2
Formulação

Considera-se uma treliça espacial de forma piramidal com n barras iguais, com $n \geq 3$, dispostas conforme ilustra a Figura 5. Na configuração inicial indeformada, a altura da pirâmide é dada por H e o raio do círculo que circunscreve os pontos da base é dado por B. O nó central encontra-se no topo e as n barras que definem os lados da pirâmide são igualmente espaçadas de modo que os nós da base formem um polígono regular de n vértices circunscritos pelo círculo de raio B.

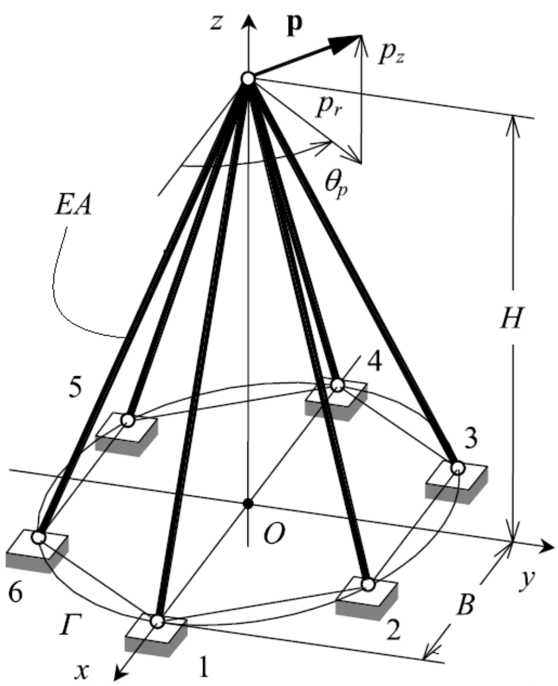

Figura 5 – Treliça piramidal com *n* barras na configuração indeformada.

Assim, o comprimento de cada barra da treliça é:

$$L = \sqrt{H^2 + B^2}. \tag{2.1}$$

Admite-se que o nó superior esteja sujeito a uma carga de intensidade $\lambda \boldsymbol{q}$, onde λ é um fator de carga que multiplica um vetor de carga de referência $\boldsymbol{q}$, a saber:

$$\boldsymbol{P} = \lambda\, \boldsymbol{q} = \lambda\left[p_x, p_y, p_z\right]^T = \lambda\left[p_r cos\theta_p, p_r sen\theta_p, p_z\right]^T, \tag{2.2}$$

onde T representa transposto.

Por definição, na treliça em questão, o nó superior encontra-se livre para deslocar e os nós localizados na base estão fixos, ou seja, suas posições permanecem as mesmas após a aplicação do carregamento, conforme mostra a Figura 6.

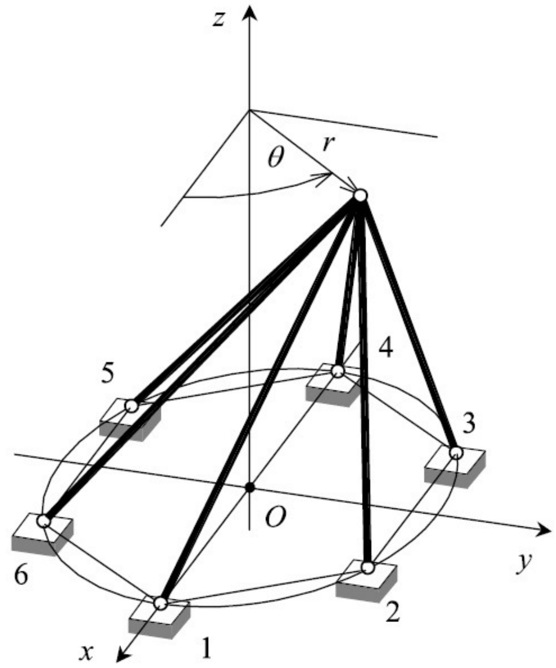

Figura 6 – Treliça piramidal com *n* barras na configuração deformada.

Na presente formulação é considerado o sistema de coordenadas Cartesiano $\{O, x, y, z\}$, assim como um sistema de coordenadas cilíndrico $\{O, r, \theta, z\}$, os quais estão relacionados por:

$$[r, \theta, z]^T = \left[\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left({}^{y}/_{x}\right), z\right]^T. \tag{2.3}$$

Desta forma, na configuração indeformada da treliça, tem-se para o nó superior as seguintes coordenadas:

$$\boldsymbol{X}_s = [X, Y, Z]^T = [0{,}0, H]^T. \tag{2.4}$$

Já para os nós da base, na configuração indeformada da treliça, as coordenadas são dadas por:

$$\boldsymbol{X}_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T = [Bcos\theta_i, Bsen\theta_i, 0]^T, i = 1{,}2, \dots, n, \tag{2.5}$$

onde:

$$\theta_i = 2\pi \frac{i-1}{n}, i = 1{,}2, \dots, n. \tag{2.6}$$

Após a aplicação da carga no nó superior, analisando a configuração deformada da treliça, Figura 6, tem-se que os nós da base, por estarem fixos, permanecem com as mesmas coordenadas, ou seja:

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{X}_i, i = 1,2, \dots, n. \tag{2.7}$$

Já o nó superior, este livre para deslocar, assume a seguinte posição:

$$\boldsymbol{x}_s = [x, y, z]^T = [rcos\theta, rsen\theta, z]^T = \boldsymbol{X}_s + \boldsymbol{u}. \tag{2.8}$$

Com isso, tem-se, pela diferença entre as posições final e inicial do nó superior, o vetor deslocamento:

$$\boldsymbol{u} = [u, v, w]^T = \boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{X}_s = [rcos\theta, rsen\theta, z - H]^T. \tag{2.9}$$

As coordenadas cilíndricas r, θ e z são, aqui, tomadas como as coordenadas Lagrangianas do sistema.

Como medida de deformação e tensão nas barras, adota-se, para facilitar a análise, o tensor de Green-Lagrange e o segundo tensor de Piola-Kirchhoff para as tensões. Portanto, a deformação específica axial de cada barra é dada por:

$$\varepsilon_i = \frac{l_i^2 - L^2}{L^2}, i = 1,2, \dots, n, \tag{2.10}$$

onde l_i, comprimento final da barra, é dado por:

$$l_i^2 = (\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_i)^T(\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_i) = r^2 - 2rBcos(\theta - \theta_i) + B^2 + z^2, i = 1,2, \dots, n. \tag{2.11}$$

Assim, considerando-se que o material da barra é elástico e linear, tem-se que a tensão normal é:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n, \tag{2.12}$$

e a energia interna de deformação é:

$$W_i = \frac{1}{2}EAL\varepsilon_i^2, i = 1,2, \dots, n. \tag{2.13}$$

A energia interna de deformação do sistema é obtida através da soma das contribuições de cada barra da treliça. Então, considerando-se que todas as barras tem a mesma rigidez de membrana EA, tem-se:

$$\begin{aligned} W(r, \theta, z) &= \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{2}EAL\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \frac{nEA}{8L^3}[(r^2 + z^2 - H^2)^2 + 2B^2r^2] \\ &= W(r, z). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Observa-se que a Eq. (2.14) independe de θ. Isto se deve à simetria da estrutura.

Já a energia potencial gravitacional devida ao carregamento é dada por:

$$V(\lambda; r, \theta, z) = -\lambda\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{u} = -\lambda\left(p_x rcos\theta + p_y rsen\theta + p_z z\right) + \lambda p_z H. \tag{2.15}$$

Assim, com as parcelas de energia interna de deformação e do carregamento tem-se a energia potencial total da treliça:

$$\Pi(\lambda; r, \theta, z) = W(r, \theta, z) + V(\lambda; r, \theta, z). \tag{2.16}$$

Considerando, agora, que cada barra da treliça tem uma massa total m e que esta massa está concentrada nos nós da treliça ($m/2$ em cada nó), tem-se que a massa total correspondente ao nó superior é igual a ($nm/2$). Portanto, a contribuição das barras da treliça para energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{nm}{4}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \tag{2.17}$$

onde:

$$\dot{x} = \dot{r}\,cos\,\theta - r\,sen\,\theta\;\dot{\theta},\ \dot{y} = \dot{r}\,sen\,\theta + r\,cos\,\theta\;\dot{\theta},\ \dot{z} = \dot{z}, \tag{2.18}$$

obtendo-se:

$$T = \frac{n\,m}{4}\left[\left(\dot{r}\,cos\,\theta - r\,sen\,\theta\;\dot{\theta}\right)^2 + \left(\dot{r}\,sen\,\theta + r\,cos\,\theta\;\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2\right], \tag{2.19}$$

$$T = \frac{n\,m}{4}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{2.20}$$

Enfim, em posse das parcelas de energia potencial total e energia cinética, é possível escrever as equações de movimento para as três direções do sistema cilíndrico. A seguir apresenta-se o processo de obtenção e adimensionalização das equações nas direções r, θ e z.

2.1 Equações de movimento

As equações de movimento em termos da coordenada generalizada q_i são obtidas através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T)}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(T)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\Pi)}{\partial q_i} = Q. \tag{2.21}$$

Derivando os termos da equação em relação à coordenada r, tem-se:

$$\frac{n\,m}{2}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \frac{nEA}{2L^3}r(r^2 + z^2 - H^2 + B^2) - \boldsymbol{\lambda} p_r cos\left(\theta - \theta_p\right) = Q. \tag{2.22}$$

Derivando os termos da equação em relação à coordenada θ, tem-se:

$$\frac{nm}{2}\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right) + r\boldsymbol{\lambda} p_r sen\left(\theta - \theta_p\right) = Q. \tag{2.23}$$

Por fim, derivando os termos da equação em relação à coordenada z, tem-se:

$$\frac{nm}{2}\ddot{z} + \frac{nEA}{2L^3}z(r^2 + z^2 - H^2) - \lambda p_z = Q. \tag{2.24}$$

Adotando-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\bar{z} = {}^{z}\!/_{H},\ \bar{r} = {}^{r}\!/_{H},\ \delta = {}^{B}\!/_{H},\ \omega_0^2 = \frac{EAH^2}{mL^3},\ \tau = \omega_0 t,\ \bar{P}_r = \frac{2\lambda p_r}{\omega_0^2 Hnm},$$

$$\bar{Q}_r = \frac{2Q}{\omega_0^2 Hnm}, \bar{P}_\theta = \frac{2\lambda p_r}{\omega_0^2 \bar{r} Hnm}, \bar{Q}_\theta = \frac{2Q}{\omega_0^2 \bar{r}^2 H^2 nm}, \bar{P}_z = \frac{2\lambda p_z}{\omega_0^2 Hnm} \text{ e } \bar{Q}_z = \frac{2Q}{\omega_0^2 Hnm},$$

obtêm-se o sistema de equações de movimento na forma adimensional:

$$\bar{r}_{,\tau\tau} - \bar{r}\theta_{,\tau} + \bar{r}(\bar{r}^2 + \bar{z}^2 - 1 + \delta^2) - \bar{P}_r cos(\theta - \theta_p) = \bar{Q}_r. \quad (2.25)$$

$$\theta_{,\tau\tau} + \frac{2\bar{r}_{,\tau}}{\bar{r}}\theta_{,\tau} + \bar{P}_\theta sen(\theta - \theta_p) = \bar{Q}_\theta. \quad (2.26)$$

$$\bar{z}_{,\tau\tau} + \bar{z}(\bar{r}^2 + \bar{z}^2 - 1) - \bar{P}_z = \bar{Q}_z. \quad (2.27)$$

Por fim muda-se a origem do sistema para o nó superior da treliça e considera-se o deslocamento positivo para baixo, facilitando a análise e interpretação dos resultados, adotando a relação:

$$\bar{z} = w - 1. \quad (2.28)$$

Abaixo são mostradas as equações de movimento não lineares com a transformação realizada na Eq. (2.28):

$$\bar{r}_{,\tau\tau} - \bar{r}\theta_{,\tau} + \bar{r}(\bar{r}^2 + w^2 - 2w + \delta^2) - \bar{P}_r cos(\theta - \theta_p) = \bar{Q}_r. \quad (2.29)$$

$$\theta_{,\tau\tau} + \frac{2\bar{r}_{,\tau}}{\bar{r}}\theta_{,\tau} + \bar{P}_\theta sen(\theta - \theta_p) = \bar{Q}_\theta. \quad (2.30)$$

$$w_{,\tau\tau} + (w^3 - 3w^2 + 2w + w\bar{r}^2 - \bar{r}^2) - \bar{P}_z = \bar{Q}_z. \quad (2.31)$$

As equações de movimento acima têm como referência a configuração original indeformada do sistema. Para transferir a origem para uma posição de equilíbrio, calcula-se para um dado nível de carregamento estático as três raízes w_i relativas às duas posições de equilíbrio estável e a uma posição de equilíbrio instável, a menor raiz corresponde à posição de equilíbrio pré-crítica cuja estabilidade se deseja preservar.

Desta forma, para que as equações de movimento tenham como origem uma dada posição de equilíbrio w_i, faz-se a transferência da origem para um ponto i, ou seja:

$$w_T = w(t) + w_i. \quad (2.32)$$

Então, substituindo a Eq. (2.32) nas equações de movimento, tem-se:

$$\bar{r}_{,\tau\tau} - \bar{r}\theta_{,\tau} + \bar{r}(\bar{r}^2 + w_i{}^2 + 2w_i w + w^2 - 2w_i - 2w + \delta^2) - \bar{P}_r cos(\theta - \theta_p) = \bar{Q}_r. \quad (2.33)$$

$$\theta_{,\tau\tau} + \frac{2\bar{r}_{,\tau}}{\bar{r}}\theta_{,\tau} + \bar{P}_\theta sen(\theta - \theta_p) = \bar{Q}_\theta. \quad (2.34)$$

$$w_{,\tau\tau} + w(3w_i^2 - 6w_i + 2 + \bar{r}^2) + w^2(3w_i - 3) + w^3 = \bar{Q}_z. \quad (2.35)$$