



**Carlos Henrique Lima de Castro**

**Vibrações não lineares e estabilidade  
de treliças piramidais abatidas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves  
Co-Orientador: Dr. Diego Orlando

Rio de Janeiro  
Setembro de 2014



**Carlos Henrique Lima de Castro**

**Vibrações não lineares e estabilidade  
de treliças piramidais abatidas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paulo Gonçalves Batista**

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

**Dr. Diego Orlando**

Co-Orientador

ENGEVIX

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

**Prof. Carlos Magluta**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de setembro de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Carlos Henrique Lima de Castro**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (UFPA), em Belém - Pará - Brasil, em 2012.

#### Ficha Catalográfica

Castro, Carlos Henrique Lima de

Vibrações não lineares e estabilidade de treliças piramidais abatidas / Carlos Henrique Lima de Castro ; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; co-orientador: Diego Orlando – 2014.

92 f. il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2014.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Treliças espaciais. 3. Estabilidade. 4. Vibrações não lineares. 5. Treliças piramidais. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Orlando, Diego. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

A minha avó, pelo apoio incondicional  
na realização deste sonho.

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pela concessão da vida e por toda sua bondade.

Ao professor, Paulo Batista Gonçalves, pelo apoio, paciência e compreensão a mim dedicados durante a realização deste trabalho.

Ao Diego Orlando, por sua disponibilidade e ajuda essenciais no decorrer de toda a pesquisa.

Aos professores que participaram da banca avaliadora.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, pela entrega e dedicação na missão de repassar o conhecimento.

Aos meus pais, pelo amor e confiança em mim depositados, em especial ao meu pai, Marcos Castro, por se fazer presente mesmo nas ausências e por sempre me apoiar e me incentivar na busca pelos meus objetivos.

Aos meus irmãos, Aline Castro, Deborah Castro e Lourival Neto, pela amizade e parceria de sempre.

À minha família, base sólida onde encontrei e encontro apoio para seguir adiante, em especial à minha avó, Mirian Castro, que partiu antes da conclusão deste trabalho, mas foi um suporte indispensável durante todo o período longe de casa.

Aos amigos e colegas de curso, por demonstrarem companheirismo e amizade ao

enfrentarem as mesmas dificuldades que eu.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

Enfim, a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram na realização de trabalho.

## Resumo

Castro, Carlos Henrique Lima de; Gonçalves, Paulo Batista; Orlando, Diego. **Vibrações Não Lineares e Estabilidade de Treliças Piramidais Abatidas**. Rio de Janeiro, 2014. 92p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Treliças espaciais de forma piramidal são um componente básico de diversas estruturas, incluindo desde nanoestruturas de carbono até domos geodésicos para cobertura de grandes espaços. Estas estruturas, tal como a treliça plana de von Mises, apresentam uma resposta altamente não linear na presença de cargas estáticas e dinâmicas. A não linearidade é particularmente significativa, mesmo para baixos níveis de carregamento, quando estas estruturas são abatidas. Neste trabalho apresenta-se uma formulação não linear exata para uma treliça piramidal composta de  $n$  barras e, a partir desta formulação, analisa-se a perda de estabilidade e vibrações não lineares destas estruturas sob cargas estáticas e dinâmicas. Para compreensão do comportamento não linear são usadas respostas no tempo e planos de fase, diagramas de bifurcação, perfis de energia e bacias de atração. Os resultados mostram a importância da não linearidade na dinâmica e estabilidade da estrutura.

## Palavras-chave

Treliças espaciais; Estabilidade; Vibrações Não Lineares; Treliças piramidais.

## Abstract

Castro, Carlos Henrique Lima de; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Orlando, Diego (Co-Advisor). **Nonlinear Vibrations and Stability of Shallow Pyramidal Trusses**. Rio de Janeiro, 2014. 92p. M.Sc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Spatial trusses in the form of a regular pyramid are a basic configuration of many structures, from carbon nanostructures to geodesic domes used as roof of large spaces. These structures, as the planar von Mises truss, present a highly nonlinear response when submitted to static and dynamic loads. The nonlinearity is particularly significant when these structures are shallow, even when low load levels are applied. This paper presents a exact nonlinear formulation for a pyramidal truss made of  $n$  equal bars and analyze the loss of stability and nonlinear vibrations of the structure under static and dynamic loads. To understand to nonlinear behavior of the pyramidal truss, time responses, phase planes, bifurcation diagrams, energy profiles and basins of attraction are used. The results show the importance of the nonlinearity in the dynamics and stability of the structure.

## Keywords

Spatial trusses; Elastic stability; Nonlinear vibrations; Pyramidal trusses.



## Sumário

1	Introdução	16
1.1	Considerações gerais	16
1.2	Revisão bibliográfica	20
1.3	Objetivos	22
1.4	Escopo do trabalho	23
2	Formulação	24
2.1	Equações de movimento	27
3	Análise Estática	29
3.1	Equação e caminhos de equilíbrio, cargas críticas.	29
3.2	Análise das curvas de energia potencial	30
3.3	Solução não planar em $\bar{r}$ e $w$	35
4	Vibração Livre	39
4.1	Equações de movimento linearizadas	39
4.2	Análise não linear em vibração livre - caso axissimétrico	40
4.2.1	Relação frequência-carregamento	40
4.2.2	Soluções não lineares no plano de fase e resposta no tempo	42
4.2.3	Vibração livre amortecida	46
4.2.4	Relação não linear frequência-amplitude	48
5	Vibração Forçada	50
5.1	Equações de movimento com carga harmônica	50
5.2	Análise das bifurcações em função da frequência de excitação	50
5.3	Análise das bifurcações em função da magnitude de excitação	63
5.4	Análise das bacias de atração e soluções coexistentes	71
6	Conclusões e Sugestões	84
6.1	Conclusões	84
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	86

Referências Bibliográficas 87

Apêndice 91

## Lista de figuras

Figura 1 – Estruturas com subestrutura básica na forma de treliça piramidal abatida.	17
Figura 2 – Placa sanduiche com treliça piramidal.	18
Figura 3 – Treliças piramidais invertidas usadas como apoios de estruturas de grande porte.	19
Figura 4 – Instabilidade por <i>snap-through</i> – Auditório da faculdade C.W. Post.	19
Figura 5 – Treliça piramidal com $n$ barras na configuração indeformada.	24
Figura 6 – Treliça piramidal com $n$ barras na configuração deformada.	25
Figura 7 – Caminho não linear de equilíbrio. Carga vertical vs. deslocamento vertical.	29
Figura 8 – Variação da frequência mínima com o nível de carga estática. Carga vertical vs. frequência natural mínima.	41
Figura 9 – Variação da frequência mínima ao quadrado com o nível de carga estática. Carga vertical vs. frequência natural mínima ao quadrado.	41
Figura 10 – Relação frequência - amplitude.	49
Figura 11 – Projeções no plano de fase das cinco órbitas periódicas coexistentes para $Pz = 0,0$ , $\Omega = 0,6$ e $F = 0,150$ .	79
Figura 12 – Projeções no plano de fase das quatro órbitas periódicas coexistentes para $Pz = 0,5 \times Pcr$ , $\Omega = 1,0$ e $F = 0,030$ .	82
Figura 13 – Fronteira de estabilidade para o caso sem carregamento estático. $0,0 \times Pcr = 0,000$ .	83
Figura 14 – Fronteira de estabilidade para o caso com 50% de carregamento estático. $0,5 \times Pcr = 0,193$ .	83

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Posições de equilíbrio da treliça.	31
Tabela 2 – Perfis de energia potencial em função da carga estática.	32
Tabela 3 – Comportamento pós-crítico da treliça em função de $\delta$ .	36
Tabela 4 – Variação da frequência natural mínima com o nível de carregamento estático.	40
Tabela 5 – Curvas de nível de igual energia para níveis crescentes de carregamento estático e energia associada ao ponto de sela, $C_{lim}$ .	43
Tabela 6 – Órbitas homoclínicas com campo vetorial e respostas no tempo para as variedades instáveis do ponto de sela.	46
Tabela 7 – Órbitas homoclínicas com campo vetorial e resposta no tempo para as soluções para o sistema com amortecimento.	47
Tabela 8 – Bacias de atração das duas posições de equilíbrio estável. Vibração livre amortecida.	48
Tabela 9 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, $\Omega$ , tendo como parâmetro de controle a magnitude da força de excitação, $F$ , através dos métodos da força bruta e continuação. Estrutura sem carregamento estático - $0,0 \times P_{cr} = 0,000$ .	53
Tabela 10 – Planos de fase e seções de Poincaré para $\Omega = 1.4$ e valores selecionados de $F$ . $P_z = 0,0$ .	56
Tabela 11 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, $\Omega$ , tendo como parâmetro de controle a magnitude da força de excitação, $F$ , através dos métodos da força bruta e continuação. Estrutura com carregamento estático - $0,5 \times P_{cr} = 0,193$ .	58
Tabela 12 – Planos de fase e seções de Poincaré para $\Omega = 1.4$ e valores selecionados de $F$ . $P_z = 0,5 \times P_{cr}$ .	62
Tabela 13 – Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência da excitação, $\Omega$ , para valores selecionados da magnitude da excitação, $F$ . Método da força bruta.	64
Tabela 14 – Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a	

frequência da excitação,  $\Omega$ , para valores selecionados da magnitude da excitação,  $F$ . Método da continuação. 68

Tabela 15 – Bacias de atração para  $Pz = 0,0$  e valores selecionados da magnitude da excitação,  $F$ , e da frequência da excitação,  $\Omega$ . 72

Tabela 16 – Bacias de atração para  $Pz = 0,5 \times Pcr$  e valores selecionados da magnitude da excitação,  $F$ , e da frequência da excitação,  $\Omega$ . 73

Tabela 17 – Bacias de atração para  $\Omega = 0,6$  e valores crescentes da magnitude da excitação,  $F$ .  $Pz = 0,0 \times Pcr = 0,000$ . 77

Tabela 18 – Bacias de atração para  $\Omega = 1,0$  e valores crescentes da magnitude da excitação,  $F$ .  $Pz = 0,5 \times Pcr = 0,193$ . 80

## Lista de símbolos

$n$ ,	número de barras da treliça;
$H$ ,	altura da treliça;
$B$ ,	raio do círculo que circunscreve os pontos da base;
$L$ ,	comprimento de cada barra da treliça;
$\mathbf{P}$ ,	vetor de carregamento;
$\mathbf{X}_S$ ,	coordenadas para o nó superior da treliça, na configuração indeformada;
$\mathbf{X}_i$ ,	coordenadas para os nós da base da treliça, na configuração indeformada;
$\mathbf{x}_S$ ,	coordenadas para o nó superior da treliça, na configuração deformada;
$\mathbf{x}_i$ ,	coordenadas para os nós da base da treliça, na configuração deformada;
$\mathbf{u}$ ,	vetor deslocamento do nó superior da treliça;
$\varepsilon_i$ ,	deformação específica axial de cada barra da treliça;
$\sigma_i$ ,	tensão normal de cada barra da treliça;
$W$ ,	energia interna de deformação;
$V$ ,	energia potencial gravitacional devida ao carregamento;
$\Pi$ ,	energia potencial total da treliça;
$T$ ,	energia cinética da treliça;
$\bar{r}$ ,	deslocamento na direção $r$ do sistema cilíndrico;
$\theta$ ,	deslocamento na direção $\theta$ do sistema cilíndrico;
$w$ ,	deslocamento na direção $z$ do sistema cilíndrico;
$w_{,\tau}$ ,	velocidade na direção $z$ do sistema cilíndrico;
$w_i$ ,	raízes relativas às duas posições de equilíbrio estável e a posição de equilíbrio instável;
$\bar{P}_z$ ,	carregamento estático aplicado à treliça;
$P_{cr}$ ,	carregamento crítico adimensional;
$P_{crlim}$ ,	carregamento crítico dimensional;
$N$ ,	esforço normal em cada barra da treliça;

$\Delta\pi,$	variação da energia potencial do sistema;
$\delta,$	grau de abatimento da estrutura;
$\omega_{\bar{r}},$	frequência natural na direção $\bar{r}$ ;
$\omega_{\theta},$	frequência natural na direção $\theta$ ;
$\omega_w,$	frequência natural na direção $w$ ;
$\omega_0,$	frequência natural mínima;
$C,$	constante que representa a energia do sistema para um dado par de condições iniciais;
$C_{lim},$	energia do ponto de sela de onde partem as duas órbitas homoclínicas que delimitam os dois vales potenciais;
$\xi,$	fator de amortecimento;
$\bar{Q}_z,$	carga harmônica vertical;
$F,$	magnitude da carga harmônica vertical;
$\Omega,$	frequência da carga harmônica vertical.