

## 4

# Vibração Livre

### 4.1

#### Equações de movimento linearizadas

As equações de movimento linearizadas em torno de uma configuração de equilíbrio estático são, com base nas equações (2.33) a (2.35), dadas por:

$$\bar{r}_{,\tau\tau} + \bar{r}(w_i^2 - 2w_i - \delta^2) = 0. \quad (4.1)$$

$$\theta_{,\tau\tau} = 0. \quad (4.2)$$

$$w_{,\tau\tau} + w(3w_i^2 - 6w_i + 2) = 0. \quad (4.3)$$

De onde se obtêm as seguintes frequências naturais da estrutura em torno de uma dada configuração estática:

$$\omega_{\bar{r}} = \sqrt{w_i^2 - 2w_i - \delta^2}. \quad (4.4)$$

$$\omega_{\theta} = 0. \quad (4.5)$$

$$\omega_w = \sqrt{3w_i^2 - 6w_i + 2}. \quad (4.6)$$

Agora, simplificando para o caso sem carregamento estático, ou seja, com  $w_i = 0$ , tem-se as três frequências naturais adimensionais da treliça:

$$\omega_{\bar{r}} = \delta. \quad (4.7)$$

$$\omega_{\theta} = 0. \quad (4.8)$$

$$\omega_w = \sqrt{2}. \quad (4.9)$$

Para essa situação, verifica-se que o parâmetro de frequência adimensional  $\omega_w$  é constante, enquanto a frequência  $\omega_{\bar{r}}$  é uma função linear do parâmetro adimensional  $\delta$ . Pode-se observar que a frequência em  $\theta$  é nula devido à simetria da estrutura. Então, conhecendo-se as frequências adimensionais, podem-se obter as mesmas para uma treliça com dimensões e propriedades de material conhecidas, sendo estas dadas por:

$$\omega_{\bar{r}} = \sqrt{\frac{EAH^2}{mL^3}} (B/H)^2. \quad (4.10)$$

$$\omega_{\theta} = 0. \quad (4.11)$$

$$\omega_w = \sqrt{\frac{2EAH^2}{mL^3}}. \quad (4.12)$$

## 4.2

### Análise não linear em vibração livre - caso axissimétrico

A seguir apresenta-se a análise não linear em vibração livre para o caso mais simples, onde se considera que a treliça está livre para deslocar apenas na direção  $w$  e as componentes de deslocamento  $\bar{r}$  e  $\theta$  são nulas, ou seja, o caso axissimétrico.

Portanto, para estudar o comportamento da estrutura carregada estaticamente tem-se que a Eq. (2.35) toma a forma:

$$w_{,\tau\tau} + \omega_0^2 w + \alpha w^2 + \beta w^3 = 0. \quad (4.13)$$

onde  $\omega_0^2 = (3w_i^2 - 6w_i + 2)$ ,  $\alpha = (3w_i - 3)$  e  $\beta = 1$ .

#### 4.2.1

#### Relação frequência-carregamento

A Tabela 4 mostra a variação da frequência natural mínima com o nível de carregamento estático ao se variar a carga ao longo do caminho de equilíbrio pré-crítico, ou seja, entre 0 e  $P_{cr}$ . Mostra-se também a coordenada  $w_1$  relativa à posição de equilíbrio estático pré-crítica (Tabela 1).

Tabela 4 – Variação da frequência natural mínima com o nível de carregamento estático.

Carga Estática	$w_1$	$\omega_0$
$0,0 \times P_{cr} = 0,000$	0,000	1,414
$0,1 \times P_{cr} = 0,039$	0,020	1,372
$0,2 \times P_{cr} = 0,077$	0,041	1,326
$0,3 \times P_{cr} = 0,116$	0,064	1,276
$0,4 \times P_{cr} = 0,154$	0,088	1,223
$0,5 \times P_{cr} = 0,193$	0,116	1,159
$0,6 \times P_{cr} = 0,231$	0,146	1,090
$0,7 \times P_{cr} = 0,270$	0,181	1,006
$0,8 \times P_{cr} = 0,308$	0,223	0,901
$0,9 \times P_{cr} = 0,347$	0,280	0,745
$1,0 \times P_{cr} = 0,385$	0,423	0,000

Verifica-se que a frequência decresce com o aumento da carga estática, e torna-se nula quando atinge o valor crítico, como ilustra a Figura 8. A Figura 9 mostra a variação do quadrado da frequência fundamental em função do nível de carregamento, onde se observa uma relação não linear.

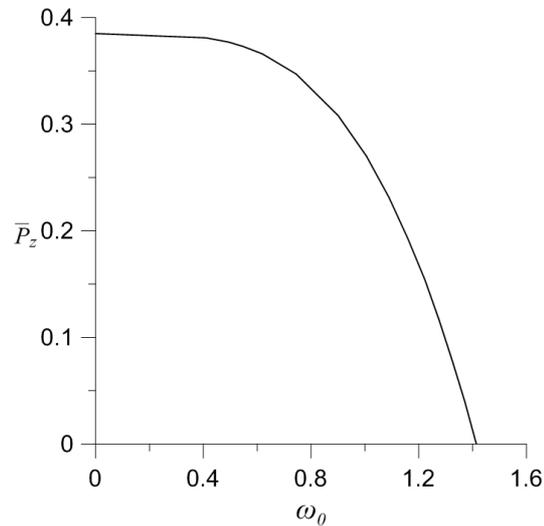


Figura 8 – Variação da frequência mínima com o nível de carga estática. Carga vertical vs. frequência natural mínima.

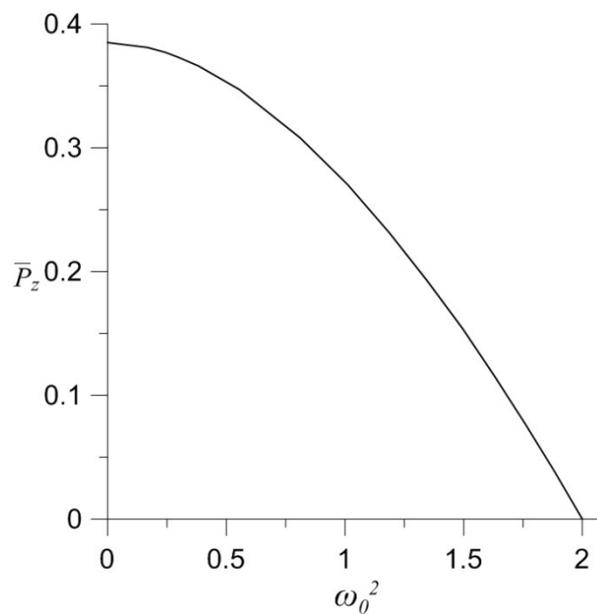


Figura 9 – Variação da frequência mínima ao quadrado com o nível de carga estática. Carga vertical vs. frequência natural mínima ao quadrado.

### 4.2.2 Soluções não lineares no plano de fase e resposta no tempo

Considerando que o sistema é conservativo, a partir do princípio da conservação de energia tem-se que:

$$\Delta T + \Delta \pi = C. \quad (4.14)$$

onde  $C$  é uma constante que representa a energia do sistema para um dado par de condições iniciais.

Tem-se assim que:

$$\Delta T + \Delta \pi = \frac{w_i^2}{2} + (3w_i^2 - 6w_i + 2) \frac{w^2}{2} + (3w_i - 3) \frac{w^3}{3} + \frac{w^4}{4} = C. \quad (4.15)$$

Explicitando a velocidade, tem-se a solução analítica que define a órbita no plano de fase (deslocamento *vs.* velocidade) associado a um dado par de condições iniciais:

$$w_{,\tau} = \sqrt{2C - 2\Delta\pi}. \quad (4.16)$$

$$w_{,\tau} = \sqrt{2\left[C - \left((3w_i^2 - 6w_i + 2) \frac{w^2}{2} + (3w_i - 3) \frac{w^3}{3} + \frac{w^4}{4}\right)\right]}. \quad (4.17)$$

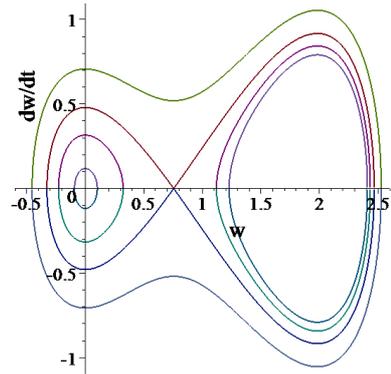
A partir da Eq. (4.17) podem-se identificar as diversas classes de soluções do sistema estrutural e a fronteira de estabilidade da posição de equilíbrio pré-crítica. Na Tabela 5 mostram-se, para níveis crescentes de energia, as curvas de nível de mesma energia, que correspondem às possíveis órbitas das soluções em vibração livre não amortecida do sistema não linear no espaço de fase. Verifica-se que existem dois centros que correspondem às duas posições de equilíbrio estável, e um ponto de sela que corresponde à posição de equilíbrio instável. O valor  $C_{lim}$  representa a energia do ponto de sela de onde partem as duas órbitas homoclínicas que delimitam os dois vales potenciais (bacias de atração conservativas) e separam os três tipos possíveis de solução, ou seja, as soluções restritas a cada vale potencial, para níveis de energia menor que  $C_{lim}$ , e as soluções de grande amplitude para níveis de energia maior que  $C_{lim}$ . Observa-se, ainda, que, à medida que a carga estática cresce, diminui a bacia de atração conservativa (área limitada pela órbita homoclínica) relacionada ao vale potencial pré-crítico, em conformidade com os perfis de energia potencial total estudados no capítulo anterior (Tabela 2), tornando-se nula em  $\bar{P}_z = P_{cr}$ .

Tabela 5 – Curvas de nível de igual energia para níveis crescentes de carregamento estático e energia associada ao ponto de sela,  $C_{lim}$ .

Carga	$C_{lim}$	Curvas de Nível
$0,0 \times P_{cr} = 0,000$	0,2500	
$0,1 \times P_{cr} = 0,039$	0,2123	
$0,2 \times P_{cr} = 0,077$	0,1775	
$0,3 \times P_{cr} = 0,116$	0,1444	

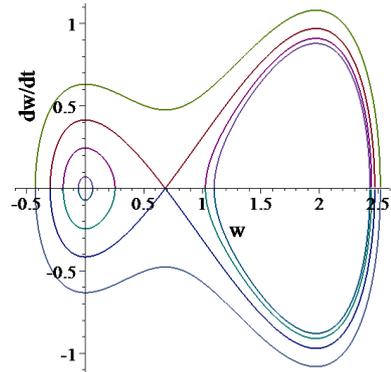
$$0,4 \times P_{cr} = 0,154$$

0,1149



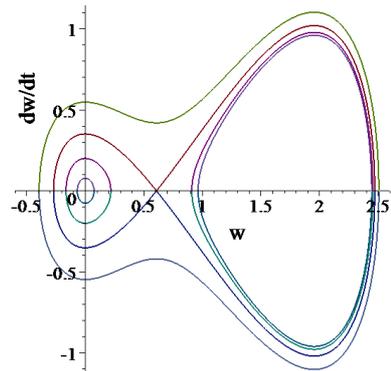
$$0,5 \times P_{cr} = 0,193$$

0,0863



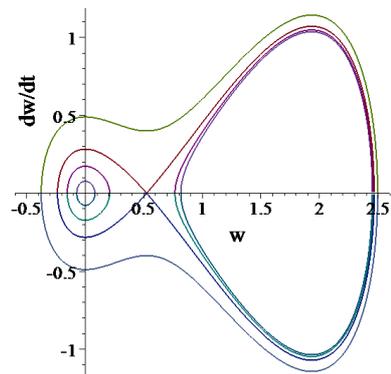
$$0,6 \times P_{cr} = 0,231$$

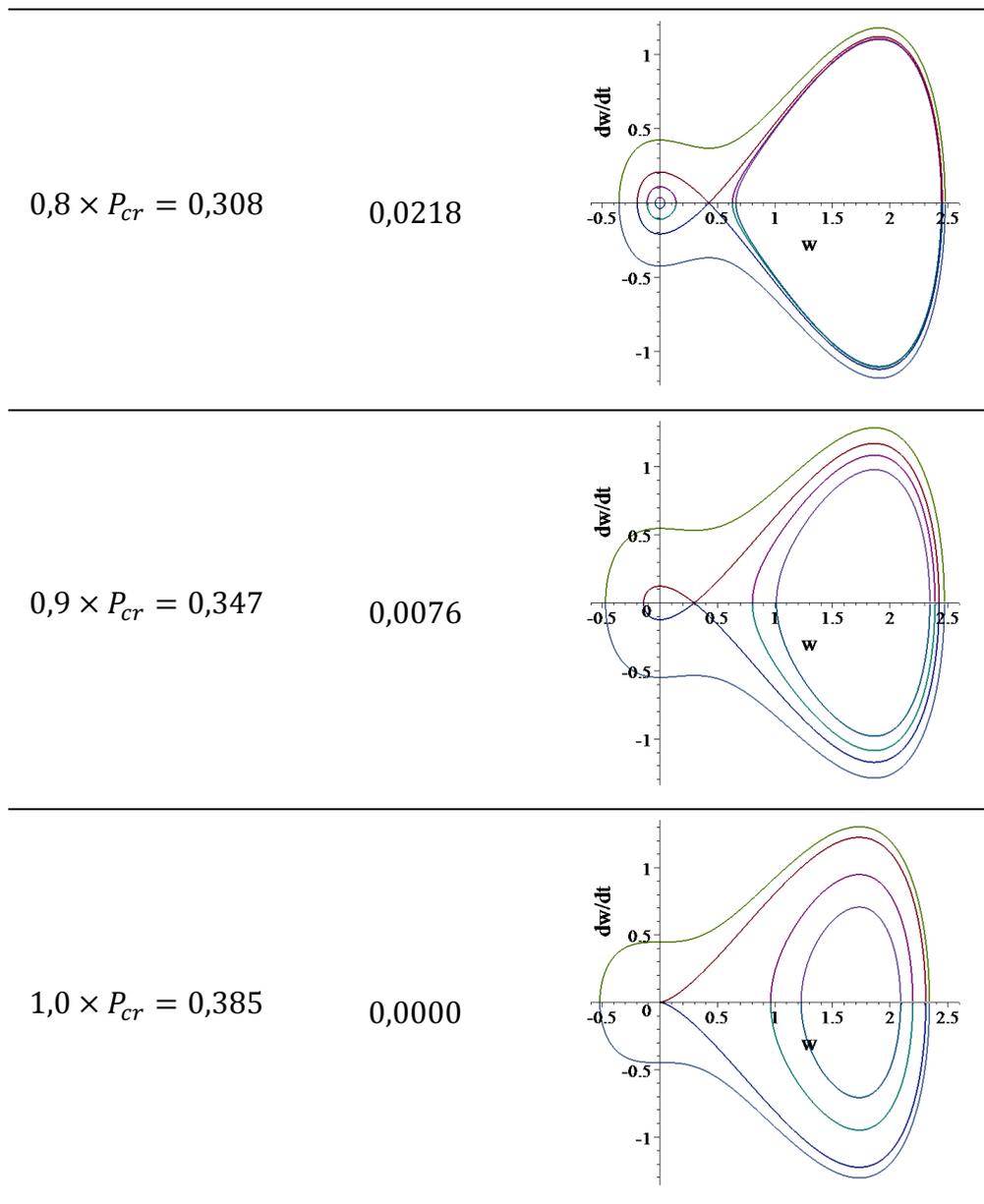
0,0618



$$0,7 \times P_{cr} = 0,270$$

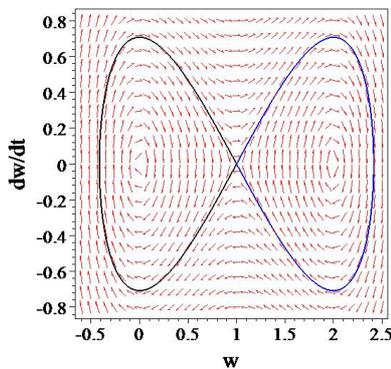
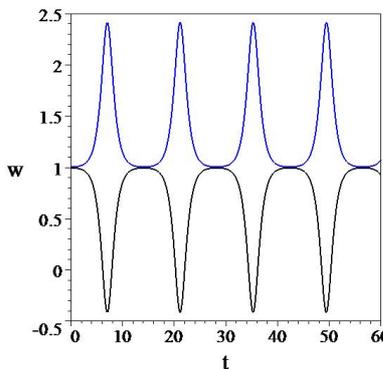
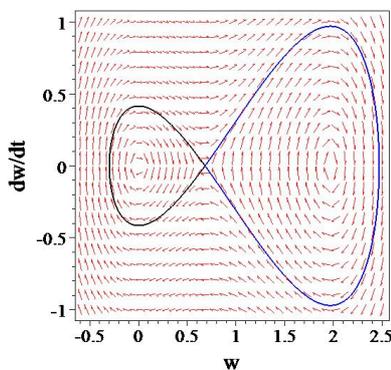
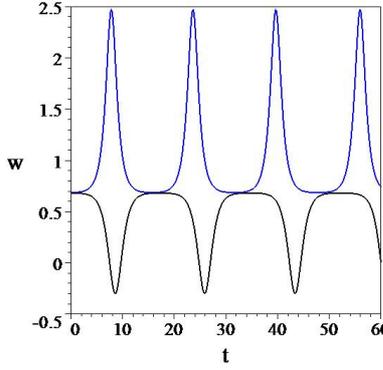
0,0400





Por fim, a Tabela 6 mostra o campo vetorial e as órbitas homoclínicas que partem do ponto de sela no plano de fase (variedades instáveis do ponto de sela), bem como suas respostas no tempo para  $\bar{P}_z = 0,0$  e  $\bar{P}_z = 0,5 \times P_{cr}$ . Estas duas órbitas homoclínicas definem, como explicado anteriormente, as fronteiras dos dois vales potenciais no espaço de fase e separam os três possíveis tipos de movimento do sistema Hamiltoniano, a saber: movimentos limitados a cada vale potencial e movimentos de grande amplitude envolvendo os dois vales potenciais.

Tabela 6 – Órbitas homoclínicas com campo vetorial e respostas no tempo para as variedades instáveis do ponto de sela.

Carga	Plano de fase	Resposta no tempo
$0,0 \times P_{cr}$ $= 0,000$ $C_{lim} = 0,2500$		
$0,5 \times P_{cr}$ $= 0,193$ $C_{lim} = 0,0863$		

### 4.2.3 Vibração livre amortecida

Considerando-se agora o sistema com amortecimento viscoso linear, tem-se da Eq. (4.13) que:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi\omega_0 w_{,\tau} + \omega_0^2 w + \alpha w^2 + \beta w^3 = 0. \quad (4.18)$$

onde  $\xi$  é o fator de amortecimento.

Nas análises de vibração livre amortecida o percentual de amortecimento aplicado foi de  $\xi = 0,01$  (1%) para caso  $\bar{P}_z = 0,0$  e  $\xi = 0,0088$  (0,88%) para o caso  $\bar{P}_z = 0,5 \times P_{cr}$ .

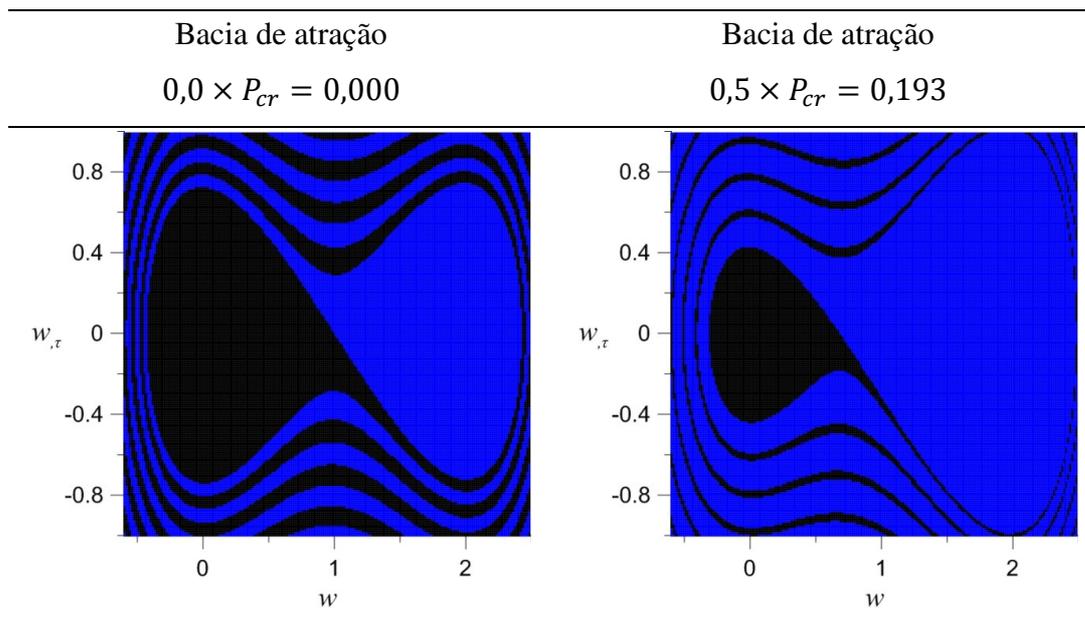
A Tabela 7 mostra o efeito do amortecimento na resposta do sistema em vibração livre para  $\bar{P}_z = 0,0$  e  $\bar{P}_z = 0,5 \times P_{cr}$ . Escolhem-se como condições iniciais as coordenadas na vizinhança do ponto de sela na direção de cada variedade instável do ponto de sela (ver campo vetorial apresentado na Tabela 6). Verifica-se que as órbitas apresentam um comportamento oscilatório de amplitude decrescente e convergem para as duas posições de equilíbrio (atratores do sistema

não conservativo). Assim mostra-se que a posição final do sistema não linear amortecido depende das condições iniciais. Na Tabela 8, se mostra duas bacias de atração para os mesmos níveis de carregamento estático e percentual de amortecimento mostrado Tabela 7, onde órbitas associadas às condições iniciais em preto convergem para a posição de equilíbrio pré-crítica, enquanto aquelas em azul convergem para a posição de equilíbrio pós-crítica. À medida que a carga estática aumenta, diminui, como esperado, a bacia de atração associada à configuração pré-crítica e, conseqüentemente, o nível de segurança da estrutura.

Tabela 7 – Órbitas homoclínicas com campo vetorial e resposta no tempo para as soluções para o sistema com amortecimento.

Carga	Plano de fase	Resposta no tempo
$0,0 \times P_{cr}$ $= 0,000$ $C_{lim} = 0,2500$		
$0,5 \times P_{cr}$ $= 0,193$ $C_{lim} = 0,0863$		

Tabela 8 – Bacias de atração das duas posições de equilíbrio estável. Vibração livre amortecida.



#### 4.2.4 Relação não linear frequência-amplitude

Para uma equação não linear com não linearidade cúbica e quadrática da forma da forma da Eq. (4.13) pode-se obter uma expressão analítica para a relação não linear frequência-amplitude utilizando métodos de perturbação (Pasquetti, 2008). Usando-se o método do balanço harmônico, pode-se aproximar a solução não linear por:

$$w(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t). \quad (4.19)$$

Assim, tem-se para a relação frequência-amplitude (Nayfeh & Mook, 1979, p. 61):

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + \frac{9\beta\omega_0^2 - 10\alpha^2}{24\omega_0^4} A_1^2 \right], \quad (4.20)$$

que corresponde ao mesmo resultado obtido pelo método de Lindstedt-Poincaré para este problema e pelo método das múltiplas escalas.

A Figura 10 apresenta a relação não linear frequência-amplitude para três níveis de carregamento estático. Observa-se que a treliça abatida apresenta uma não linearidade com perda de rigidez (*softening*) e que esta não linearidade cresce com o nível de carga estática. A perda de rigidez deve-se essencialmente ao termo quadrático na Eq. (4.24), que gera o termo negativo  $-10\alpha^2$  na Eq. (4.20). Este

comportamento terá grande influência na resposta da estrutura em vibração forçada, como mostrado no próximo capítulo.

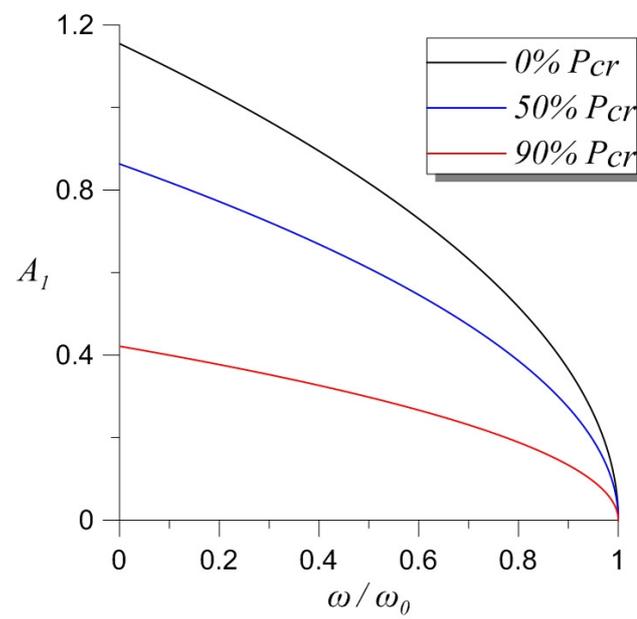


Figura 10 – Relação frequência - amplitude.