

## 2

### Transporte de umidade e calor em solos não-saturados

#### 2.1

##### Introdução

No presente capítulo é apresentada uma breve introdução dos mecanismos físicos que ocorrem em solos não-saturados durante o processo de transferência de umidade e calor. Tal introdução tem como objetivo facilitar o entendimento dos modelos físico-matemáticos mais importantes e como são desenvolvidas as equações que representam o fenômeno.

Em seguida, o modelo físico-matemático desenvolvido por *Philip e de Vries* (1957) é apresentado de maneira mais detalhada por se tratar de referência básica no assunto. Posteriormente é apresentado o modelo adotado na referida dissertação.

Inicialmente são adotadas algumas hipóteses simplificadoras que foram introduzidas por *Ferreira* (1993) em seu trabalho e que serão aceitas nos modelos e equações apresentados no decorrer do texto.

1. O vapor e o ar contidos nos poros comportam-se como gases ideais.
2. Não há influência de histerese, apesar do modelo adotado no presente estudo permitir o seu cálculo.
3. O efeito da presença de solutos na água é desprezado, embora o programa utilizado na simulação possua o modulo de simulação de transporte de solutos, como será visto no capítulo 3.
4. A fase sólida é uma matriz rígida e fixa.

## 2.2

### **Análise física dos processos de transporte de umidade e calor no solo**

A modelagem numérica de fluxo de umidade em meios porosos não-saturados é complexa devido a diferentes aspectos. Solos contêm partículas sólidas que são habitualmente desordenadas, e espaços nos poros, que são preenchidos com gás ou fluido ou ambos, formando tortuosos caminhos interconectados. A água pode ser transportada por difusão do líquido devido a diferentes concentrações de soluto, difusão do vapor, evaporação e condensação interna, fluxo devido a forças de capilaridade ou gravidade, e fluxo de líquido e vapor devido a diferenças na pressão total (*Bruin e Luyben, 1980* apud *Hampton, 1989*). Essas diferenças de pressão podem ser geradas por pressões externas, capilaridade, contração, ou por altas temperaturas dentro do material úmido. Frequentemente, existe uma combinação de diversos mecanismos de transporte variando de local para local e mudando com o teor de umidade.

Igualmente ao que ocorre com a umidade, muitos processos contribuem para o fluxo de calor em meios não-saturados. A transferência de calor pode ocorrer por condução, convecção, radiação, transporte de calor latente e fluxo de umidade. Em camadas de água contínuas e no esqueleto das partículas sólidas interconectadas ocorre a transferência de calor por condução e fluxo de umidade (transporte de calor sensível). Convecção, radiação e transporte de calor latente são mecanismos primários dos poros preenchidos por gás.

No modelo descrito por *Philip e de Vries (1957)*, são considerados todos os mecanismos primários responsáveis pelo transporte de umidade e calor nos solos. O fluxo de água ocorre devido a gradientes de pressão de capilaridade e a gravidade. A difusão do vapor d'água que ocorre através de uma fase gasosa estagnante é devido a diferenças de concentração no vapor, criadas por gradientes térmicos e de umidade. O transporte de calor latente e a condução representam a transferência de calor. Existe um fluxo de líquido secundário provocado por gradientes de temperatura.

Estes mecanismos citados foram considerados em propostas a explicação dos problemas físicos do solo mesmo antes de *Philip e de Vries. Hampton (1989)*

cita em seu trabalho pesquisas que concluem que um solo sujeito a gradientes de temperatura move-se principalmente como um vapor, e experimentos que demonstram que uma quantidade de vapor d'água transportada em tal solo é de três a dez vezes maior que a quantidade prevista usando a Lei de Fick. Assim sendo, existem razões para acreditar que o transporte de vapor d'água é difusivo por natureza.

De acordo com *Philip e de Vries*, a principal razão para a teoria de Fick falhar é porque esta foi formulada para descrever um diferente processo, onde *Penman* (1940) utilizou a teoria para a análise de difusão isotérmica do carbono desulfatizado e acetona através dos solos. Nenhum desses gases, presumidamente, interagem com as fases sólida ou líquida do solo (*Hampton*, 1989). Entretanto, quando esta equação foi em seguida aplicada ao vapor d'água, nenhuma alteração foi feita para evidenciar a interação entre o vapor d'água com as fases líquida e sólida. Esta observação e os mecanismos propostos por *Philip e de Vries* para a interação entre líquido e vapor foram contribuições significativas para o estudo do fenômeno.

Em solos secos, *Philip e de Vries* desenvolveram esta interação através de uma série de processos de evaporação e condensação juntamente com fluxo através das “ilhas” de líquido, que são pequenas áreas de umidade formadas entre as partículas de solo. O termo “solo seco” citado acima é aplicado a um solo tão seco que as continuidades de líquido não existam, ou caso existam, possuam uma condutividade hidráulica bem reduzida. O líquido restante é absorvido pelos poros da superfície preenchendo pequenos vazios e formando as pontes ou “ilhas” entre poros em pontos de contato entre partículas de solo (Figura 1)

Quando um gradiente de temperatura é aplicado através de um solo, alguma água irá evaporar na extremidade mais quente (lado A) dos poros e se deslocar por difusão em direção a menor densidade de vapor na extremidade mais fria (lado B). As “ilhas” de líquido se distribuem de maneira aleatória pelo solo servindo como válvulas de sentido único para o transporte de água. Condensação, no lado mais quente da “ilha”, ou seja, no menisco do lado A, e evaporação do lado mais frio, alteram a curvatura do menisco originalmente igual para uma curvatura representada pelas linhas tracejadas da Figura 1.

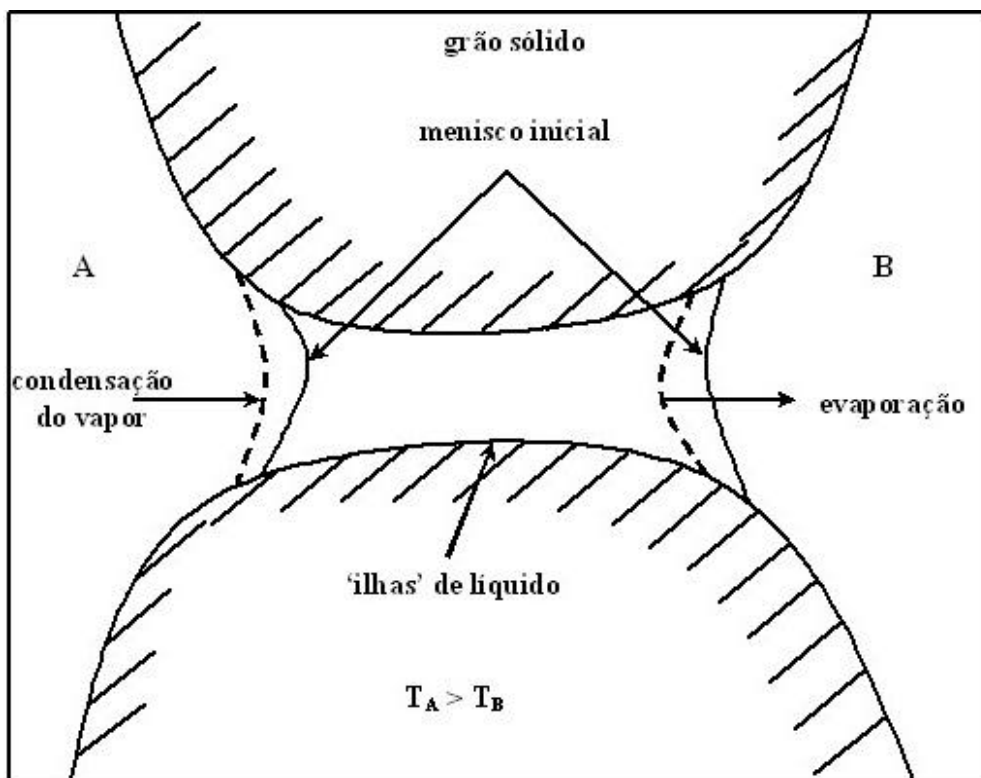


Figura 1 – Dois meniscos de uma ponte de líquido formados entre dois grãos de solo.

A curvatura do menisco na região mais quente (menisco A) decresce enquanto que na região mais fria esta curvatura aumenta (menisco B). A condensação e evaporação continuam e a diferença entre as curvaturas aumenta até que o fluxo capilar através das “ilhas” seja igual à taxa de condensação ou evaporação. O transporte de água na direção da região mais fria aumenta devido a este curto ciclo no processo de difusão do vapor.

Desse modo, a transferência de umidade sob gradientes de temperatura em um solo com uma baixa continuidade líquida é definida, segundo *Hampton* (1989), como uma série de processos paralelos de fluxo através de regiões de vapor e líquido. O fluxo de vapor é determinado pelo gradiente de pressão de vapor que atravessa os poros preenchidos com ar, onde o fluxo através das “ilhas” de líquido ajusta-se para se igualar este fluxo de vapor. Este mecanismo para o aumento do fluxo é aplicável a todos os líquidos voláteis e não somente a água, já que as fases de vapor e líquida estão na mesma substância. A tensão superficial existente nos meniscos formados nas “ilhas” também provoca variações no fluxo, porém quando comparadas às variações decorrentes de gradientes de temperatura,

que podem ser da ordem de centenas de graus Celsius, estas se tornam secundárias.

## 2.3

### Modelo de Philip e de Vries

O transporte de umidade e calor em solos não-saturados iniciou-se a partir do modelo simples de fluxo volumétrico de líquido em meios porosos saturados de *Darcy* (1856) e que foi estendido por *Buckingham-Darcy* (1907) para um meio poroso não-saturado. *Philip e de Vries* (1957) foram os primeiros a modelar o fenômeno de migração de umidade sob um ponto de vista macroscópico, onde *Vries* (1958) generalizou o modelo dando distinção especial às mudanças de umidade nas fases líquida e de vapor. *Milly e Eagleson* (1980) e *Milly* (1982) modificaram a teoria de *Philip e de Vries* (1957) utilizando uma formulação baseada na carga de pressão, onde os efeitos de histerese das propriedades hidráulicas dos solos são considerados. Outros estudiosos formularam o fenômeno utilizando as leis da termodinâmica, onde os precursores foram *Cary e Taylor* (1962) e *Taylor* (1964) e através de modelos estatísticos, com trabalhos pioneiros de *Childs e Collis-George* (1950) para a análise do fenômeno.

O modelo proposto por *Philip e de Vries* (1957) trata o fenômeno de migração de umidade em meios porosos não-saturados sob um ponto de vista macroscópico e, ao contrário da teoria física ser intuitivamente clara, suas transcrições em um modelo matemático não são claramente entendidas. O modelo consiste da utilização de leis fenomenológicas da difusão de umidade na fase líquida, difusão de umidade na fase vapor e difusão de calor, Lei de Darcy, Lei de Fick e Lei de Fourier, respectivamente, nas equações de balanço de massa e energia. Assim, o modelo matemático obtido apresenta explicitamente as influências combinadas dos gradientes de temperatura e umidade nos processos de migração de umidade e calor. A seguir serão desenvolvidas as equações do transporte de umidade e transporte de calor. Para tanto são necessárias algumas colocações pertinentes. O meio poroso será tomado como um meio contínuo e todos os balanços de massa e energia são feitos sobre um elemento infinitesimal,

que é pequeno comparado à dimensão do corpo em estudo, mas grande o suficiente para ser uma amostra representativa do meio que contém as três fases.

### 2.3.1

#### Equações de transporte de umidade

A equação para o transporte de umidade é obtida a partir da expressão da conservação de massa que estabelece que:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{q_v + q_l}{r_l} \right) \quad (2.1)$$

onde  $q_v$  é o fluxo de vapor,  $q_l$  é o fluxo de líquido,  $r_l$  é a massa específica do líquido,  $t$  é o tempo e  $\mathbf{q}$  é teor de umidade volumétrico, definido como a razão entre o volume de líquido e volume total. Deve-se ressaltar que, conforme a primeira hipótese citada no item 2.1, a massa de vapor d'água presente nos poros é desprezada comparada à massa de líquido. O lado esquerdo da equação (2.1) representa a variação do teor de umidade volumétrico em relação ao tempo em um volume infinitesimal de um elemento poroso.

O fluxo de vapor d'água  $q_v$  é obtido a partir de modificações na Lei de Fick para um meio poroso expressa por (Penman, 1940; van Bavel, 1952; Rollins et al., 1954 apud Hampton, 1989):

$$q_v = -D_{atm} \mathbf{n} \mathbf{a} \mathbf{q}_a \nabla \mathbf{r}_v \quad (2.2)$$

onde  $D_{atm}$  é a difusividade molecular do vapor d'água no ar,  $\mathbf{n}$  é o fator de fluxo de umidade, que é uma correção para as diferenças nas condições de contorno governantes do ar e do vapor d'água,  $\mathbf{a}$  é o fator de tortuosidade,  $\mathbf{q}_a$  é o teor de umidade volumétrico de ar e  $\mathbf{r}_v$  é massa específica do vapor d'água.

*Philip e de Vries* (1957) estudaram dados existentes no fenômeno de movimento de umidade em solos em resposta a gradientes de temperatura, e notaram que valores observados de difusão de vapor aparente são maiores que os

previstos pela eq. (2.2). Notaram que a transferência de umidade sob gradientes de temperatura é infinitamente menor em solos muito secos e em solos úmidos, mas atinge valores máximos em solos com teores de umidade médios. Eles então, conciliaram estes fatos desenvolvendo uma equação que descreve o movimento de umidade em solos em resposta a gradientes de umidade e gradientes de temperatura.

A eq. (2.2) foi estendida por *Philip e de Vries* para separar os componentes isotérmicos e não-isotérmicos da transferência de vapor, e para incluir os efeitos da umidade relativa na transferência. Para isso, foi usada a relação termodinâmica de *Edlefsen e Anderson* (1943):

$$\mathbf{r}_v(\mathbf{y}, T) = \mathbf{r}_0(T)h = \mathbf{r}_0(T) \exp(\mathbf{y} g / RT) \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{r}_0$  é a massa específica do vapor d'água saturado,  $h$  é a umidade relativa,  $\mathbf{y}$  é a carga de pressão,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $R$  é a constante dos gases para o vapor d'água e  $T$  é a temperatura.

Em seguida, *Philip e de Vries* afirmaram baseados em provas informais (*Bach*, 1989) que  $\partial h / \partial t$  pode ser assumido como zero em todo o intervalo de  $h$ . Desse modo, desprezando a dependência da temperatura em função da umidade relativa e, assumindo que  $\mathbf{r}_0$  é função apenas de  $T$  e  $h$  é função apenas de  $\mathbf{q}$ , obtém-se:

$$\nabla \mathbf{r}_v = h \frac{d\mathbf{r}_0}{dT} \nabla T + \mathbf{r}_0 \frac{dh}{d\mathbf{q}} \nabla \mathbf{q} \quad (2.4)$$

e, da eq. (2.3) temos:

$$\nabla \mathbf{r}_v = h \frac{d\mathbf{r}_0}{dT} \nabla T + \frac{g\mathbf{r}_v}{RT} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \nabla \mathbf{q} \quad (2.5)$$

e substituindo a eq. (2.5) na eq. (2.2), obtém-se:

$$q_v = -D_{amt} n a q_a \nabla r_v \left( h \frac{d r_0}{dT} \nabla T + \frac{g r_v}{RT} \frac{d y}{d q} \nabla q \right) \quad (2.6)$$

ou, na forma reduzida:

$$\frac{q_v}{r_l} = -D_{T_v} \nabla T - D_{q_v} \nabla q \quad (2.7)$$

onde  $D_{q_v}$  é a difusividade isotérmica da fase vapor e  $D_{T_v}$  é a difusividade térmica da fase vapor.

Para meios isotrópicos que não estão sujeitos a gradientes de temperatura, o fluxo de umidade na fase líquida é dado por uma modificação da equação de Darcy (*Richards, 1931* apud *Ferreira, 1993*):

$$\frac{q_l}{r_l} = -K(q) \nabla (y + z) \quad (2.8)$$

onde  $K$  é a condutividade hidráulica e  $z$  é a componente vertical da carga hidráulica total.

A teoria para o transporte de líquido em meios porosos descrita na eq. (2.8), foi também estendida por *Philip e de Vries* para separar os componentes isotérmicos e térmicos no fluxo do líquido. Utilizando o fato que  $y = y(q, T)$ , de forma que:

$$\nabla y = \frac{\partial y}{\partial q} \nabla q + \frac{\partial y}{\partial T} \nabla T \quad (2.9)$$

e assumindo que  $y$  é determinada pela capilaridade, temos:

$$\frac{\partial y}{\partial T} = \frac{y}{s} \frac{ds}{dT} = g y \quad (2.10)$$



onde  $s$  é a tensão superficial da água, Philip e de Vries obtiveram a seguinte equação:

$$\frac{q_l}{r_l} = -K \frac{\partial y}{\partial q} \nabla q - K g y \nabla T - K \nabla z \quad (2.11)$$

ou

$$\frac{q_l}{r_l} = -D_{q_l} \nabla q - D_{T_l} \nabla T - K \nabla z \quad (2.12)$$

onde  $D_{q_l}$  é a difusividade isotérmica da fase líquida e  $D_{T_l}$  é a difusividade térmica da fase líquida.

Combinando as equações (2.1), (2.7) e (2.12) obtemos equação diferencial generalizada que descreve o movimento de umidade sob a influência combinada de gradientes de temperatura e de teor de umidade volumétrico nos fluxos de líquido e vapor, conforme a eq. (2.13):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla(D_{T_v} \nabla T + D_{q_v} \nabla q) + \nabla(D_{T_l} \nabla T + D_{q_l} \nabla q) + \nabla(K z) \quad (2.13)$$

Rearranjando a expressão (2.13), temos:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla(D_q \nabla q) + \nabla(D_T \nabla T) + \nabla(K z) \quad (2.14)$$

onde  $D_q$  e  $D_T$  são as difusividades mássica e térmica, respectivamente, definidas por:

$$D_q = D_{q_l} + D_{q_v} \quad \text{e} \quad D_T = D_{T_l} + D_{T_v} \quad (2.15)$$

### 2.3.2

#### Equações de transporte de calor

A expressão de energia térmica é dada por uma extensão da equação de Fourier para condução de calor, onde são acrescentados os processos de convecção, transporte de calor latente e fluxo de umidade (transporte de calor sensível). O fluxo de calor em meios não-saturados, segundo *de Vries* (1958), pode ser expresso por:

$$q_h = -\mathbf{I}_* \nabla T + L_0 q_v + c_p (T - T_0) q_v + c_l (T - T_0) q_l \quad (2.16)$$

onde  $q_h$  é o fluxo de calor no meio,  $\mathbf{I}_*$  é a condutividade térmica do meio poroso,  $L_0$  é o calor latente de vaporização da água calculado em  $T = T_0$ ,  $c_p$  é o calor específico do vapor da água em pressão constante,  $c_l$  é o calor específico do líquido e  $T_0$  é uma temperatura de referência arbitrada. O primeiro termo do lado direito da eq. (2.16) representa a contribuição da condução pura de calor. O segundo termo representa a transferência de calor latente pelo movimento de vapor. O terceiro e quarto termos representam a transferência de calor sensível na forma de vapor e líquida, respectivamente.

O conteúdo de calor total por unidade de volume  $S_h$ , segundo *de Vries* (1958) é expresso por:

$$S_h = C_M (T - T_0) + L_0 \mathbf{r}_v \mathbf{q}_a - \mathbf{r}_v \int_0^q W d\mathbf{q} \quad (2.17)$$

onde  $C_M$  é a capacidade de calor volumétrica do meio poroso e  $W$  representa o calor de “molhagem” diferencial. Quando uma quantidade mínima de água é adicionada a matriz de solo, uma pequena quantidade de calor é liberada e esta energia térmica é chamada calor de “molhagem” (*Groenevelt e Kay, 1974 apud Hampton, 1989*).

Uma forma alternativa do fluxo de calor é obtida através da relação termodinâmica:

$$L_0 + c_p(T - T_0) = L + c_l(T - T_0) \quad (2.18)$$

que fornece a eq. (2.19),

$$q_h = -\mathbf{I}_* \nabla T + Lq_v + c_l(T - T_0)q_m \quad (2.19)$$

onde  $q_m = q_l + q_v$ . Substituindo por  $q_v$  na eq. (2.7), temos:

$$q_h = -(\mathbf{I}_* + \mathbf{r}_l LD_{T_v}) \nabla T + \mathbf{r}_l LD_{q_v} \nabla \mathbf{q} + c_l(T - T_0)q_m \quad (2.20)$$

Uma vez que os mecanismos responsáveis pelo fluxo de calor devido a gradiente de temperatura não podem ser separados fisicamente, *de Vries* (1958) sugere que a expressão  $\mathbf{I}_* + \mathbf{r}_l LD_{T_v}$  seja substituída por  $\mathbf{I}$ , que é a condutividade térmica aparente do meio incluindo os efeitos do transporte de calor latente do vapor devido a gradientes de temperatura nos poros preenchidos com ar.

A aplicação do princípio de conservação de energia térmica ao fluxo de calor na eq. (2.20) e o teor de calor expresso na eq. (2.17) produz a seguinte equação diferencial parcial que descreve o fluxo de energia térmica em um meio poroso sob gradientes de temperatura e gradientes de pressão:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \nabla [(\mathbf{I}_* + \mathbf{r}_l LD_{T_v}) \nabla T + \mathbf{r}_l LD_{q_v} \nabla \mathbf{q} - c_l(T - T_0)q_m] \quad (2.21)$$

## 2.4

### Modelo adotado

Conforme citado no capítulo 1, o modelo de *Milly* (1982) foi escolhido pelo fato de sua formulação ter sido desenvolvida em função da carga de pressão, além de incluir os efeitos dos gradientes de temperatura no fluxo de umidade. As equações governantes utilizadas neste modelo descrito por *Milly e Eagleson* (1980) e por *Milly* (1982) são baseadas nas formulações propostas por *Philip e de Vries* (1957) e *de Vries* (1958), utilizando modificações das equações (2.14) e (2.21).

De acordo com *Milly* (1982), o fluxo de umidade na fase líquida do solo, em função da carga de pressão e temperatura, é dada por:

$$q_l = -K \nabla y - r_l D_{Ta} \nabla T - r_l K \quad (2.22)$$

onde  $D_{Ta}$  é um coeficiente relacionado ao calor de “molhagem” no campo de pressão responsável pelo fluxo de líquido absorvido.

$$D_{Ta} = \frac{-0.0013}{T} \quad (2.23)$$

Esta transferência de líquido na fase absorvida é importante apenas para materiais argilosos onde a magnitude da integral do calor de “molhagem” e a espessura da camada de água podem ser significativas (*Kay e Groenevelt*, 1974 apud *Hampton*, 1989).

O fluxo de vapor d’água é dado por uma equação modificada da Lei de Fick, semelhante à descrita por *Philip e de Vries* (1957):

$$q_v = -D_{am} \mathbf{t} \nabla \mathbf{r}_v \quad (2.24)$$

onde  $t$  é um fator de tortuosidade. Para a expansão da eq. (2.24) em termos de gradientes de pressão e temperatura é utilizada a mesma relação termodinâmica descrita por *Philip e de Vries* (1957) no item 2.3.1, obtendo a seguinte equação:

$$q_v = -r_l D_y \nabla y - r_l D_{Tv} \nabla T \quad (2.25)$$

onde  $D_y$  é a difusividade isotérmica (semelhante a  $D_q$  no modelo de *Philip e de Vries*) definida como:

$$D_y = \frac{D_{atm} t}{r_l} \frac{g r_v}{RT^k} \quad (2.26)$$

onde  $T^k$  é a temperatura em graus Kelvin, utilizada devido as relações termodinâmicas empregadas no modelo, e  $D_{Tv}$  é a difusividade térmica do vapor dada pela seguinte equação:

$$D_{Tv} = \frac{D_{atm} t}{r_l} n' \left[ h \frac{d r_0}{dT} - \frac{g y r_v}{R (T^k)^2} \frac{dT^k}{dT} \right] \quad (2.27)$$

O parâmetro  $n'$  na eq. (2.27) foi introduzido por *Philip e de Vries* (1957) para prever os efeitos de valores altos de fluxo de vapor comparados a valores previstos através da equação modificada pela Lei de Fick. É representado pela seguinte equação:

$$n' = \frac{1}{t} \begin{cases} h z, & q \leq q_k \\ \left( q_a + \frac{q_a}{h - q_k} q \right) z, & q_k < q \end{cases} \quad (2.28)$$

onde  $h$  é a porosidade do meio,  $q_a$  é o teor de umidade volumétrico do ar,  $q_k$  é o teor de umidade volumétrico no qual o fluxo de líquido começa a ser desprezado.

O parâmetro  $z$  é um fator de correção introduzido por *Philip e de Vries* (1957) para levar-se em consideração o fluxo de vapor devido a elevados gradientes de temperatura médios nos poros preenchidos com ar comparados com a magnitude do gradiente de temperatura macroscópico, dado por:

$$z = \frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} \quad (2.29)$$

onde  $(\nabla T)_a$  é o gradiente médio de temperatura nos poros preenchidos com ar e  $\nabla T$  é o gradiente de temperatura macroscópico. Valores de  $z$  a 20°C são descritos por *Philip e de Vries* no mesmo trabalho.

A difusividade molecular do vapor d'água no ar  $D_{am}$ , como sugerida por *Dorsey* (1940), válida para todo o intervalo de 0°C a 100°C, é expressa pela relação:

$$D_{am} = D_0 (P_0/P) (T^k/T_0^k)^{1.75} \quad (2.30)$$

onde  $D_0$  é o valor de  $D_{am}$  na pressão total  $P_0$  e na temperatura  $T_0^k$ . A eq. (2.31) fornece valores de  $D_{am}$  semelhantes aos valores da equação de *Philip e de Vries* (1957).

$$D_{am} = 5.80 \times 10^{-7} (T^k)^{2.3} \quad (2.31)$$

O fator de tortuosidade  $t$ , utilizado para reduzir a difusividade do vapor através dos poros no solo comparado com valores de difusão no ar livre, é definido como uma função potencial do teor de umidade volumétrico do ar no solo  $q_a$  adequados a dados experimentais e de campo (*Nobre e Thomson*, 1992), expresso por:

$$t = q_a^{5/3} \quad (2.32)$$

A equação do fluxo de umidade é obtida através das equações (2.22), que representa o fluxo de líquido, e (2.25), que representa o fluxo de vapor, formando:

$$\frac{q_m}{\mathbf{r}_l} = -(K + D_y)\nabla\mathbf{y} - (D_{Ta} + D_{Tv})\nabla T - K \quad (2.32)$$

A partir do princípio da conservação de massa obtém-se a equação diferencial que descreve o fluxo de umidade sob a influência combinada de gradientes de temperatura e de umidade:

$$\frac{\partial q}{\partial t} \frac{1}{\mathbf{r}_l} = \nabla \left[ (K + D_y)\nabla\mathbf{y} + (D_{Ta} + D_{Tv})\nabla T \right] + \nabla K \quad (2.33)$$

A partir da expressão de Milly, foi adicionado o parâmetro de massa específica da fase líquida ao fluxo de umidade (*Thomas e Sansom, 1995*), conforme eq. (2.34). A inclusão do parâmetro de massa específica da fase líquida na parcela isotérmica do fluxo está relacionada com sua variação com a temperatura. Portanto, o fluxo em meios saturados ocorre também pela variação da massa específica da fase líquida com a temperatura.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \left[ (\mathbf{r}_l K + D_y)\nabla\mathbf{y} + (D_{Ta} + D_{Tv})\nabla T \right] + \nabla K \quad (2.34)$$

A expressão utilizada para descrever o fluxo de calor em meios porosos não-saturados é derivada da teoria descrita no modelo de *Philip e de Vries*, sendo modificada por *Milly* (1982), e apresentada na seguinte forma:

$$q_h = -I\nabla T - \mathbf{r}_l \left( LD_y + \mathbf{b}^{-1}gTD_{Ta} \right) \nabla\mathbf{y} + c_l(T - T_0)q_m \quad (2.35)$$

onde  $I$  é a condutividade térmica do meio poroso úmido,  $L$  é o calor latente de vaporização da água,  $c_l$  é calor específico do líquido,  $T_0$  é uma temperatura de

referência e  $\mathbf{b}$  é um fator de conversão igual a  $4.2 \times 10^7$  requerido para converter de  $(\text{cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})$  para (cal). O primeiro termo do lado direito da eq. (2.35) representa o processo de condução, onde a condutividade térmica  $\mathbf{I}$  considera também a contribuição do processo de transporte de calor latente associados a gradientes de temperatura. O segundo termo na eq. (2.35) representa a transferência de calor latente pelo movimento de vapor induzido por gradientes de pressão. O terceiro termo representa a transferência através do calor de “molhagem” e o quarto termo representa a transferência de calor por convecção.

A aplicação do princípio de conservação de energia térmica ao fluxo de calor é feita da mesma forma que foi descrita no modelo de *Philip e de Vries* na eq. (2.17), originando a equação que descreve o fluxo de energia térmica em um meio poroso sob gradientes de temperatura e gradientes de pressão para o modelo adotado:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \nabla \left[ \mathbf{I} \nabla T + \mathbf{r}_l (LD_y + \mathbf{b}^{-1} gTD_{T_a}) \nabla \mathbf{y} - c_l (T - T_0) q_m \right] \quad (2.36)$$

A formulação numérica das equações (2.33) e (2.36) são desenvolvidas nos capítulos seguintes, assim como as condições iniciais e condições de contorno especificadas no programa.