5
Vibração Forçada

5.1
Equações de movimento com carga harmônica

Analisa-se agora o comportamento dinâmico da estrutura sob uma carga harmônica vertical da forma:

$$\bar{Q}_z = Fsen(\Omega\tau)\ , \tag{5.1}$$

onde F é a magnitude da força e Ω, a frequência da excitação adimensional.

Considerando dois níveis de carga estática, $\bar{P}_z = 0{,}0$ e $\bar{P}_z = 0{,}5 \times Pcr$, tem-se, respectivamente, as seguintes equações de movimento para o caso axissimétrico:

$$w_{,\tau\tau} + 0{,}028w_{,\tau} + 2w - 3w^2 + w^3 = \bar{Q}_z. \tag{5.2}$$

$$w_{,\tau\tau} + 0{,}028w_{,\tau} + 1{,}344368w - 2{,}652w^2 + w^3 = \bar{Q}_z. \tag{5.3}$$

5.2
Análise das bifurcações em função da frequência de excitação

Um diagrama de bifurcação é a representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas em função de um parâmetro de controle. Através de um diagrama de bifurcação podem-se identificar as soluções de equilíbrio, as órbitas periódicas, quase periódicas e caóticas de um dado sistema, bem como os valores do parâmetro de controle onde ocorrem mudanças qualitativas no comportamento do sistema, isto é, os pontos de bifurcação.

A Tabela 9 mostra alguns diagramas de bifurcação para a estrutura sem carregamento estático ($\bar{P}_z = 0{,}0$) e valores selecionados da frequência de excitação, Ω, na região de ressonância, tendo como parâmetro de controle a magnitude da força de excitação, F, obtidos através dos métodos de continuação e força bruta (Seydel, 1988; Nayfeh e Balachandran, 1995, Del Prado 2001). Enquanto o método da força bruta é capaz de identificar apenas uma sequência de soluções periódicas quando se varia um dado parâmetro de controle, os métodos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

de continuação, usando comprimento de arco, são capazes de identificar trechos estáveis e instáveis. Por outro lado, o método da força bruta identifica facilmente soluções de grande periodicidade ou mesmo movimento quase periódicos e caóticos, o que não acontece com os métodos de continuação. As bases teóricas para a análise da estabilidade de soluções periódicas foram estabelecidas por Floquet em 1883. Um resumo da teoria de Floquet e do algoritmo usado no presente trabalho é apresentado em Machado (1993) e Del Prado (2001), dentre outros.

Quando no processo de mapeamento de Poincaré usado nos diagramas de bifurcação, um ponto é rigorosamente marcado sobre outro já existente, a órbita é dita fechada e este ponto é denominado ponto fixo. Uma solução periódica apresenta necessariamente um número finito de pontos fixos. Se a solução é periódica de período igual ao período da força excitadora, no regime permanente, observa-se um único ponto do mapa. A presença de oscilações sub-harmônicas ou de soluções coexistentes faz surgir mais de um ponto no mapa de Poincaré. Por exemplo, se aparecerem dois pontos no mapa, indica que o período da resposta é o dobro do período da força excitadora (bifurcação por duplicação de período), denominada de período 2T, ou que aparecem duas soluções coexistentes (bifurcação por quebra de simetria, comumente denominada *pitchfork*). À medida que aumenta o número de pontos fixos do mapa, ou aumenta o período da solução ou o número de soluções coexistentes. Quando no processo de mapeamento, os novos pontos jamais coincidem com algum marcado anteriormente, a órbita é dita aberta e o movimento é não periódico. Quando os pontos fixos descrevem uma órbita fechada no espaço fase, tem-se um movimento quase periódico. O movimento não periódico, representado no mapa por uma coleção de infinitos pontos geometricamente arrumados dentro de uma região limitada do espaço fase (coleção fractal de pontos), indica que há um atrator estranho ou caótico (Del Prado, 2001).

Os diagramas da Tabela 9 mostram dois ramos de soluções que se iniciam nos dois pontos de equilíbrio estático estável em $w = 0{,}0$ (posição de equilíbrio pré-crítica) e $w = 2{,}0$ (posição de equilíbrio pós-crítica), definindo duas famílias de soluções coexistentes. Estes dois ramos são simétricos em virtude da simetria do vale potencial observada no Capítulo 3, Tabela 2, e nas curvas de nível da estrutura descarregada mostradas no Capítulo 4, Tabela 5. Inicialmente, à medida

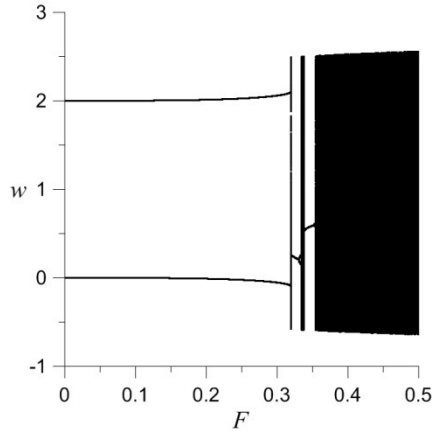
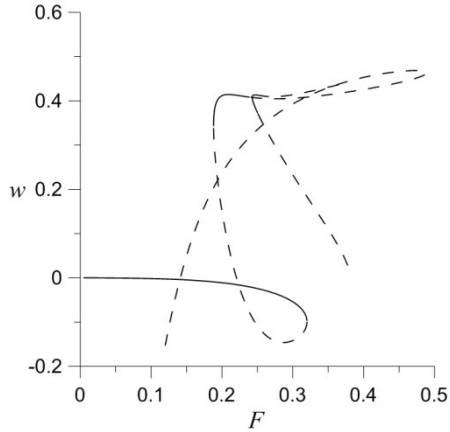
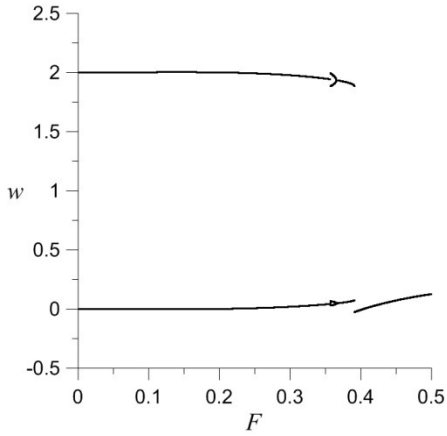
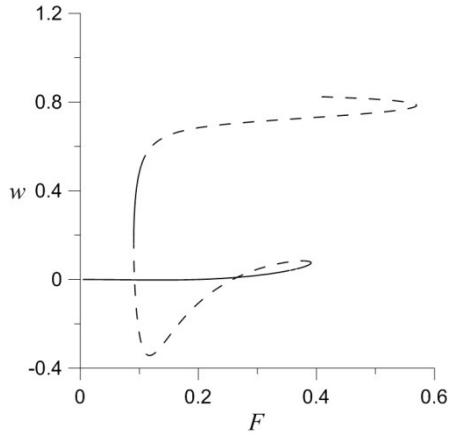
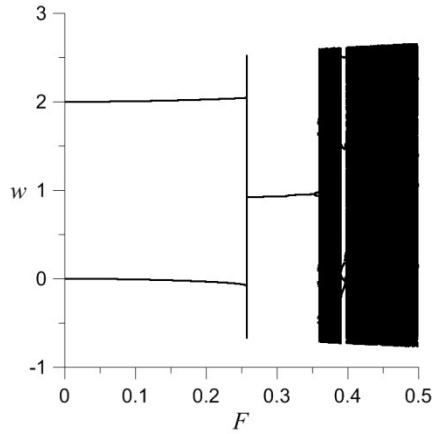
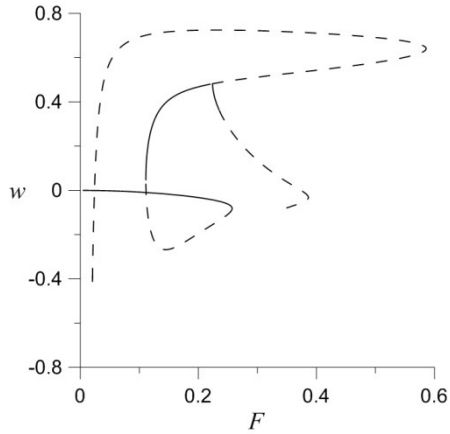
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

que a magnitude da força cresce a partir de zero, tem-se uma solução de pequena amplitude e de mesmo período da força em torno da posição de equilíbrio pré-critica e pós-crítica. Estas soluções apresentam, dependendo do valor da frequência de excitação bifurcações do tipo nó-sela (por exemplo, em $\Omega = 0{,}4$) ou por duplicação de período (por exemplo, em $\Omega = 0{,}7$). Verifica-se através do método da força bruta que ocorrem várias mudanças abruptas, muitas vezes com saltos dinâmicos, em virtude destas bifurcações da resposta permanente do sistema. Em certos pontos, em virtude das ressonâncias não lineares podem-se observar soluções coexistentes de pequena e grande amplitude em cada vale potencial, com saltos entre estas soluções. Observa-se, usando algoritmos de continuação que permite obter tanto soluções estáveis (curva contínua) quanto instáveis (curvas tracejadas), que os saltos são devidos a bifurcações nó-sela (pontos limite) nos diagramas de bifurcação ou duplicação de período. Quanto se atinge a carga crítica dinâmica ocorre o escape do vale potencial e o sistema passa a exibir soluções de grande amplitude envolvendo os dois vales potenciais. Estas soluções de grande amplitude apresentam tanto soluções periódicas quanto caóticas.

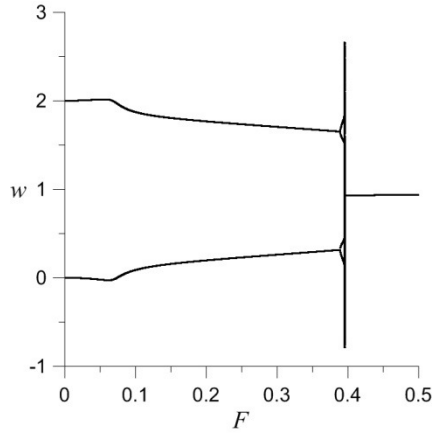
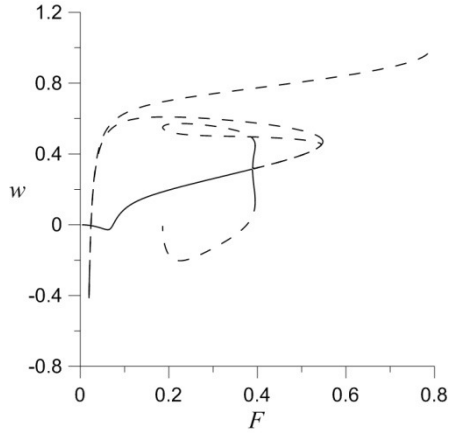
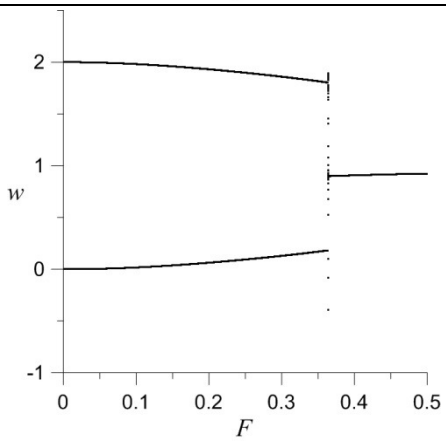
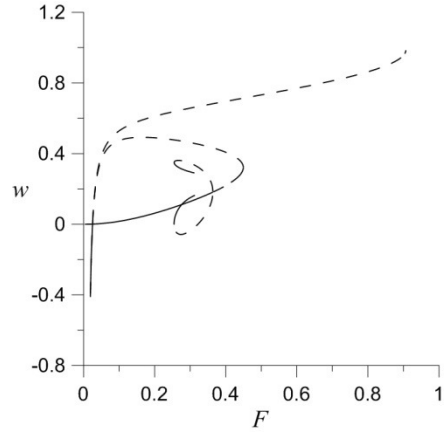
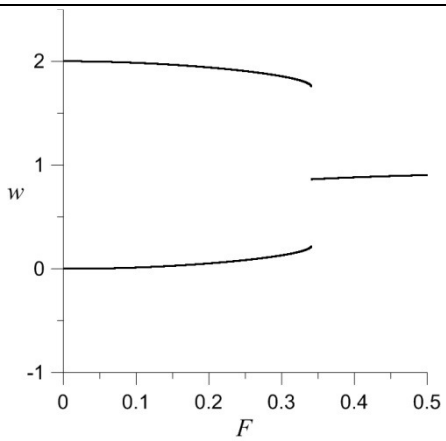
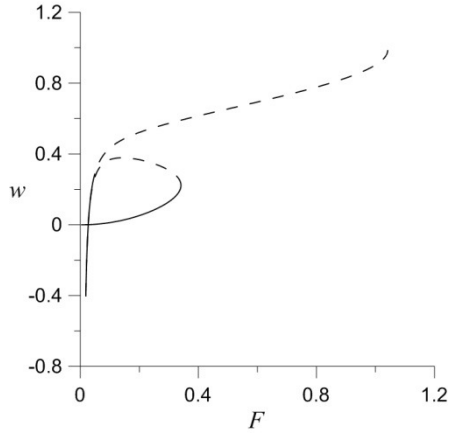
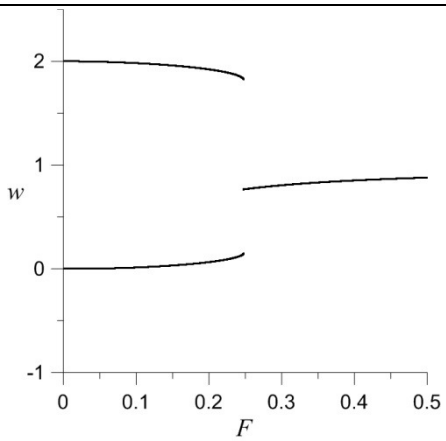
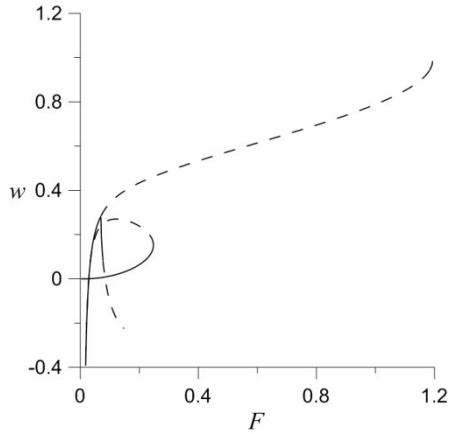
Na Tabela 10, mostram-se os planos de fase e seções de Poincaré (pontos em vermelho) para $\bar{P}_z = 0$, $\Omega = 1.4$ e valores selecionados de F uma típica sequência de bifurcações nos dois vales potenciais. Para $F = 0{,}200$, tem-se uma solução periódica de período um em cada vale potencial. Para $F = 0{,}315$ verifica-se que estas soluções sofrem uma bifurcação com duplicação de período (soluções 2T). A seguir, como mostra o diagrama de bifurcação, ocorre o escape do vale potencial e as estrutura apresenta um movimento caótico, como ilustrado no plano de fase para $F = 0{,}332$. A seguir tem-se uma janela de soluções periódicas de período cinco, como exemplifica o resultado para $F = 0{,}350$. Para $F = 0{,}373$, tem-se novamente um movimento caótico e, finalmente, para valores elevados da magnitude da excitação, $F = 0{,}450$, observa-se uma solução periódica de período um.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

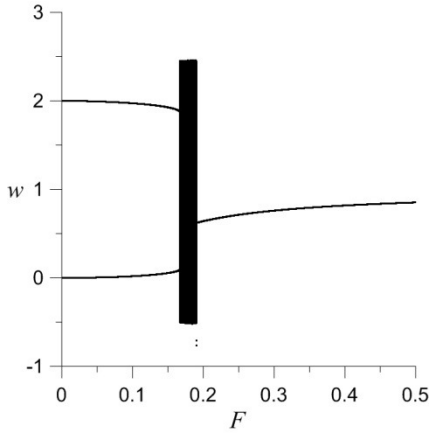
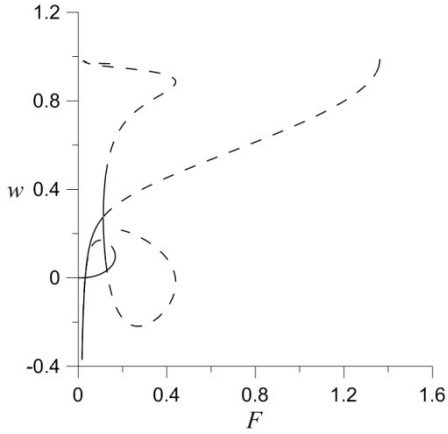
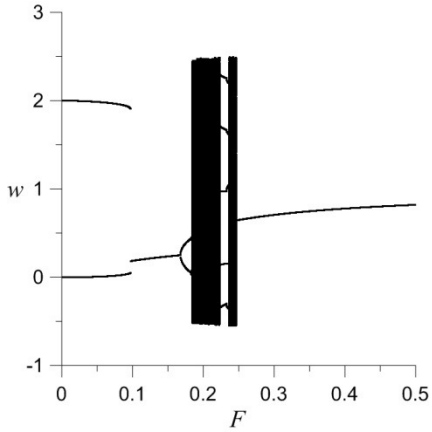
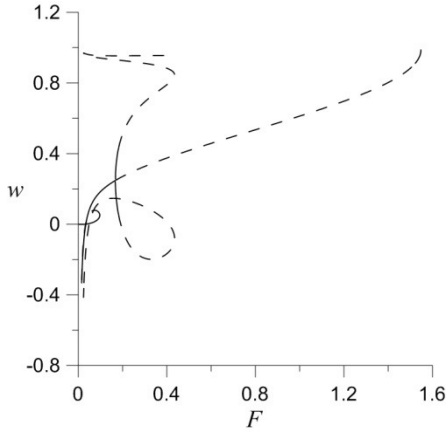
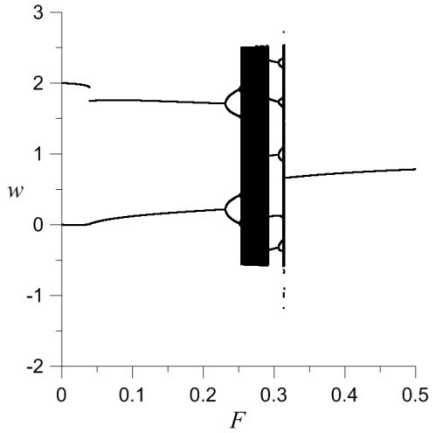
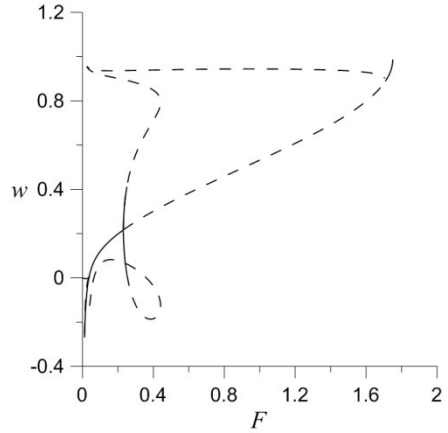
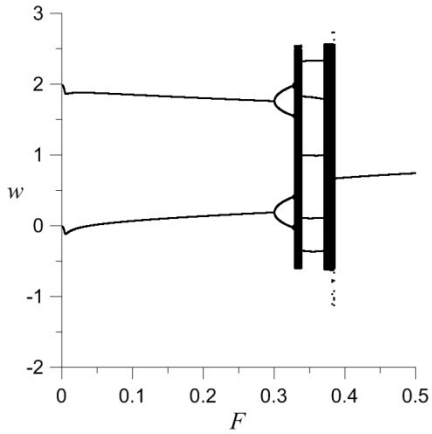
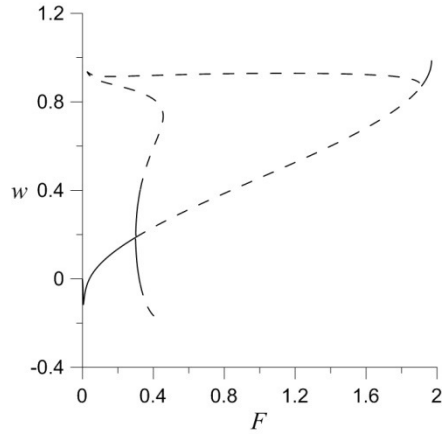
Tabela 9 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, Ω, tendo como parâmetro de controle a magnitude da força de excitação, F, através dos métodos da força bruta e continuação. Estrutura sem carregamento estático - $0{,}0 \times P_{cr} = 0{,}000$.

Frequência de excitação (Ω)	Força Bruta	Continuação
0,4		
0,5		
0,6		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

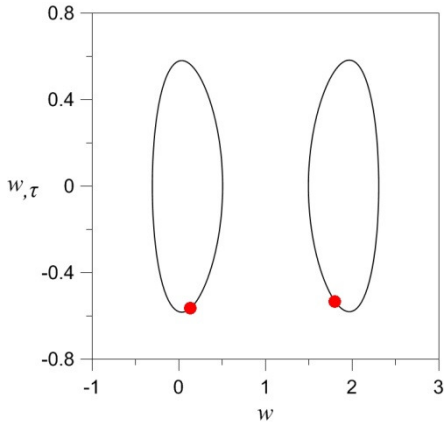
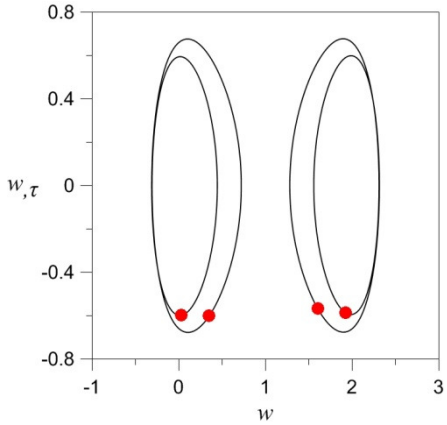
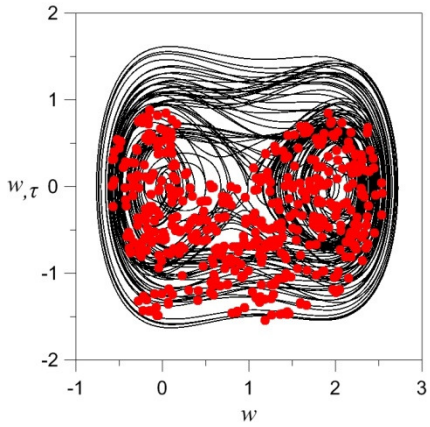
0,7		
0,8		
0,9		
1,0		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

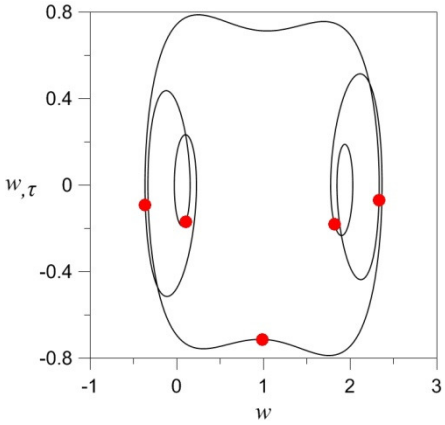
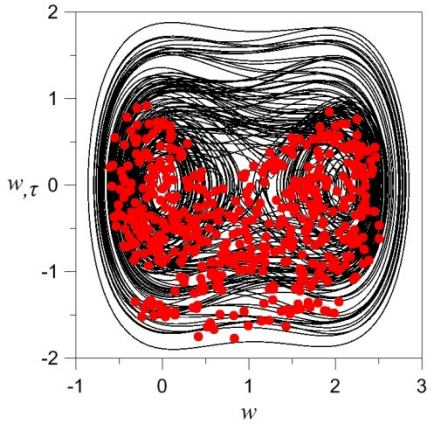
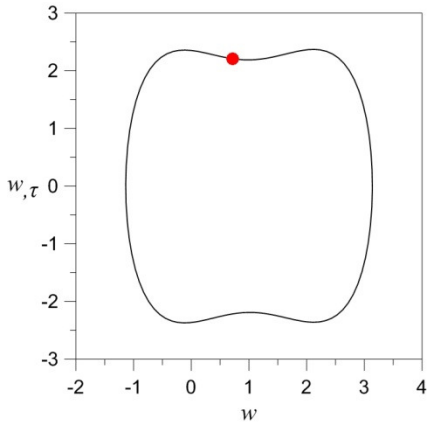
1,1		
1,2		
1,3		
1,4		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

Tabela 10 – Planos de fase e seções de Poincaré para $\Omega = 1.4$ e valores selecionados de F. $\bar{P}_z = 0{,}0$.

Amplitude da excitação (F)	Planos de fase e pontos das seções de Poincaré
0,200	
0,315	
0,332	

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

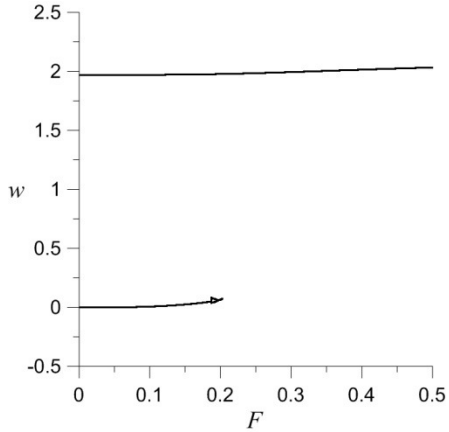
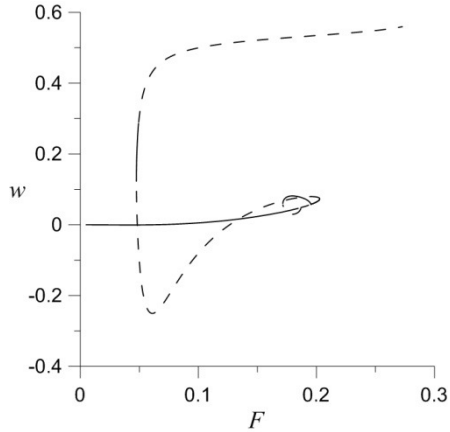
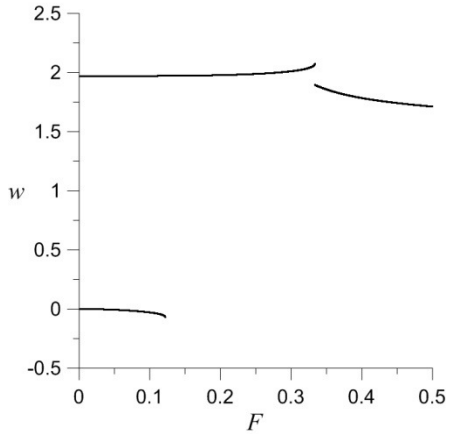
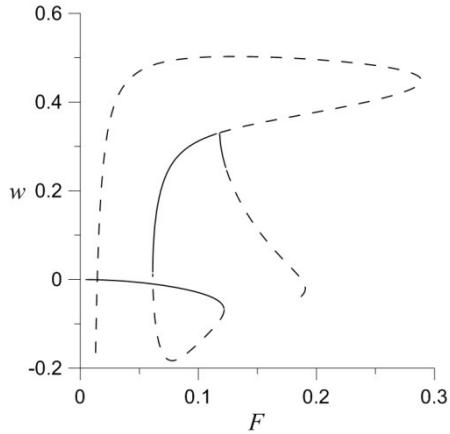
0,350	
0,373	
0,450	

A Tabela 11 mostra para a estrutura com um carregamento estático igual a $50\%P_{cr}$ e valores selecionados da frequência de excitação na região de ressonância, os diagramas de bifurcação obtidos pelo método da força bruta e continuação. Observa-se o mesmo tipo de comportamento global obtido para a estrutura descarregada, mas com uma sensível variação no valor da carga crítica dinâmica (escape do vale potencial) em virtude da assimetria da energia potencial para este nível de carregamento. Como observado no Capítulo 3, Tabela 2, e nas curvas de nível da estrutura carregada mostradas no Capítulo 4, Tabela 5, para um

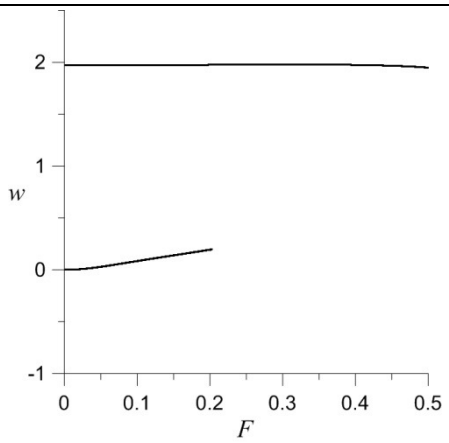
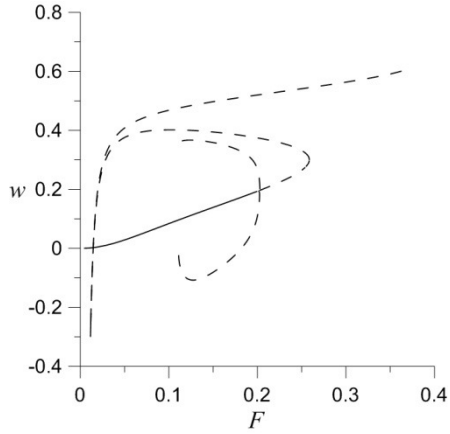
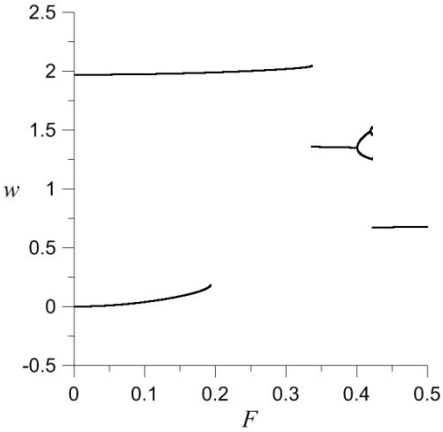
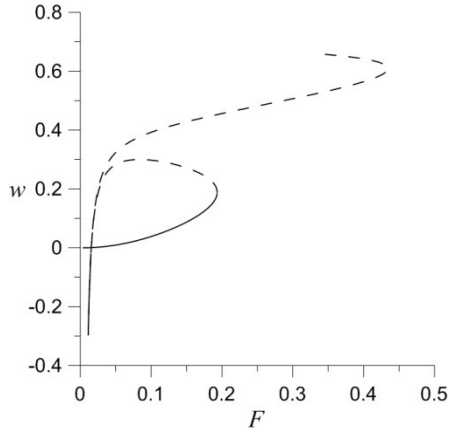
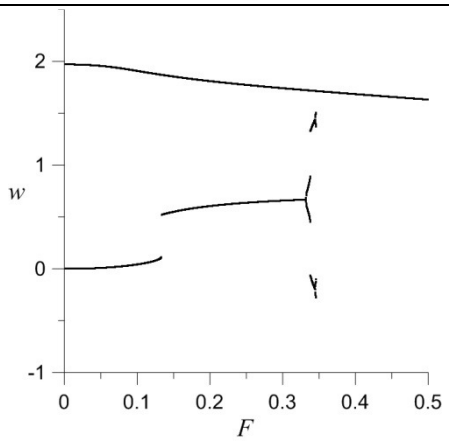
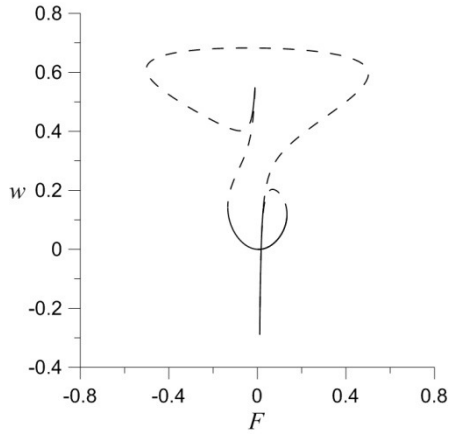
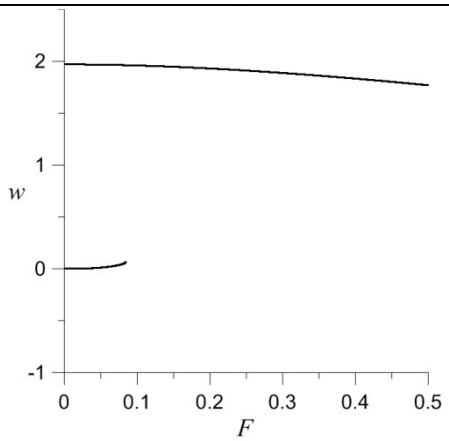
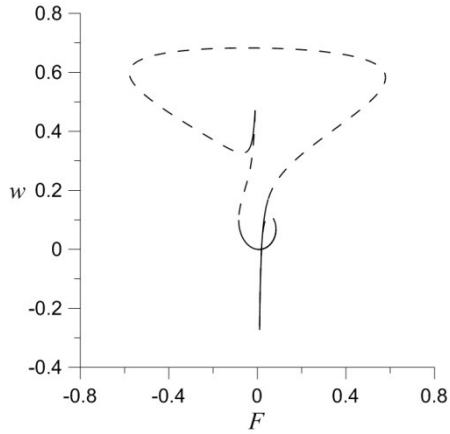
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

carregamento estático igual a $50\%P_{cr}$ o vale potencial pós-crítico é bem mais profundo que o vale pré-crítico. À medida que o pré-carregamento estático aumenta, a carga de escape associada ao vale pré-crítico diminui enquanto aquela associada ao vale pós-crítico aumenta. Neste caso, quando a estrutura escapa do vale pré-crítico ela salta e passa a vibrar em torno de uma configuração pós-crítica. Só após o escape do vale pós-crítico se observam oscilações de grande amplitude. Novamente, o escape ocorre logo após uma bifurcação nó-sela ou de uma duplicação de período, como é usual nesta classe de estruturas (Orlando, 2010).

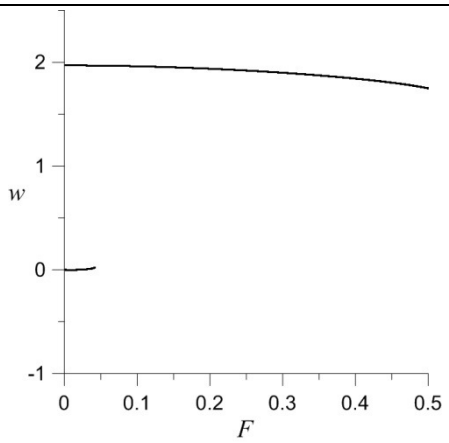
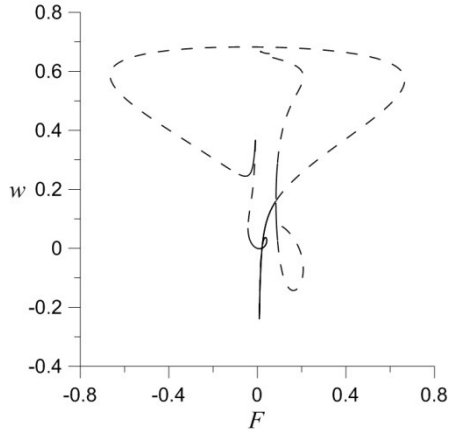
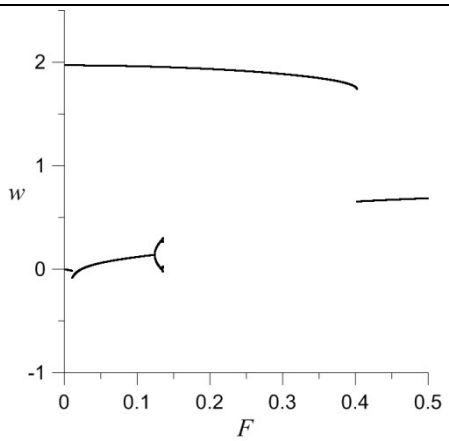
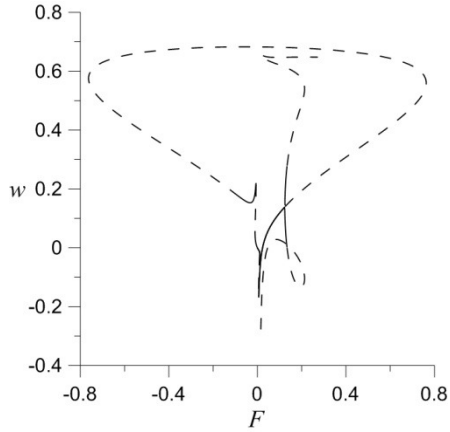
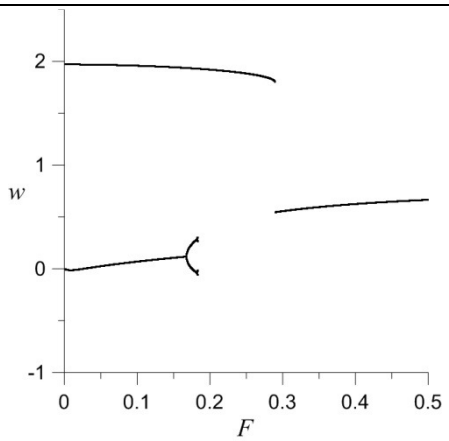
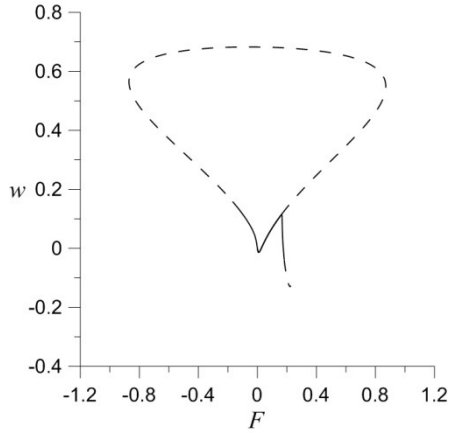
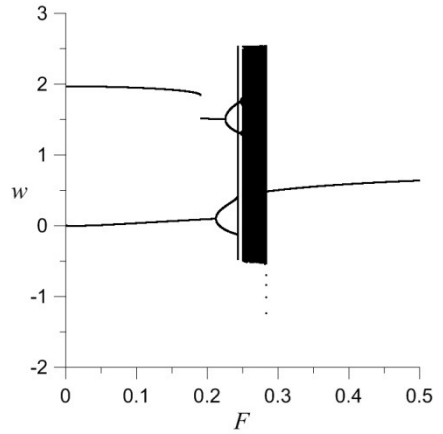
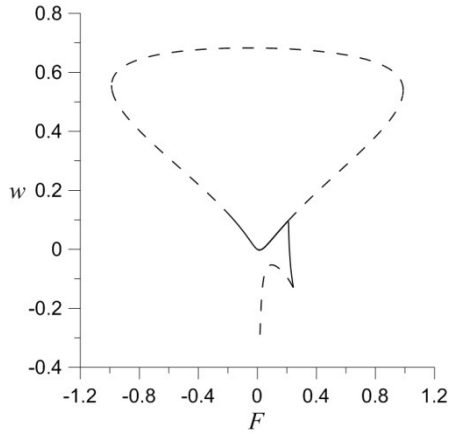
Tabela 11 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, Ω, tendo como parâmetro de controle a magnitude da força de excitação, F, através dos métodos da força bruta e continuação. Estrutura com carregamento estático - $0{,}5 \times P_{cr} = 0{,}193$.

Frequência de excitação (Ω)	Força Bruta	Continuação
0,4		
0,5		

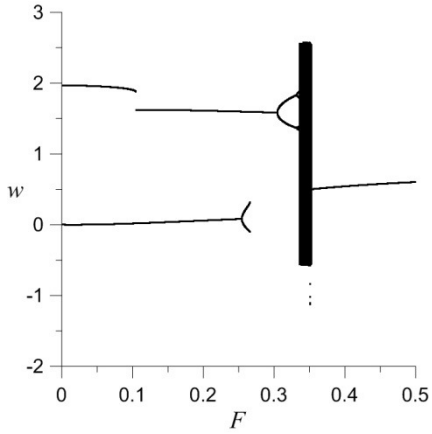
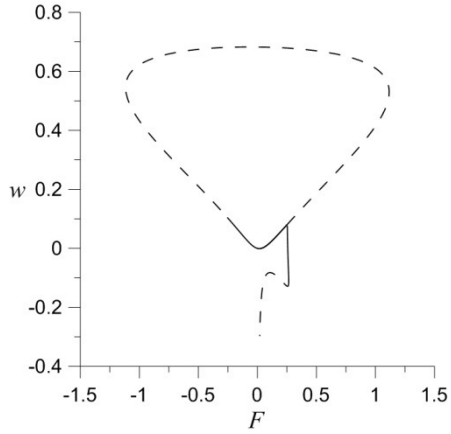
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,6		
0,7		
0,8		
0,9		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

1,0		
1,1		
1,2		
1,3		

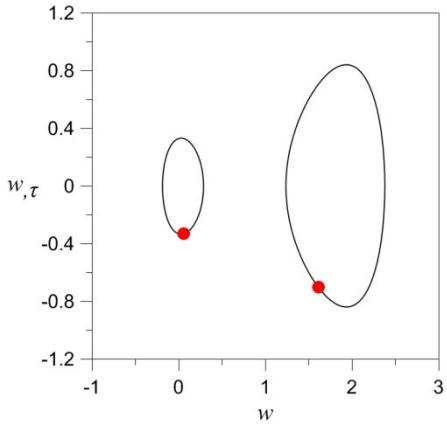
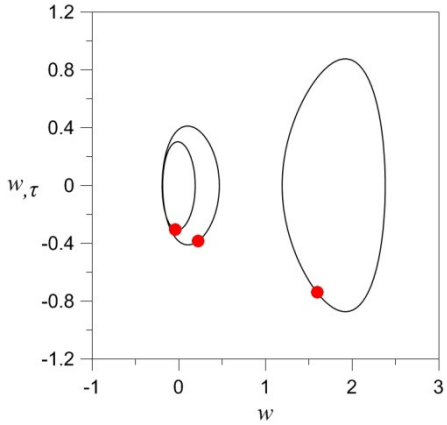
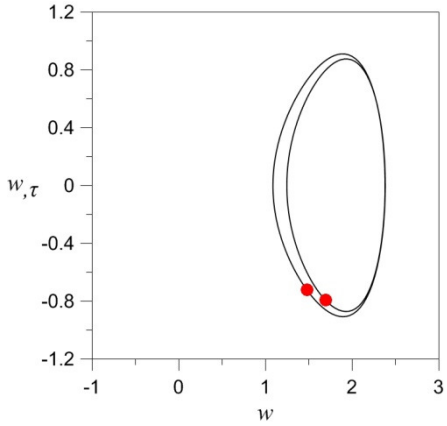
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

1,4		

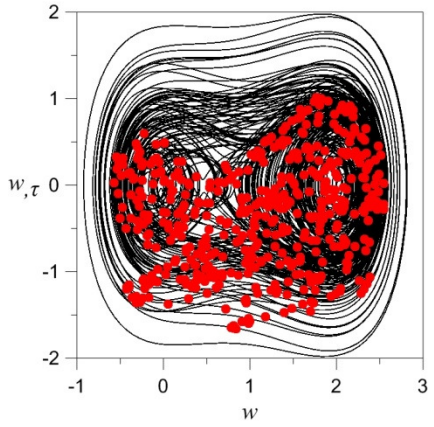
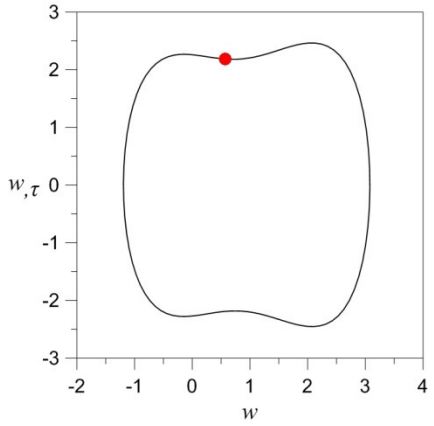
Na Tabela 12, mostram-se os planos de fase e seções de Poincaré (pontos em vermelho) para $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$, $\Omega = 1{,}4$ e valores selecionados de F uma típica sequência de bifurcações nos dois vales potenciais. Para $F = 0{,}200$, tem-se uma solução periódica de período um em cada vale potencial, tendo a solução pré-crítica uma amplitude bem menor que a solução pós-critica, em função da assimetria da energia potencial. Para $F = 0{,}260$ verifica-se que enquanto a solução pré-crítica sofre uma duplicação de período, a solução pós-critica permanece com período um. Para $F = 0{,}310$, após se ultrapassar a barreira potencial do vale pré-crítico, a solução pré-crítica desaparece (escape do vale potencial) e a solução pós-critica sofre uma bifurcação com duplicação de período. A seguir, como mostra o diagrama de bifurcação, ocorre o escape do vale potencial pós-crítico e a estrutura apresenta um movimento caótico, como ilustrado no plano de fase para $F = 0{,}345$. Finalmente, para valores elevados da magnitude da excitação, $F = 0{,}450$, observa-se uma solução periódica de período um.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

Tabela 12 – Planos de fase e seções de Poincaré para $\Omega = 1.4$ e valores selecionados de F. $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$.

Amplitude da excitação (F)	Planos de fase e pontos das seções de Poincaré
0,200	
0,260	
0,310	

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,345	
0,450	

5.3
Análise das bifurcações em função da magnitude de excitação

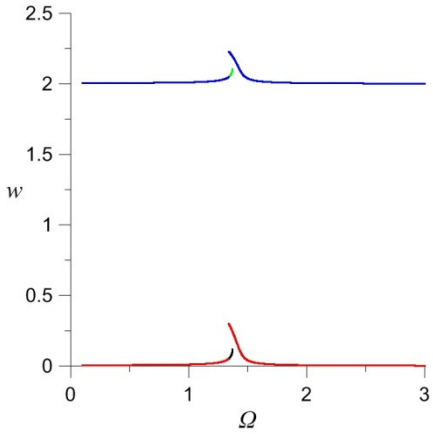
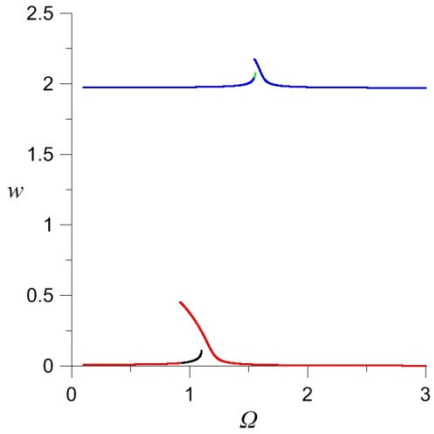
A Tabela 13 apresenta, para valores selecionados da magnitude da excitação, F, os diagramas de bifurcação obtidos pelo método da força bruta para dois níveis de carregamento estático, $\bar{P}_z = 0{,}0$ e $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$, tendo como variável de controle a frequência da excitação, Ω. Inicialmente obtêm-se os diagramas crescendo a frequência e, a seguir, decrescendo a frequência, de modo a se identificar os saltos dinâmicos e soluções coexistentes em um ambiente ou experimento onde a frequência da excitação varia na região principal de ressonância. A curva em preto corresponde à solução obtida crescendo a frequência e a curva em vermelho à solução obtida decrescendo a frequência, tomando como condição inicial a solução pré-crítica. Já a curva em verde, corresponde à solução obtida crescendo a frequência e a curva em azul à solução obtida decrescendo a frequência, tomando como condição inicial a solução pós-crítica. Observam-se nas curvas de ressonância não lineares os saltos entre os trechos ressonantes e não ressonantes das curvas de ressonância e que a estrutura

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

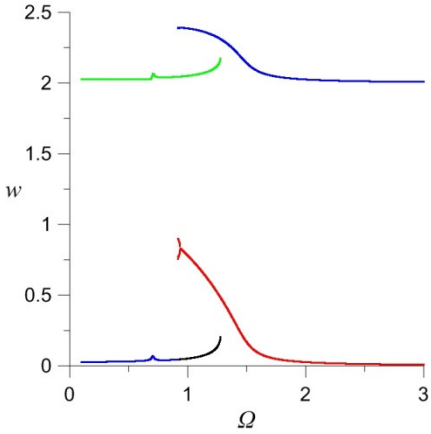
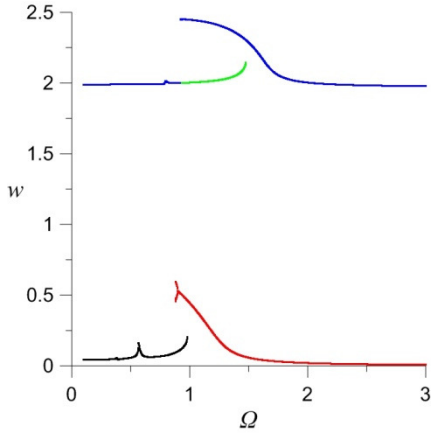
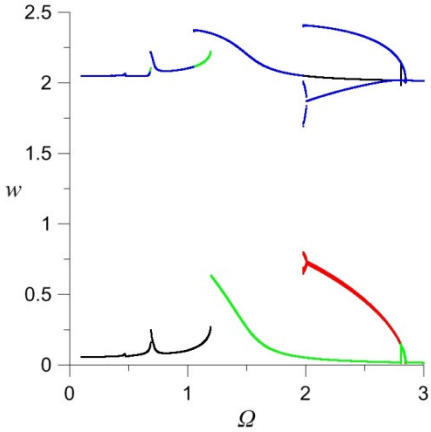
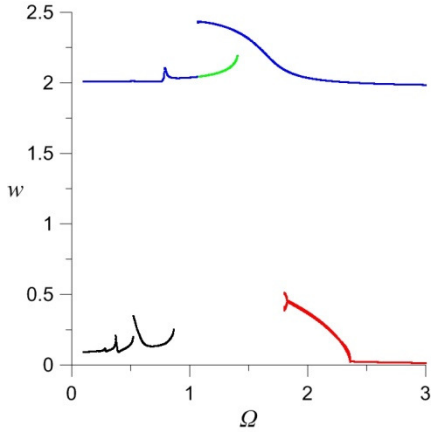
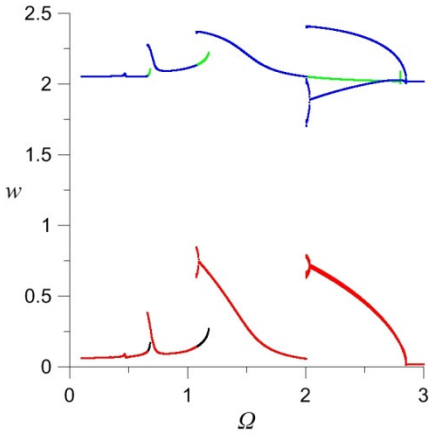
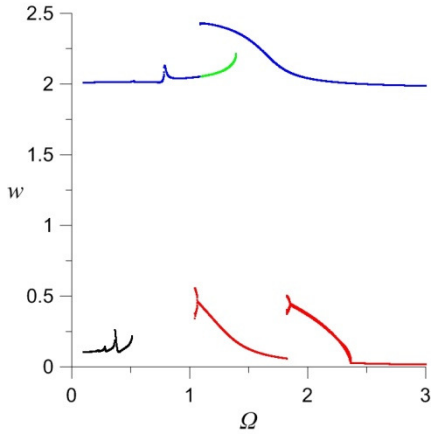
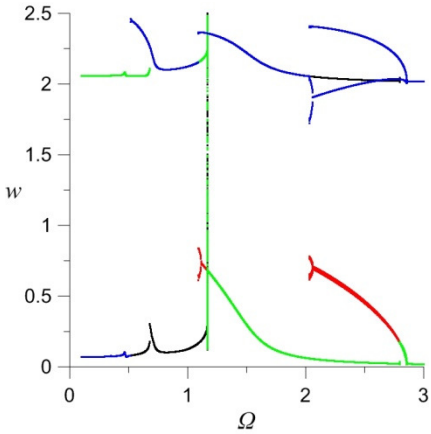
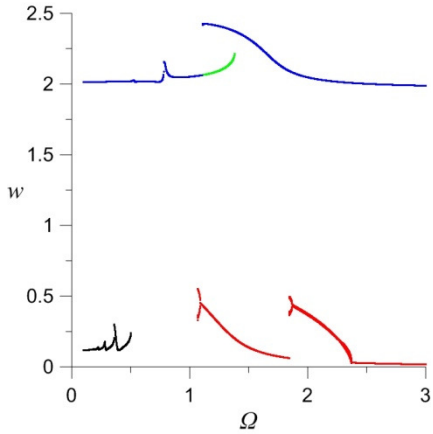
apresenta um comportamento com perda de rigidez, típico de elementos estruturais abatidos, em concordância com os resultados obtidos no Capítulo 4 para a relação não linear frequência-amplitude. Para níveis elevados de carregamento, observam-se saltos entre as soluções pré- e pós-críticas, bem como soluções de grande amplitude. Observam-se também, para níveis elevados de carregamento, regiões onde nenhuma solução estável dentro de um dado vale é detectada. Comparando-se os resultados para $\bar{P}_z = 0{,}0$ com aqueles para $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$, verifica-se que o nível de carregamento estático tem grande influência no comportamento não linear da estrutura e nas bifurcações.

Os resultados mostram que, à medida que F cresce, surge uma segunda ressonância em $\Omega = \omega_0/2$ com grande influência no comportamento dinâmico do sistema. Nota-se a seguir o surgimento de um novo ramo de soluções em $\Omega = 2\omega_0$. Estas ressonâncias não seriam observadas em um sistema linear, sendo, portanto, fenômenos tipicamente não lineares. Elas são devidas a não linearidade quadrática que tem grande influência no comportamento dinâmico de estruturas abatidas. Isto destaca a importância da não linearidade nesta classe de estruturas.

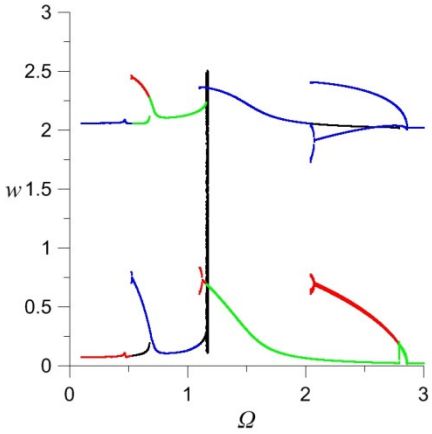
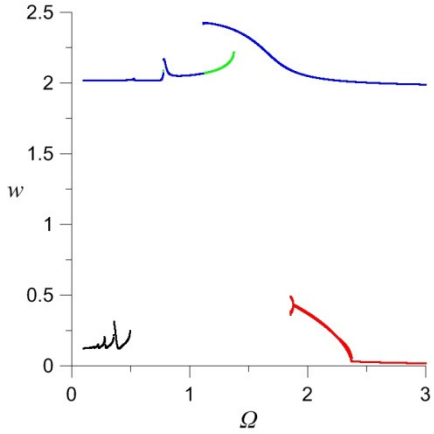
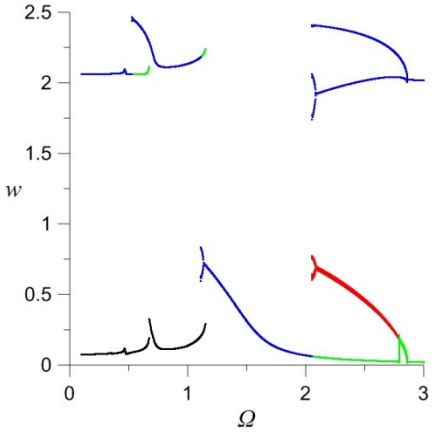
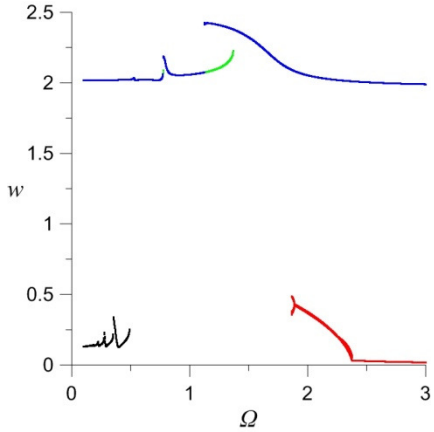
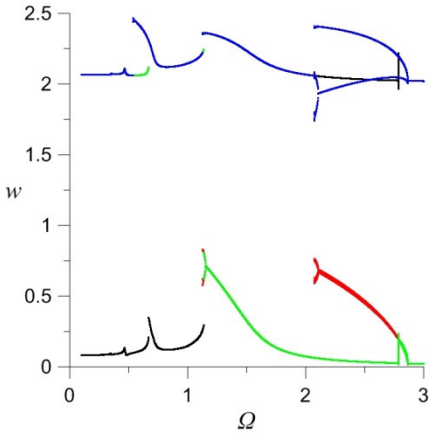
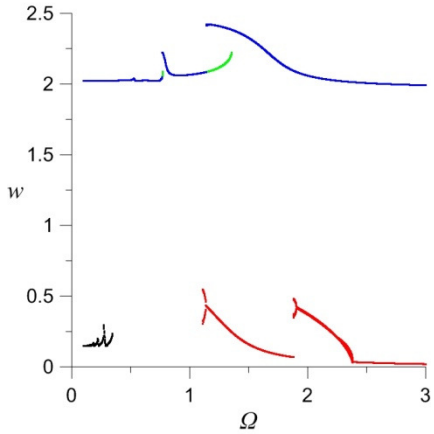
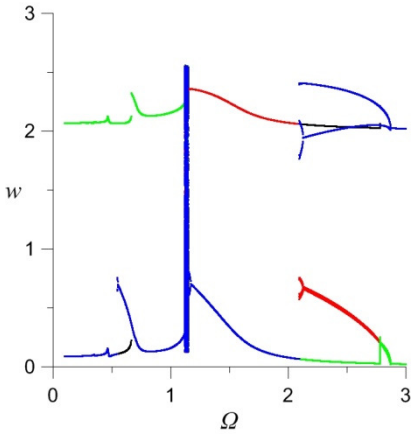
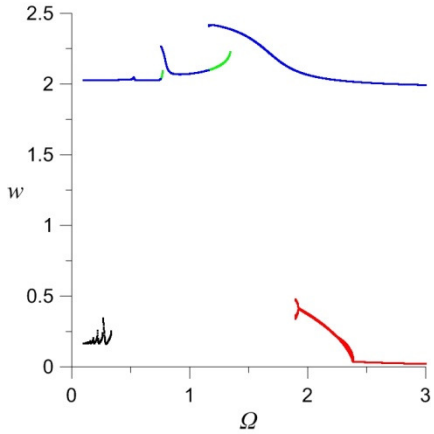
Tabela 13 – Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência da excitação, Ω, para valores selecionados da magnitude da excitação, F. Método da força bruta.

Magnitude do carregamento	$0{,}0 \times P_{cr} = 0{,}000$	$0{,}5 \times P_{cr} = 0{,}193$
0,010		

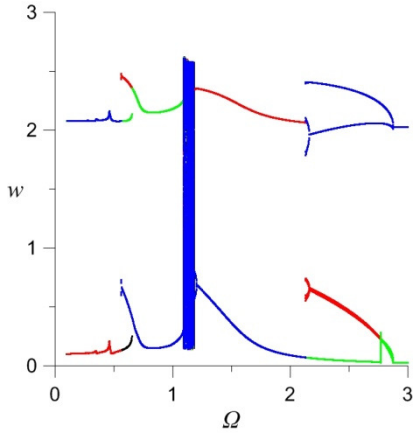
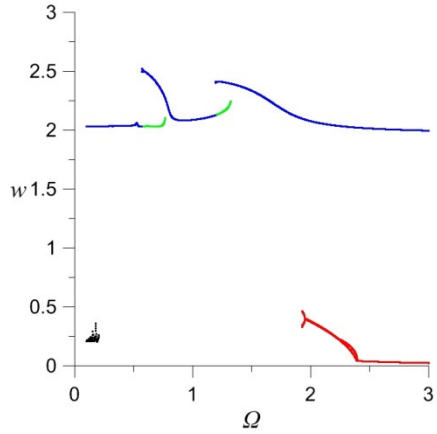
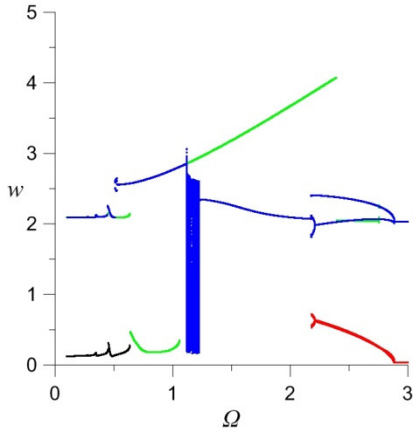
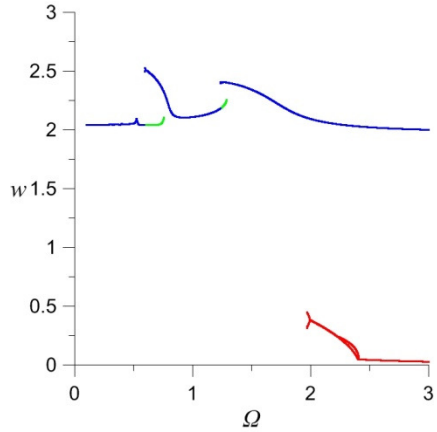
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,050		
0,100		
0,110		
0,120		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,125		
0,130		
0,140		
0,150		

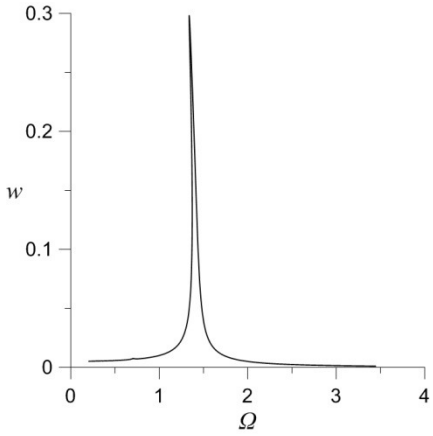
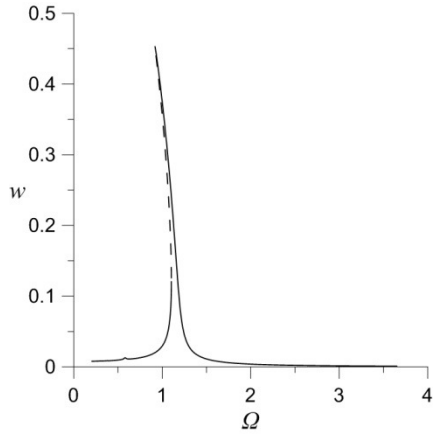
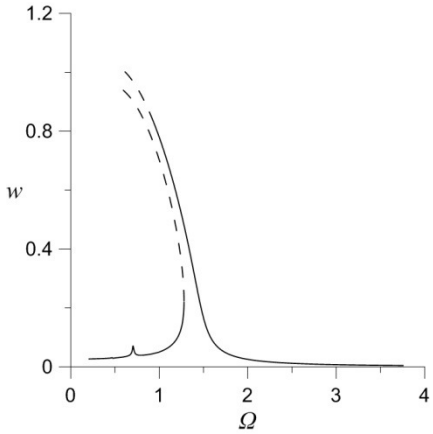
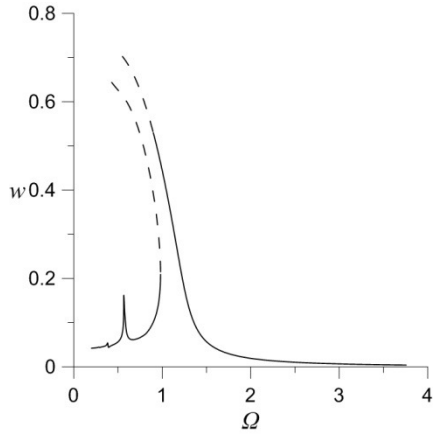
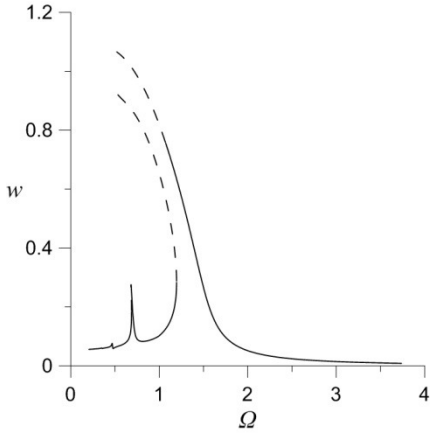
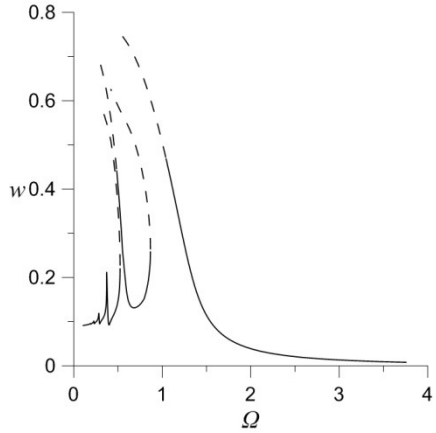
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,170		
0,200		

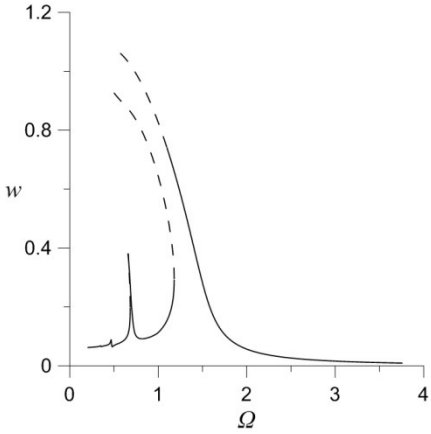
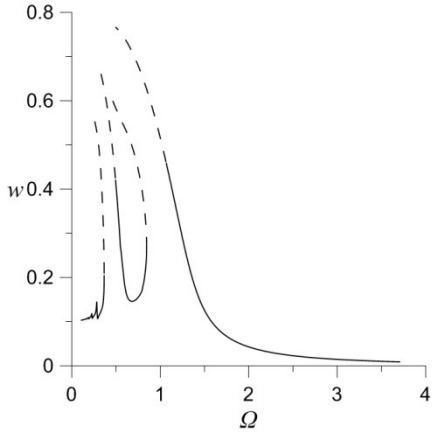
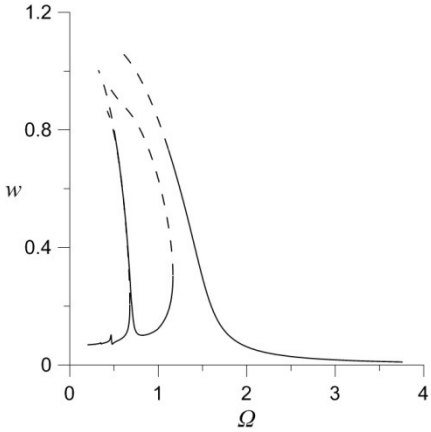
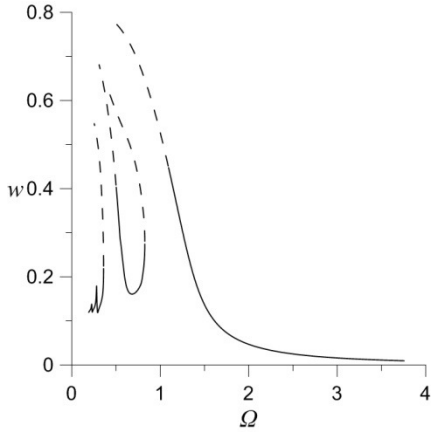
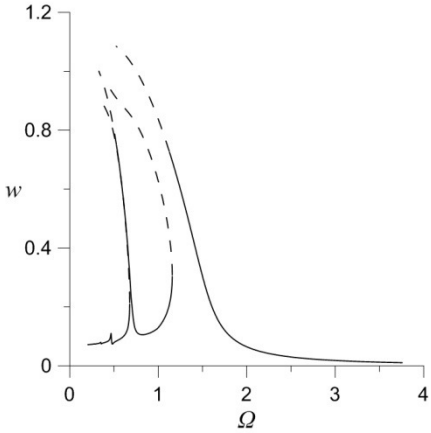
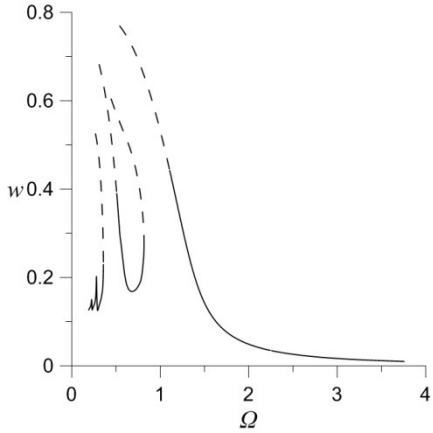
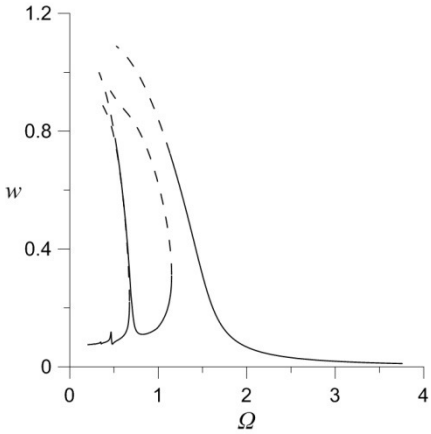
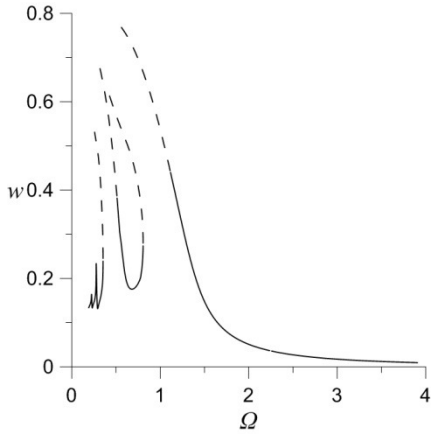
Finalmente, na Tabela 14 são apresentados, para valores selecionados da magnitude da excitação, os diagramas de bifurcação obtidos pelo método de continuação para dois níveis de carregamento estático, Ω. Observam-se as curvas de ressonância não linear na região principal de ressonância e o aparecimento de ressonância sub-harmônica de ordem dois a partir de $F = 0{,}05$. À medida que F cresce, nota-se, em virtude da não linearidade com perda de rigidez, o aparecimento de uma bifurcação nó-sela ao longo do ramo não ressonante da resposta. Surge também ao longo do ramo ressonante uma bifurcação por duplicação de período, confirmando os resultados obtidos pelo método da força bruta.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

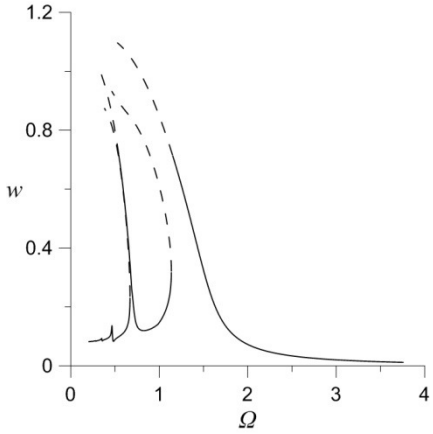
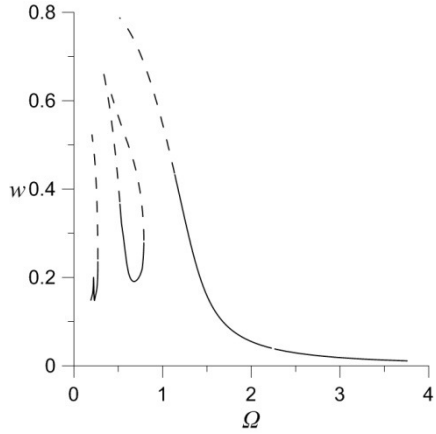
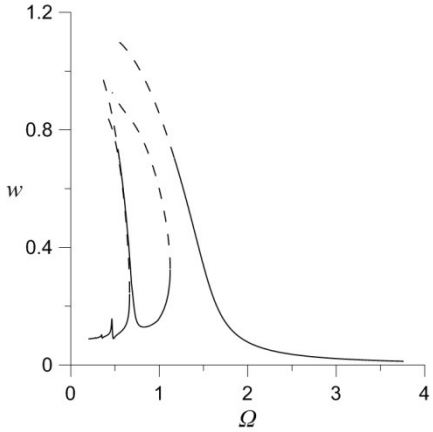
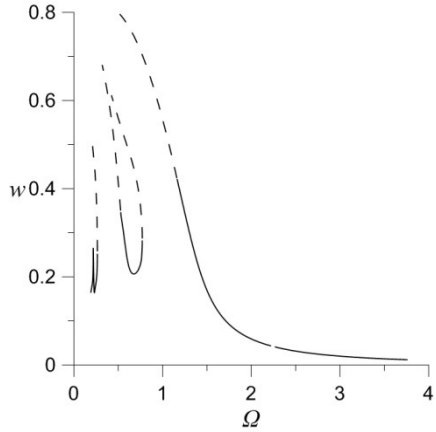
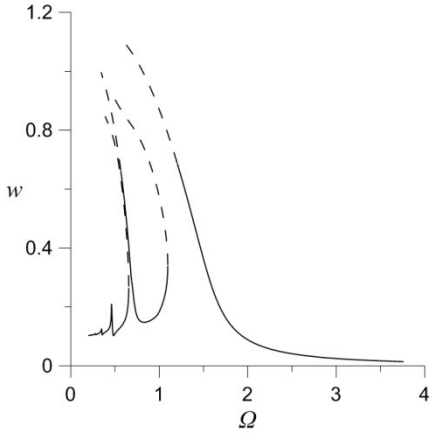
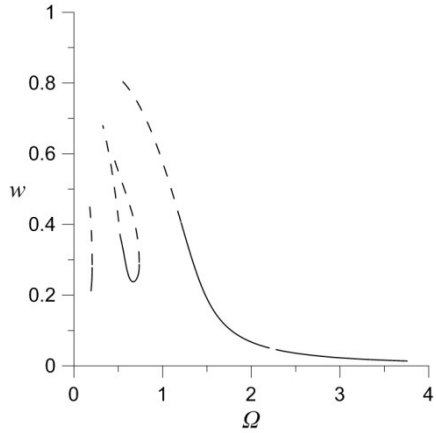
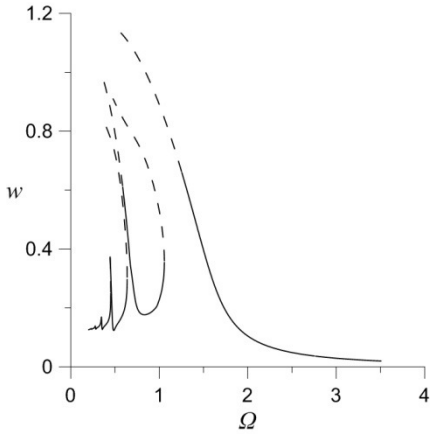
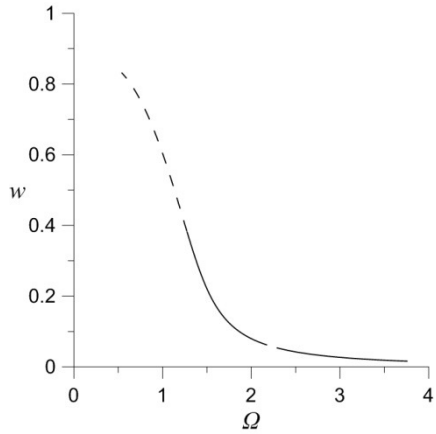
Tabela 14 – Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência da excitação, Ω, para valores selecionados da magnitude da excitação, F. Método da continuação.

Magnitude do carregamento	$0{,}0 \times P_{cr} = 0{,}000$	$0{,}5 \times P_{cr} = 0{,}193$
0,010		
0,050		
0,100		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,110		
0,120		
0,125		
0,130		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,140		
0,150		
0,170		
0,200		

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

5.4
Análise das bacias de atração e soluções coexistentes

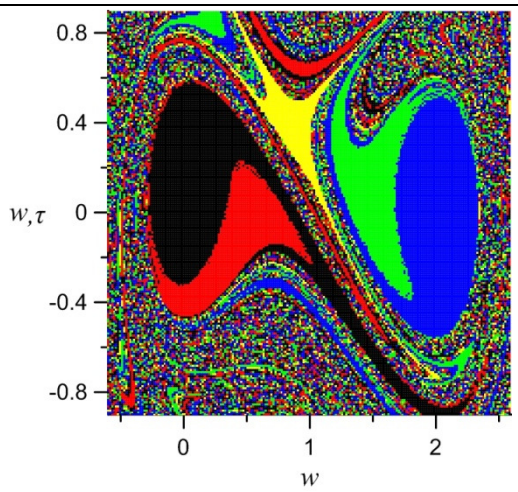
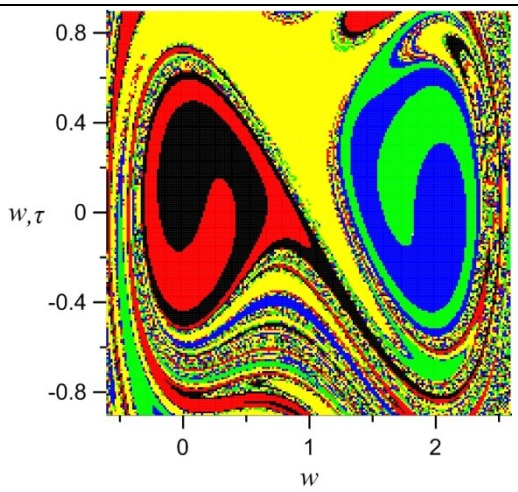
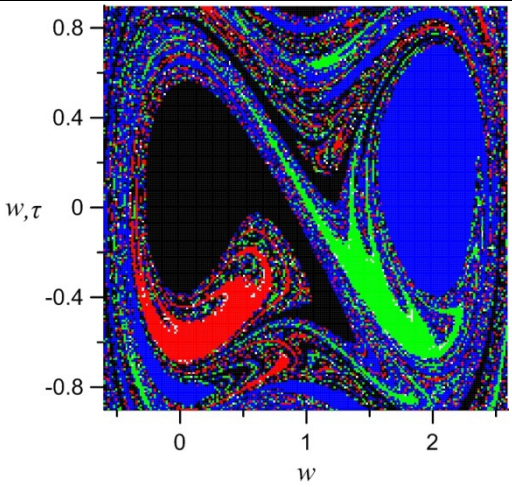
Em termos práticos, as informações obtidas através dos diagramas de bifurcação não são suficientes para avaliar a segurança de uma dada estrutura. Assim, a fim de avaliar a segurança da treliça, se analisa a evolução e a erosão das bacias de atração em função da variação dos parâmetros de controle. A definição para a bacia de atração de uma dada órbita aqui empregada é: "o conjunto de todas as condições iniciais no espaço de fase cujas soluções forçadas associadas são atraídas pelos pontos fixos estáveis desta órbita quando $t \rightarrow \infty$".

A avaliação da segurança e integridade de um sistema dinâmico não linear é um assunto de grande importância teórica e prática na engenharia. Uma forma de investigar a integridade dinâmica é através da análise da evolução das bacias de atração das diferentes soluções. Assim, tem-se que a segurança de um sistema não linear, mecânico ou estrutural, depende não só da estabilidade de suas soluções, mas também da integridade da bacia no entorno de cada solução, sendo que a erosão total de uma dada bacia corresponde à falha do sistema (Orlando, 2010).

Na Tabela 15 são apresentadas as bacias de atração da estrutura sem carregamento estático para valores selecionados da magnitude da excitação, F, e da frequência da excitação, Ω, na região de ressonância. A janela de condições iniciais foi escolhida de forma a identificar as soluções associadas a cada vale potencial e as soluções de grande amplitude. O objetivo é ilustrar a coexistência de soluções e como se comportam as fronteiras das diversas bacias de atração (suaves ou fractais) no espaço de fase. Cada cor está associada ao conjunto de condições iniciais que converge para um dado ponto fixo do mapa de Poincaré. Em cada caso, as coordenadas dos respectivos pontos fixos $(w, w_{,\tau})$ são dadas na última coluna da tabela. Na Tabela 16 apresenta-se o mesmo tipo de análise para $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$. Observa-se em todos os casos um elevado número de soluções coexistentes, o que leva a um comportamento dinâmico complexo. Em torno de cada ponto fixo tem-se uma bacia contínua que representa a região segura associada a uma dada solução. Longe dos pontos fixos verifica-se uma região com características fractais. Nestas regiões tem-se sensibilidade a condições iniciais e incerteza quanto à resposta permanente a ser alcançada.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

Tabela 15 – Bacias de atração para $\bar{P}_z = 0{,}0$ e valores selecionados da magnitude da excitação, F, e da frequência da excitação, Ω.

Frequência (Ω)	Amplitude (F)	Bacias de atração	Pontos fixos $(w, w_{,\tau})$
0,600	0,150		-0,018 0,066 0,408 -0,203 0,869 0,383 1,444 0,122 2,014 0,071
0,675	0,110		-0,050 0,044 0,091 -0,237 0,773 0,551 1,804 0,268 2,040 0,088
1,100	0,050		0,003 0,070 0,139 -0,624 1,522 -0,391 1,992 0,070

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

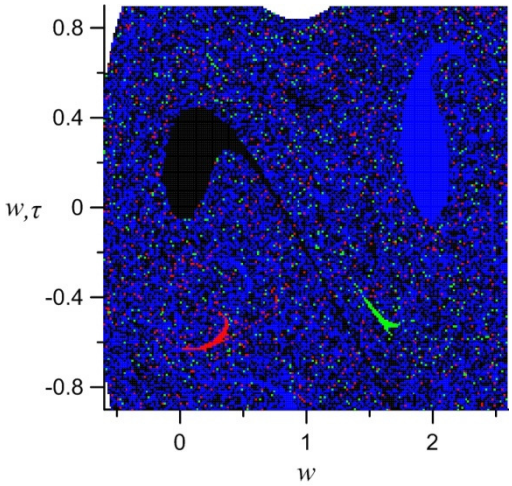
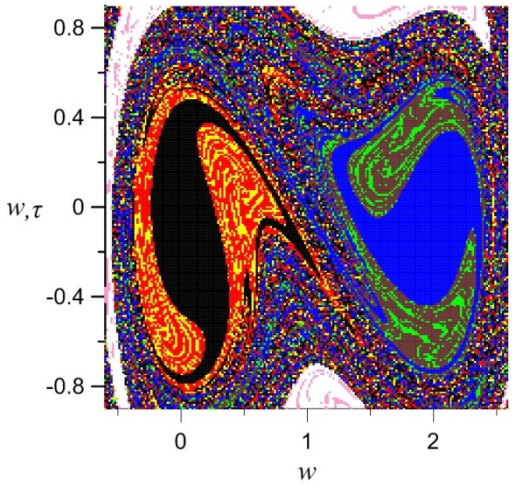
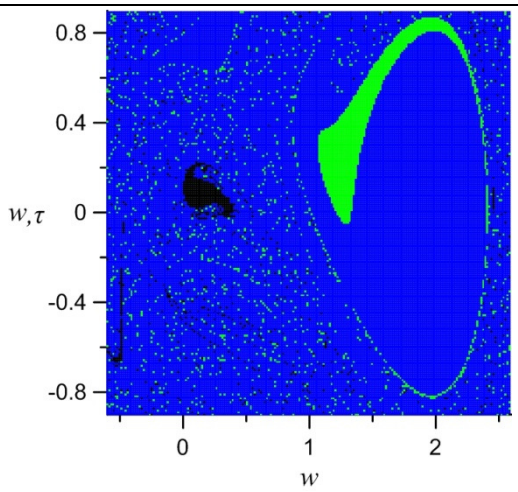
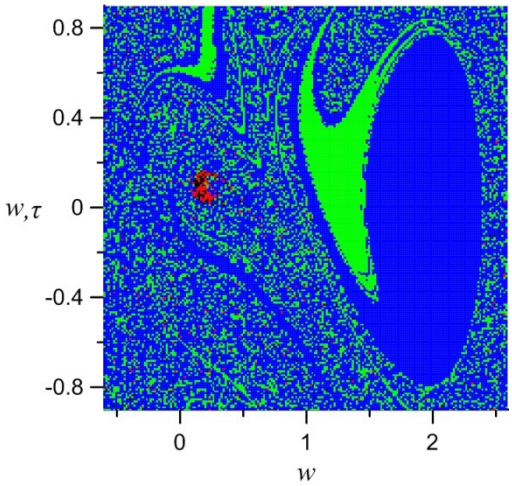
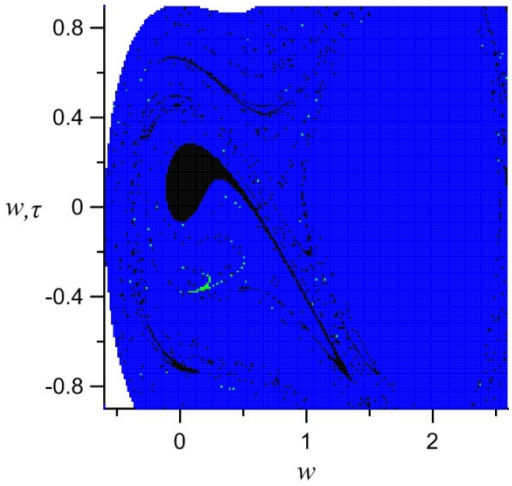
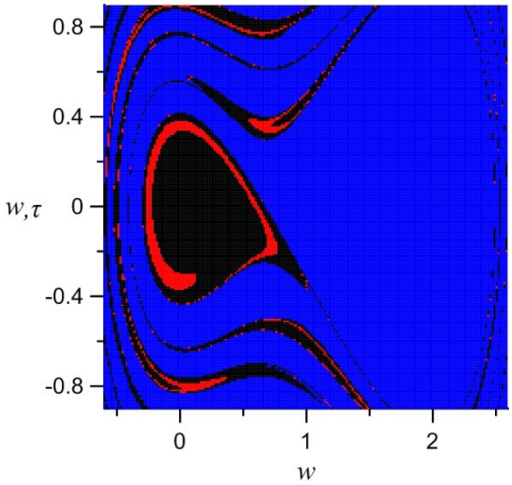
1,120	0,110		0,025 0,179 0,256 -0,603 1,581 -0,488 1,961 0,175
2,500	0,170		-0,449 0,703 -0,210 -0,493 0,001 -0,100 0,451 0,106 1,633 0,237 1,998 -0,100 2,052 -0,611

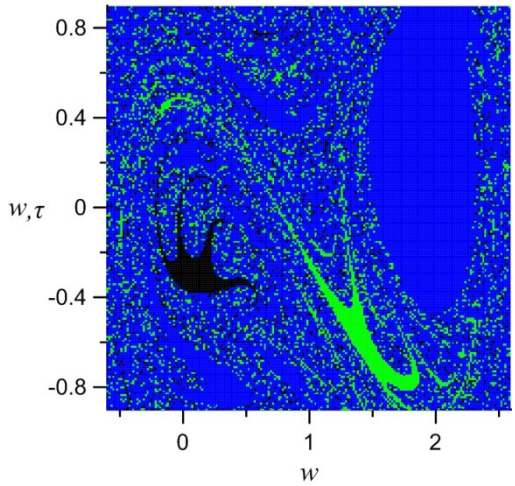
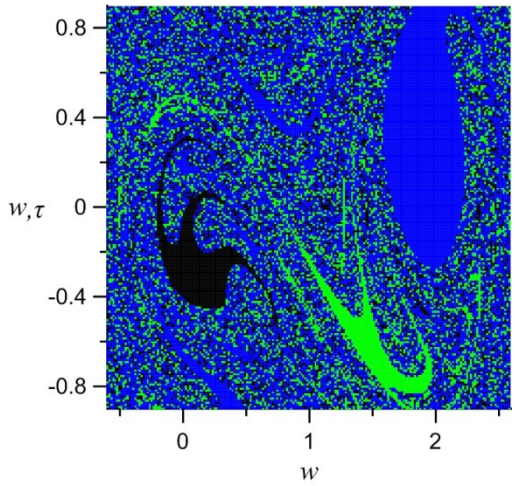
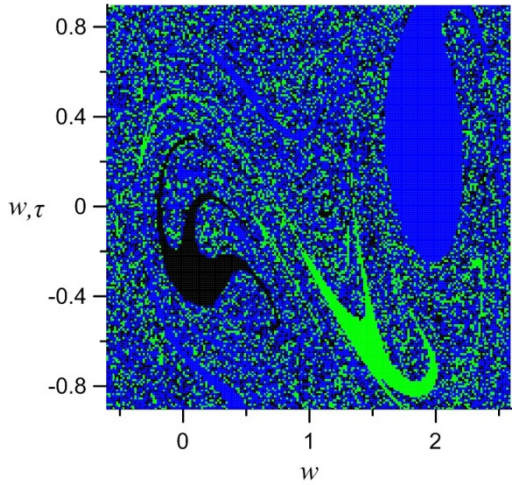
Tabela 16 – Bacias de atração para $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$ e valores selecionados da magnitude da excitação, F, e da frequência da excitação, Ω.

Frequência (Ω)	Amplitude (F)	Bacias de atração	Pontos fixos $(w, w_{,\tau})$
0,650	0,170		0,119 0,079 1,288 0,284 1,977 0,06

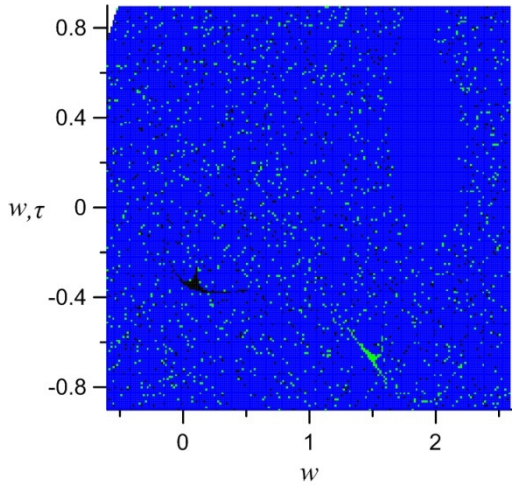
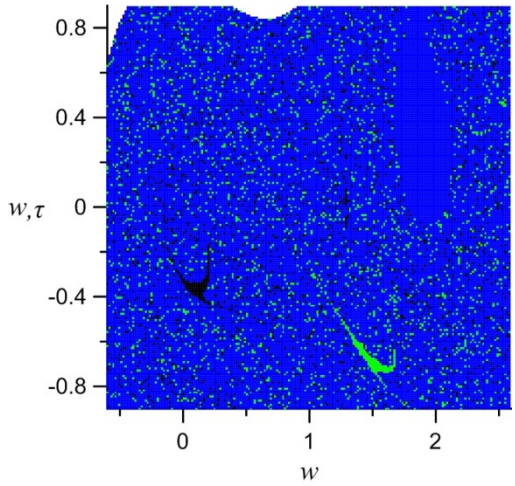
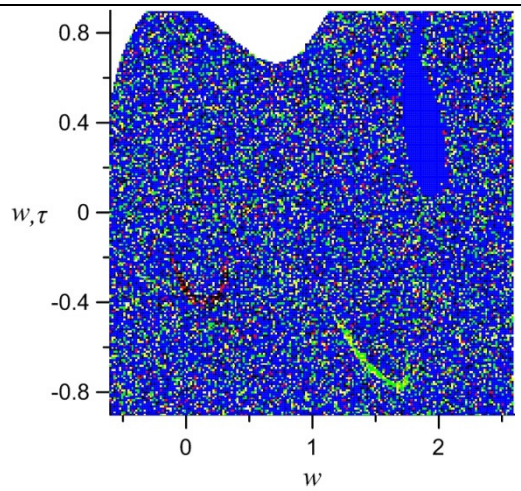
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,650	0,200		0,160 0,042 0,199 0,145 1,239 0,168 1,979 0,074
0,920	0,050		0,013 0,099 0,159 -0,368 1,967 0,027
1,000	0,010		-0,194 -0,203 -0,001 0,029 1,969 0,007

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

1,200	0,100		0,069 -0,319 1,391 -0,579 1,957 0,11
1,250	0,125		0,067 -0,322 1,457 -0,628 1,945 0,165
1,250	0,130		0,07 -0,328 1,458 -0,633 1,943 0,172

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

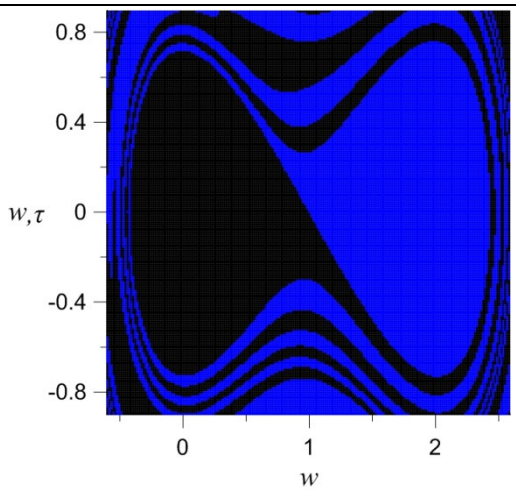
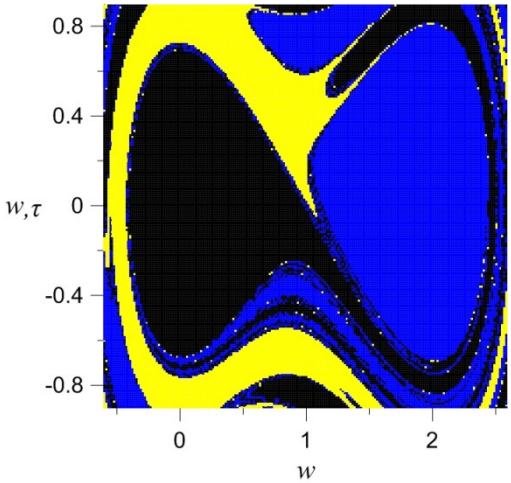
1,250	0,150		0,083 -0,349 1,461 -0,652 1,934 0,201
1,250	0,170		0,096 -0,367 1,462 -0,668 1,923 0,231
1,250	0,200		-0,025 -0,33 0,250 -0,37 1,314 -0,595 1,636 -0,762 1,900 0,283

Para ilustrar o processo de erosão das bacias de atração, e a consequente perda de integridade da solução, à medida que a magnitude da carga aumenta, são apresentadas na Tabela 17 as bacias de atração para $\bar{P}_z = 0{,}0$, $\Omega = 0{,}6$ e valores crescentes da magnitude da excitação, F. A Figura 11 mostra para $\Omega = 0{,}6$ e $F = 0{,}150$ as órbitas associadas a cada atrator da bacia. Para facilitar a análise, é usada a mesma convenção de cores. Para $F = 0{,}010$ só existe em cada vale a

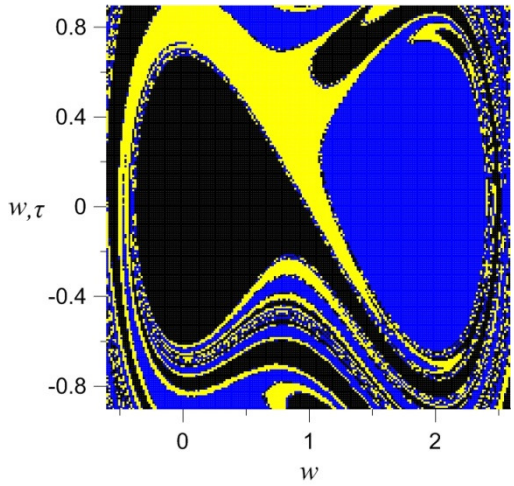
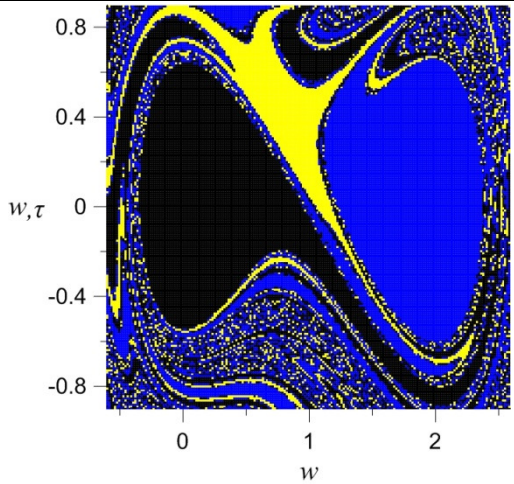
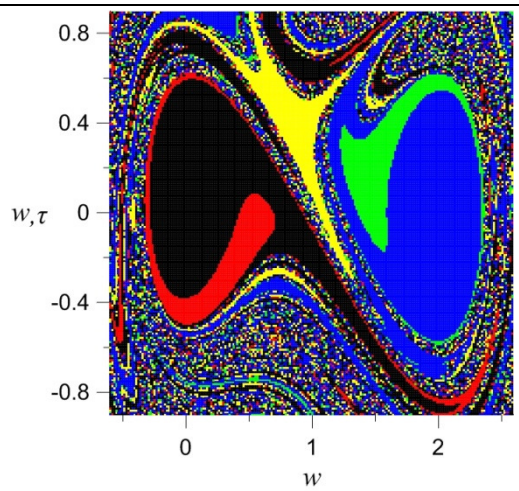
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

solução não ressonante de pequena amplitude (região preta associada à solução pré-crítica e a região azul associada à solução pós-crítica), sendo a fronteira entre as duas bacias uma curva suave. Para $F = 0{,}040$ se observa o aparecimento de mais um atrator (região amarela) associada a uma solução de grande amplitude. Neste caso já surgem estreitas faixas fractais que aumentam com o carregamento, como se observa para $F = 0{,}070$ e $F = 0{,}110$. Para $F = 0{,}130$ surgem dois novos atratores (regiões vermelha e verde). Estas soluções aparecem em virtude da ressonância não linear e correspondem às soluções do ramo ressonante da resposta. Estes são, portanto, os cinco atratores ilustrados na Figura 11. Observa-se, ainda, a simetria das órbitas devida à simetria do vale potencial para $\bar{P}_z = 0{,}0$.

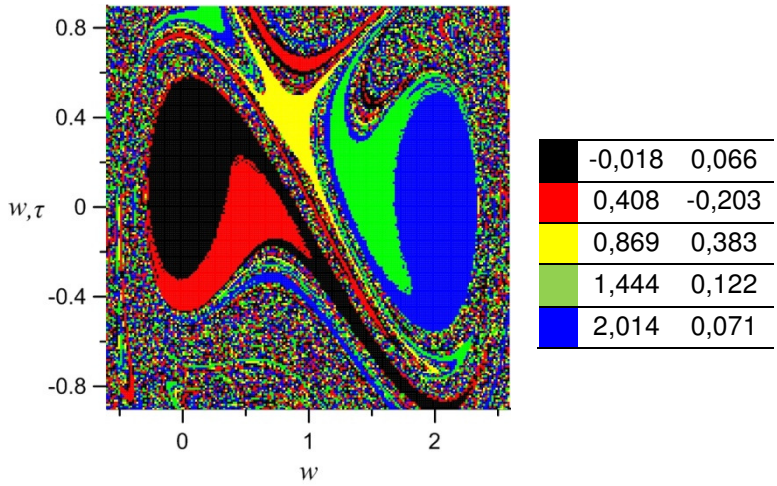
Tabela 17 – Bacias de atração para $\Omega = 0{,}6$ e valores crescentes da magnitude da excitação, F. $\bar{P}_z = 0{,}0 \times P_{cr} = 0{,}000$.

Frequência (Ω)	Amplitude (F)	Bacias de atração	Pontos fixos ($w, w_{,\tau}$)
0,600	0,010		0,000 0,004 2,000 0,004
0,600	0,040		-0,001 0,015 0,370 0,685 2,001 0,015

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,600	0,070		-0,004 0,026 0,708 0,474 2,003 0,027
0,600	0,110		-0,010 0,044 0,822 0,409 2,008 0,046
0,600	0,130		-0,013 0,054 0,343 -0,280 0,849 0,394 1,472 0,189 2,011 0,058

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

0,600	0,150	

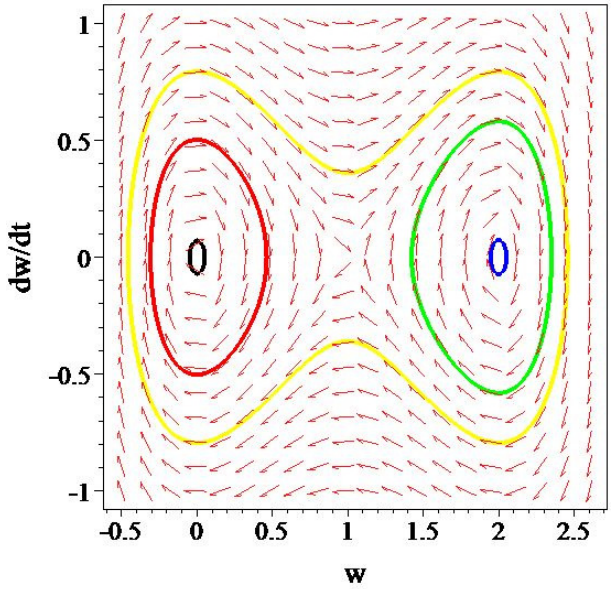


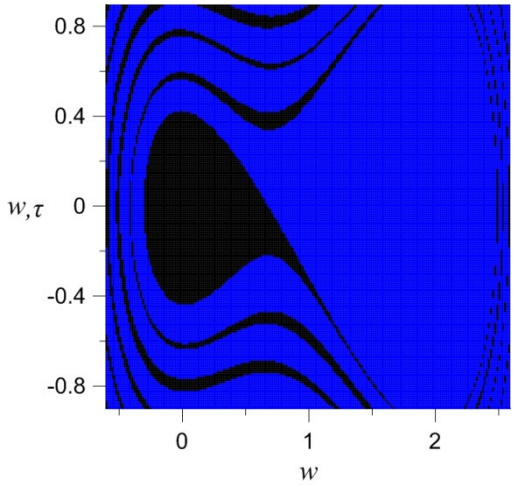
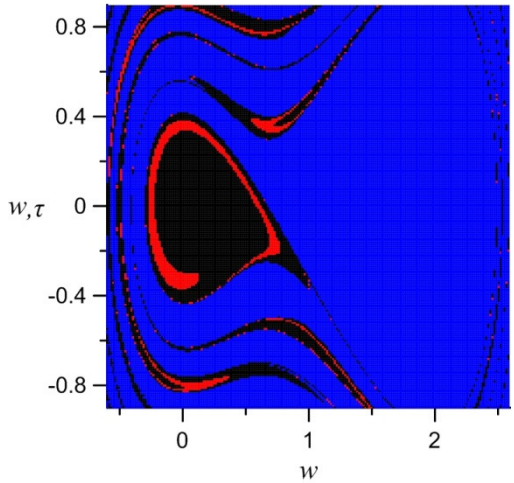
Figura 11 – Projeções no plano de fase das cinco órbitas periódicas coexistentes para $\bar{P}_z = 0{,}0$, $\Omega = 0{,}6$ e $F = 0{,}150$.

Finalmente, são apresentadas na Tabela 18 as bacias de atração para $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$, $\Omega = 1{,}0$ e valores crescentes da magnitude da excitação, F. As órbitas são ilustradas na Figura 12 para o caso particular de $F = 0{,}030$, usando-se as mesmas cores das respectivas bacias de atração. Para $F = 0{,}005$ só existe em cada vale a solução não ressonante de pequena amplitude (região preta associada à solução pré-crítica e a região azul associada à solução pós-crítica), sendo a fronteira entre as duas bacias uma curva suave. Nota-se que, em função da assimetria da função potencial para $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$, a região associada à solução pós-crítica é bem maior que a região associada à solução pré-crítica. Para $F = 0{,}010$ se observa o aparecimento de mais uma bacia (região vermelha) associada a

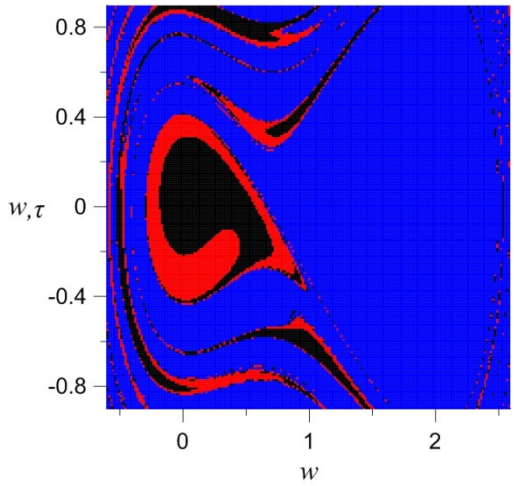
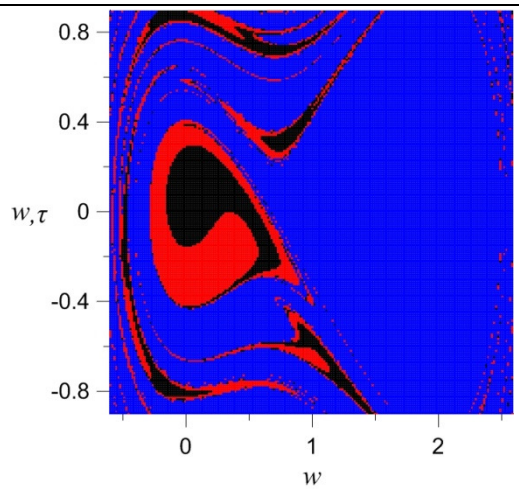
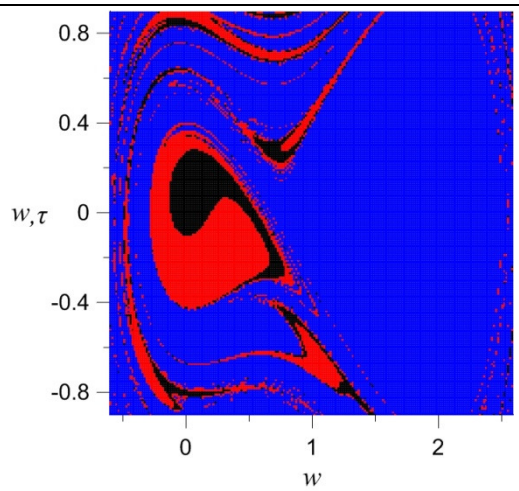
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

uma solução ressonante no vale pré-crítico, que aumenta à medida que F aumenta. Para $F = 0{,}030$ surge uma nova bacia (região verde) associada a uma solução ressonante no vale pós-crítico. Estes são, portanto, os quatro atratores ilustrados na Figura 12. Observa-se novamente o aparecimento de regiões fractais.

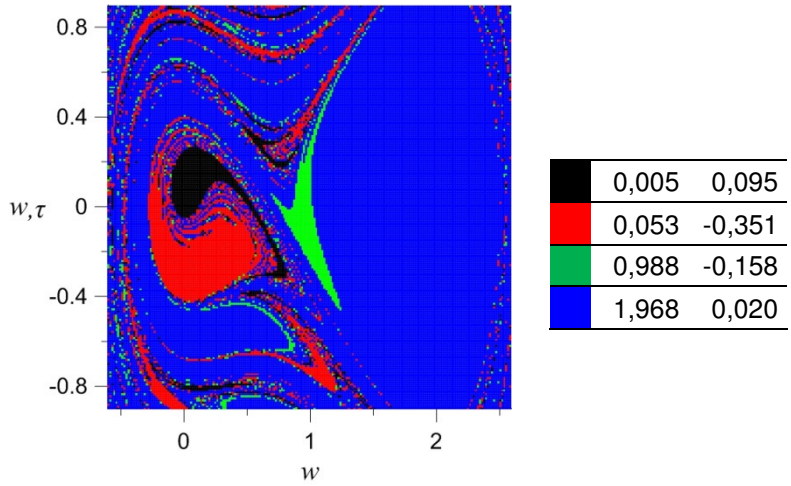
Tabela 18 – Bacias de atração para $\Omega = 1{,}0$ e valores crescentes da magnitude da excitação, F. $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr} = 0{,}193$.

Frequência (Ω)	Amplitude (F)	Bacias de atração	Pontos fixos $(w, w_{,\tau})$
1,000	0,005		-0,001 0,014 1,969 0,003
1,000	0,010		-0,194 -0,203 -0,001 0,029 1,969 0,007

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

1,000	0,015		-0,069 -0,324 -0,001 0,044 1,969 0,010
1,000	0,020		-0,009 -0,342 0,000 0,060 1,969 0,013
1,000	0,025		0,002 0,077 0,027 -0,348 1,969 0,016

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

1,000	0,030	

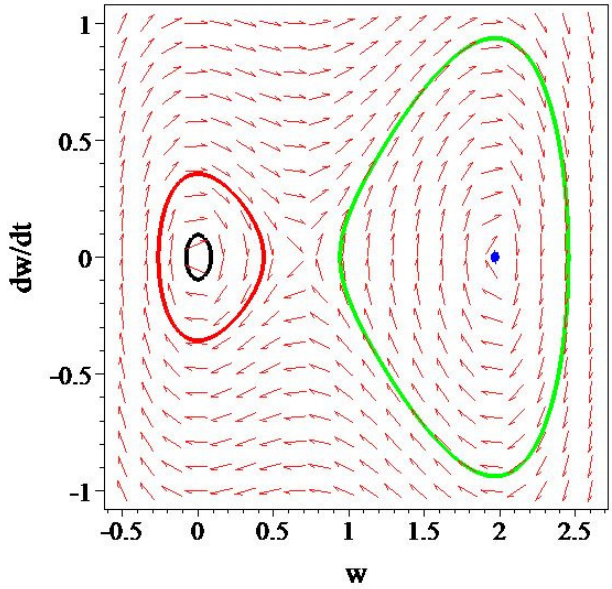


Figura 12 – Projeções no plano de fase das quatro órbitas periódicas coexistentes para $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$, $\Omega = 1{,}0$ e $F = 0{,}030$.

Finalmente, usando-se os dados fornecidos pela análise paramétrica, podem-se obter as fronteiras de estabilidade das soluções do vale potencial pré-critico no espaço dos parâmetros de controle da força de excitação (frequência vs. magnitude da força). Os resultados relativos aos dois níveis de carregamento estático aqui analisados, $\bar{P}_z = 0{,}0$ e $\bar{P}_z = 0{,}5 \times P_{cr}$, são mostrados respectivamente nas Figuras 13 e 14. Verifica-se que a carga mínima de escape ocorre na vizinhança da frequência natural em virtude da ressonância e bifurcações associadas. Entretanto surgem outros vales relativos a ressonâncias sub-harmônicas de ordem dois e três. Finalmente, verifica-se, comparando as Figuras 13 e 14, que o carregamento estático compressivo causa um decréscimo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA

acentuado na capacidade de carga da estrutura submetida a um carregamento dinâmico. Estas curvas podem fornecer ao engenheiro projetista informações úteis para o projeto de treliças espaciais abatidas.

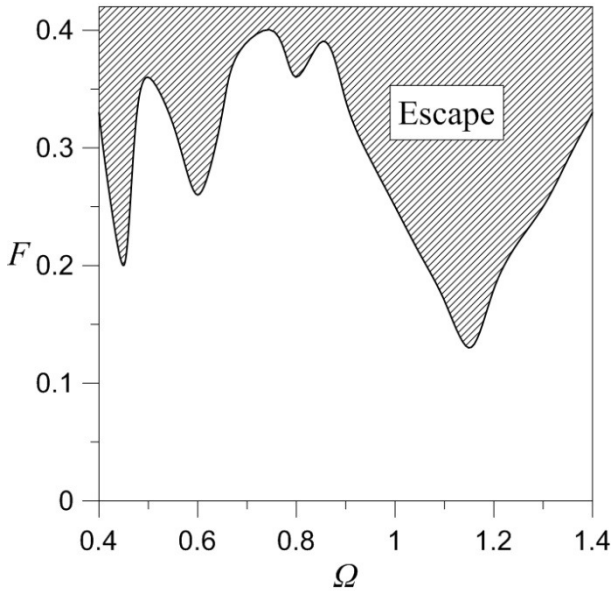


Figura 13 – Fronteira de estabilidade para o caso sem carregamento estático. $0{,}0 \times P_{cr} = 0{,}000$.

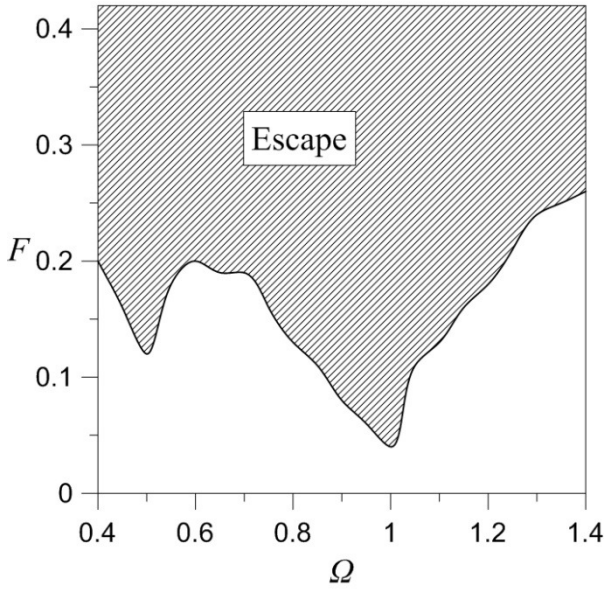


Figura 14 – Fronteira de estabilidade para o caso com 50% de carregamento estático. $0{,}5 \times P_{cr} = 0{,}193$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1221969/CA