

### 3 Análise Estática

#### 3.1 Equação e caminhos de equilíbrio, cargas críticas.

Na sequência apresenta-se a análise estática para o caso mais simples, onde se considera que a treliça está livre para deslocar apenas na direção  $w$  e as componentes de deslocamento  $\bar{r}$  e  $\theta$  são nulas, ou seja, o caso axissimétrico estático. Com isso, a Eq. (2.27) reduz-se a:

$$\bar{z}(\bar{z}^2 - 1) - \bar{P}_z = 0. \quad (3.1)$$

Usando a transformação (2.28), tem-se:

$$\bar{P}_z = \bar{z}(\bar{z}^2 - 1) = w^3 - 3w^2 + 2w. \quad (3.2)$$

A Eq. (3.2) descreve o caminho não linear de equilíbrio mostrado na Figura 7, onde os trechos contínuos correspondem às configurações de equilíbrio estáveis e o trecho pontilhado a configuração instável. Observa-se o comportamento não linear típico de estruturas abatidas.

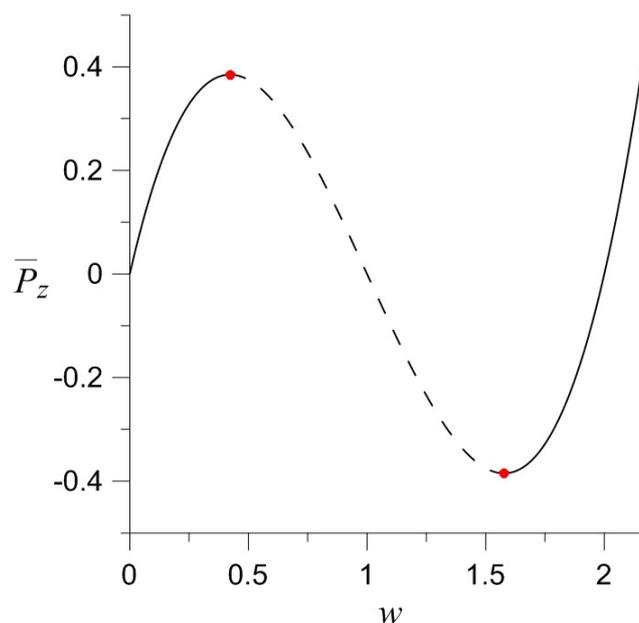


Figura 7 – Caminho não linear de equilíbrio. Carga vertical vs. deslocamento vertical.

Para o caso em que a estrutura encontra-se descarregada, ou seja, quando  $\bar{P}_z = 0$ , têm-se as seguintes posições de equilíbrio:

$$w = 0, 1, 2. \quad (3.3)$$

Como se observa na Figura 7, a treliça piramidal perde a estabilidade em um ponto limite onde, após um incremento infinitesimal da carga, a estrutura salta para uma posição de equilíbrio pós-crítica, invertendo sua concavidade. As coordenadas dos dois pontos limite são:

$$w = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0,423; 1,577. \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq. (3.4) na Eq. (3.2) obtêm-se a carga limite adimensional:

$$P_{cr} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0,385. \quad (3.5)$$

No caso de uma treliça com dimensões e módulo de elasticidade conhecidos, pode-se determinar o valor da carga limite através da equação:

$$P_{crlim} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{\omega_0^2 H n m}{2} = \pm n \frac{\sqrt{3} E A H^3}{L^3}. \quad (3.6)$$

Para uma treliça composta de  $n$  barras, o esforço normal em cada barra é dado por:

$$N = \frac{\sqrt{3} E A H^2}{9 L^2}. \quad (3.7)$$

Para que não haja flambagem local, este esforço não deve ser superior à carga crítica de Euler de uma barra bi-rotulada, ou seja:

$$N = \frac{\sqrt{3} E A H^2}{9 L^2} < \pi^2 \frac{E I_{min}}{L^2}. \quad (3.8)$$

onde  $I_{min}$  é o momento de inércia mínimo da seção.

Com isto tem-se que a altura da treliça deve obedecer a seguinte desigualdade para que não haja flambagem local:

$$H < \pi r_{min} \sqrt{3\sqrt{3}} \approx 7.16 r_{min}. \quad (3.9)$$

onde  $r_{min}$  é o raio de giração mínimo da seção transversal.

### 3.2 Análise das curvas de energia potencial

Um claro entendimento do comportamento não linear da estrutura pode ser obtido observando-se o perfil da energia potencial total da estrutura para determinados níveis de carregamento. A Tabela 1 mostra as três raízes relativas às

posições de equilíbrio para diferentes níveis de carregamento estático, sendo estes dados em porcentagens do carregamento crítico.

Tabela 1 – Posições de equilíbrio da treliça.

Carga	$w_1$	$w_2$	$w_3$
$0,0 \times P_{cr} = 0,000$	0,000	1,000	2,000
$0,1 \times P_{cr} = 0,039$	0,020	0,961	2,019
$0,2 \times P_{cr} = 0,077$	0,041	0,923	2,036
$0,3 \times P_{cr} = 0,116$	0,064	0,882	2,054
$0,4 \times P_{cr} = 0,154$	0,088	0,842	2,070
$0,5 \times P_{cr} = 0,193$	0,116	0,799	2,085
$0,6 \times P_{cr} = 0,231$	0,146	0,754	2,100
$0,7 \times P_{cr} = 0,270$	0,181	0,704	2,115
$0,8 \times P_{cr} = 0,308$	0,223	0,649	2,128
$0,9 \times P_{cr} = 0,347$	0,280	0,578	2,142
$1,0 \times P_{cr} = 0,385$	0,423	0,423	2,155

A variação da energia potencial do sistema tendo como referência uma dada posição de equilíbrio estático,  $\Delta\pi$ , é obtida através da seguinte equação diferencial.

$$\frac{d\Delta\pi}{dw} = \frac{d\pi(w + w_i)}{dw} - \frac{d\pi(w_i)}{dw} = 0. \quad (3.10)$$

Substituindo a Eq. (2.16) na Eq. (3.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\pi}{dw} = 2w + 2w_i - 3(w_i^2 + 2w_iw + w^2) + w_i^2w + 2w_iw^2 + w^3 \\ + w_i^3 + 2w_i^2w + w_iw^2 - 2w_i + 3w_i^2 - w_i^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{d\Delta\pi}{dw} = (3w_i^2 - 6w_i + 2)w + (3w_i - 3)w^2 + w^3 = 0. \quad (3.12)$$

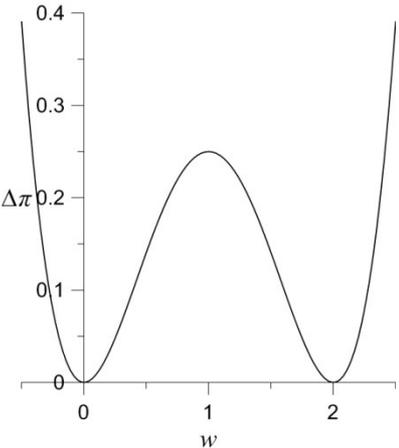
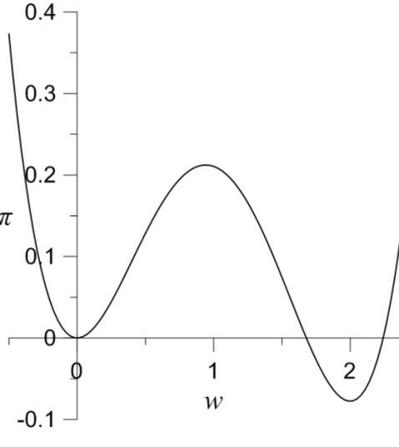
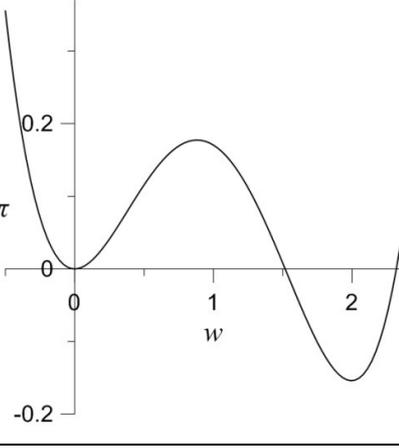
Por fim, integrando  $d\Delta\pi/dw$  tem-se para a variação de energia potencial:

$$\Delta\pi = (3w_i^2 - 6w_i + 2)\frac{w^2}{2} + (3w_i - 3)\frac{w^3}{3} + \frac{w^4}{4}. \quad (3.13)$$

A Tabela 2 mostra a variação da energia potencial com o nível de carregamento estático, tendo como origem a posição de equilíbrio pré-crítica ( $\Delta\pi = 0$ ). Para a estrutura descarregada os dois vales potenciais têm a mesma

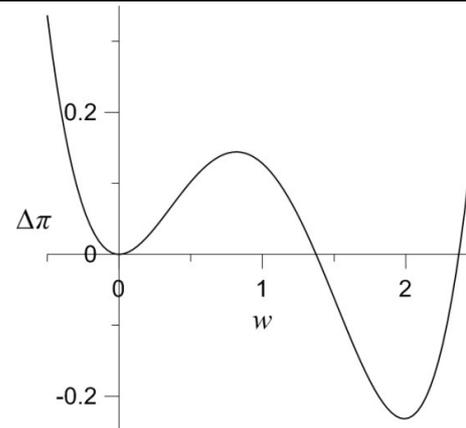
profundidade, que corresponde, portanto, à chamada carga de Maxwell. À medida que a carga compressiva aumenta, o vale relativo à posição pré-crítica diminui, indicando assim uma menor capacidade de resistir às perturbações iniciais sem que haja perda de estabilidade (escape do vale potencial). Os dois mínimos correspondem às posições de equilíbrio estável ao longo do caminho não linear de equilíbrio e o ponto máximo à posição de equilíbrio instável.

Tabela 2 – Perfis de energia potencial em função da carga estática.

Dados	Energia Potencial
$\bar{P}_z = 0,0 \times P_{cr}$ $\Delta\pi = w^2 - w^3 + \frac{w^4}{4}$	
$\bar{P}_z = 0,1 \times P_{cr}$ $\Delta\pi = 0,941w^2 - 0,980w^3 + \frac{w^4}{4}$	
$\bar{P}_z = 0,2 \times P_{cr}$ $\Delta\pi = 0,879w^2 - 0,959w^3 + \frac{w^4}{4}$	

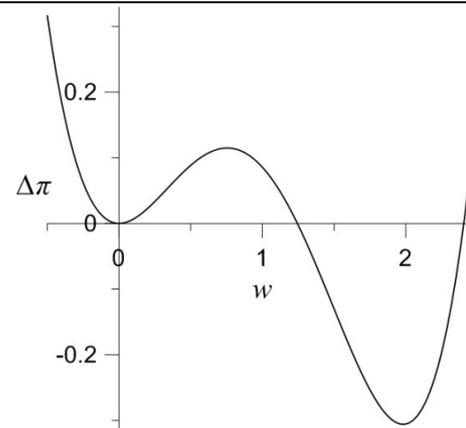
$$\bar{P}_z = 0,3 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = 0,814w^2 - 0,936w^3 + \frac{w^4}{4}$$



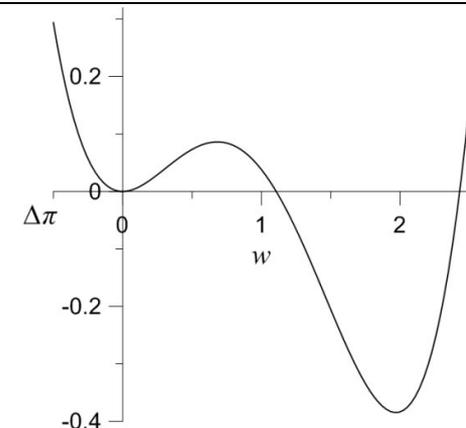
$$\bar{P}_z = 0,4 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = 0,748w^2 - 0,912w^3 + \frac{w^4}{4}$$



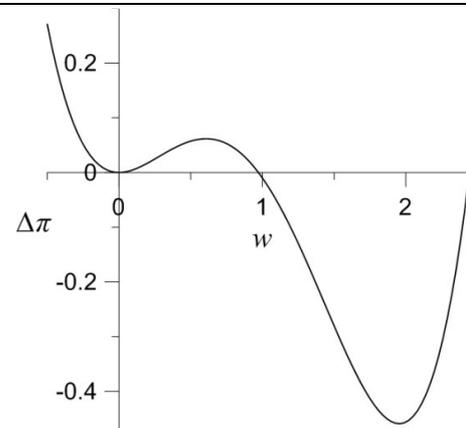
$$\bar{P}_z = 0,5 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = 0,672w^2 - 0,884w^3 + \frac{w^4}{4}$$



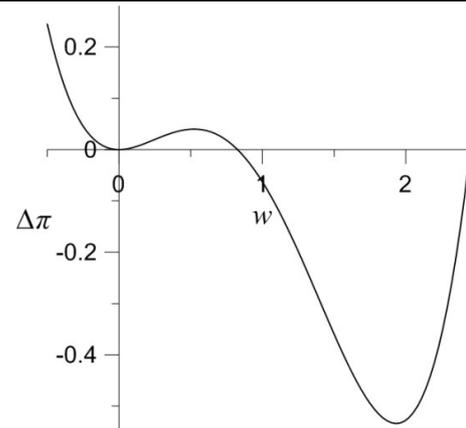
$$\bar{P}_z = 0,6 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = 0,594w^2 - 0,854w^3 + \frac{w^4}{4}$$



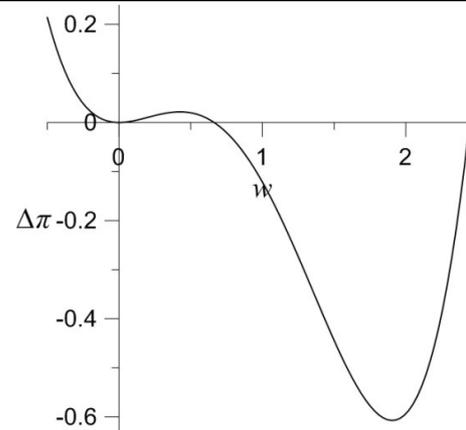
$$\bar{P}_z = 0,7 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = 0,506w^2 - 0,819w^3 + \frac{w^4}{4}$$



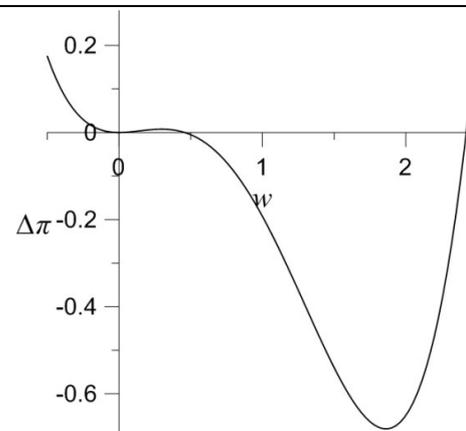
$$\bar{P}_z = 0,8 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = 0,405w^2 - 0,777w^3 + \frac{w^4}{4}$$



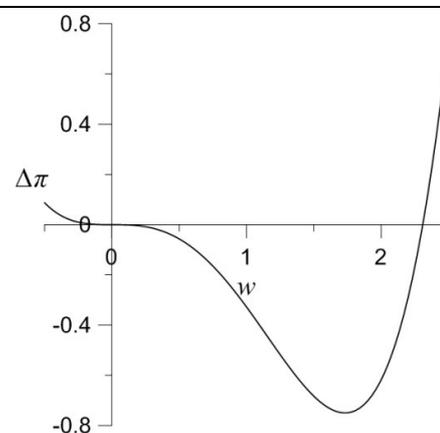
$$\bar{P}_z = 0,9 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = 0,278w^2 - 0,720w^3 + \frac{w^4}{4}$$



$$\bar{P}_z = 1,0 \times P_{cr}$$

$$\Delta\pi = -0,001w^2 - 0,577w^3 + \frac{w^4}{4}$$



### 3.3 Solução não planar em $\bar{r}$ e $w$

Agora é analisada a estabilidade da treliça sob um carregamento vertical para o caso quando a estrutura perde a simetria, ou seja, quando  $\bar{r} \neq 0$ .

As equações de movimento para  $w$  e  $\bar{r}$  são:

$$(w^3 - 3w^2 + 2w + w\bar{r}^2 - \bar{r}^2) - \bar{P}_z = 0. \quad (3.14)$$

$$\bar{r}(\bar{r}^2 + w^2 - 2w + \delta^2) = 0. \quad (3.15)$$

Estas equações descrevem o caminho não linear de equilíbrio no espaço. Para que  $\bar{r} \neq 0$ , tem-se da Eq. (3.15) que:

$$\bar{r}^2 + w^2 - 2w + \delta^2 = 0. \quad (3.16)$$

$$\bar{r}^2 = -w^2 + 2w - \delta^2. \quad (3.17)$$

$$\bar{r} = \pm\sqrt{-w^2 + 2w - \delta^2}. \quad (3.18)$$

Substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.14), obtêm-se:

$$(w^3 - 3w^2 + 2w - w^3 + 2w^2 - w\delta^2 + w^2 - 2w + \delta^2) - \bar{P}_z = 0. \quad (3.19)$$

Simplificando, tem-se que:

$$(-w\delta^2 + \delta^2) - \bar{P}_z = 0. \quad (3.20)$$

$$\bar{P}_z = -w\delta^2 + \delta^2 = \delta^2(1 - w). \quad (3.21)$$

As equações (3.18) e (3.21) correspondem, respectivamente, às projeções do caminho de equilíbrio nos planos  $\bar{r}$  versus  $w$  e  $\bar{P}_z$  versus  $w$ . Observa-se que as duas equações são função do parâmetro geométrico  $\delta = B/H$  que mede o grau de abatimento da estrutura. Na Tabela 3 mostram-se, além do caminho fundamental de equilíbrio, as projeções do caminho de equilíbrio nos planos  $\bar{P}_z$  versus  $w$  e  $\bar{r}$  versus  $w$  para valores crescentes do parâmetro  $\delta = B/H$ . Verifica-se que a solução descrita pelas equações (3.14) e (3.15) corresponde a uma elipse no espaço cujos extremos coincidem com o caminho fundamental de equilíbrio. Nestes dois pontos a configuração simétrica se torna instável, e a treliça perde a estabilidade através de uma bifurcação simétrica instável. Assim tem-se que as equações (3.14) e (3.15) descrevem um caminho pós-crítico instável. Novamente, tem-se que no ponto crítico a estrutura salta para uma posição de equilíbrio com concavidade invertida. À medida que  $\delta$  cresce, a carga de bifurcação cresce, se aproximando da carga limite. Para  $\delta = 0,8$  o ponto de bifurcação coincide com o ponto limite. Para  $\delta > 0,8$ , a bifurcação passa a ocorrer ao longo do trecho instável do caminho não linear de equilíbrio, não influenciando a capacidade de

carga da estrutura. Para  $\delta > 1$  ( $H < B$ ), a solução não simétrica deixa de existir. Tem-se, portanto, que para treliças abatidas perfeitas ( $H \ll B$ ), o comportamento da estrutura sob carga vertical é essencialmente simétrico, o que justifica a presente abordagem.

Tabela 3 – Comportamento pós-crítico da treliça em função de  $\delta$ .

