para resolver esse problema Chan assumiu inicialmente que x , y e R_1 são independentes. Assim, eles podem ser determinados via LS. A solução final é obtida através de uma nova computação via LS que impõe a relação dada em 2.3.7 ao resultado calculado anteriormente. Esse procedimento é uma aproximação para um estimador ML (Maximum Likelihood) para a posição da fonte. Considerando os elementos de \underline{z}_a independentes, a estimativa ML de \underline{z}_a é

$$\begin{aligned} \underline{z}_a &= \arg \min \left\{ \left(\underline{h} - G_a \underline{z}_a \right)^T \mathbf{y}^{-1} \left(\underline{h} - G_a \underline{z}_a \right) \right\} \\ &= \left(G_a^T \mathbf{y}^{-1} G_a \right)^{-1} G_a^T \mathbf{y}^{-1} \underline{h} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

que é facilmente reconhecida como a solução LS generalizada de 2.3.12. Na prática, ψ não é conhecida a priori, desde que B contém as distâncias verdadeiras entre a fonte e as ERBs. Para resolver este problema, considera-se que, quando a fonte está muito longe do conjunto de ERBs, cada R^0 é bem próximo de R^0 , de modo que $B \approx R^0 I$, onde R^0 representa a distância da fonte ao conjunto de ERBs e I é a matriz identidade de tamanho $M-1$. Desde que a multiplicação da matriz ψ por um fator qualquer não afeta a resposta, pode-se aproximar a solução obtida em 2.3.15 por

$$\underline{z}_a \approx \left(G_a^T Q^{-1} G_a \right)^{-1} G_a^T Q^{-1} \underline{h} \quad (2.3.16)$$

Se por outro lado, a fonte está perto do conjunto de ERBs, pode-se utilizar 2.3.16 para obter uma solução inicial e, conseqüentemente estimar B. A resposta final é então computada de 2.3.15. Embora a solução em 2.3.15 possa ser iterada para se obter uma solução mais apurada, simulações mostraram que o efeito dessas iterações na resposta final não é muito significativa. Assim, é suficiente aplicar a equação 2.3.15 somente uma vez.

A matriz covariância de \underline{z}_a é obtida através do cálculo dos valores esperados de \underline{z}_a e $\underline{z}_a \underline{z}_a^T$ de 2.3.15. Na presença de erros nas medidas de TDoA, $R_{i1} = R_{i1}^0 + cn_{i1}$. G_a e \underline{h} podem ser expressos como $G_a = G_a^0 + \Delta G_a$ e $\underline{h} = \underline{h}^0 + \Delta \underline{h}$. Desde que $G_a^0 \underline{z}_a^0 = \underline{h}^0$, a equação 2.3.12 implica em

$$\underline{y} = \underline{h} - \Delta G_a \underline{z}_a^0 \quad (2.3.17)$$

Seja $\underline{z}_a = \underline{z}_a^0 + \Delta \underline{z}_a$. Então, da equação 2.3.15

$$\begin{aligned} & (G_a^{0T} + \Delta G_a^T) \Psi^{-1} (G_a^0 + \Delta G_a) \left(\underline{z}_a^0 + \Delta \underline{z}_a \right) \\ & = (G_a^{0T} + \Delta G_a^T) \Psi^{-1} (\underline{h} + \Delta \underline{h}) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Considerando somente os termos lineares e usando 2.3.13 e 2.3.17, obtém-se o resultado

$$\begin{aligned} \Delta \underline{z}_a & = c (G_a^{0T} \Psi^{-1} G_a^0)^{-1} G_a^{0T} \Psi^{-1} B \underline{n} \\ \text{cov}(\underline{z}_a) & = E[\Delta \underline{z}_a \Delta \underline{z}_a^T] = (G_a^{0T} \Psi^{-1} G_a^0)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

onde o termo quadrático do erro em 2.3.13 foi ignorado e 2.3.14 foi usado para se obter $\text{cov}(\underline{z}_a)$.

A solução de \underline{z}_a obtida em 2.3.15 assume que x,y e R_1 sejam independentes, porém eles são relacionados entre si pela equação 2.3.7, para $i = 1$. Resta saber como incorporar esta relação no algoritmo em questão de modo a se obter uma solução mais apurada. Quando a polarização é ignorada (o que é verdade quando as incertezas nos TDoA's são pequenas), \underline{z}_a é um vetor

aleatório cuja média é o valor real da posição da fonte e cuja matriz covariância é dada por 2.3.19. Então, os elementos de \underline{z}_a podem ser expressos como

$$z_{a1} = x^0 + e_1, \quad z_{a2} = y^0 + e_2, \quad z_{a3} = R_1^0 + e_3 \quad (2.3.20)$$

onde e_1 , e_2 e e_3 são os erros nas estimativas das coordenadas de \underline{z}_a . Subtraindo os primeiros dois componentes de \underline{z}_a de X_1 e Y_1 e elevando ao quadrado, obtém-se o novo sistema de equações abaixo

$$\underline{\Psi}' = \underline{h}' - \underline{G}'_a \underline{z}'_a \quad (2.3.21)$$

onde

$$\underline{h}' = \begin{bmatrix} (z_{a1} - X_1)^2 \\ (z_{a2} - Y_1)^2 \\ z_{a3}^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{G}'_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{z}'_a = \begin{bmatrix} (x - X_1)^2 \\ (y - Y_1)^2 \end{bmatrix}$$

e $\underline{\Psi}'$ é um vetor que denota incertezas em \underline{z}_a , substituindo 2.3.20 em 2.3.21, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_1 &= 2(x^0 - X_1)e_1 + e_1^2 \approx 2(x^0 - X_1)e_1 \\ \mathbf{y}'_2 &= 2(y^0 - Y_1)e_2 + e_2^2 \approx 2(y^0 - Y_1)e_2 \\ \mathbf{y}'_3 &= 2R_1^0 e_3 + e_3^2 \approx 2R_1^0 e_3 \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Essa aproximação é válida quando os erros e_i , $i = 1, 2, 3$ são pequenos. A matriz covariância de $\underline{\mathbf{y}}'$ é portanto

$$\mathbf{y}' = E[\mathbf{y}'\mathbf{y}'^T] = 4B' \text{cov}(\underline{z}_a) B'$$

$$B' = \text{diag}\{x^0 - X_1, y^0 - Y_1, R_1^0\} \quad (2.3.23)$$

Desde que e_i , $i = 1, 2, 3$ são Gaussianos, $\underline{\Psi}'$ também é Gaussiano. Assim, a estimativa ML de \underline{z}_a' é

$$\underline{z}_a' = \left(G_a'^T \mathbf{y}'^{-1} G_a' \right)^{-1} G_a'^T \mathbf{y}'^{-1} \underline{h}' \quad (2.3.24)$$

A matriz \mathbf{y}' não é conhecida desde que depende dos valores verdadeiros de x , y e R_1 . Porém, B' pode ser aproximada usando os valores de \underline{z}_a calculado em 2.3.15, e $\text{cov}(\underline{z}_a)$ pode ser determinada pela substituição de 2.3.19 de G_a^0 por G_a e pelo uso de \underline{z}_a no cálculo de ψ . Se a fonte está distante, então $\text{cov}(\underline{z}_a) \approx c^2 R^{02} (G_a^{0T} Q^{-1} G_a^0)^{-1}$ e 2.2.24 se reduz a

$$\underline{z}_a' \approx \left(G_a'^T B'^{-1} G_a^T Q^{-1} G_a B'^{-1} G_a' \right)^{-1} (G_a'^T B'^{-1} G_a^T Q^{-1} G_a B'^{-1}) \underline{h}' \quad (2.3.25)$$

A matriz G_a'' é constante. Calculando os valores esperados de \underline{z}_a' e $\underline{z}_a' \underline{z}_a'^T$, obtém-se a matriz covariância de \underline{z}_a'

$$\text{cov}(\underline{z}_a') = \left(G_a'^T \mathbf{y}' G_a' \right)^{-1} \quad (2.3.26)$$

A posição final é então obtida de \underline{z}_a' como sendo

$$\underline{z}_p = \pm \sqrt{\underline{z}_a'} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.27)$$

A solução mais adequada é escolhida como sendo aquela que se situe na região de interesse. Se uma das coordenadas de \underline{z}_a' é próxima de zero, a raiz quadrada de 2.3.27 pode se tornar um número complexo. Nesse caso, a parte imaginária é assumida como nula.

As equações 2.3.15 e 2.3.24 fornecem as soluções para a posição da fonte. Como as matrizes y e y' nas equações 2.3.15 e 2.3.24 não são conhecidas, uma aproximação adequada é necessária. Quando a fonte está longe do conjunto de antenas, as equações 2.3.16, 2.3.25 e 2.3.27 são usadas. Quando a fonte está próxima, a equação 2.3.16 é primeiro usada para se obter uma aproximação para B. As equações 2.3.15, 2.3.24 e 2.3.27 fornecem então a solução final.

Apesar de apresentar um bom desempenho o método de Chan necessita ainda de informação a priori para resolver um problema de ambigüidade resultante na radiciação da equação 2.3.27. Esta equação mostra que existem quatro possíveis soluções para a posição da fonte.

2.4 Medidas de precisão

Medidas de precisão muito utilizadas para avaliar a precisão de algoritmos de locação da estação móvel são o erro RMS e a probabilidade de erro circular (CEP-Circular Error Probability). Já o efeito da configuração geométrica das ERBs para a estimativa de posicionamento do móvel é medido pela degradação geométrica de precisão.

Normalmente, faz-se a comparação do erro médio quadrático (MSE) ou a raiz quadrada deste erro (RMSE) de localização estimado com o limitante de Crámer-Rao (Crámer-Rao lower bound - CRLB).

2.4.1 O erro RMS

Para a localização na dimensão D (D = 2 ou 3), o erro médio quadrado (MSE) da posição estimada é dado por:

$$MSE = E[(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2] \quad (2.4.1)$$

onde $E[*]$ denota o valor esperado. O MSE é igual à variância do erro somada com o quadrado da média do erro, também chamada polarização.

O erro RMS (Root Mean Square Error – RMSE) é a raiz quadrada do MSE e tem a dimensão de distância, sendo a medida de erro mais apropriada para avaliação de sistemas de localização nos quais uma distância mínima à fonte a ser localizada é imposta como requisito de desempenho.

$$RMSE = \sqrt{E[(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2]} \quad (2.4.2)$$

Sendo (x,y) a posição real do móvel e (\hat{x}, \hat{y}) a posição do móvel.

2.4.2 Probabilidade de Erro Circular (CEP)

A probabilidade de erro circular (CPE) é uma medida de incerteza da posição \hat{x} com relação a sua média $E[\hat{x}]$. Para um sistema de duas coordenadas a CEP é definida como o raio do círculo cujo centro é a média da estimativa e que contém metade das realizações do vetor aleatório \hat{x} . Se o estimador de localização é imparcial (estimador despolarizado), a CEP é a medida de incerteza do estimador relativa a uma posição correta da fonte. Se o estimador é polarizado e a magnitude da polarização é limitada por β , então probabilidade de uma estimativa estar dentro de uma distância $\beta + CEP$ da posição correta é igual a $\frac{1}{2}$. Este conceito de é ilustrado na figura 2.1.

O cálculo exato da CEP é complexo e detalhes podem ser encontrados em [28,12]. Para um estimador hiperbólico de localização, a CEP é aproximada com uma precisão dentro de 10% pela seguinte expressão

$$CEP \approx 0,75 \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad (2.4.3)$$

onde s_x^2 e s_y^2 são as variâncias das coordenadas \hat{x} e \hat{y} da estimativa de posição da fonte.

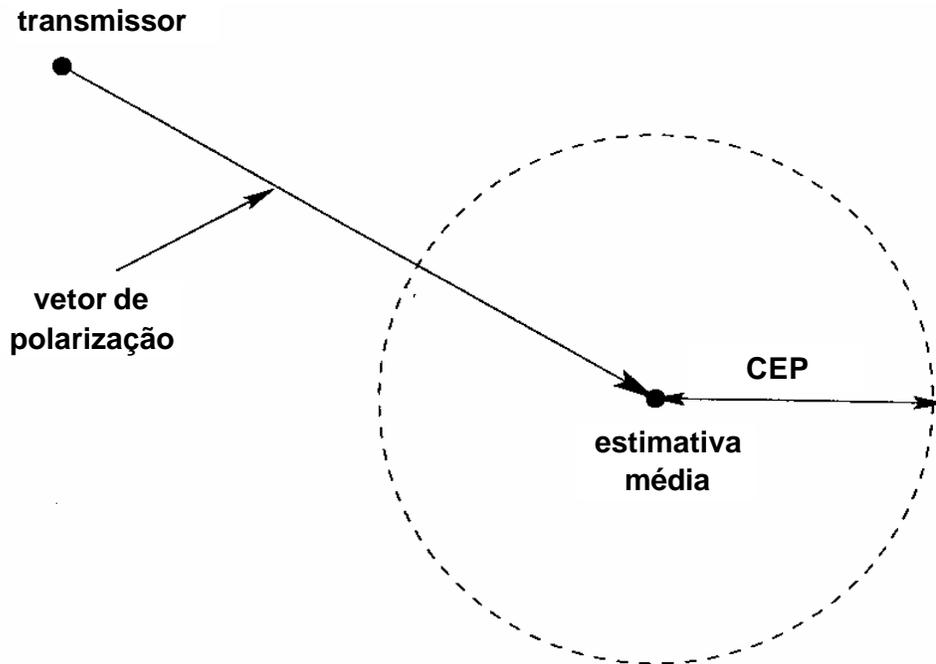


Figura 2.1: Geometria para medidas de precisão usando CEP

2.4.3 Diluição de Precisão Geométrica (GDOP)

A diluição de precisão geométrica (GDOP) é uma medida que quantifica a precisão de localização baseada na configuração geométrica. Já que a relação geométrica entre a posição da fonte e as posições das ERBs exercem uma grande influência na precisão dos algoritmos de localização. Isso ocorre porque os erros nas medidas de TDoA's são transformados em erros de diferenças de distância que por sua vez dependendo da geometria afetariam de forma diferente a solução das equações hiperbólicas. A GDOP é definida como a razão entre o erro RMS na posição e o erro RMS nas diferenças de distância e, para um sistema hiperbólico bi-dimensional, é dada por

$$GDOP = \frac{\sqrt{E[(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2]}}{s_s} \quad (2.4.4)$$

onde σ_s é o erro RMS das medidas de diferença de distância, x e y são as coordenadas reais da fonte e \hat{x} e \hat{y} são as coordenadas estimadas. Para um estimador despolarizado a equação acima se transforma em

$$GDOP = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{s_s} \quad (2.4.5)$$

onde s_x^2 e s_y^2 são as variâncias das coordenadas \hat{x} e \hat{y} da estimativa de posição da fonte. Para estimadores despolarizados a relação entre GDOP e CEP é dada por

$$CEP \approx (0,75s_s)GDOP \quad (2.4.6)$$

O GDOP serve como um critério para selecionar o conjunto de ERBs que minimiza de localização comparando-se os valores de GDOP obtidos com estimativas geradas por diferentes conjuntos.

2.5 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os principais métodos para a solução do sistema de equações hiperbólicas que fornece estimativas para o posicionamento de estações móveis com base em medidas de TDoA.

Foi dada especial ênfase aos métodos considerados mais precisos para distribuições genéricas de ERBs em relação ao móvel e que foram adotados nas simulações para micro-células realizadas neste trabalho: a linearização por série de Taylor e os métodos de Chan para 3 ERBs e para 4 ou mais ERBs.

Finalmente, foram apresentadas as medidas de precisão usualmente utilizadas para avaliar as diversas técnicas de localização, incluindo o erro médio quadrático, a probabilidade de erro circular (CEP-Circular Error Probability) e a diluição geométrica de precisão (GDOP).