3
Modelo de Amortecimento Direto

3.1
Introdução

Alguns tipos de séries não apresentam bons resultados quando modeladas por funções puramente polinomiais. As séries sazonais apresentam esse tipo de problema, e dentre elas, as séries de energia seriam um bom, exemplo de série com esse tipo de comportamento.

Uma forma de se modelar funções matemáticas no tempo, pode ser o de amortecimento direto, pois ele tem a capacidade de corrigir os seus parâmetros de forma automática. O seu procedimento funciona da seguinte forma : ele suaviza as antigas estimativas dos parâmetros do modelo para o período corrente com o objetivo de obter estimativas revisadas.

O amortecimento direto é uma técnica de atualização dos parâmetros via modelo de regressão múltipla linear. O método faz uso dos mínimos quadrados ponderados para estimar os parâmetros. Dada uma série temporal, x_t, podemos apresentá-la da seguinte forma :

$$x_t = \sum_{i=1}^{k} a_i z_i(t) + \varepsilon_t \qquad \text{para } t = 1,2,...,T \tag{3.1}$$

onde $z_i(t)$ são funções matemáticas do tempo, a_i para $i = 1, \ldots, k$, são os parâmetros do modelo, e finalmente, ε_t é o ruído do sistema, sendo o mesmo, independente e identicamente distribuído. Caso essas funções sejam funções polinomiais, o procedimento do amortecimento direto irá produzir previsões idênticas ao modelo de amortecimento exponencial múltiplo.

Sabemos que o uso mais importante desse procedimento se dá quando tratamos funções trigonométricas, tal como seno e coseno, para modelar séries que apresentem algum comportamento sazonal. Por exemplo, uma "ondulação" de seno possui 3 características que podem ser controladas : a amplitude ou nível; a origem; e o período ou comprimento do ciclo. Onde :

$$x_t = a_1 \sin wt \tag{3.2}$$

define uma ondulação de seno com nível, b, na origem $t = 0$. A origem da onda pode ser deslocada para o período θ, fazendo :

$$x_t = a_1 \sin w(t + \theta) \tag{3.3}$$

No entanto, é preciso ser dito que, é muito mais conveniente expressar a função supondo que ela possua origem arbitrária, passando a mesma, a ser escrita como segue :

$$x_t = a_1 \sin wt + a_2 \cos wt \tag{3.4}$$

As estimativas iniciais dos parâmetros do modelo podem ser encontradas usando um modelo de regressão linear múltipla (maiores detalhes ver Montgomery, 1976[17]). A revisão periódica dos parâmetros do modelo é feita de forma que a origem no tempo seja deslocada para o final do período corrente. Isso torna o procedimento de atualização muito mais simplificado.

Supondo que $\hat{a}_i(T)$, para $i = 1, \ldots, k$, seja a estimativa dos parâmetros do modelo, temos que no final do período T, tendo já sido observado o valor de x_t, podemos revisar as estimativas dos parâmetros do modelo usando a seguinte equação :

$$\hat{a}(T) = L'\hat{a}(T-1) - he_1(T) \tag{3.5}$$

onde L é uma matriz (kxk) que varia de acordo com o modelo escolhido, $e_1(T)$ é um vetor dos erros de previsão, i.e., $e_1(T) = x_T - \hat{x}_T(T-1)$, e h é um vetor coluna (kx1) de constantes chamado vetor de amortecimento, sendo h uma função de um fator de desconto , β, com $0 < \beta < 1$, estando relacionada ela com a constante de amortecimento existente no amortecimento exponencial. O valor de β é determinado, geralmente, por experimentação. Freqüentemente, selecionamos o fator de desconto de um modelo com k parâmetros conforme a equação abaixo :

$$\beta_k = \beta_1^{1/k} \tag{3.6}$$

onde $\beta_1 = 1 - \alpha_1$.

E finalmente, $\hat{a}(T)$ é um vetor coluna (kx1) das estimativas dos parâmetros no tempo T.

$$\hat{a}(T) = \begin{bmatrix} \hat{a}_1(T) \\ \hat{a}_2(T) \\ \vdots \\ \hat{a}_k(T) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Uma vez que os parâmetros do modelo tenham sido revisados, podemos prever a observação para o período $T + \tau$ com

$$x_{T+\tau}(T) = \sum_{i=1}^{k} \hat{a}_i(T) z_i(\tau) \tag{3.8}$$

3.2 Determinação das Matrizes

O amortecimento direto requer o desenvolvimento da matriz de transição L e a determinação dos valores numéricos para os elementos do vetor de amortecimento h.

Depois que L e h são determinados, as equações para determinar as estimativas dos parâmetros do modelo, são obtidas a partir da equação (3.5).

3.2.1
Matriz de Transição

A matriz de transição, L, para o modelo (3.4) pode ser dada por

$$L = \begin{bmatrix} \cos w & \sin w \\ -\sin w & \cos w \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

As equações de amortecimento direto para a atualização das estimativas dos parâmetros do modelo são as seguintes

$$\hat{a}_1(T) = \cos w \hat{a}_1(T-1) - \sin w \hat{a}_2(T-1) + h_1 e_1(T) \tag{3.10}$$

$$\hat{a}(T) = \sin w \hat{a}_1(T-1) + \cos w \hat{a}_2(T-1) + h_2 e_1(T) \tag{3.11}$$

Quando construímos um modelo de previsão para uma série temporal específica, podemos vir a encontrar uma combinação de vários termos, sejam eles, polinomiais, trigonométricos ou exponenciais. Por exemplo, considere o seguinte modelo

$$x_t = a_1 + a_2 t_1 + a_3 \sin wt + a_4 \cos wt + a_5 t \sin wt + a_6 t \cos wt + \varepsilon_t \tag{3.12}$$

O qual contém uma mistura de termos polinomiais e trigonométricos. A matriz de transição desse modelo seria

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos w & sinw & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -sinw & \cos w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos w & sinw & \cos w & sinw \\ 0 & 0 & -sinw & \cos w & -sinw & \cos w \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

3.2.2
Matriz h

Os elementos do vetor de amortecimento h podem ser obtidos através da equação abaixo

$$h = G^{-1}x(0) \qquad (3.14)$$

onde $x(0)$ é um vetor coluna das variáveis independentes $x(t)$ avaliada no tempo $t = 0$ e G^{-1} é a matriz inversa da matriz G.

3.2.3
Matriz G

Os elementos da matriz G são

$$G_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n z_i(-n) z_j(-n) \qquad \text{para} \quad i = 1, \ldots, k \qquad (3.15)$$

No qual todas as somas estão dispostas no intervalo, $k = 0$ e $k = \infty$. As expressões que formam a matriz G estão dispostas na tabela 3.1.

Forma	Soma Finita
$\sum_{n=0}^{\infty}\beta^k$	$\frac{1}{1-\beta}$
$\sum_{n=0}^{\infty}k\beta^k$	$\frac{\beta}{(1-\beta)^2}$
$\sum_{n=0}^{\infty}k^2\beta^k$	$\frac{\beta(1-\beta)}{(1-\beta)^3}$
$\sum_{n=0}^{\infty}k^3\beta^k$	$\frac{\beta(1+4\beta+\beta^2)}{(1-\beta)^4}$
$\sum_{n=0}^{\infty}k^4\beta^k$	$\frac{\beta(1+11\beta+11\beta^2+\beta^3)}{(1-\beta)^5}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\beta^k \sin wk$	$\frac{\beta \sin w}{1-2\beta \cos w+\beta^2}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\beta^k \cos wk$	$\frac{1-\beta \cos w}{1-2\beta \cos w+\beta^2}$
$\sum_{n=0}^{\infty}k\beta^k \sin wk$	$\frac{\beta(1-\beta)^2 \sin w}{(1-2\beta \cos w+\beta^2)^2}$
$\sum_{n=0}^{\infty}k\beta^k \cos wk$	$\frac{2\beta^2-\beta(1-\beta)^2 \cos w}{(1-2\beta \cos w+\beta^2)^2}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\beta^k \sin w_1 k \sin w_2 k$	$\frac{1}{2}\left[\frac{1-\beta\cos(w_1+w_2)}{1-2\beta\cos(w_1+w_2)+\beta^2}-\frac{1-\beta\cos(w_1-w_2)}{1-2\beta\cos(w_1-w_2)+\beta^2}\right]$
$\sum_{n=0}^{\infty}\beta^k \sin w_1 k \cos w_2 k$	$\frac{1}{2}\left[\frac{\beta\sin(w_1+w_2)}{1-2\beta\cos(w_1+w_2)+\beta^2}+\frac{\beta\sin(w_1-w_2)}{1-2\beta\cos(w_1-w_2)+\beta^2}\right]$
$\sum_{n=0}^{\infty}\beta^k \cos w_1 k \cos w_2 k$	$\frac{1}{2}\left[\frac{1-\beta\cos(w_1+w_2)}{1-2\beta\cos(w_1+w_2)+\beta^2}+\frac{1-\beta\cos(w_1-w_2)}{1-2\beta\cos(w_1-w_2)+\beta^2}\right]$

Tabela 3.1 – Somas Infinitas

Após a resolução das somas apresentadas acima, a matriz G pode ser calculada, seguindo o padrão demonstrado a seguir:

$$
G = \begin{bmatrix}
\sum\beta^k & -\sum k\beta^k & -\sum\beta^k \sin wk & \sum\beta^k \cos wk & -\sum\beta^k \sin 2wk & \sum\beta^k \cos 2wk \\
 & \sum k^2\beta^k & \sum k\beta^k \sin wk & -\sum k\beta^k \cos wk & \sum k\,\beta^k \sin 2wk & -\sum k\,\beta^k \cos 2wk \\
 & & \sum\beta^k \sin wk \sin wk & -\sum\beta^k \sin wk \cos wk & \sum\beta^k \sin wk \sin 2wk & -\sum\beta^k \sin wk \cos 2wk \\
 & & & \sum\beta^k \cos wk \cos wk & -\sum\beta^k \sin wk \sin 2wk & \sum\beta^k \cos wk \cos 2wk \\
 & & & & \sum\beta^k \sin 2wk \sin 2wk & -\sum\beta^k \sin 2wk \cos 2wk \\
 & & & & & \sum\beta^k \sin 2wk \sin 2wk
\end{bmatrix}
$$

3.3
Adequação do Modelo

Para determinar se o método de amortecimento direto é adequado para modelar a série em estudo, devemos, primeiramente, analisar sua função a autocorrelação, e sua função de autocorrelação parcial. Essas duas funções são um importante guia para a visualização das propriedades de uma série temporal.

A função de autocorrelação pode ser definida como uma função de autocorrelação padrozinada, e mede a correlação entre observações com distâncias diferentes, em momentos diferentes. A função de autocorrelação é definida matematicamente da seguinte forma.

Dada uma série com N observações $x_1, \ldots, x_N$, numa série temporal discreta, podemos formar, N-1 pares de informações, $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{N-1}, x_N)$. O coeficiente de correlação, entre a primeira e a segunda observação, seria calculado pela formula abaixo:

$$
r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} \left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)\left(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)}\right)}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^{N-1} \left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)^2 \sum_{t=1}^{N-1} \left(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)}\right)^2\right]}} \tag{3.16}
$$

onde

é a média das primeiras N-1 observações, e

$$\overline{x}_{(2)} = \sum_{t=2}^{N} x_t \Big/ (N-1)$$

é a média das últimas N-1 observações. O coeficiente dado pela equação (3.16) mede a correlações entre observações sucessivas, e é conhecido como coeficiente de autocorrelação ou coeficiente a autocorrelação serial.

A função de autocorrelação parcial surgiu da necessidade de se ter uma função capaz de identificar o grau do polinômio do modelo AR (componente autoregressivo dos modelos Box&Jenkins).

3.4
Análise Espectral e Periodograma de Schuster

Os modelos de amortecimento direto, quando aplicados a séries que possuem padrão sazonal, trabalham com funções trigonométricas, sendo necessário determinar os picos de freqüência mais importantes existentes na série estudada. Isso é, feito via análise espectral.

A série de Fourier quando utilizada para a análise do domínio da freqüência não representa a realidade. A análise de Fourier também pode ser chamada de análise de harmônica. Para que essa análise se aproxime da realidade, é necessário supor que existe um número restrito de senoides no modelo procurado, e também um ruído branco. Essas suposições nos conduzem a um modelo cíclico. A série finita de Fourier utilizada na representação da série, está abaixo :

$$x_t = a_o + \sum_{p=1}^{(N/2)-1} \left[a_p \cos(2\pi\pi pt/\ ) + b_p \sin(2\pi in(2\ ) \right] + a_{N/2} \cos\pi \qquad (3.17)$$

para $t = 1, 2, \ldots, N$.

Onde os coeficientes $\{a_p, b_p\}$ são os seguintes

$$a_o = \bar{x} \tag{3.18}$$

$$a_{N/2} = \sum (-1)^t x_t / N \tag{3.19}$$

$$a_p = 2\left[\sum x_t \cos(2\pi\pi pt/\ )\right]/N \tag{3.20}$$

$$b_p = 2\left[\sum x_t \sin(2\pi\pi pt/\ )\right]/N \tag{3.21}$$

para $p = 1, \ldots, (N/2) - 1$.

Dado que não temos nenhum conhecimento, *a priori*, do número de senóides significativas, nem de suas respectivas freqüências, torna-se necessário o uso de uma ferramenta alternativa na busca dessas informações. O periodograma de Schuster, é uma ferramenta amplamente utilizada com esse propósito. Ele nos fornecesse as "verdadeiras" freqüências de uma determinada série, w_p, para $p = 1, \ldots, m$. O periodograma é definido no intervalo $[-\pi, \pi]$, como sendo

$$I_N(w_p) = \frac{N}{2}\left[a_p^2(w_p) + b_p^2(w_p)\right] \tag{3.22}$$

com a_p e b_p sendo calculados da forma já descrita no capítulo. As informações referentes aos picos significativos existentes em uma série, são utilizados na modelagem do amortecimento direto, sendo a quantidade de picos equivalente a quantidade de senos e cosenos a serem incluídos no modelo.

Para que sejam determinados os picos significativos existentes numa série, convém que sejam utilizados dois testes de significância : o teste de Fisher e o teste de Whittle. A hipotese nula, em ambos, é a da existência de um pico maior que o testado. Vale mencionar que, o teste de Fisher somente é utilizado para testar o pico máximo, enquanto o teste de

Whittle, analisa os picos de segunda, terceira ordem, e etc. Abaixo segue a formula matemática correspondente aos dois testes utilizados.

Teste de Fisher

$$T = \frac{I_{max}}{\sum_{j=1}^{N/2} I_j} \tag{3.23}$$

onde o I_{max} é o pico máximo.

Na hipótese nula do teste temos que :

$$P\{T > g\} = \sum_{j=1}^{G} (-1)^{j-1} \left(j^{[N/2]}\right)(1 - jg)^{[N/2]-1} \quad , \text{ para } g > 0 \tag{3.24}$$

Teste de Whittle

$$T' = \frac{I'_{max}}{\left\{\sum_{j=1}^{N/2} I_j\right\} - I_{max}} \tag{3.25}$$

A hipótese nula é calculada de forma análoga a da equação (3.10), substituindo N-1 no lugar de N. O procedimento é efetuado até que se encontre um pico considerado não significativo. Esse teste de hipótese deve ser usado com cautela, levando em consideração também a análise gráfica do periodograma.

Existem diversas aplicações onde se fez uso da técnica do amortecimento direto para a obtenção de previsões para séries com evidente comportamento sazonal. Quadrelli (1998[20]) em sua dissertação de mestrado comparou o desempenho das previsões horárias e diárias do consumo de carga elétrica obtidas através do procedimento de amortecimento direto e do modelo de decomposição de Gupta (Bunn, 1985[3]). No estudo, os resultados obtidos para a previsão diária foram mais eficientes com o procedimento do amortecimento direto. No que diz respeito a previsão horária de carga de energia elétrica, o modelo de decomposição de Gupta obteve resultados mais satisfatórios.

As aplicações do método e os resultados obtidos serão apresentados no capítulo 5, juntamente com os resultados do modelo de Holt-Winters com múltiplos ciclos.