

2 **Revisão Bibliográfica**

2.1. **Introdução**

A teoria linear elástica pode ser aplicada na análise de vigas contínuas de concreto protendido, desde que o concreto não esteja fissurado. Este procedimento é razoável, pois, sob cargas de serviço, a maioria dessas vigas não apresenta fissuração, isto porque são projetadas para protensão completa ou limitada. As vigas, todavia, podem ser submetidas eventualmente a sobrecargas maiores que as previstas ou podem até mesmo ser projetadas para permitir um certo grau de fissuração, como no caso de protensão parcial (Lin,1981). Nos últimos anos, poucas investigações experimentais têm sido realizadas sobre redistribuição de momentos. As investigações têm sido principalmente concentradas no desenvolvimento de programas computacionais para prever o comportamento teórico das estruturas.

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão sobre as principais características das vigas construídas em aduelas pré-moldadas, além do conceito sobre redistribuição de momentos segundo a análise plástica e a consideração da redistribuição de momentos segundo as normas e os vários estudos disponíveis na literatura.

2.2. **Comportamento de vigas construídas a partir de aduelas pré-moldadas**

Na literatura técnica disponível são encontrados vários trabalhos tanto numéricos (Virlogeux, 1983; Martins, 1989; Désir, 1993; Ramos, 1994) como experimentais (Hoang et al., 1990, Menezes e Fouré, 1995; Fouré et al., 1993; Regis, 1997, Aparicio et al., 2002) referentes ao comportamento último de vigas construídas em aduelas pré-moldadas. Estes trabalhos são, na grande maioria, restritos ao estudo de vigas isostáticas protendidas com cabos de aço. Os poucos trabalhos sobre vigas contínuas em aduelas não fazem referências ao comportamento quanto à redistribuição de momentos.

De um modo geral, os trabalhos experimentais sobre vigas em aduelas têm como objetivo estudar, sob cargas de serviço e na ruptura, os efeitos da concentração de deformação nas vizinhanças das juntas sobre o comportamento em flexão. A concentração de deformação que ocorre nas juntas é o enfoque principal dos trabalhos numéricos, que procuram desenvolver um modelo que seja capaz de prever com eficiência o comportamento deste tipo de estrutura.

A seguir são descritas, resumidamente, as principais características das vigas construídas em aduelas pré-moldadas em relação aos deslocamentos, à abertura de juntas, às deformações, à concentração de deformação nas juntas e à força na armadura de protensão.

- **Deslocamentos**

A figura 2.1 mostra as curvas carga vs. deslocamento de uma viga em aduelas e de duas vigas monolíticas com diferentes taxas de armadura passiva, todas protendidas com cabos externos de aço (Martins, 1989). A característica típica das curvas carga vs. deslocamento de uma viga monolítica ($\rho_s = 0,77\%$) protendida com cabos externos é a existência de três estados bem definidos: o primeiro corresponde ao estado elástico não fissurado; o segundo é o estado elástico fissurado, iniciado com a fissuração do concreto; e o terceiro estado, o plástico, iniciado com o escoamento da armadura passiva. Os dois últimos estados são caracterizados pelo declínio na inclinação da curva, ou seja, pela perda de rigidez das vigas.

A viga em aduelas difere da viga monolítica ($\rho_s = 0,77\%$) por possuir apenas dois estados bem definidos: o primeiro, de maior inclinação, corresponde ao estado de não abertura das juntas; e o segundo estado, referente à abertura das juntas e fissuração das aduelas (conforme a relação comprimento/altura, da aduela). Assim como na viga monolítica, este último estado é caracterizado pela perda de rigidez da viga. Entretanto, a viga construída com aduelas tem o mesmo comportamento de uma viga monolítica, com taxa de armadura passiva muito pequena, como a mostrada na figura 2.1.

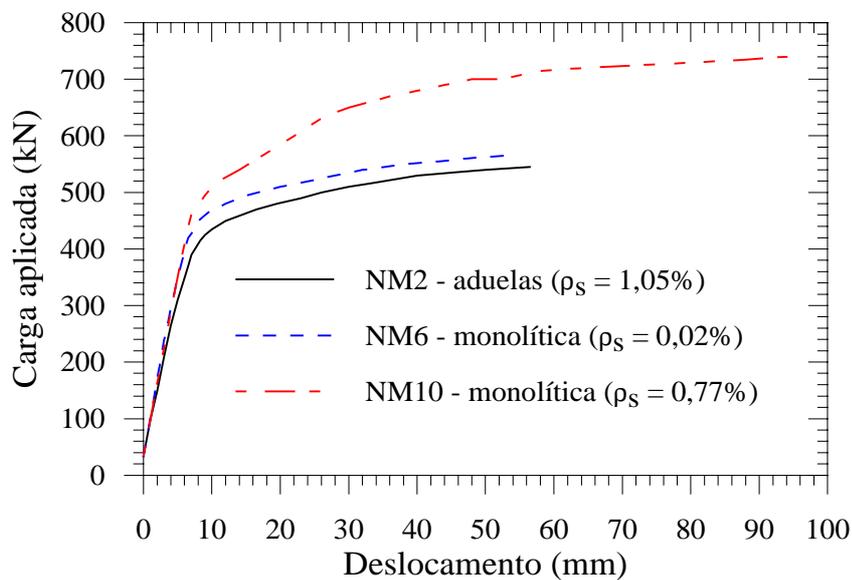


Figura 2.1 - Curvas carga aplicada vs. deslocamento para uma viga em aduelas e duas vigas monolíticas com diferentes taxas de armadura passiva (Martins, 1989).

- **Abertura das juntas**

Uma curva típica relacionando carga aplicada vs. abertura da junta entre aduelas (Martins, 1989) é mostrada na figura 2.2. Observa-se que, após a descompressão da junta, a abertura desta cresce rapidamente para pequenos incrementos de carga aplicada.

A abertura da junta ao longo da altura de uma viga protendida com cabos externos na região de flexão pura é mostrada na figura 2.3 (Fouré et al., 1993). Observa-se que o comportamento da abertura da junta ao longo da altura é praticamente linear até a carga de ruptura, o que possibilita a obtenção da posição da linha neutra (região comprimida) conhecendo o ponto de abertura zero na junta. Este ponto pode ser obtido quando se tem conhecimento da abertura da junta em dois pontos ao longo da altura da seção.

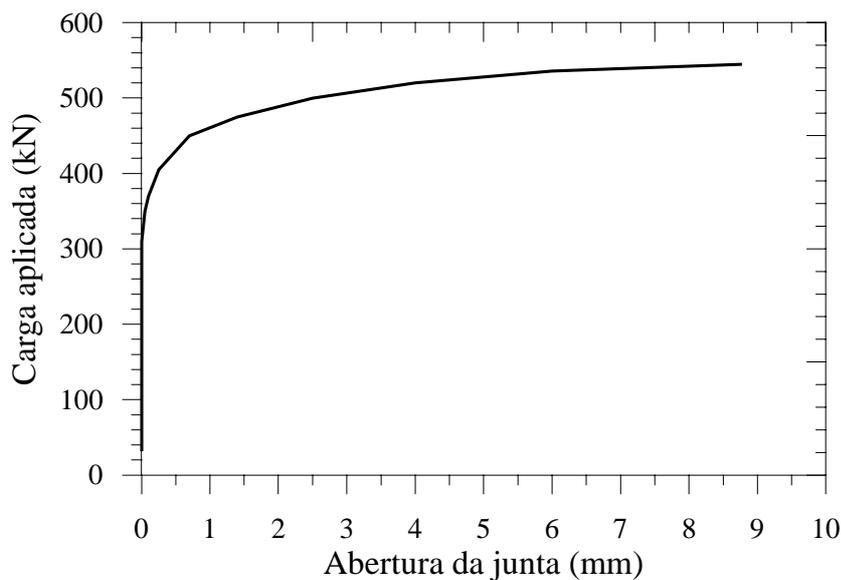


Figura 2.2 - Evolução da abertura de uma junta com a carga aplicada (Martins, 1989).

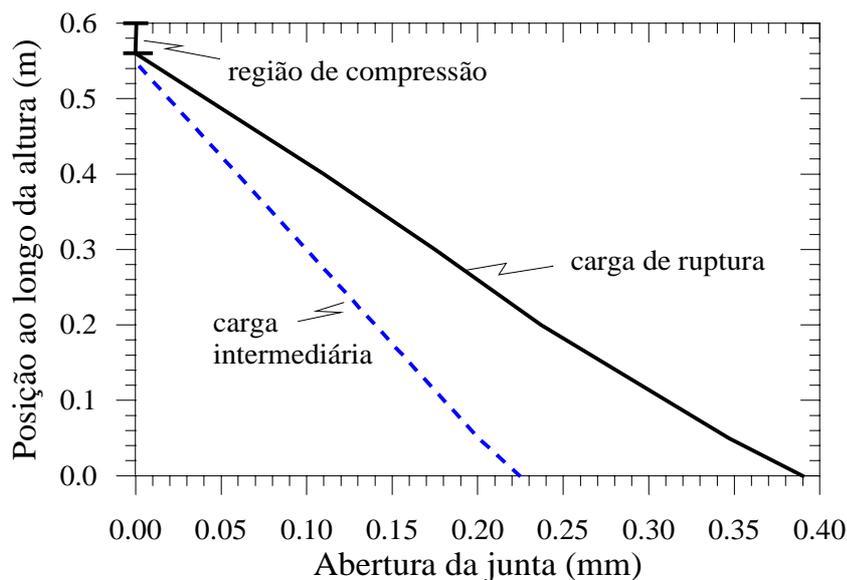


Figura 2.3 - Abertura de uma junta ao longo da altura da seção (Fouré et al., 1993).

• Deformações

A Figura 2.4 mostra uma curva relacionando carga vs. deformação no concreto na junta entre aduelas, na região de maior compressão. As curvas apresentam forma semelhante à resposta da curva carga vs. deslocamento. A mudança na inclinação observada na curva é devida à abertura da junta. De um modo geral, os valores das deformações nas juntas críticas são elevados devido à concentração de deformação nesta região, ocasionada pela ausência de armadura de tração atravessando a junta.

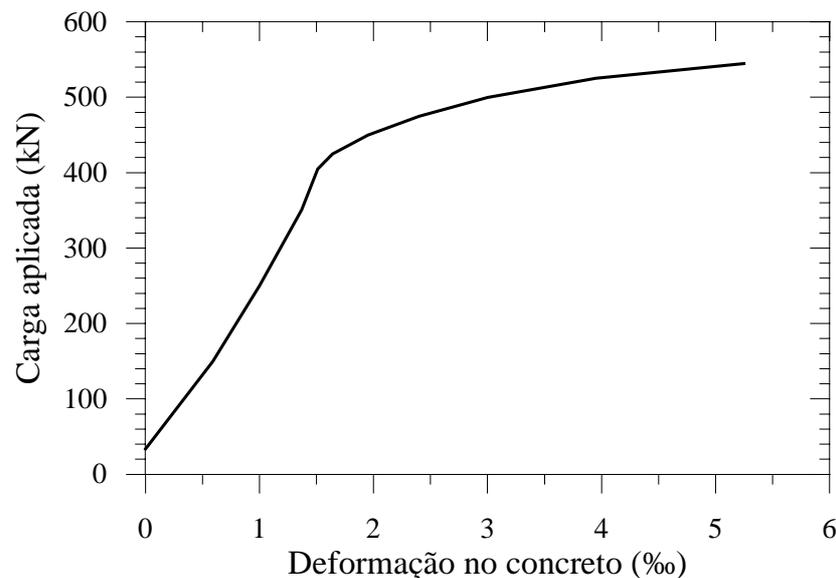


Figura 2.4 - Curva carga vs. deformação no concreto na junta entre aduelas (Martins, 1989).

- **Concentração de deformação**

Uma característica típica das vigas construídas em aduelas é a concentração de deformação nas juntas entre aduelas. A figura 2.5 mostra a distribuição de deformação de compressão no concreto em uma viga isostática em aduelas na região de momento constante (Hoang et al., 1990). Observa-se que a deformação na junta tende a crescer com o incremento da carga aplicada, atingindo alta concentração de deformação nos instantes próximos da ruptura. Nas regiões mais afastadas da junta, as seções são menos solicitadas.

As figuras 2.6 e 2.7 mostram a evolução das deformações no concreto nas fibras superiores para duas vigas contínuas ensaiadas por Regis (1997), sendo uma viga monolítica e a outra em aduelas, respectivamente. Observa-se que, nas etapas iniciais de carregamento na viga monolítica, quase não existem diferenças nas deformações entre seções e nas etapas seguintes as deformações aumentam suavemente em direção à seção crítica. O mesmo não ocorre na viga em aduelas, na qual as deformações, desde o princípio, encontram-se concentradas nas juntas. Nas seções fora das juntas as deformações trabalham próximas do regime elástico.

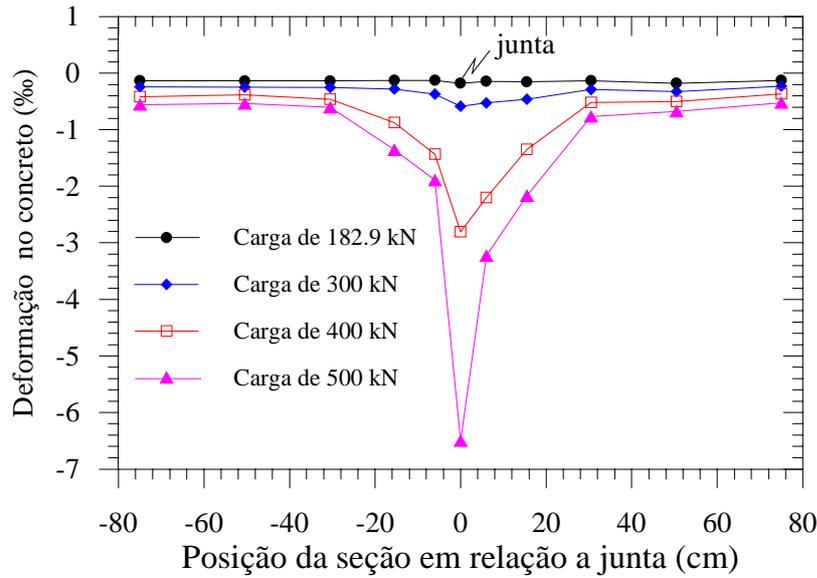


Figura 2.5 - Deformação no concreto na região de flexão pura de uma viga isostática em aduelas, para diferentes níveis de carregamento (Hoang et al., 1990).

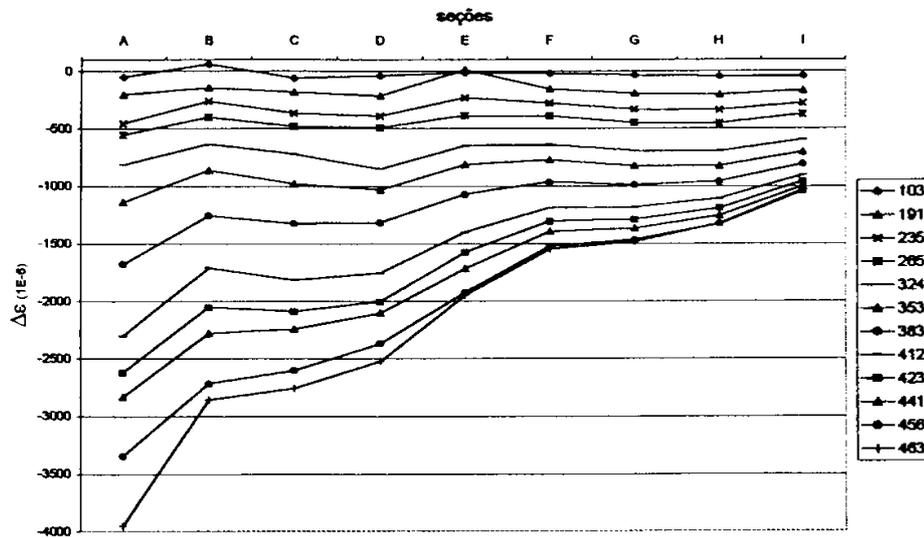


Figura 2.6 – Variação de deformação no topo da seção da viga monolítica (Regis 1997).

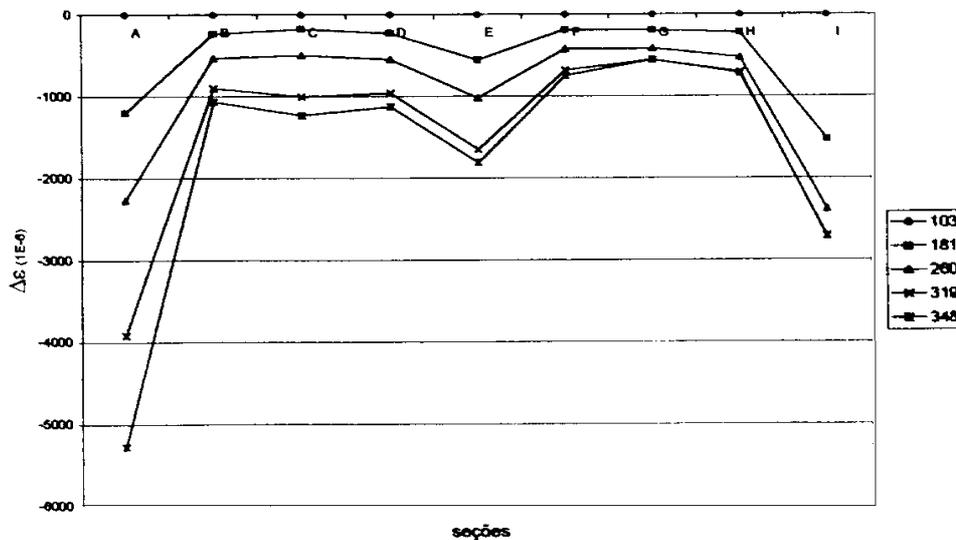


Figura 2.7 – Variação de deformação média no topo da seção da viga em aduelas (Regis 1997).

- **Força no cabo de protensão**

A figura 2.8 apresenta uma típica curva carga vs. força no cabo de protensão, onde se observa semelhança de formas em relação à curva carga vs. deslocamento. A força na armadura protendida permanece praticamente constante até a abertura das juntas. Este é o mesmo tipo de comportamento de uma viga monolítica (Regis, 1997). Após a abertura da junta, com a perda da rigidez inicial, é observado um aumento significativo da força na armadura protendida. Os resultados experimentais mostram que a variação de tensão que ocorre nos cabos de protensão nas vigas em aduelas é menor do que a observada nas vigas monolíticas (Martins, 1989; Regis, 1997).

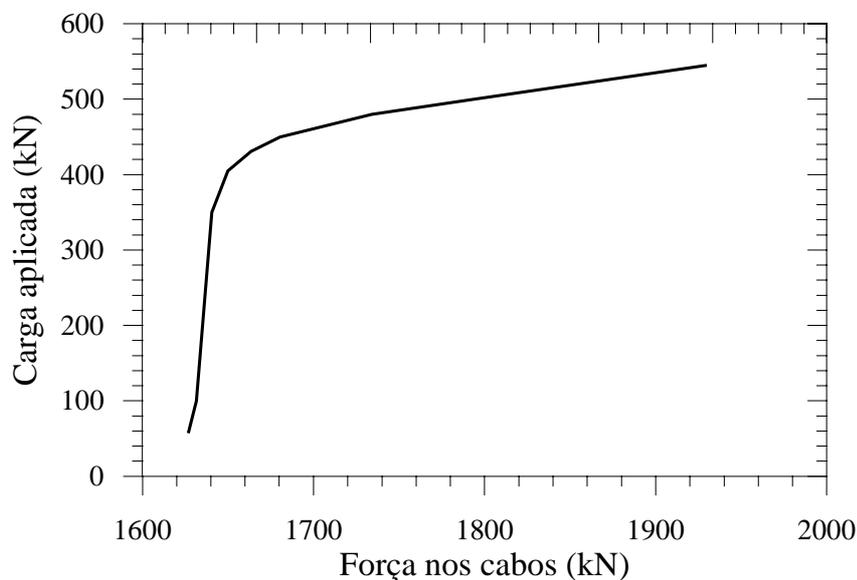


Figura 2.8 - Curva típica carga aplicada vs. força no cabo de protensão para vigas em aduelas com cabo externo (Martins, 1989).

2.3. Análise plástica das vigas

2.3.1. Vigas isostáticas

Nas vigas isostáticas, a estrutura entra em colapso quando se esgota a capacidade resistente da seção mais solicitada. Para ilustrar o conceito de rótula plástica, será analisado o comportamento de uma viga simplesmente apoiada, sujeita a uma carga concentrada P no meio do vão, como mostrado na figura 2.9a.

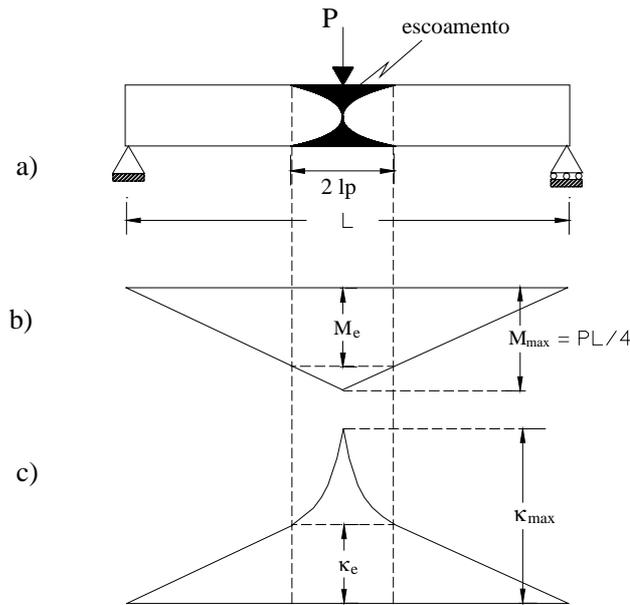


Figura 2.9 - Formação de rótula plástica em uma viga de material elasto-plástico perfeito.

Considera-se que a viga seja feita de um material elasto - plástico perfeito, cuja relação momento vs. curvatura em uma determinada seção é a mostrada na figura 2.10. O diagrama de momentos fletores tem a forma triangular, com momento máximo (M_{max}) igual a $P.L/4$ (Figura 2.9b). Quando M_{max} atinge o momento de plastificação (M_p), forma-se uma rótula plástica. A plastificação não se restringe exclusivamente a uma seção, pois as deformações plásticas normalmente ocorrem em um determinado comprimento $2.l_p$ (Figura 2.9a) denominado comprimento de rótula plástica. Para fins práticos, considera-se rótula plástica a seção totalmente plastificada e, portanto, supõe-se a mesma concentrada em uma seção transversal. As zonas totalmente plásticas aparecem hachuradas na figura 2.9a.

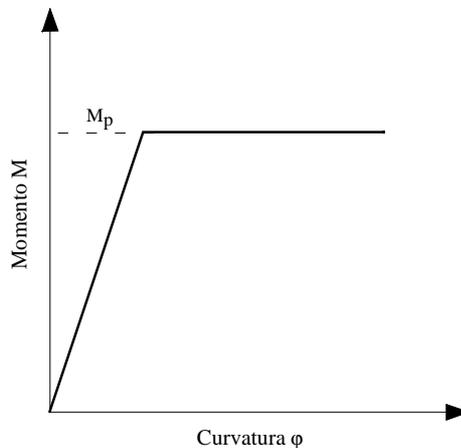


Figura 2.10 - Curva típica momento vs. curvatura de um material elasto - plástico perfeito.

O diagrama da curvatura da viga está representado na figura 2.9c. A curvatura aumenta linearmente das extremidades para o centro até alcançar os pontos limites da região plástica, onde se torna igual ao seu valor de escoamento κ_e . Deste ponto em diante, o crescimento é mais rápido e alcança o valor máximo $\kappa_{m\acute{a}x}$ no centro da viga. A curvatura máxima permanece finita enquanto existir um núcleo elástico no meio da viga, a partir do qual a curvatura se torna extremamente grande. Com isto, a viga se rompe devido às rotações excessivas que ocorrem na seção transversal média, enquanto as duas partes que a compõem permanecem relativamente rígidas por estarem no regime elástico. Assim, a viga comporta-se como duas barras rígidas, ligadas por uma rótula plástica, que permite às duas barras girarem, uma em relação à outra, sob a ação de um momento constante.

No concreto armado a formação da rótula plástica é caracterizada pela plastificação do concreto e da armadura passiva de tração e do concreto (figura 2.11). A profundidade da zona de compressão decresce com o aparecimento da rótula plástica. A figura 2.11b mostra a distribuição de rotações ao longo do eixo de uma viga solicitada por uma carga concentrada (Silva, 1977). O surgimento de fissuras e a conseqüente variação de rigidez da viga fletida contribuem para a formação das rotações plásticas localizadas em torno da seção crítica.

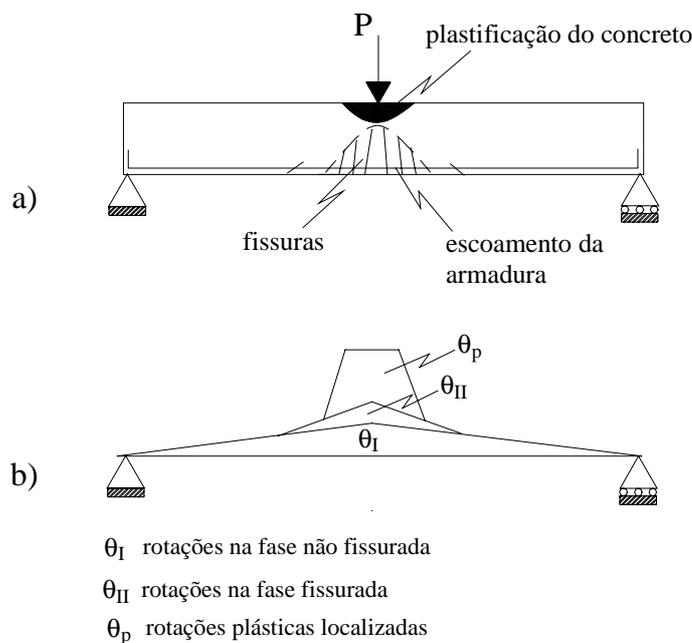


Figura 2.11 - Formação de rótula plástica em uma viga de concreto armado (Silva, 1977).

2.3.2. Vigas hiperestáticas

- **Material elasto - plástico perfeito**

Nas vigas hiperestáticas, o esgotamento da capacidade resistente de uma seção não implica necessariamente no colapso da estrutura. O colapso só ocorrerá quando a estrutura for transformada em um sistema instável, após a formação de rótulas plásticas em diversas seções. As rótulas plásticas, que se formam com o crescimento do carregamento, só poderão resistir aos momentos até determinados limites, condicionados por sua capacidade de rotação. Uma viga n vezes hiperestática entra em colapso quando, sob a ação das cargas, houver a formação de $n+1$ rótulas plásticas.

Para demonstrar o comportamento das vigas estaticamente indeterminadas, será apresentado o exemplo uma viga engastada numa extremidade e simplesmente apoiada na outra, com seção transversal constante e sujeita a duas cargas concentradas P , nos terços do vão (Figura 2.12a). Considera-se o comportamento do material como elasto – plástico perfeito, com curva característica relacionando momento vs. curvatura igual à apresentada na figura 2.10.

Para qualquer valor de $P < P_e$ (P_e carga correspondente ao início do escoamento) o diagrama de momentos fletores tem a forma mostrada na figura 2.12b. Esta é a fase elástica designada na figura 2.12c como fase 1, na qual:

$$M_A = \frac{1}{3} \cdot P \cdot L \quad (2.1)$$

$$M_B = \frac{1}{9} \cdot P \cdot L \quad (2.2)$$

$$M_C = \frac{2}{9} \cdot P \cdot L \quad (2.3)$$

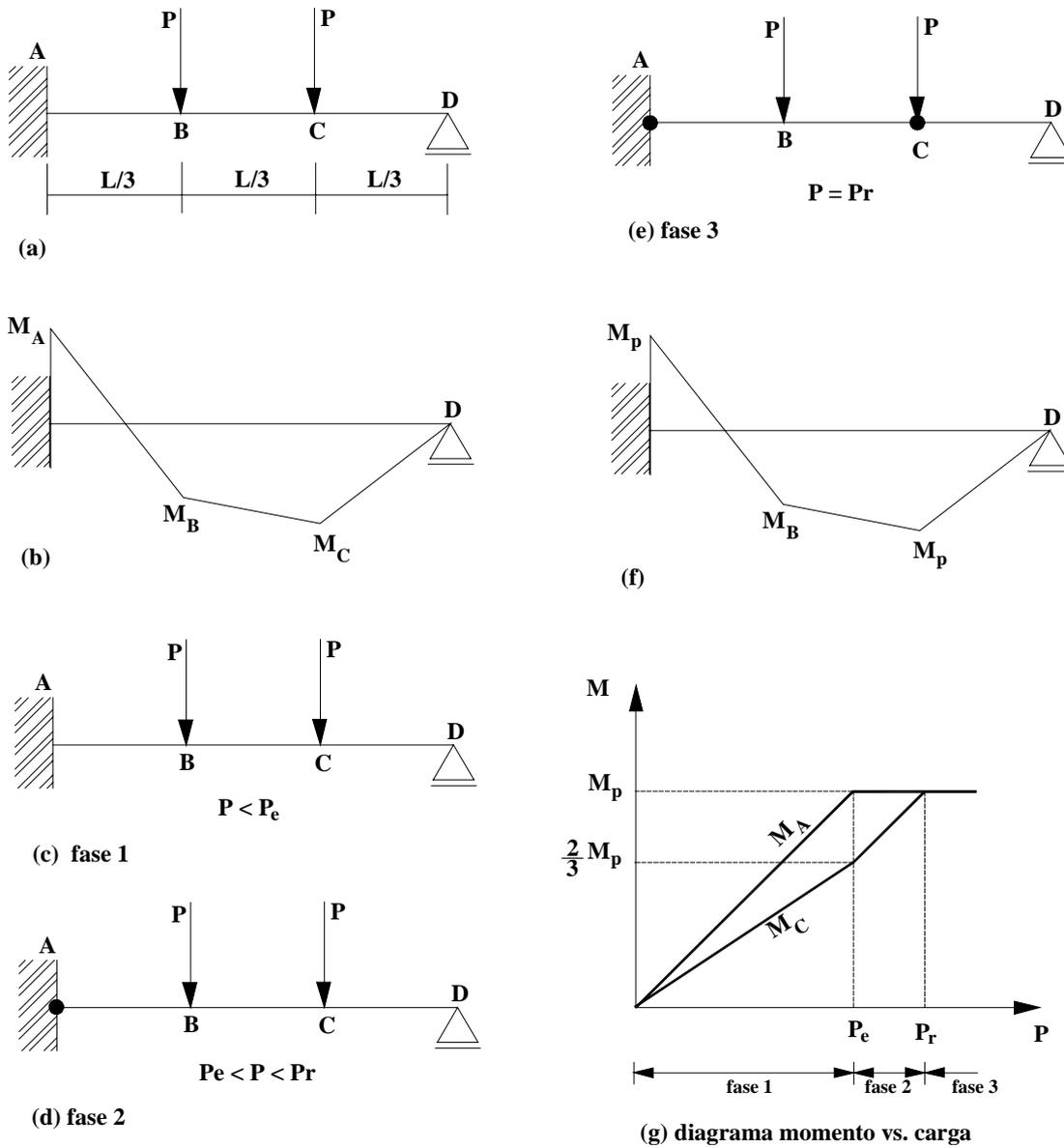


Figura 2.12- Análise plástica de vigas estaticamente indeterminadas.

Quando o momento de engastamento M_A atinge o momento de plastificação (M_p), as seções **B** e **C**, sujeitas aos momentos M_B e M_C , ainda estão na fase elástica. Forma-se neste instante, na seção de engastamento (seção **A**), a primeira rótula plástica. Seja P_e a carga correspondente. Então,

$$M_A = M_p = \frac{1}{3} \cdot P_e \cdot L \tag{2.4}$$

e portanto,

$$P_e = \frac{3 \cdot M_p}{L} \quad (2.5)$$

Entretanto, uma única rótula não causa a ruptura completa da viga, pois esta se comporta como uma viga estaticamente determinada, suportando uma carga P_e e com momento fletor M_p em **A**. Se P continuar a crescer, o momento de engastamento M_A se mantém constante, ao passo que M_C aumenta (designada na figura 2.12d como fase 2). Esse acréscimo de momento é igual a:

$$\Delta M_C = \frac{1}{3} \cdot (P - P_e) \cdot L \quad (2.6)$$

Quando o momento em **C** atinge por sua vez o valor M_p forma-se nessa seção a segunda rótula plástica e a viga se transforma em um sistema hipostático, entrando em colapso (fase 3 da figura 2.14e). O diagrama momento vs. carga aplicada é mostrado na figura 2.12g.

Para se determinar a carga de ruptura, pode-se usar diretamente a condição de ruptura, vista na figura 2.12e, e calcular P_r com o auxílio da estática. Como os momentos fletores nas rótulas plásticas são iguais a M_p , o diagrama completo dos momentos fletores para a condição de ruptura pode ser imediatamente traçado (ver figura 2.12f) e a carga P_r calculada por considerações de equilíbrio ou utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais. A carga de ruptura, obtida por qualquer método de cálculo, é dada pela eq. (2.7):

$$P_r = \frac{4 \cdot M_p}{L} \quad (2.7)$$

Das equações 2.5 e 2.7, obtém-se a relação

$$\frac{P_r}{P_e} = \frac{4}{3} \cong 1.33 \quad (2.8)$$

Isto significa que a estrutura tem uma reserva de segurança em relação à formação da primeira rótula plástica em torno de 33%.

- **Material elástico – linear**

Seja agora a viga da figura 2.12a, feita de um material elástico, sem nenhuma capacidade de deformação plástica. Neste caso, a relação momento curvatura da viga é a mostrada na figura 2.13. A curvatura cresce linearmente com M até o momento de ruptura (M_u) ser alcançado.

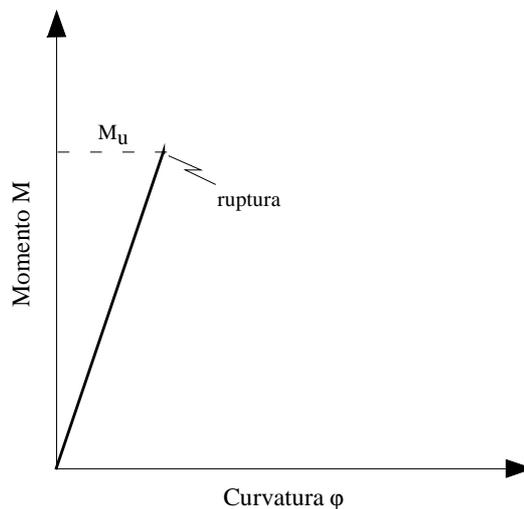


Figura 2.13 - Curva típica momento vs. curvatura de uma material elástico linear.

Tomando-se como referência a figura 2.12b, o valor último de P pode ser obtido de:

$$M_A = M_u = \frac{1}{3} \cdot P_u \cdot L \quad (2.9)$$

ou seja,

$$P_u = \frac{3 \cdot M_u}{L} \quad (2.10)$$

Portanto, quando P atinge o valor P_u , ocorre a ruptura na seção **A** e a viga passa a trabalhar como uma viga simplesmente apoiada, com momentos nas seções **B** e **C** iguais a:

$$M_B = M_C = \frac{1}{3} \cdot P_u \cdot L \quad (2.11)$$

Estes valores são iguais ao momento M_u , ou seja, ocorre também a ruptura em ambas as seções **B** e **C**. Em outras palavras, tão logo M_u é excedido na seção **A**, a estrutura inteira rompe sem aviso prévio. Para uma viga sem ductilidade, tal como esta, a redistribuição de momento não é possível.

- **Comportamento do concreto armado**

Os materiais que constituem o concreto armado apresentam comportamento diferenciado e podem ser caracterizados como materiais frágeis ou dúcteis, como mostrado na figura 2.14.

O concreto simples apresenta-se em geral frágil e, por ser um material heterogêneo, pode se adequar a pequenas mudanças de comportamento, dependendo da percentagem dos elementos constituintes.

Os aços que compõem o concreto armado apresentam comportamento dúctil, com deformabilidade muito superior à do concreto. Desta forma, se a viga da figura 2.12a fosse de concreto armado, não se poderia afirmar a priori se a seção do engaste teria capacidade de rotação plástica suficiente para permitir a formação da segunda rótula plástica.

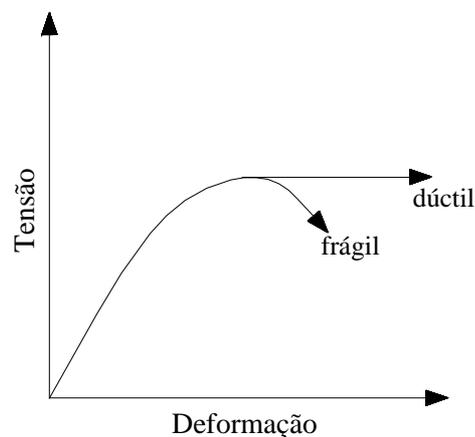


Figura 2.14 - Curva característica do comportamento dos materiais.

A disposição da armadura conduz a uma certa influência na distribuição de fissuras na peça. Essas fissuras provocam significativa diminuição no valor da rigidez à flexão da viga de concreto armado, ocasionando um grande aumento na curvatura nos trechos onde elas se concentram. Devido a grandes aberturas de fissuras, o comportamento da peça foge ao hipotético comportamento elástico - linear (linha tracejada da figura 2.15), definindo a formação das regiões inelásticas, representada na figura 2.15 pela área hachurada.

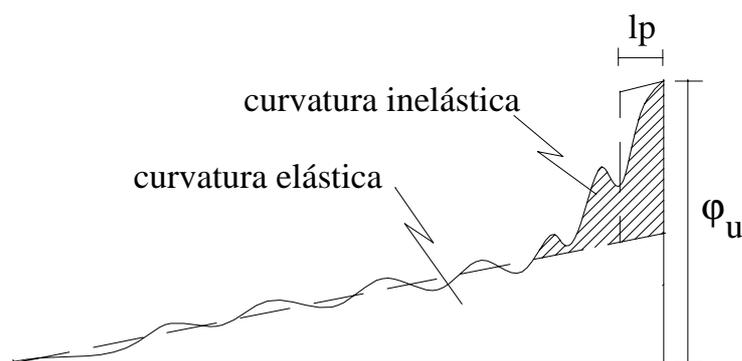


Figura 2.15 - Distribuição das curvaturas ao longo de uma viga no estado limite último (Park e Paulo, 1975).

Numa peça de concreto armado de seção transversal geometricamente constante é possível dispor as armaduras de tal modo que os momentos resistentes acompanhem de perto os momentos solicitantes. Para demonstrar o comportamento de vigas de concreto armado, será considerado, como exemplo, a mesma viga da figura 2.12a, com distribuição diferente de armadura (Figura 2.16).

Para o dimensionamento realizado de forma a cobrir o diagrama de momentos obtido de acordo com o cálculo elástico (figura 2.16a), o momento de ruptura da seção no engaste (seção **A**) será igual a 1,5 vezes o momento de ruptura da seção **C**. Isto significa que os momentos de ruptura nas duas seções críticas serão atingidos ao mesmo tempo. Neste caso não existe a reserva de segurança adicional (Figura 2.16 b). A reserva de segurança só existiria se a seção **C** fosse superdimensionada em relação ao cálculo elástico, com a seção do engastamento dimensionada de acordo com este cálculo.

Se, entretanto, a viga for dimensionada para um diagrama de momentos com valores iguais na seção de engaste (seção **A**) e na seção **C** (Figura 2.16c), pode-se, neste caso, reproduzir o raciocínio feito para a viga de material elasto-plástico perfeito de seção transversal constante. A viga romperá de acordo com o diagrama estipulado, desde que a rótula plástica formada na seção de engaste tenha capacidade de rotação suficiente.

Embora não haja nas estruturas hiperestáticas de concreto armado a reserva de resistência das estruturas hiperestáticas de material elasto - plástico perfeito com seção transversal constante (para efeito de comparação), as primeiras possuem, em geral, uma apreciável capacidade de adaptação a diagramas de

momentos que se afastem dos diagramas do cálculo elástico, desde que respeitado as condições de equilíbrio e compatibilidade da estática.

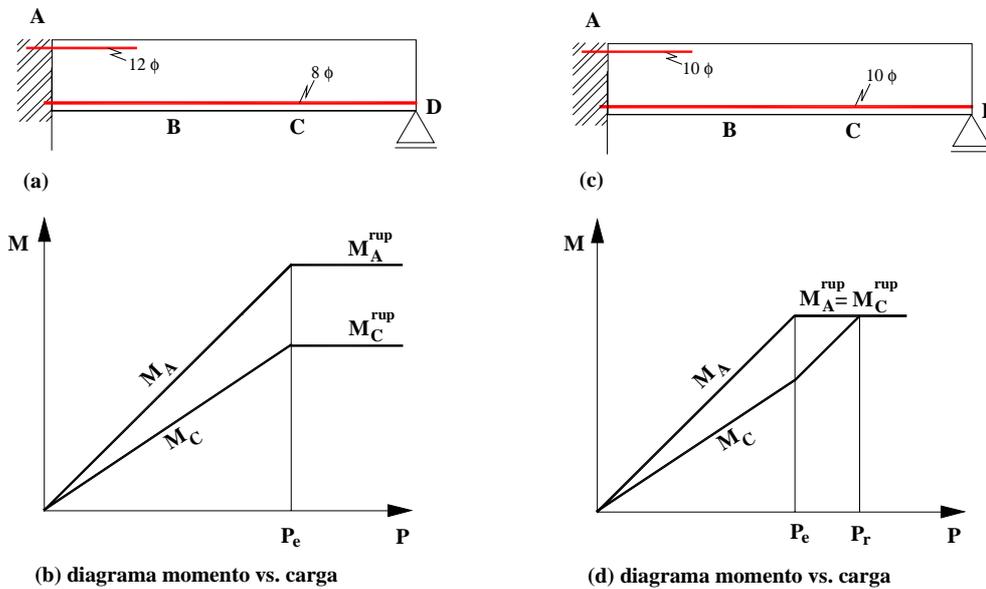


Figura 2.16 - Vigas de concreto armado com distribuição diferente de armadura.

De um modo geral, as vigas superarmadas apresentam rupturas frágeis (Figura 2.17) que se assemelha ao comportamento apresentado na figura 2.13 e as vigas subarmadas apresentam um comportamento dúctil, regido pelo aço na região tracionada, o que possibilita a redistribuição de momentos nas vigas hiperestáticas. Este tipo de comportamento dúctil de estrutura subarmada assemelha-se ao retratado na figura 2.10 e é de grande interesse, uma vez que garante a formação da rótula plástica antes da ruptura da viga.

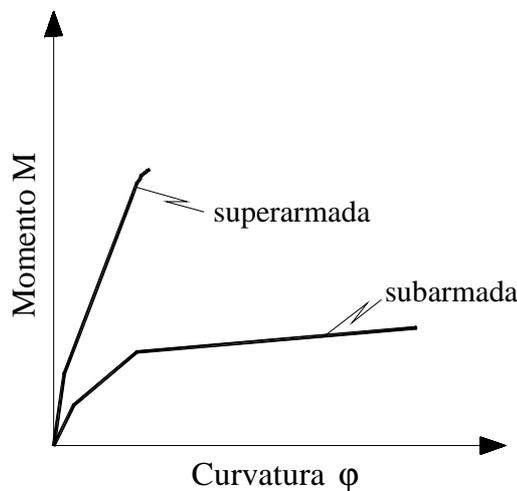


Figura 2.17 - Curvas típicas momento vs. curvatura para vigas de concreto subarmada e superarmada.

- **Comportamento do concreto protendido**

A armadura de protensão funciona como uma armadura de tração, de maneira idêntica à armadura das peças de concreto armado. A única diferença é a existência do pré-alongamento da armadura de protensão, causado pela força de protensão. O pré-alongamento, ou alongamento inicial, soma-se ao alongamento devido à flexão da peça.

Em uma viga isostática de concreto protendido, como a mostrada na figura 2.18, a força de protensão afeta apenas as tensões internas. As reações de apoio dependem apenas do carregamento externo, não sendo afetadas pela protensão. No caso de uma viga descarregada, as reações de apoio serão nulas, independentemente da protensão aplicada. Como nesse caso não existe momento externo aplicado, o momento resistente em qualquer seção deve ser nulo. Por consequência, a linha que une os pontos de aplicação da força resultante no concreto (R_c) nas seções, dita linha de pressão no concreto, coincide com o traçado do cabo, ou seja, com a linha que une os pontos de aplicação da força de protensão (R_p) nas seções.

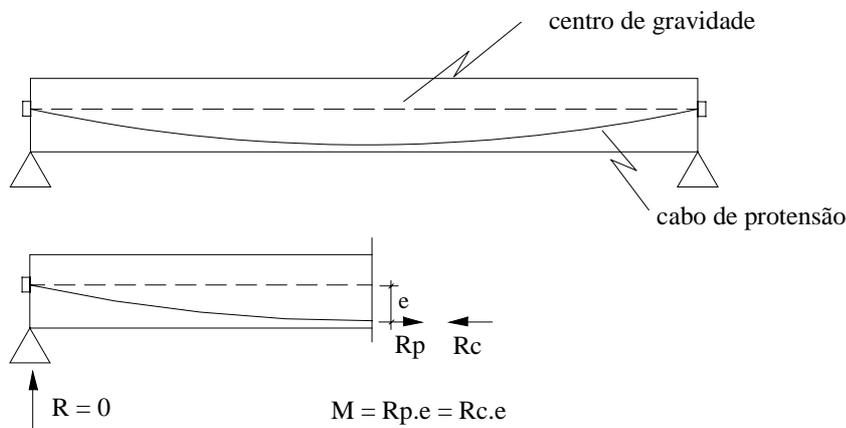


Figura 2.18 - Momento no concreto devido à protensão em uma viga simplesmente apoiada.

Supondo-se que seja introduzido um apoio nesta viga, tornando-a uma viga hiperestática de dois vãos. Neste caso, a seção desse novo apoio, que antes apresentava um deslocamento δ_B para cima, terá esse deslocamento impedido pelo apoio, como mostrado na figura 2.19. O diagrama do momento fletor M_1 , dito primário, causado pela excentricidade da força de protensão, obtido tratando-se a viga como corpo livre, também encontra-se representado na figura 2.19. Como o

deslocamento nesse apoio é nulo, aparece uma força R_b no apoio que anula δ_B (Figura 2.20), provocando esforços na viga, representados pelo diagrama M_2 (Figura 2.20), dito secundário. A combinação de M_1 e M_2 fornece o diagrama final M_R provocado pela protensão, como mostrado na figura 2.20. É claro que o momento secundário em uma viga contínua só existe se o cabo for não concordante, ou seja, a linha de pressão produzida não coincidir com o traçado do cabo.

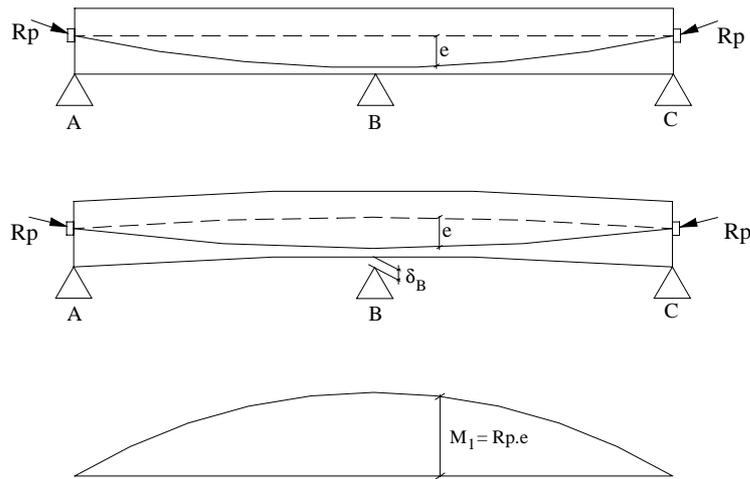


Figura 2.19 - Momento no concreto devido à protensão em uma viga contínua.

O diagrama de momentos primários M_1 tem a forma do cabo, uma vez que

$$M_1(x) = P \cdot e(x) \quad (2.12)$$

Já o momento secundário M_2 varia linearmente entre os apoios, pois é causado pelas forças concentradas (reações).

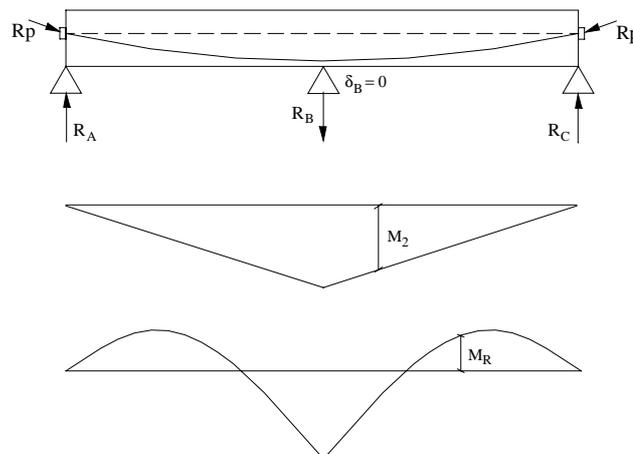


Figura 2.20 - Diagrama de momento secundário e resultante.

Desta forma, nas vigas hiperestáticas estão presentes os mesmos esforços das vigas isostáticas. A eles se somam ainda esforços próprios da protensão em vigas hiperestáticas, que não existem nas vigas isostáticas, ditos esforços devidos aos hiperestáticos de protensão. O hiperestático de protensão é definido como sendo o efeito de reação provocado na peça protendida por apoios ou vínculos que impeçam as deformações decorrentes da protensão no ponto onde os mesmos atuam. A determinação do hiperestático de protensão, para vigas no estado não fissurado, pode ser feita de várias formas utilizando-se, por exemplo, o método das forças ou o método das cargas equivalentes apresentadas em Lin (1981).

A resistência última de uma viga contínua de concreto protendido pode ser estimada por meio de uma análise limite, se a formação de rótulas plásticas em pontos de momento máximo for possível. A formação do mecanismo de ruptura e o momento correspondente na seção crítica só podem ser obtidos para seções subarmadas com suficiente capacidade de rotação plástica. Para seções superarmadas, que podem romper bruscamente na zona comprimida antes da ocorrência de rotações apreciáveis, a formação de uma rótula plástica não pode ser prevista.

A relação típica entre momento e curvatura para uma seção de concreto protendido é mostrada na figura 2.21, onde M_{cr} é o momento de fissuração da seção e M_u é o momento último. Para valores de momento maiores que M_{cr} , a rigidez é consideravelmente reduzida pela fissuração e pelas deformações inelásticas do aço e do concreto.

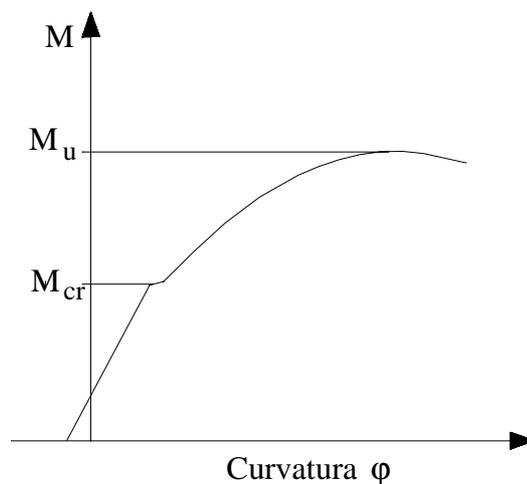


Figura 2.21 - Curva típica momento vs. curvatura para uma viga de concreto protendido.

O comportamento típico carga vs. momento fletor para uma viga de concreto protendido com cabo não concordante (figura 2.22a) é mostrado na figura 2.22b (Kodur e Campbell, 1999). Devido à não concordância do cabo, é observada a presença do momento secundário nas curvas referentes ao engaste e ao vão. Após a fissuração, ocorre a redistribuição de momentos.

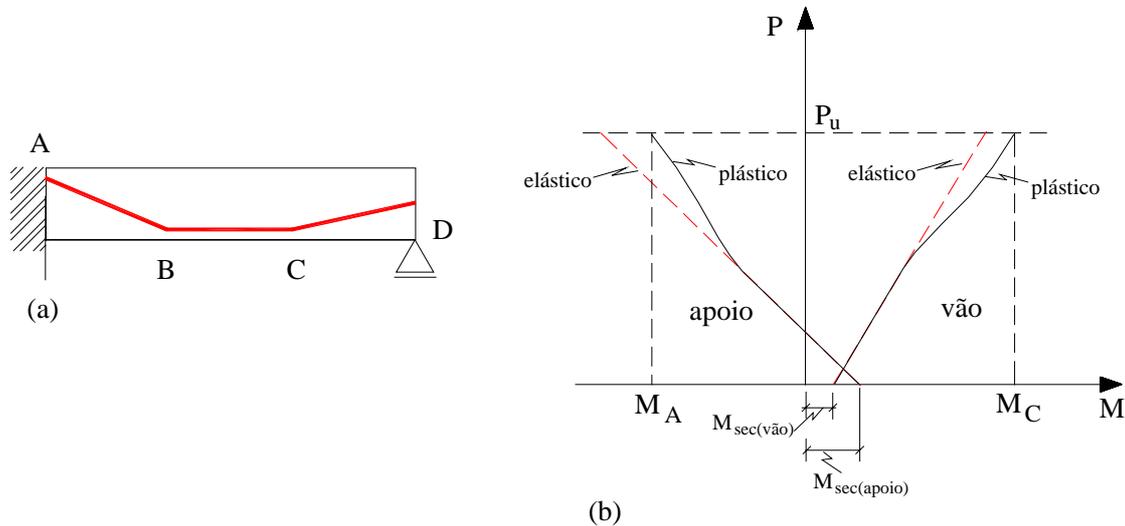


Figura 2.22 - Relação típica carga vs. momento para uma viga de concreto protendido (Kodur e Campbell, 1999).

2.4. Capacidade de rotação da rótula plástica

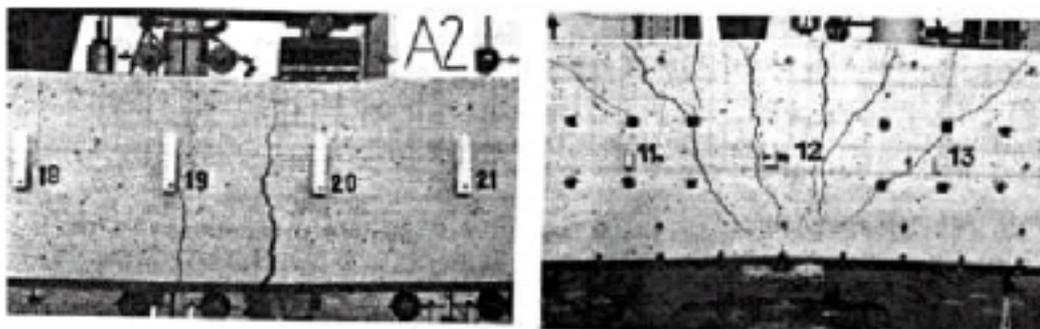
Nos últimos anos, várias normas vêm prevendo análises não lineares admitindo a possibilidade da formação de um mecanismo de colapso originados por rótulas plásticas nas regiões críticas. Para que o mecanismo de colapso ocorra, faz-se necessário que a capacidade de rotação requerida não ultrapasse a capacidade de rotação plástica disponível pelas seções de concreto armado ou concreto protendido.

A capacidade de rotação das rótulas plásticas em estruturas de concreto armado ou protendido depende de diversos fatores, como por exemplo:

- propriedades mecânicas do concreto à tração e compressão;
- resistência e ductilidade do aço;
- forma da seção transversal;
- taxa geométrica e mecânica da armadura (passiva e de protensão);
- confinamento do concreto;
- tipo de carregamento;

- efeito do cisalhamento;
- excentricidade do cabo.

De acordo com estudos teóricos e experimentais, dependendo da magnitude dos esforços cisalhamento, dois diferentes tipos de rótulas plásticas podem surgir (figura 2.23). A chamada rótula de fissuras por flexão que ocorre em regiões onde o momento fletor é predominante (figura 2.23a), e a rótula de fissuras por cisalhamento que ocorre em regiões onde existe momento fletor e uma considerável parcela do esforço cortante atuante (figura 2.23b).



a) Rótula com momento fletor predominante b) Rótula com considerável parcela de esforço cortante

Figura 2.23 – Tipos de rótulas plásticas (CEB, 1998).

As rótulas originadas por fissuras decorrentes de esforços de flexão concentram as deformações plásticas em poucas fissuras, ocasionando uma capacidade de rotação plástica relativamente baixa. As rótulas de fissuras por cisalhamento apresentam um considerável aumento na capacidade de rotações plásticas decorrente das fissuras de flexão e cisalhamento. A maior capacidade de rotações plásticas nas seções submetidas ao efeito conjunto dos esforços de flexão e cisalhamento é decorrente do aumento do comprimento da rótula plástica.

Quando os momentos ao longo de uma viga excedem os de plastificação, forma-se uma região com deformações plásticas que se estendem ao longo de um comprimento de plastificação (para o caso da viga mostrada na figura 2.24 este comprimento equivale a l_p). A área sombreada representa a rotação inelástica que ocorre na rótula plástica nas proximidades da seção crítica e, em algumas regiões observa-se uma flutuação das curvaturas devido ao acréscimo de rigidez entre as fissuras. A área inelástica no estado limite último pode ser substituída por um retângulo equivalente de altura $(\phi_u - \phi_y)$ e de comprimento l_p , que representa a mesma área real da distribuição das curvaturas inelásticas. O comprimento l_p é o

comprimento equivalente da rótula plástica, sobre o qual pode-se assumir que as curvaturas plásticas são constantes. Assim, a rotação da rótula plástica, considerando um lado da seção crítica, é dada por

$$\theta_p = (\varphi_u - \varphi_y) \cdot l_p \quad (2.13)$$

Algumas expressões empíricas tem sido propostas para estimar o comprimento equivalente de rótula plástica (l_p), bem como a deformação máxima do concreto (ϵ_{cu}) à compressão, quando o estado limite último é atingido. Algumas dessas expressões podem ser encontradas na revisão bibliográfica realizada por Campos (1999) e por Cruz (1996).

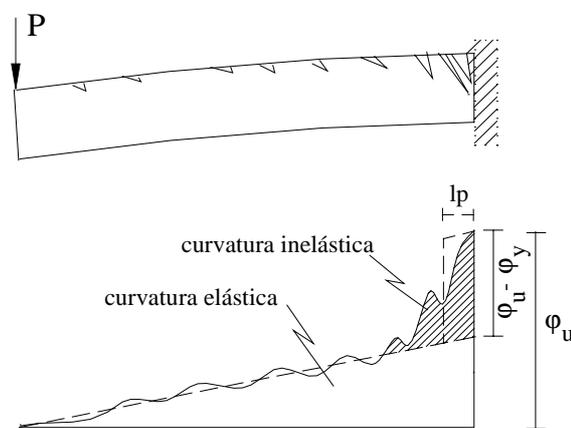


Figura 2.24 - Distribuição das curvaturas ao longo de uma viga em balanço no estado limite último (Park e Paulo, 1975).

Vários autores propuseram expressões teóricas e semi - empíricas para estimar a capacidade de rotação de rótulas plásticas. A seguir são mostradas algumas equações propostas para a determinação da capacidade de rotação da rótula plástica (θ_p).

- **Baker e Amarakone (1966)**

Os autores basearam-se em uma série de resultados teóricos - experimentais (Baker, 1956; 1962) para propor as seguintes expressões para o cálculo da rotação da rótula plástica em um lado da seção crítica, considerando concreto sem confinamento:

$$\theta_p = \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_{ce}}{\xi d} l_p \quad (2.14)$$

onde,

$$l_p = K_1 K_2 K_3 \left(\frac{z}{d} \right)^{1/4} d \quad (2.15)$$

com,

z = distância da seção crítica ao ponto de momento nulo

d = altura útil da seção transversal

ϵ_{cu} = 0.0035, deformação máxima do concreto

ϵ_{ce} = 0.002, deformação máxima do concreto na compressão axial

K_1 = 0.7, para armadura de aço doce e 0.9 para armadura de aço torcido

K_2 = igual a 1 na flexão simples

K_3 = varia de 0.6 a 0.9 quando a resistência do concreto está compreendida entre 350 kgf/cm² e 115 kgf/cm²

ξ = relação entre altura da seção acima da linha neutra e altura útil, na ruptura.

Para concreto confinado com armadura de aço transversal considera-se,

$$\theta_p = 0.8.(\epsilon_{cu'} - \epsilon_{cl}) K_1 K_3 \left(\frac{z}{d} \right) \quad (2.16)$$

$$\epsilon_{cu'} = 0.0015(1 + 1,5\rho'' + (0.7 - 10\rho'')) \frac{1}{\xi} \leq 0.01 \quad (2.17)$$

onde,

$\epsilon_{cu'}$ = deformação máxima do concreto confinado.

ρ'' = percentagem de estribos (área de armadura transversal/área da seção)

Para os valores usuais de l/d e z/d , o autor sugere que os valores de l_p variem entre 0.4d e 2.4d.

- **CEB-FIP (1990)**

O CEB (1990) sugere que a capacidade de rotação plástica de elementos de concreto armado pode ser obtida através da distribuição das deformações médias do aço ao longo de um lado da seção plastificada. O parâmetro utilizado para a determinação da capacidade de rotação plástica é a razão entre a profundidade da linha neutra e a altura útil, d ($\xi=x/d$), já que este parâmetro resume a influência de importantes variáveis como geometria da seção, taxa de armadura total e solicitações na seção. As curvas propostas pelo CEB (1990), mostradas na figura 2.25, referem-se a seções com armaduras passivas, tipos A e B, e são válidas para a relação vão-altura de 6 ($l/d=6$). De acordo com a norma, a rotação plástica aumenta com o vão de acordo com a expressão:

$$\theta_{pl}^* = \theta_{pl} \left(\frac{l^*}{6.d} \right)^{0.5} \quad (2.18)$$

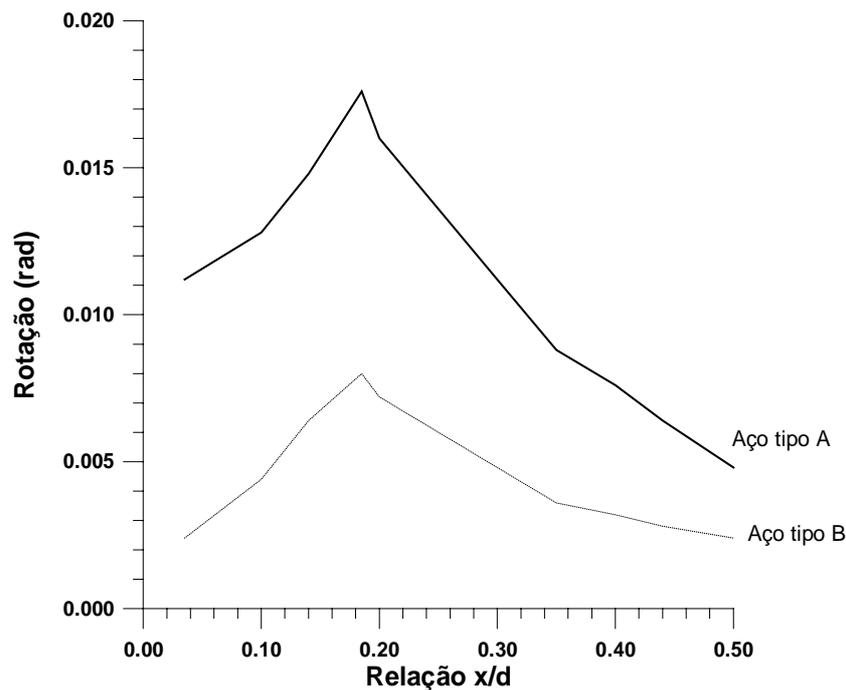


Figura 2.25 - Capacidade de rotação plástica em função de $\xi=x/d$ na ruptura (aços tipos A e B) segundo CEB-FIP(1990).

Os aço classes **A**, **B**, e **S** são definidos de acordo com o CEB-FIP (1990) tomando como base a relação f_t/f_y e a deformação última ϵ_{uk} . Segundo o CEB-FIP (1990), tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{Classe A: } & (f_t/f_y)_k > 1,08 \text{ com } \epsilon_{uk} = 5\% \\
 \text{Classe B: } & (f_t/f_y)_k > 1,05 \text{ com } \epsilon_{uk} = 2,5\% \\
 \text{Classe S: } & (f_t/f_y)_k > 1,08 \text{ com } \epsilon_{uk} = 6\%
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

- **Eurocode 2 (1992)**

A capacidade de rotação da rótula plástica θ_p , segundo Eurocode (1992) depende do tipo de aço, tipo do concreto e profundidade relativa da linha neutra. Para concreto até o limite de 50 MPa ($\epsilon_{c2u} = 0.0035$) a capacidade de rotação pode ser obtida pela figura 2.26 ou pelas eq. de 2.20 a eq. 2.25 Para concreto com limites entre 55 e 90 MPa, os valores para θ_p devem ser reduzidos com o fator $|\epsilon_{c2u}|/0.0035$, onde o valor ϵ_{c2u} depende do tipo de concreto (o valor é fornecido pelo Eurocode 2, 1992).

- Aço tipo C

$$\text{Para } 0.05 \leq x/d \leq 0.14 \quad \theta_p = 4.740 \cdot |\epsilon_{c2u}| \cdot e^{3.738 \left(\frac{x}{d}\right)} \tag{2.20}$$

$$\text{Para } 0.14 \leq x/d \leq 0.50 \quad \theta_p = 13.020 \cdot |\epsilon_{c2u}| \cdot e^{-3.480 \left(\frac{x}{d}\right)} \tag{2.21}$$

- Aço tipo B

$$\text{Para } 0.05 \leq x/d \leq 0.16 \quad \theta_p = 2.178 \cdot |\epsilon_{c2u}| \cdot e^{4.644 \left(\frac{x}{d}\right)} \tag{2.22}$$

$$\text{Para } 0.16 \leq x/d \leq 0.50 \quad \theta_p = 9.768 \cdot |\epsilon_{c2u}| \cdot e^{-3.351 \left(\frac{x}{d}\right)} \tag{2.23}$$

- Aço tipo A

$$\text{Para } 0.05 \leq x/d \leq 0.16 \quad \theta_p = 0.834 \cdot |\epsilon_{c2u}| \cdot e^{6.301 \left(\frac{x}{d}\right)} \tag{2.24}$$

$$\text{Para } 0.16 \leq x/d \leq 0.50 \quad \theta_p = 2.851 \cdot |\epsilon_{c2u}| \cdot e^{-1.382 \left(\frac{x}{d}\right)} \tag{2.25}$$

Os aço classes **A**, **B**, e **C** são definidos de acordo com o **Eurocode 2** (1992) tomando como base a relação f_t/f_y e a deformação última ϵ_{uk} . Segundo o **Eurocode 2** (1992), tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{Classe A: } & (f_t/f_y)_k > 1,05 \text{ com } \epsilon_{uk} = 2,5\% \\
 \text{Classe B: } & (f_t/f_y)_k > 1,08 \text{ com } \epsilon_{uk} = 5\% \\
 \text{Classe C: } & (f_t/f_y)_k > 1,15 \text{ e } < 1,35 \text{ com } \epsilon_{uk} = 7,5\%
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

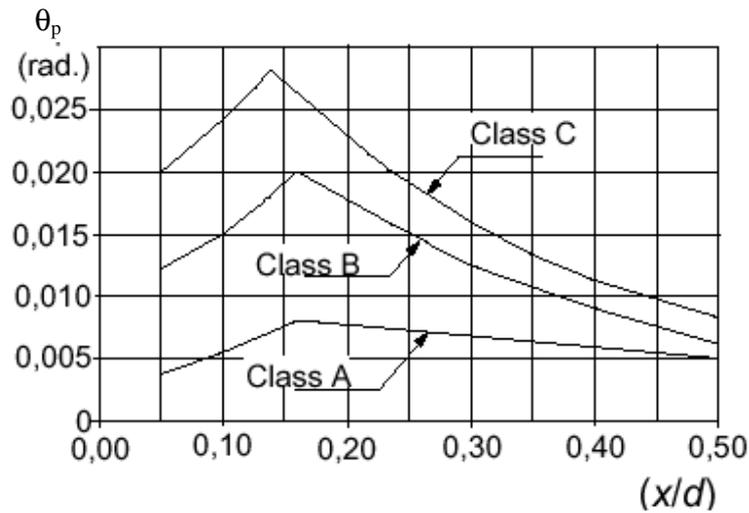


Figura 2.26 - Capacidade de rotação plástica em função de x/d na ruptura (aços tipos A, B e C) segundo Eurocode 2(1992).

- **NBR6118 -Projeto (2000)**

A capacidade de rotação da rótula plástica θ_p , de acordo com a norma brasileira NBR6118 (2003), depende do tipo de aço e da profundidade relativa da linha neutra. Para verificações de estados limites últimos pode ser efetuada análise plástica da estrutura, com a simulação de rótulas plásticas localizadas nas seções críticas. Segundo a norma é obrigatório a verificação das rotações nas rótulas plásticas, correspondentes aos mecanismos adotados, que não podem superar a capacidade de rotação plástica das seções transversais correspondentes.

Esse limite, função da profundidade relativa x/d da linha neutra na seção para o momento considerado na rótula, pode ser determinado através da figura 2.27, para razão a/d igual a 6 (onde: a é a distância entre pontos de momento nulo da região que contém a seção plastificada). Para outras relações a/d , a NBR6118 (2003) prevê a multiplicação dos valores extraídos da figura por $\sqrt{(a/d)/6}$.

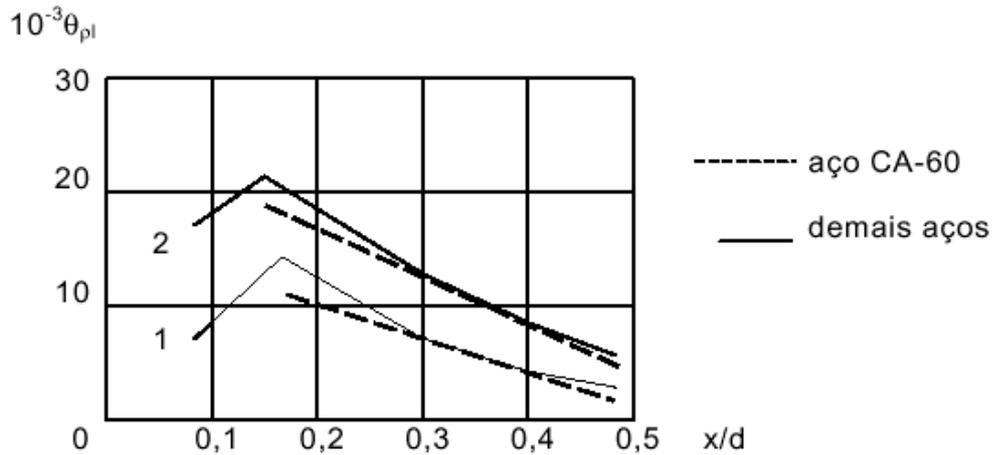


Figura 2.27 - Capacidade de rotação plástica em função de x/d na ruptura (aço CA –60 e demais) segundo NBR6118 (2003).

$$\text{Curva 1 - } \theta_{pl} = 2,0\% \text{ d/x} \quad p/d/x \geq 0,17 \quad (2.27)$$

$$\text{Curva 2 - } \theta_{pl} = 3,5\% \text{ d/x} \quad p/d/x \geq 0,15$$

- **Campos (2001)**

Campos (2001) vem verificando a aplicabilidade do método proposto por ela (Campos, 1999) para estimar a resistência à flexão de elementos estruturais isostáticos de concreto protendidos com cabos não aderentes, através de um modelo rígido-plástico simplificado, para o caso de vigas hiperestáticas protendidas com cabos não aderentes. O modelo rígido-plástico apresentado por Campos (1999) considera que todas as rotações estejam concentradas em uma rótula plástica. A influência de vários parâmetros é levada em consideração como: a taxa de armadura na seção; a resistência do concreto; a força inicial de protensão; os deslizamentos que ocorrem ao longo da armadura não aderente; e a variação de excentricidade do cabo de protensão. Para validar as análises foram utilizados resultados experimentais de vigas protendidas com cabos externos *Parafil* e outros resultados encontrados na literatura sobre o comportamento à flexão de vigas e lajes protendidas com cabos de aço internos não aderentes (Campos e Guimarães, 2000).

A figura 2.28 mostra a relação entre capacidade de rotação e posição relativa da linha neutra proposta por Campos (1999) e os resultados parciais da análise paramétrica sobre o comportamento à flexão de vigas hiperestáticas. Os

valores para a capacidade de rotação foram obtidos com base em um valor médio entre as rotações do apoio e vão. Observa-se que os resultados da análise paramétrica seguem a tendência observada pela curva proposta por Campos (1999) e o emprego destes resultados na análise rígido-plástica para estimar a variação de tensão em cabos não aderentes (Campos e Guimarães, 2000) fornece uma boa aproximação para estimar a força final na armadura de protensão. A autora vem estudando um ajuste da curva proposta em 1999 para estimar com mais precisão a capacidade de rotação de elementos hiperestáticos considerando, separadamente, as rotações no apoio e no vão (figura. 2.29).

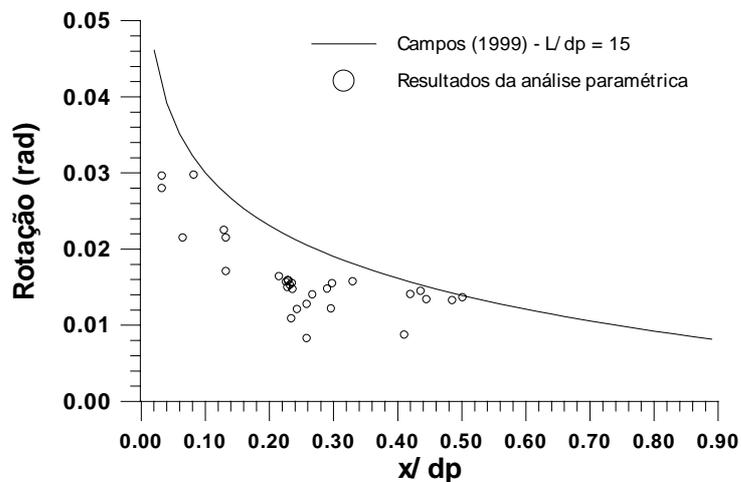


Figura 2.28 - Relação entre capacidade de rotação e posição relativa da linha neutra para seção do vão: curva proposta em Campos (1999) e resultados parciais da análise paramétrica considerando o valor médio entre rotações do apoio e vão.

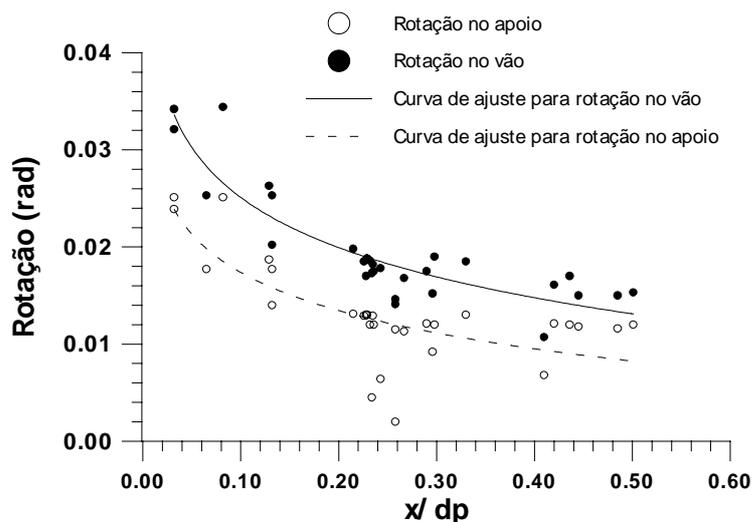


Figura 2.29- Relação entre capacidade de rotação e posição relativa da linha neutra para seções do vão e apoio.

2.5. Redistribuição de momentos

2.5.1. Vigas protendidas com cabos de aço

2.5.1.1. Prescrição de normas

A norma britânica **BS8110 (1985)** admite que os momentos fletores obtidos na análise elástica podem ser redistribuídos, desde que seja mantido o equilíbrio estático da estrutura e que a redução máxima de momentos seja de 20% para todas as possíveis combinações de carregamento. A percentagem de redistribuição é dada pela expressão

$$50 - 100 \frac{x}{d} \leq 20\% \quad (2.28)$$

que é função exclusiva da profundidade relativa da linha neutra no estado limite último. Na relação acima, a máxima percentagem permitida de redistribuição, isto é 20%, é alcançada para $x/d = 0,3$, enquanto que para redistribuição zero $x/d = 0,5$.

A norma canadense **CAN3 - A23.3 - M94** leva em consideração o mesmo parâmetro da norma britânica, como também a mesma percentagem máxima de 20% no acréscimo ou redução nos momentos fletores obtidos na análise elástica para as possíveis combinações de carregamento. A percentagem de redistribuição é dada pela seguinte expressão

$$30 - 50 \frac{x}{d} \leq 20\% \quad (2.29)$$

onde se faz necessária a correção dos momentos positivos em função dos momentos negativos após a redistribuição, de forma a garantir o equilíbrio da estrutura.

De acordo com a eq. (2.29), a máxima percentagem permitida de redistribuição, isto é 20%, é alcançada para $x/d = 0,2$, enquanto que para redistribuição zero $x/d = 0,6$. Estes limites são maiores do que os apresentados pela eq. (2.28).

O código **ACI-318 (1989)** permite uma redistribuição de momentos limitada. O aumento ou diminuição nos momentos negativos é calculado segundo uma análise elástica. A percentagem de redistribuição é dada pela expressão

$$20 \cdot \left[1 - \frac{\omega_p + \frac{d}{d_p} \cdot (\omega - \omega')}{0.36 \cdot \beta_1} \right] \cdot (\%) \quad (2.30)$$

com

$$\omega_p = \frac{\rho_p \cdot f_{ps}}{f'_c} \quad (2.31)$$

$$\omega = \frac{\rho \cdot f_y}{f'_c} \quad (2.32)$$

$$\omega' = \frac{\rho' \cdot f_y}{f'_c} \quad (2.33)$$

$$\beta_1 \begin{cases} 0,85 & \text{para } f'_c \leq 28 \cdot \text{MPa} \\ 0,85 - \frac{(f'_c - 28)}{7} \cdot 0,05 \geq 0,65 & \text{para } f'_c > 28 \cdot \text{MPa} \end{cases} \quad (2.34)$$

Nestas equações,

ρ_p = taxa geométrica de armadura passiva de protensão;

ρ = taxa geométrica de armadura passiva de tração;

ρ' = taxa geométrica de armadura passiva de compressão;

f_{ps} = tensão na armadura de protensão;

f_y = tensão de escoamento da armadura passiva;

f'_c = resistência à compressão do concreto;

d = distância da fibra comprimida até o centróide da armadura passiva de tração;

d_p = distância da fibra comprimida até o centróide da armadura de protensão;

A modificação nos momentos negativos também pode ser usada para o cálculo dos momentos em outras seções no vão correspondentes à mesma condição de carregamento. Além disto, a redistribuição dos momentos negativos só é permitida se

$$\omega_p \text{ ou } \omega_p + \frac{d}{d_p} \cdot (\omega - \omega') \text{ ou } \omega_p + \frac{d}{d_p} \cdot (\omega_w - \omega'_w) \leq 0,24\beta_1 \quad (2.35)$$

Desta forma, o limite inferior referente à quantidade de redistribuição é de 6,67% quando a eq. (2.30) atinge o valor máximo de $0,24\beta_1$ e limite superior de 20% caso a taxa total de armadura fosse igual a zero.

Para que a redistribuição de momento referida acima também seja válida para vigas com cabos não aderentes é necessário que tais vigas tenham uma taxa mínima de armadura passiva de tração.

A norma do **CEB-FIP (1990)** permite redução de momentos provenientes da análise linear. Esta redução pode ser feita multiplicando-se o momento obtido na análise linear pelo coeficiente de redistribuição δ , que depende do tipo de aço e da resistência do concreto, conforme as seguintes condições :

Para aços de classes **A** e **S**:

$$\text{a) } \delta \geq 0,44 + 1,25 \cdot x/d \text{ para concretos com } 12 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \quad (2.36)$$

$$\text{b) } \delta \geq 0,56 + 1,25 \cdot x/d \text{ para concretos com } 40 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 60 \text{ MPa} \quad (2.37)$$

O coeficiente de redistribuição deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:

$$\text{a) } 0,75 \leq \delta \leq 1,00 \text{ para vigas contínuas e pórticos indesejáveis;}$$

$$\text{b) } 0,90 \leq \delta \leq 1,00 \text{ para pórticos deslocáveis.}$$

Para aço classe **B**:

$$\delta \geq 0,75 + 1,25 \cdot x/d \text{ para concretos com } 12 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 60 \text{ MPa} \quad (2.38)$$

com $0,90 \leq \delta \leq 1,00$

O **Eurocode 2 (1992)** prevê o cálculo da redistribuição de momentos de forma semelhante ao CEB-FIP (1990). O coeficiente de redistribuição δ é obtido segundo o tipo de aço e da resistência do concreto, conforme as seguintes condições :

Para aços de classes **B** e **C**:

$$\text{a) } \delta \geq 0,64 + 0,8 \cdot x/d \geq 0,70 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (2.39)$$

$$b) \delta \geq 0,72 + 1,25 x/d \geq 0,80 \text{ para concretos com } 55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 60 \text{ MPa} \quad (2.40)$$

Para aço classe **A**:

$$a) \delta \geq 0,64 + 0,8 x/d \geq 0,85 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (2.41)$$

$$b) \delta = 0,72 + 1,25 x/d \geq 0,80 \text{ para concretos com } 55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 60 \text{ MPa} \quad (2.42)$$

As normas brasileiras NBR 7197 (1989) e NBR 6118 (1978), que tratam de concreto protendido e concreto armado, respectivamente, não se referem de forma específica à redistribuição de momentos. Entretanto, esta última admite o cálculo de vigas contínuas de edifícios em regime elasto-plástico, unicamente alterando-se a posição da linha de fechamento do diagrama de momentos fletores, determinada no regime elástico, de modo a reduzir os momentos sobre os apoios de no máximo 15%.

Atualmente a NBR 6118 (1978) está em processo de revisão, onde é prevista a sua substituição e a inclusão da NBR 7197 (1989) na mesma. Nesta nova versão é considerada a redistribuição de momentos mediante o emprego da análise linear no cálculo dos momentos fletores. A redistribuição é feita reduzindo-se um momento fletor de M para δM , em uma determinada seção transversal. O coeficiente de redistribuição δ é função da posição da linha neutra x/d e é dado pela mesma relação fornecida pelo CEB-FIP (1990), para o caso de aços classes **A** e **S**. As relações neste caso são válidas para limites diferentes de resistência do concreto, conforme mostrado a seguir

$$a) \delta \geq 0,44 + 1,25 x/d \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \quad (2.43)$$

$$b) \delta \geq 0,56 + 1,25 x/d \text{ para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa} \quad (2.44)$$

O coeficiente de redistribuição deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:

$$a) \delta \geq 0,75 \text{ em qualquer caso; ou}$$

$$b) \delta \geq 0,90 \text{ para estruturas de nós móveis.}$$

Pode ser adotada redistribuição fora dos limites dados, desde que a estrutura seja calculada mediante o emprego da análise não-linear ou da análise plástica, com verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas.

2.5.1.2.

Consideração segundo diferentes estudos

Cohn (1986) definiu o grau de redistribuição como a relação entre a variação do momento real na seção no regime não linear e o momento elástico M_e . Foi proposta a seguinte expressão para o cálculo da percentagem de redistribuição de momentos.

$$\eta = 100 \cdot \frac{\Delta M}{M_e} = 100 \cdot \left(1 - \frac{M}{M_e}\right) \quad (2.45)$$

Nesta expressão se $\Delta M = 0$ significa que não existe redistribuição de momentos. Entretanto, não é possível se fixar um valor numérico para ΔM quando a redistribuição for completa, ou seja, a carga última for igual a carga obtida na análise plástica.

Arenas (1986) quantificou a redistribuição de momentos em termos da relação de adaptação plástica (PAR), que é definida por

$$PAR = \frac{P_{col} - \gamma_f \cdot P_{el}}{P_{pl} - \gamma_f \cdot P_{el}} \quad (2.46)$$

onde P_{col} é igual à capacidade de carga última, P_{pl} é a capacidade de carga obtida na análise plástica e $\gamma_f \cdot P_{el}$ capacidade de carga baseada na teoria elástica - linear afetada pelo coeficiente de segurança. A redistribuição de momentos é completa quando $P_{col} = P_{pl}$, ou seja, $PAR = 1$, e quando não há redistribuição $P_{col} = P_{el}$, ou seja, $PAR = 0$.

A mesma expressão acima foi proposta por **Moucessian (1986)**, diferindo apenas por não levar em conta o coeficiente de segurança γ_f . A expressão da relação de adaptação plástica (PAR1) é dada por:

$$PAR1 = \frac{P_{col} - P_{el}}{P_{pl} - P_{el}} \quad (2.47)$$

A partir dos resultados de estudos realizados em 94 vigas, obtidos da análise não-linear pelo método dos elementos finitos, **Moucessian e Campbell (1988)** propuseram um cálculo aproximado da carga de ruptura de vigas contínuas de dois vãos, com protensão parcial, em função da relação de adaptação plástica (PAR1) e da relação de momento (MR). A relação proposta entre PAR1 e MR é dada por

$$\text{PAR1} + \text{MR} = 1 \quad \text{quando} \quad 0 \leq \text{MR} \leq 0,75 \quad (2.48)$$

$$6.\text{PAR1} + 2.\text{MR} = 1 \quad \text{quando} \quad 0,75 \leq \text{MR} \leq 1,50 \quad (2.49)$$

$$\text{PAR1} = 0,0 \quad \text{quando} \quad 1,50 \leq \text{MR} \leq 2,25 \quad (2.50)$$

$$3.\text{PAR1} - 4.\text{MR} = 1 \quad \text{quando} \quad 2,25 \leq \text{MR} \leq 3,00 \quad (2.51)$$

A relação de momento (MR) foi arbitrariamente definida como sendo:

$$\text{MR} = \frac{-[M_{pc} - M_{sec}(\text{apoio})]}{[M_{ps} - M_{sec}(\text{vão})]} \quad (2.52)$$

onde M_{pc} e M_{ps} são os momentos últimos no apoio central e na seção crítica do vão, respectivamente, e $M_{sec}(\text{apoio})$ e $M_{sec}(\text{vão})$ são os correspondentes momentos secundários.

A aplicação desta aproximação é limitada a um número reduzido de parâmetros. Alguns parâmetros tais como: forma da seção transversal, resistência à compressão do concreto e a relação vão-altura não foram considerados.

Kodur e Campbell (1996) apresentaram uma nova expressão para o cálculo da relação de adaptação plástica (PAR1) em função da relação de momento (MR) e da percentagem de redistribuição (η). A seguinte expressão foi proposta

$$\text{PAR1} = \frac{\frac{\eta}{100 - \eta}}{\text{MR}} \quad (2.53)$$

onde

$$\frac{\eta}{100 - \eta} = \frac{2}{3} \cdot EI \cdot \left(\frac{1}{EI_c} - \frac{1}{EI_{cy}} \right) \cdot \left(\frac{d}{L} + 0.1m_1 \right) + \frac{M_{sec}}{M_c} \quad (2.54)$$

Nesta equação EI é a rigidez à flexão do vão, EI_C é a rigidez à flexão na ruptura na seção crítica do apoio, EI_{Cy} é a rigidez à flexão da seção no apoio no início do escoamento da armadura passiva, d é a distância da fibra comprimida ao centróide da força de tração na seção do apoio central, L é o comprimento do vão, M_{sec} é o momento secundário na seção do apoio central, M_C é a capacidade última do momento na seção do apoio e m_1 é a fração do comprimento do vão entre a região da rótula e o ponto adjacente de momento nulo. A relação de momento MR é definida como

$$MR = \left(\frac{M_C + M_{sec}}{M_C} \right) \cdot \left(\frac{T_f \cdot (M_B + a \cdot M_C)}{a \cdot (1 - a) \cdot s_1 \cdot (M_C + M_{sec})} - 1 \right) \quad (2.55)$$

onde M_B é o momento último na seção do vão; a é a relação entre distância da seção crítica do vão ao apoio extremo e o comprimento do vão quando a resistência última do vão e do apoio central são atingidas simultaneamente $s_1 = 16/3$ para uma carga concentrada e $s_1 = 8$ para uma carga uniformemente distribuída em cada vão e $T_f = 1,0$ para uma carga concentrada e $T_f = 2,0$ para uma carga uniformemente distribuída em cada vão.

Lopes et. al. (1997) apresentaram os resultados de uma investigação experimental sobre a redistribuição de momentos em vigas contínuas de concreto protendidas com cabos internos aderentes. As vigas pré-moldadas foram transformadas em vigas contínuas pela concretagem posterior do flange, onde o momento de continuidade sobre os apoios é geralmente desprezado.

Os autores também discutiram o conceito do grau de redistribuição de momentos segundo uma análise plástica, considerando o grau de redistribuição como função das cargas de ruptura e plástica. Quando ocorre a igualdade entre essas cargas, significa que houve redistribuição total dos esforços. No caso das vigas analisadas experimentalmente, ocorreu a completa redistribuição dos esforços. Os autores obtiveram a seguinte expressão para o fator de redistribuição em função dos vãos e da posição do carregamento em suas vigas

$$\delta = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{0,5 - \frac{M_{vão}}{M_{apoio}}} \right) \quad (2.56)$$

onde $M_{vão}$ é o momento resistente do vão e M_{apoio} é o momento resistente no apoio.

Com os dados experimentais, os autores obtiveram os valores máximo e mínimo da relação $M_{vão}/M_{apoio}$ e os substituíram na eq. (2.56). Obtiveram os seguintes limites para o fator de redistribuição:

$$0,48 \leq \delta \leq 1,19$$

De acordo com os autores, estes limites são maiores que aqueles apresentados pelas normas de cálculo que são:

$$0,75 \leq \delta \leq 1,0$$

Os limites obtidos por Lopes et. al. (1997), referentes ao fator de redistribuição, foram questionados por Campbell e Kodur (1999). Eles atribuíram o aumento nos limites às condições favoráveis das vigas ensaiadas, tal como a relação vão/ altura (aproximadamente 10) e o tipo de carregamento (carga concentrada). No estudo realizado Kodur (1992) foi realizada uma análise paramétrica (com um programa de elementos finitos não-linear) mostrando a influência de algumas variáveis na redistribuição de momentos em vigas contínuas de dois vãos. Os resultados obtidos por Kodur (1992) mostraram que a redistribuição de momentos foi reduzida com o incremento da relação vão/ altura e a redistribuição é maior para uma carga concentrada do que para uma carga uniformemente distribuída. Portanto, a influência de tais fatores pode ter contribuído para o aumento nos limites do fator de redistribuição obtidos por Lopes et. al. (1997).

Kodur e Campbell (1999) realizaram um estudo paramétrico numérico sobre a redistribuição de momentos, mostrando a influência de algumas variáveis na redistribuição de momentos em vigas contínuas de dois vãos, com carregamento uniforme e protendidas com cabos aderentes internos. Os resultados indicam que a redistribuição de esforços é influenciada pelas características e pelo comportamento do elemento estrutural como um todo, ao invés de ser considerada apenas como função da ductilidade de uma seção em particular. Segundo os autores, os fatores que influenciam esta redistribuição são: índice total de armadura, relação vão/altura, magnitude do momento hiperestático de protensão, forma da seção transversal, resistência do concreto, tipo de carregamento.

Os resultados foram usados para desenvolver a seguinte equação para o cálculo da percentagem de redistribuição de momentos (η)

Vigas com cargas concentradas

$$\eta = 60 \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{MR}{0.7}\right)} \right) \quad 0 \leq \eta \leq 60 \quad (2.57)$$

Vigas com carregamento uniforme

$$\eta = 45 \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{MR}{0.7}\right)} \right) - 10 \quad 0 \leq \eta \leq 30 \quad (2.58)$$

onde η é relacionado com PAR1 pela eq. (2.53) e MR é dada pela eq. (2.55).

2.5.2.

Vigas com cabos sintéticos

A maioria dos trabalhos realizados com cabos sintéticos são restritos ao estudo de vigas isostáticas. No caso particular dos cabos *Parafil*, vários trabalhos (Branco,1993; Araújo; 1997; Formagini, 1999) já foram realizados na PUC - Rio, com a finalidade de estudar a influência de alguns parâmetros sobre a resistência à flexão de vigas protendidas com cabos externos.

Na literatura disponível ainda é escassa a ocorrência de trabalhos sobre vigas hiperestáticas protendidas com cabos sintéticos. Em se tratando de trabalhos referentes à redistribuição de momentos em vigas hiperestáticas, cabe destacar o trabalho experimental realizado por Tezuka e Ochiai (1995) e o trabalho numérico que vem sendo desenvolvido por Campos (2001).

Tezuka e Ochiai (1995) analisaram experimentalmente cinco vigas hiperestáticas de dois vãos e seção transversal constante, das quais duas com protensão inicial zero. O objetivo foi investigar a influência de diferentes cabos de protensão, com e sem presença da protensão sobre a redistribuição de momentos. Os cabos utilizados foram de materiais plásticos reforçados com fibras (materiais FRP) do tipo aramida (AFRP) e do tipo carbono (CFRP). Cabos de aço (SWPR7A) foram também utilizados com o propósito de comparação. A figura

2.30 mostra o esquema do carregamento aplicado e as dimensões das vigas ensaiadas. A tabela 2.1 mostra resumidamente as características das vigas.

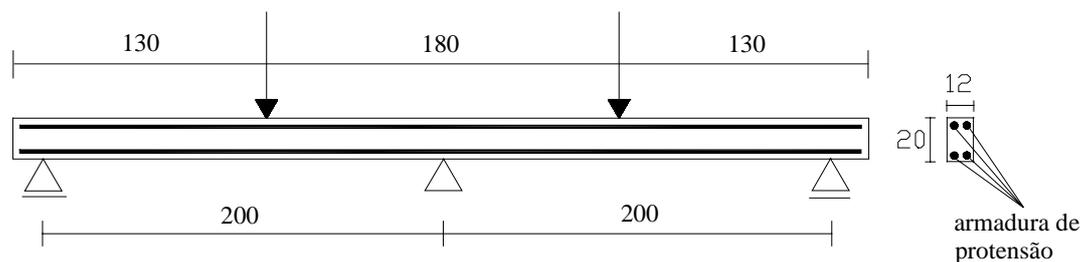


Figura 2.30 - Esquema do carregamento aplicado e dimensões das vigas (cm).

Tabela 2.1 - Resumo das características das vigas.

	viga	Tipo de cabo	Módulo de elasticidade	A_p	Força de protensão inicial	Resistência à compressão do concreto
			GPa	cm ²	kN	MPa
1	RC - AF	AFRP	70	2,52	0	41,4
2	PC - AF	AFRP	70	2,52	50	41,6
3	RC - CF	CFRP	140	2,23	0	40,8
4	PC - CF	CFRP	140	2,23	55	48,0
5	PC - SW	SWPR7A	197	2,06	50	41,6

A tabela 2.2 mostra os resultados referentes à redistribuição de momentos no estado limite último como sendo a relação entre o momento experimental e o momento obtido do cálculo elástico. Os resultados mostram que a redistribuição de momento no apoio central das vigas protendidas com cabos de diferentes módulos de elasticidade ficou em torno de 11%. Nas vigas com protensão inicial zero ficou em torno de 14% para o tipo de cabo AFRP (aramida) e 30% para o tipo de cabo CFRP (carbono). No ponto de aplicação de carga, a redistribuição de momentos ficou em torno de 8% nas vigas protendidas com cabos de diferentes módulos de elasticidade e nas vigas sem protensão em torno de 10% e 23% para os cabos AFRP (aramida) e CFRP (carbono), respectivamente.

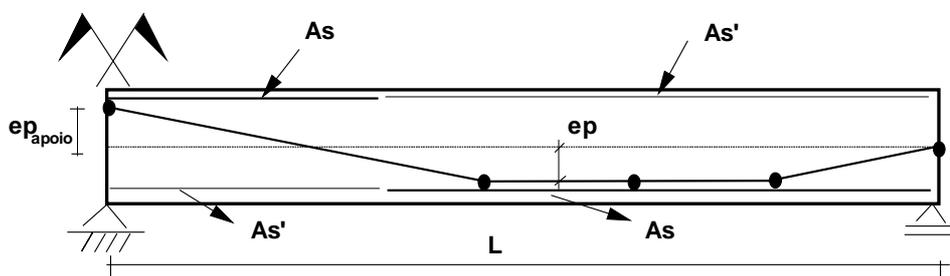
Os resultados mostram que, para vigas protendidas com cabos de diferentes módulos de elasticidade, a influência sobre a redistribuição de momentos é pequena. A influência do módulo de elasticidade passa a ser maior quando a força de protensão inicial é nula (viga de concreto armado).

Tabela 2.2 - Relação entre o momento experimental e o momento elástico.

viga	Carga última	Apoio central			Ponto de aplicação de carga		
		$M_{a_{exp}}$	$M_{a_{el}}$	$100 \cdot \left(1 - \frac{M_{exp}}{M_{el}}\right)$	$M_{p_{exp}}$	$M_{p_{el}}$	$100 \cdot \left(1 - \frac{M_{exp}}{M_{el}}\right)$
	kN	kN.m	kN.m	%	kN.m	kN.m	%
RC - AF	47,8	15,8	18,4	14,1	15,0	13,6	10,3
PC - AF	74,4	25,4	28,6	11,2	22,9	21,1	8,5
RC - CF	57,9	15,6	22,2	29,7	20,1	16,4	22,6
PC - CF	92,9	31,7	35,7	11,2	28,6	26,4	8,3
PC - SW	79,1	27,2	30,7	10,5	24,2	22,5	7,6

Campos (2001) apresentou uma análise paramétrica numérica mostrando a influência de algumas variáveis na redistribuição de momentos. O modelo computacional utilizado baseia-se no método de elementos finitos para grandes deslocamentos e pequenas deformações. O modelo considera a relação tensão-deformação do concreto na tração e na compressão segundo as recomendações do CEB (1990) e prevê o uso de armadura passiva e armadura protendida, com aderência inicial e posterior, com ou sem atrito nos desviadores. A armadura de protensão é considerada com comportamento não linear ou linear até a ruptura, o que se adapta à representação das armaduras constituídas de fibras sintéticas.

No estudo realizado por Campos (2001) foi analisado o comportamento à flexão de vigas contínuas com dois vãos para diferentes parâmetros como índice total de armadura, módulo de elasticidade do cabo de protensão e nível inicial de protensão. A figura 2.31 mostra as características gerais das vigas testadas.

**Figura 2.31** - Características gerais das vigas analisadas.

A taxa total de armadura é definida pela expressão 2.59 e o índice total de armadura é definido pela expressão 2.60.

$$\rho_t = \frac{A_p}{b_f d_p} + \frac{A_s}{b_f d_p} - \frac{A_s'}{b_f d_p} \quad (2.59)$$

$$\omega_t = \frac{A_p}{b_f d_p} \frac{f_{pe}}{f_c} + \frac{A_s}{b_f d_p} \frac{f_y}{f_c} - \frac{A'_s}{b_f d_p} \frac{f_y}{f_c} \quad (2.60)$$

onde A_p , A_s e A'_s são respectivamente as armaduras protendida e passiva, nas regiões tracionada e comprimida, d_p é a distância do bordo comprimido ao centro de gravidade da armadura de protensão, f_{pe} é a tensão inicial de protensão, f_c a resistência do concreto e f_y a tensão de escoamento da armadura passiva (Campos et. al., 2001).

a) Módulo de elasticidade do cabo de protensão

A figura 2.32 mostra as curvas carga vs. momento no apoio central para vigas protendidas com cabos de diferentes módulos de elasticidade obtidas com o modelo computacional. Nesta mesma figura são mostradas também a curva referente ao momento elástico sem momento secundário (M_{el}) e a curva referente ao momento elástico com momento secundário ($M_{el} + M_{sec}$). Observa-se que o comportamento das vigas com diferentes módulos de elasticidade é praticamente o mesmo. Entretanto, as vigas protendidas com cabos de maior módulo de elasticidade apresentam uma maior carga de ruptura. O momento no apoio central mantém uma diferença constante para o momento elástico sem momento secundário (M_{el}) até o início da fissuração do apoio. Após a fissuração do apoio é observado um aumento dessa diferença, ocasionando a redistribuição de momentos. O grau de redistribuição foi obtido por Campos (2001) pela utilização da expressão:

$$\eta = 100 \cdot \left(1 - \frac{M_{rup}}{M_{el}} \right) (\%) \quad (2.61)$$

onde M_{rup} é o momento no apoio na ruptura da viga, obtido pelo modelo computacional, e M_{el} é momento elástico devido ao carregamento aplicado apenas, obtido pela análise elástica.

Os valores obtidos para o grau de redistribuição de momentos ficaram em torno de 25%, 24% e 22% para as vigas protendidas com cabos de aço ($E = 200$ GPa), *Parafil* G ($E = 124$ GPa), e *Parafil* F ($E = 77$ GPa), respectivamente. Isto indica que a redistribuição de momentos é pouco influenciada pelo módulo de elasticidade do cabo de protensão. Vale salientar que a eq. (2.61) não leva em consideração o momento secundário no cálculo do momento total elástico.

Reescrevendo-se a eq. (2.61), agora considerando o momento secundário (M_{sec}) obtido pela análise elástica no cálculo do grau de redistribuição de momentos, tem-se que:

$$\eta = 100 \cdot \left(1 - \frac{M_{rup}}{M_{el} + M_{sec}} \right) (\%) \quad (2.62)$$

Os seguintes valores foram obtidos para o grau de redistribuição 14,9%, 13,6% e 7,7% para as vigas protendidas com cabos de aço (200 GPa), *Parafil G* (124 GPa), e *Parafil F* (77 GPa), respectivamente. Observa-se que a redistribuição de momento diminui com o decréscimo do módulo de elasticidade do cabo de protensão. Estes valores comparados com os obtidos com a eq. (2.61) são bem menores. Entretanto, quase não existe diferença entre os valores observados para vigas protendidas com cabos de aço e de *Parafil G*.

Observa-se na figura 2.32 que antes da fissuração não existem diferenças entre a curva obtida com o modelo computacional e a curva referente à soma dos momentos elástico e momento secundário obtidos da análise elástica, como era de se esperar. A redistribuição de momentos antes da fissuração, calculados com a eq. (2.62), é nula. Entretanto, caso seja aplicada a eq. (2.61), o grau de redistribuição será diferente de zero. Portanto, o cálculo do grau de redistribuição de momentos indicado pela eq. (2.62) é mais conveniente.

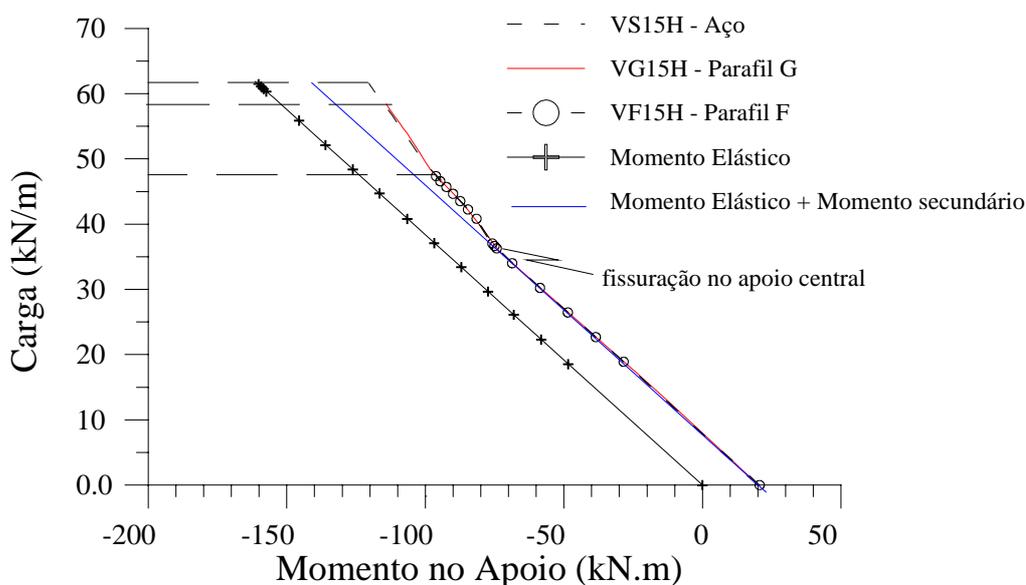


Figura 2.32 - Curvas carga-momento no apoio para vigas protendidas com diferentes cabos de protensão.

b) Força inicial de protensão

A influência da força inicial de protensão na redistribuição de momentos no apoio é mostrada na figura 2.33 para o cabo *Parafil G*. Observa-se que com o aumento da força inicial de protensão, a distância entre as curvas que representam o comportamento não-linear e o momento elástico aumenta com o acréscimo da força inicial de protensão. Se o grau de redistribuição for analisado segundo a eq. (2.61), o grau de redistribuição de momentos permanece praticamente constante, em torno de 24%. Entretanto, se o grau de redistribuição for analisado segundo a eq. (2.62), os valores obtidos são 8% e 16% para as vigas com protensão inicial de 627 kN e 163 kN, respectivamente.

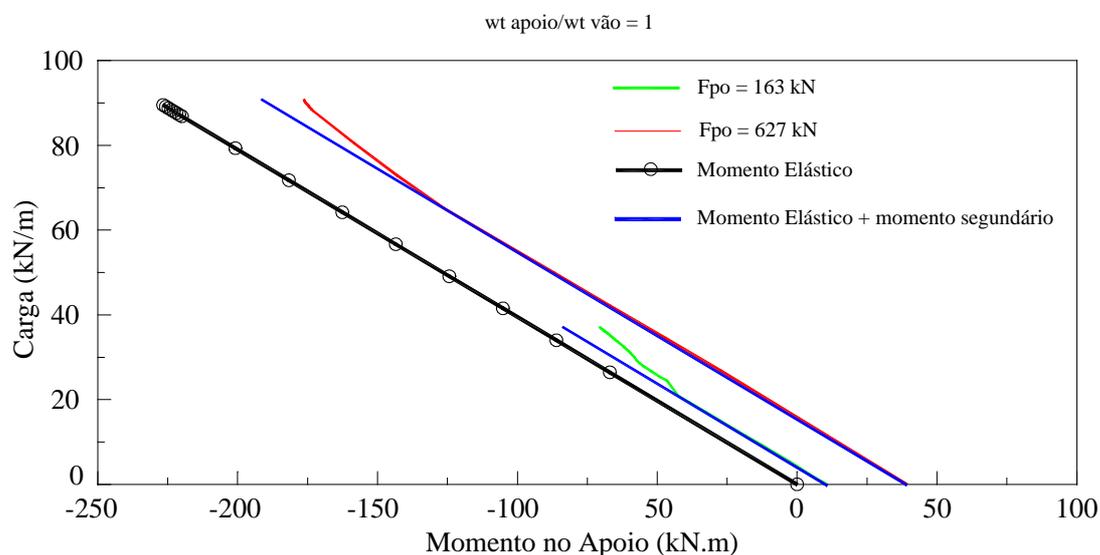


Figura 2.33 - Carga- momento no apoio para vigas protendidas com Parafil G: variação da força inicial de protensão.

c) Variação da relação entre índices totais de armadura no apoio e no vão ($\omega_{t_{\text{apoio}}}/\omega_{t_{\text{vão}}}$)

A figura 2.34 mostra o grau de redistribuição de momento dada pela eq. (2.61) em função da relação entre índices totais de armadura no apoio e no vão ($\omega_{t_{\text{apoio}}}/\omega_{t_{\text{vão}}}$). Observa-se que a variação da relação entre os índices totais de armadura no apoio e no vão tem influência direta na redistribuição de momentos no apoio. Quanto menor a relação $\omega_{t_{\text{apoio}}}/\omega_{t_{\text{vão}}}$ maior a redistribuição de momentos que ocorre do apoio para o vão.

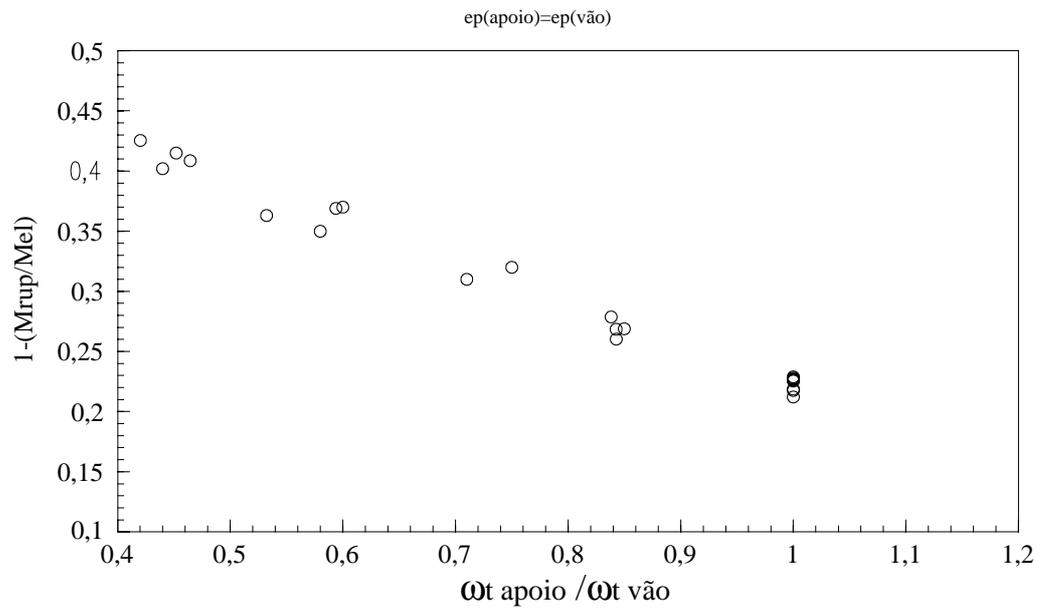


Figura 2.34 - Redistribuição de esforços em função da relação $\omega t_{\text{apoio}} / \omega t_{\text{vão}}$.