

5 Análise Dinâmica da Estabilidade

Neste capítulo é analisado o comportamento dinâmico não-linear da torre estaiada, considerando os modelos apresentados nos capítulos anteriores. Especial atenção é dada ao estudo paramétrico das freqüências naturais e à correlação entre o comportamento dinâmico não-linear e a energia do sistema. Como se sabe [16, 17], a existência de múltiplas posições de equilíbrio para um dado nível de carregamento estático, sempre presente nas estruturas, pode acarretar uma grande complexidade no comportamento dinâmico, dando origem a diversos tipos de oscilações não-lineares e bifurcações. Esta análise é feita no domínio do tempo.

5.1. Critério dinâmico da estabilidade

O critério dinâmico da estabilidade diz que uma estrutura, só está em um estado de equilíbrio estável se suas freqüências naturais de vibração forem todas reais [13].

Para se calcular a freqüência natural de vibração é necessário obter a equação de movimento. A equação de movimento pode ser obtida a partir da função de Lagrange ou Lagrangiano, que é dado pela diferença entre a variação de energia cinética e a variação de energia potencial total, a saber

$$L = \Delta T - \Delta p \quad (5.1)$$

5.2. Energia Cinética

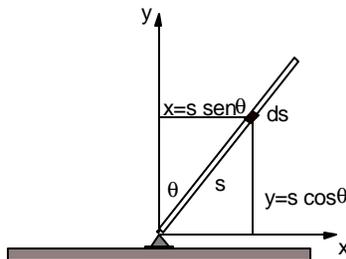


Figura 5.1: Posição de um elemento da barra de comprimento infinitesimal, ds .

A massa de um elemento infinitesimal da coluna de comprimento ds é dada por

$$dm = r dV = r A ds \quad (5.2)$$

onde r é a densidade do material e A é área da seção transversal da coluna.

A energia cinética é dada por:

$$\Delta T = \frac{r}{2} \int_0^L v^2 A ds \quad (5.3)$$

onde L é o comprimento da coluna e v a velocidade.

Inicialmente é necessário determinar a posição do elemento infinitesimal de massa dm e comprimento ds segundo as direções x e y . Conforme a Figura 5.1, tem-se que:

$$x = s \operatorname{sen} q \quad (5.4)$$

$$y = s \operatorname{cos} q \quad (5.5)$$

onde s é a distância do ponto à base da torre e q a rotação da coluna que, neste caso, é uma função do tempo.

Derivando as equações 5.4 e 5.5 em relação ao tempo, obtêm-se as componentes do vetor velocidade nas direções x e y ($\vec{v} = (dx/dt)\vec{i} + (dy/dt)\vec{j}$), ou seja

$$\vec{v} = s \operatorname{cos} q \dot{q} \vec{i} - s \operatorname{sen} q \dot{q} \vec{j} \quad (5.6)$$

Inserindo (5.6) em (5.2) e integrando ao longo de s chega-se à seguinte expressão que descreve a energia cinética para uma coluna de seção transversal constante.

$$\Delta T = \frac{1}{6} r A L^3 \dot{q}^2 \quad (5.7)$$

sendo que L na equação (5.7) refere-se ao comprimento da barra.

5.3. Equação do movimento

A energia potencial total é obtida a partir das parcelas de energia interna de deformação e do potencial das cargas externas dadas nos Capítulos 3 e 4 para cada modelo aqui estudado. De posse da energia potencial total e da energia cinética, obtêm-se o Lagrangiano (equação 5.1).

Aplicando o princípio de Hamilton, chega-se à equação de movimento. Se o sistema for conservativo, a equação de movimento é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (5.8)$$

Para um sistema conservativo, tem-se, pelo princípio da conservação da energia, que a soma da energia cinética com a energia potencial total do sistema é uma constante, ou seja

$$\Delta T + \Delta p = C \quad (5.9)$$

onde C depende apenas das condições iniciais do sistema, ou seja, o deslocamento inicial, $q(0)$, e da velocidade inicial, $\dot{q}(0)$, da torre.

No caso de um sistema com amortecimento, apenas uma parcela da energia cinética é transformada em energia potencial e vice-versa, o restante é dissipado pelo amortecimento. Para sistemas não conservativos, a equação de movimento é obtida igualando a equação (5.8) à força de amortecimento, ao invés de igualá-la a zero. Para amortecimento do tipo viscoso e proporcional à velocidade, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = c\dot{q} \quad (5.10)$$

A seguir apresenta-se a equação de movimento para os quatro modelos apresentados nos capítulos anteriores, considerando o modelo imperfeito.

5.3.1. Modelo de molas

A equação que descreve o movimento da barra quando a mesma está conectada a molas é dada por

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + \frac{d\Delta p}{dq} = 0 \quad (5.11)$$

onde a massa m é dada por

$$m = \frac{\rho A L^3}{3} \quad (5.12)$$

5.3.2. Modelo de cabos

No caso de um modelo de cabos, chega-se à equação de movimento

$$\frac{1}{3} mL\ddot{q} + c\dot{q} + \sum_{i=1}^{nc/2} g_i T_{x_i}(q) \cos q - \sum_{i=nc/2+1}^{nc} g_i T_{x_i}(q) \cos q - \sum_{i=1}^{nc} g_i T_{y_i}(q) \sin q = \sum_{i=1}^{np} P_i \Gamma_i (\sin q + e_i \cos q) + p \sin q + \frac{L \cos q}{2} q(t) \quad (5.13)$$

Em cada uma das equações de movimento, o termo que multiplica \ddot{q} é a massa equivalente e os termos que estão em função de q , quando somados, resultam em uma força. Estas equações podem ser escritas na forma

$$m_{eq}\ddot{q} + c\dot{q} + f(q) = \frac{L\cos q}{2} q(t) \quad (5.14)$$

Onde $f(q)$ é a força elástica, função da rigidez e da rotação, q , da barra.

5.4. Frequência natural

Retirando o carregamento externo da equação, (5.14) tem-se o sistema autônomo que permite o estudo da vibração livre. Na dinâmica, a frequência circular natural de vibração é dada pela raiz quadrada da rigidez equivalente dividida pela massa equivalente, conforme a equação

$$w = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad (5.15)$$

Para obter a frequência circular natural, ω , é necessário tomar a parcela linear da força $f(q)$ (eq. 5.14), ou seja, tomar o termo linear da série de Taylor que a representa, que é a rigidez equivalente da equação (5.15).

Esta linearização só é possível analiticamente no modelo de molas, já que no modelo de cabos as componentes das forças que atuam nos cabos somente são determinadas numericamente.

A Figura 5.2a exibe a variação da frequência natural circular, ω , da torre, em radianos por segundo, em função de α_1 , para diferentes valores de x_0 e x_1 . Em todas as curvas, $x_p = 0,04905$. Na Figura 5.2b, exibe-se a variação de ω em função do parâmetro de carga λ . Para todas as curvas tomou-se $x_p = 0$. Quando λ é igual à carga crítica a frequência se anula. A Figura 5.3 mostra a variação da frequência natural em função do parâmetro de pré-tensionamento, x_0 , e do parâmetro geométrico, x_1 . A Figura 5.4 mostra que existe, como acontece em muitas estruturas, uma relação linear entre o quadrado da frequência e o parâmetro de carga λ .

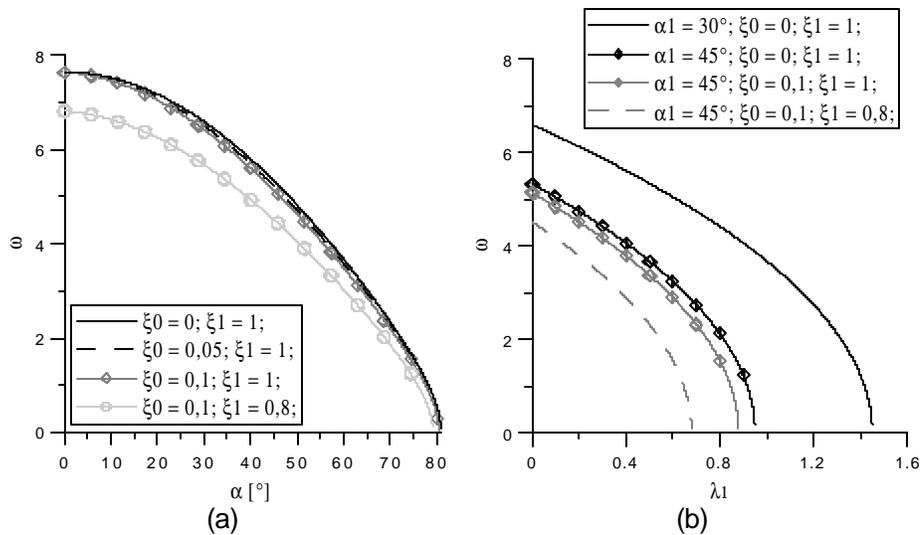


Figura 5.2: Variação da frequência natural circular: (a) em função de α . (b) em função de λ .

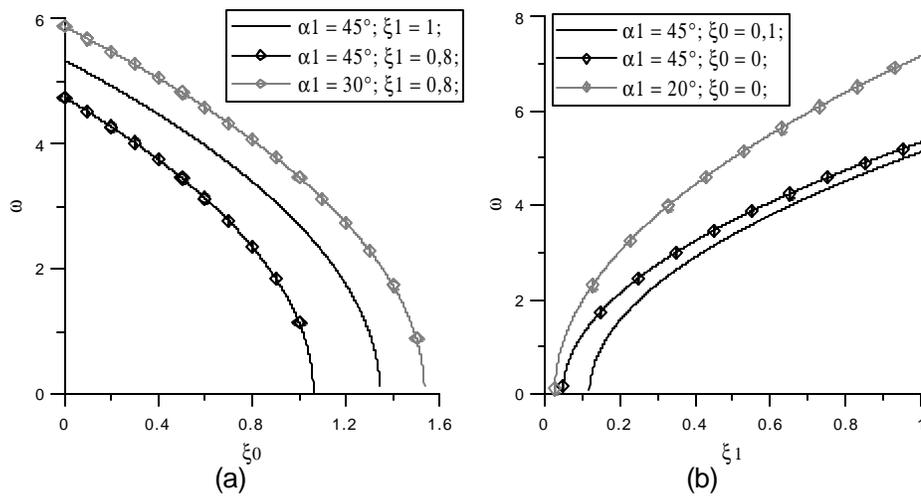


Figura 5.3: Variação da frequência natural circular: (a) em função do parâmetro de pretensionamento, (b) em função do parâmetro de geometria.

Analisando as Figuras 5.2, 5.3 e 5.4, percebe-se que os diversos parâmetros adimensionais influenciam a frequência de uma forma semelhante à carga crítica.

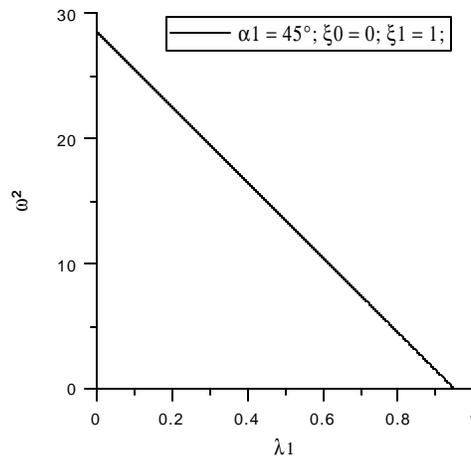


Figura 5.4: Variação do quadrado da frequência natural circular em função do parâmetro de carga.

5.4.1. Máxima frequência natural

O comportamento exibido na seção anterior para o modelo de molas, revela que as configurações apresentadas no Capítulo 3 que geram uma carga crítica máxima são as mesmas que causam uma frequência natural máxima.

Para o modelo de cabos, a Figura 5.5 exibe a variação da frequência natural, obtida através da solução numérica das equações de movimento do sistema autônomo, em função da inclinação do cabo. Para isso consideram-se pequenas perturbações iniciais, integram-se as equações no tempo e mede-se o período para cada valor de α . Para um modelo de 2 cabos, a maior frequência natural foi obtida para $a = 53^\circ$, enquanto que a análise estática para o mesmo modelo indicou uma carga crítica máxima em $a = 39^\circ$ (Figura 4.3b).

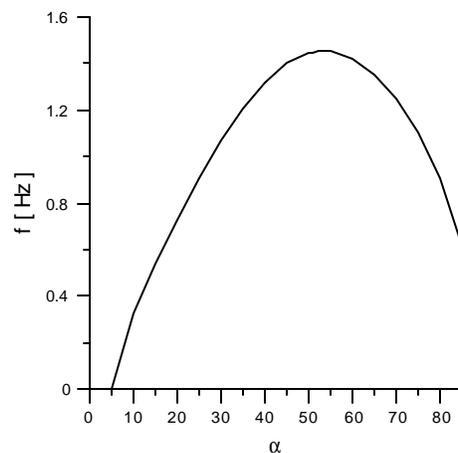


Figura 5.5: Variação da Frequência natural em função de α .

5.5. Solução numérica da equação de movimento

Em sistemas não lineares raramente é possível uma solução exata para a equação diferencial de movimento. Em tais casos, a mesma deve ser obtida pela integração da equação ao longo do tempo, através de um método numérico.

Neste trabalho, utiliza-se o Runge Kutta de 4ª ordem. Para usar este algoritmo é necessário transformar a equação diferencial de 2ª ordem, eq. (5.14) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e, então, este sistema é integrado no tempo. O algoritmo pode ser encontrado, por exemplo, na referência [18]. A transformação é feita tomando-se $x_1 = \mathbf{q}$ e $x_2 = \dot{\mathbf{q}}$. Assim tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_{eq}} \left(-k_{eq}(x_1) - cx_2 + \frac{L \cos x_1}{2} q(t) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

A Figura 5.6a apresenta uma comparação entre o modelo de molas lineares e o de molas não lineares sob vibração livre, a única diferença entre os dois modelos é o pequeno valor da constante de mola k_2 , que é zero no modelo de molas lineares. Não foi considerado o pré-tensionamento das molas. A Figura 5.6b apresenta uma comparação da solução numérica do modelo de cabos e molas. Percebe-se que há uma pequena diferença no período das soluções. A diferença na parte (a) é imperceptível dentro do intervalo adotado.

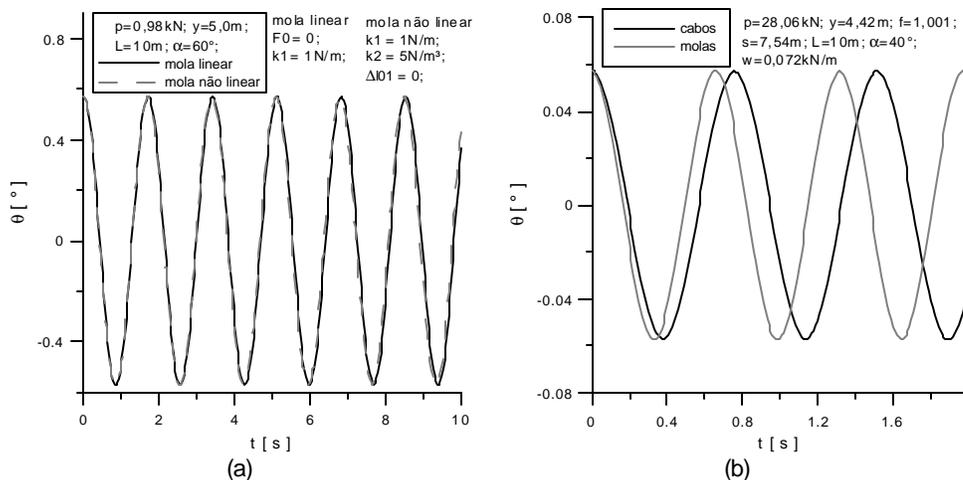


Figura 5.6: Vibração livre: (a) comparação entre o modelo de molas lineares e o modelo de molas não lineares; (b) comparação entre o modelo de cabos e o modelo de molas usado para representar cabos.

5.6. Amortecimento crítico

O amortecimento considerado neste trabalho é do tipo viscoso, retirando do sistema uma parcela de energia que é proporcional à velocidade.

Dada a equação diferencial:

$$m_{eq}\ddot{q} + c\dot{q} + K_{eq}q = 0 \quad (5.17)$$

O coeficiente de amortecimento, c , que faz com a resposta do sistema deixe de ser um movimento oscilatório é chamado de amortecimento crítico. Para uma equação como a (5.18), o amortecimento crítico vale:

$$c_{cri} = 2\sqrt{K_{eq}m_{eq}} \quad (5.18)$$

Nas análises de vibração forçada adotou-se um amortecimento de 5% do amortecimento crítico.

5.7. Análise da estabilidade e natureza do movimento

A análise da estabilidade de sistemas autônomos ou não autônomos está toda baseada na superfície de energia. No caso em que não há amortecimento, a superfície de energia é dada pela equação (5.9). Quando considera-se o amortecimento, o que é uma necessidade em problemas não-autônomos, não é possível traçar a superfície de energia, então aproveita-se a relação existente entre a superfície de energia e o plano fase, e a estabilidade é analisada no espaço fase e no domínio do tempo.

A relação entre a superfície de energia e o plano fase para sistemas autônomos é exibida na Figura 5.7, retirada do livro de Leipholz (referência [19]). Verifica-se que as órbitas do sistema são as curvas de nível da superfície de energia.

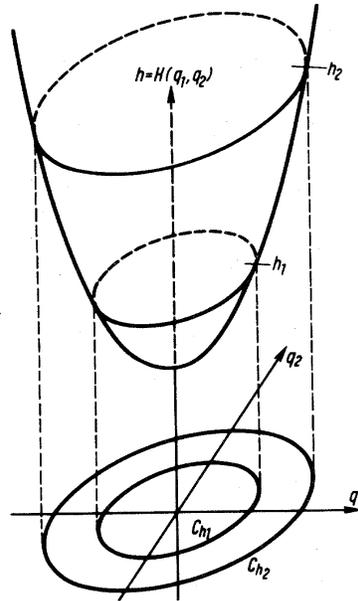


Figura 5.7: Relação entre a superfície de energia e o plano fase.

Quando uma carga variando no tempo é considerada, o sistema é dito não-autônomo.

5.7.1.

Análise do sistema autônomo

O modelo aqui analisado é uma torre de 10m de altura, presa a duas molas em sua extremidade superior. A torre possui seção uniforme, sendo sua massa, distribuída uniformemente ao longo da coluna $\rho A = 10\text{kg/m}$.

A Figura 5.8 apresenta o caminho pós-crítico de equilíbrio para o modelo com $\alpha=32^\circ$. Em 5.8a varia-se θ de -90° a 90° e em 5.9b varia-se de -20° a 20° para uma melhor visualização do comportamento na vizinhança da carga de bifurcação.

O valor de λ_{cri} para o modelo é 1,389. São considerados dois casos de carregamento axial: no primeiro caso adota-se uma carga levemente inferior à carga crítica ($\lambda=1,375$), e, para o segundo caso, um valor imediatamente superior ao crítico, $\lambda=1,3894$. Os parâmetros de carga estão representados pela linha tracejada na Figura 5.8. Nos pontos em que ocorre o cruzamento do caminho com a linha tracejada, tem-se um ponto de equilíbrio, que é uma sela ou um centro, no caso do sistema autônomo. A consideração do amortecimento transforma este centro em um foco ou nó.

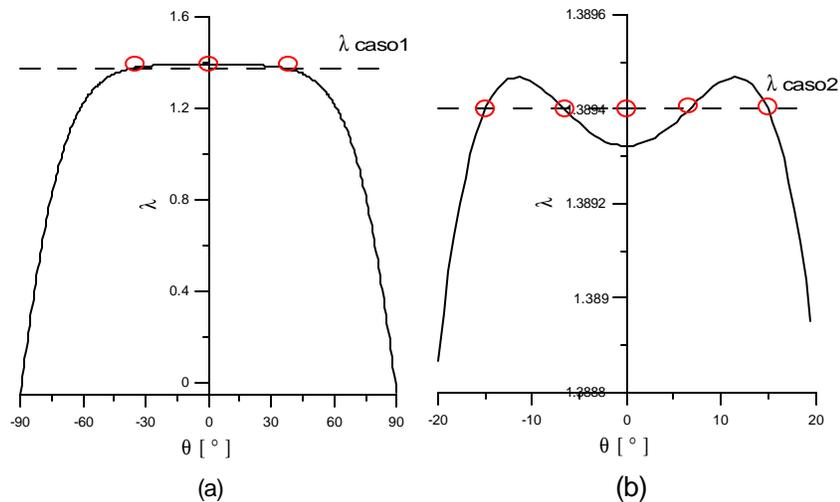


Figura 5.8: Caminho pós-crítico.

No caso 1, em que a torre está sujeita a um carregamento axial menor que o valor crítico, há somente um ponto de equilíbrio estável, associado justamente à configuração inicial não perturbada. Ao aplicar-se uma pequena perturbação, o amortecimento dissipa a energia até o sistema atingir o repouso na configuração inicial. Nesta análise, como não está sendo considerado o amortecimento, o sistema permanece oscilando em torno de uma posição de equilíbrio estável.

A Figura 5.9 apresenta o primeiro caso. Em 5.9a tem-se a superfície de energia, e em 5.9b sua projeção no plano fase, obtida pela integração numérica ao longo do tempo do sistema (5.16), para algumas condições iniciais. Tanto em 5.9a ou em 5.9b é possível identificar facilmente os pontos estáveis e os instáveis. O campo vetorial mostrado no plano fase ajuda a entender o comportamento global da estrutura. Nota-se que, para pequenas perturbações, a resposta do sistema é praticamente linear. A medida que a perturbação inicial cresce, a resposta se torna cada vez mais não-linear até que a fronteira de estabilidade, dada pelas órbitas heteroclínicas que ligam os dois pontos de sela é atingida e o sistema, para uma perturbação imediatamente superior à perturbação limite, perde a estabilidade, escapando do vale potencial pré-flambagem. Este comportamento é típico de estruturas sujeitas a bifurcação instável.

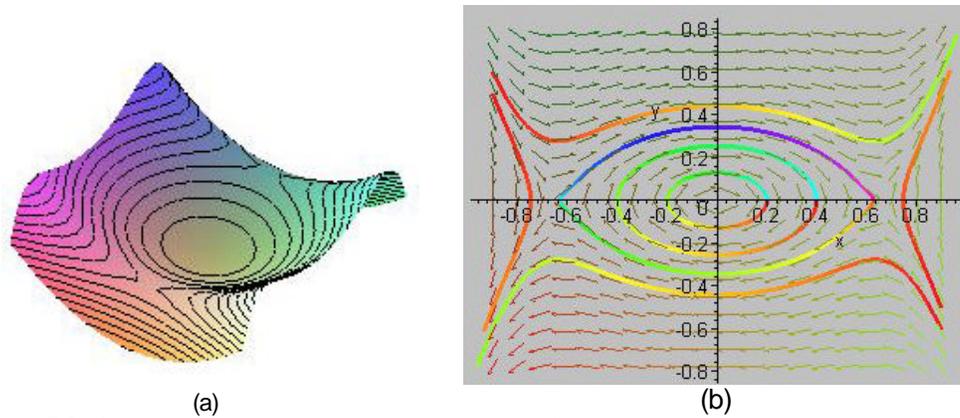


Figura 5.9: Parâmetro de carga menor que o crítico: (a) Superfície de energia (b) plano fase.

No caso específico da Figura 5.10, tem-se cinco pontos de equilíbrio, dois centros e três pontos de sela, como mostra o plano fase apresentado na mesma. Para cargas superiores à carga pós-crítica máxima, o plano fase se reduz a um ponto de sela, associado à configuração fundamental de equilíbrio.

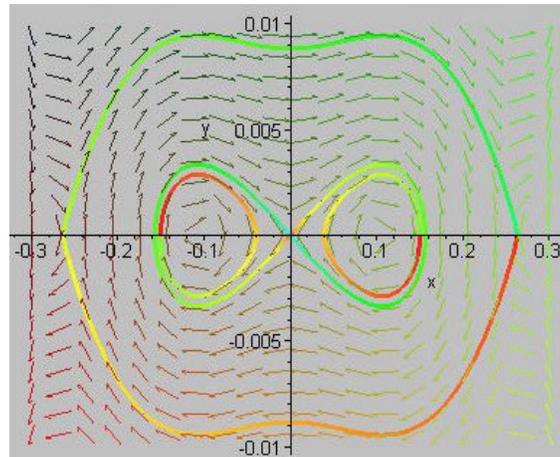


Figura 5.10 Plano fase para um valor de λ levemente maior que o crítico.

Tomando uma inclinação para a mola um pouco maior ($\alpha=45^\circ$), repete-se a análise. Neste caso, tem-se, como esperado, uma bifurcação simétrica estável. O λ_{cri} para o modelo passa a ser 0,951 e são adotados no primeiro caso, $\lambda=0,85$, e no segundo caso, $\lambda=1,046$. De acordo com a Figura 5.11, para qualquer nível de carregamento estático, desde que seja maior que o crítico, há três pontos de equilíbrio, dois centros associados às configurações pós-críticas estáveis e uma sela associada à configuração não-perturbada, enquanto que para valores menores que o crítico, tem-se apenas um único ponto de equilíbrio (estável).

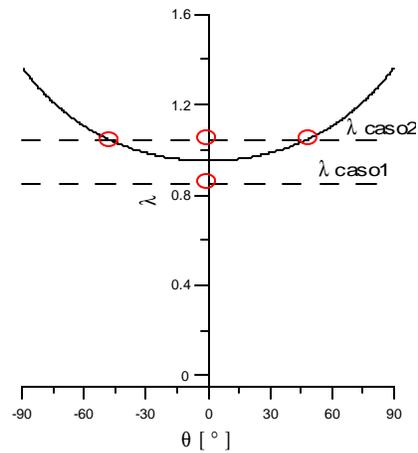


Figura 5.11: Caminho pós-crítico e parâmetro de carga utilizado em cada caso.

Para a superfície exibida na Figura 5.12, o parâmetro de carga utilizado é o correspondente ao caso 1, indicado na Figura 5.11. Em 5.13 apresenta-se a superfície de energia e o plano fase para o segundo caso de carregamento, sendo λ 10% superior ao parâmetro de carga crítico. Nota-se na Figura 5.12 que nenhum par de condições iniciais pertence a uma órbita instável. O ponto de coordenadas (0;0) no plano fase é um centro estável.

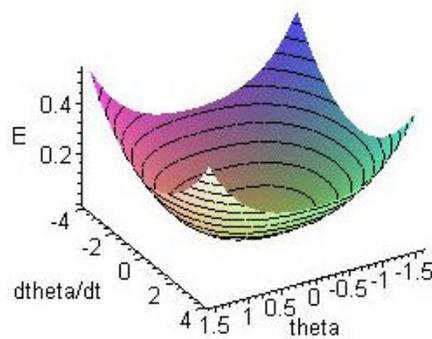


Figura 5.12 Superfície de energia para carregamento inferior ao crítico

Na Figura 5.13 há dois centros estáveis, pontos no plano fase de coordenadas $P(-0,84;0)$ e $P(0,84;0)$, e um ponto de sela, $P(0;0)$.

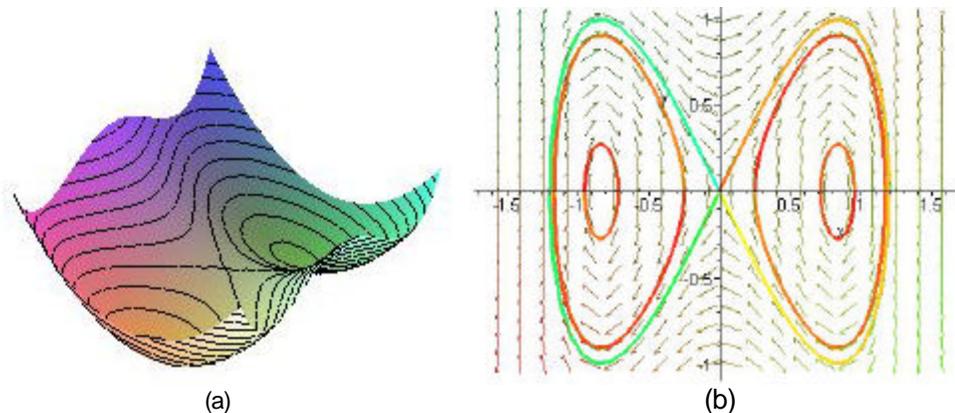


Figura 5.13: Parâmetro de carga maior que o crítico: (a) Superfície de energia (b) plano fase.

5.7.2. Análise do sistema não autônomo

Apresenta-se a seguir a análise para o modelo com cabos inclinados a 45° , com uma carga lateral variando no tempo de forma senoidal, com o período igual ao período natural da estrutura (região de ressonância). A estrutura encontra-se inicialmente em repouso. O parâmetro de carga no primeiro caso é maior que o parâmetro crítico, posteriormente se considera uma carga menor que a crítica. A amplitude da carga é variada até o sistema atingir o escape.

Para o modelo em que a inclinação é 45° e o parâmetro de carga $\lambda = 1,046$, a variação das trajetórias do sistema em função do parâmetro de carga lateral é apresentada na Figura 5.14. O amortecimento utilizado é de 5% do amortecimento crítico. O sistema oscila inicialmente em torno de uma configuração de equilíbrio pós-crítica. Para $\xi q = 0,272$ ocorre um salto dinâmico e o sistema passa a oscilar em torno de outra configuração de equilíbrio, conforme mostra a Figura 5.14b, que apresenta o diagrama de bifurcação associado ao problema. Neste caso não houve dobramento de período próximo à fronteira da bacia de atração, como acontece comumente neste tipo de problema. O período da resposta permanece igual ao período da força até o momento da bifurcação.

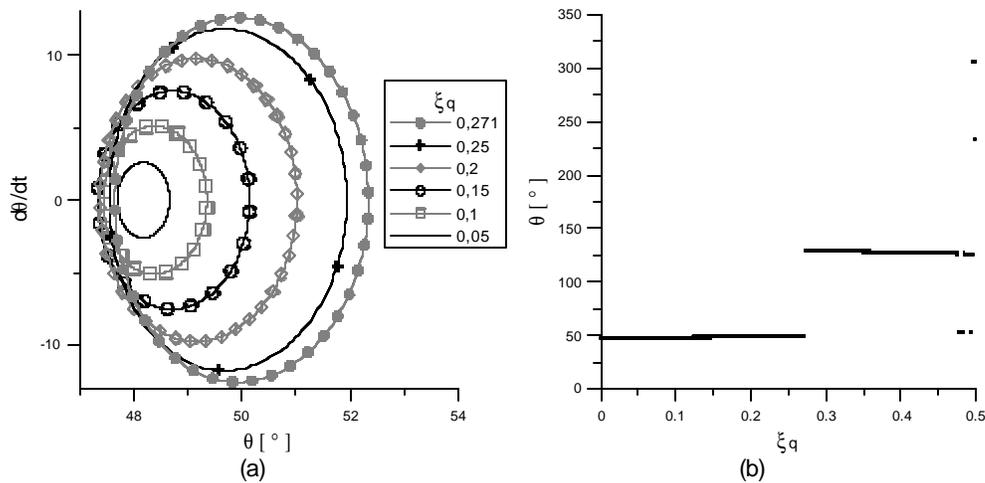


Figura 5.14: Plano fase para diversos níveis de carga lateral, com λ maior que λ crítico.

Analisando o mesmo modelo, porém com λ menor que o λ crítico ($\lambda = 0,85$), percebe-se que não há bifurcação ou escape. A resposta permanente tem sempre o mesmo período da força.

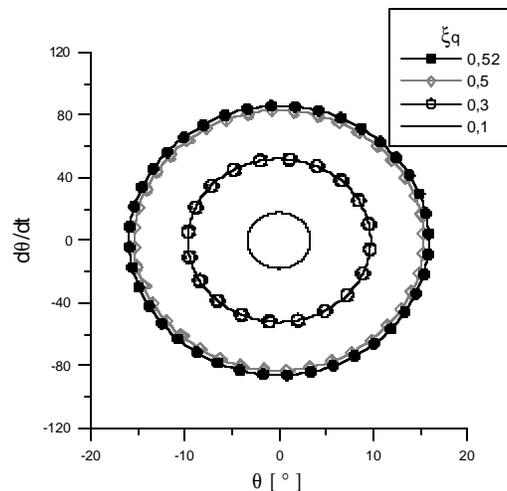


Figura 5.15: Plano fase para diversos níveis de carga lateral, com λ menor que λ crítico.

5.7.2.1. Bifurcação por dobramento de período

Sistemas dinâmicos não lineares quando sujeitos a um carregamento harmônico com uma frequência Tq podem não apresentar uma resposta na fase permanente de mesmo período que a excitação. Quando isto acontece diz-se que houve uma bifurcação. A Figura 5.16 exibe a variação da posição do ponto fixo em função da amplitude do carregamento lateral, para um modelo de molas não lineares e com um carregamento maior que o crítico.

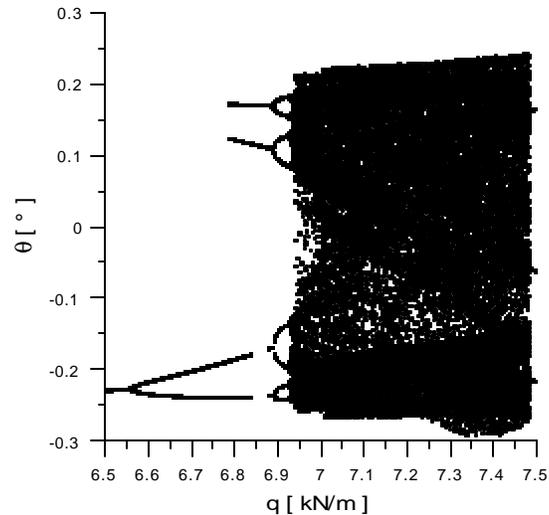
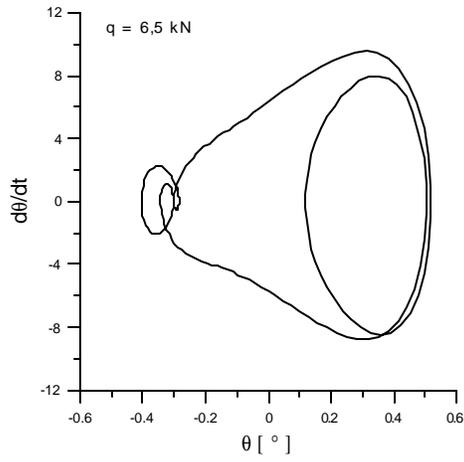


Figura 5.16: Diagrama de bifurcação do sistema não-autônomo para valores crescentes da amplitude do carregamento harmônico. Variação da coordenada generalizada θ da seção de Poincaré em função do parâmetro q .

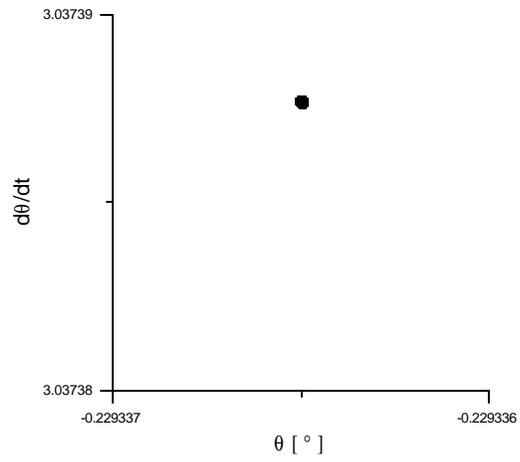
Observa-se que o sistema dinâmico exibe respostas com diferentes períodos, além de saltos. Sucessivos dobramentos do período da resposta podem levar o sistema a um regime caótico, onde é impossível prever o comportamento do sistema a longo prazo. Uma possível região caótica está no diagrama de bifurcação apresentado na Figura 5.16.

A Figura 5.17 exibe o plano fase e o mapeamento de Poincaré para alguns valores de carregamento extraídos da Figura 5.16. O mapeamento consiste em dividir a trajetória da solução em várias seções, espaçadas igualmente no tempo. Cada seção é na verdade um plano fase. A seção correspondente ao tempo inicial é chamada de seção de Poincaré. Em trajetórias estáveis, o número de pontos fixos no mapeamento de Poincaré revela o período da solução permanente, que é igual ao número de pontos fixos multiplicado pelo período da carga.

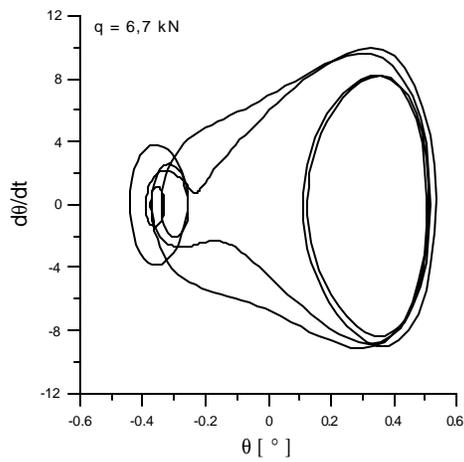
Na Figura 5.17a, tem-se uma solução permanente de período 1, e conseqüentemente um único ponto fixo no mapa de Poincaré (Fig 5.17b). Na Fig. 5.17d, o mapeamento revela que o período da solução é o dobro do período da excitação, passando a ser quatro vezes superior para o carregamento indicado na Figura 5.17e, e finalmente, nas partes (g) e (h) da figura percebe-se claramente o aparecimento de caos, tornando o período da solução infinito.



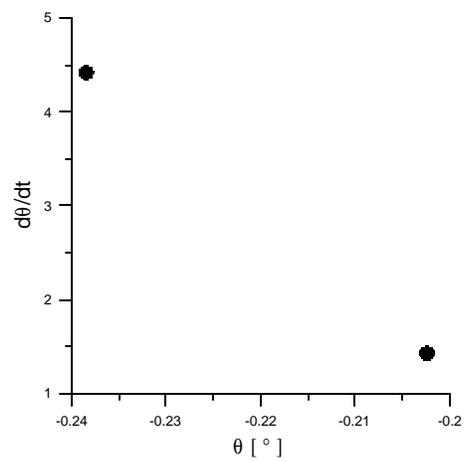
(a)



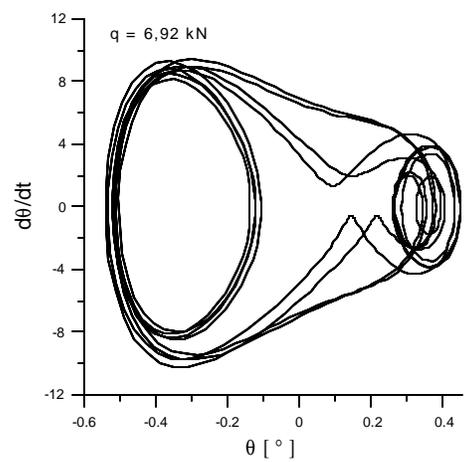
(b)



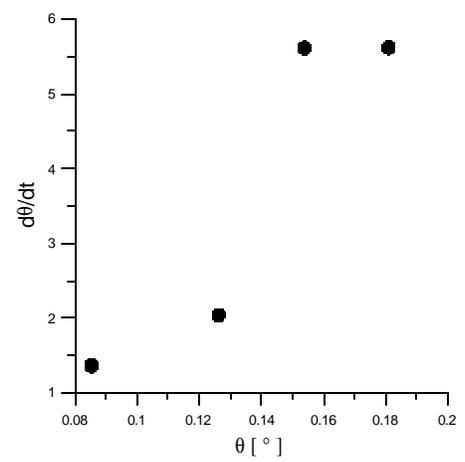
(c)



(d)



(e)



(f)

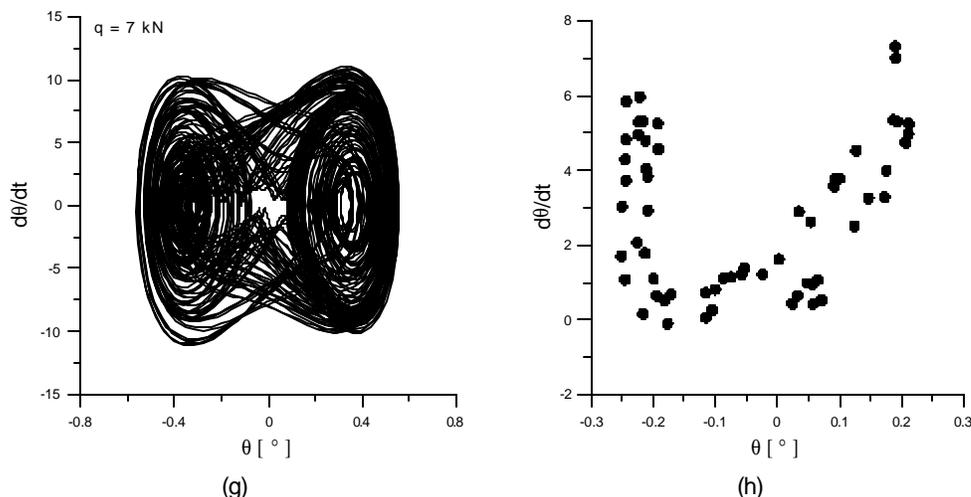


Figura 5.17: Plano fase e mapeamento de Poincaré para diferentes carregamentos extraídos da Figura 5.16.

As Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 ilustram o comportamento dinâmico de torres estaiadas em vibração forçada. Verifica-se que o comportamento dinâmico da torre está intimamente relacionado com a geometria da superfície de energia associada ao problema e, conseqüentemente, ao tipo de bifurcação exibido pelo sistema sob cargas estáticas. Os resultados mostram que torres estaiadas podem apresentar diversos fenômenos típicos de sistemas não-lineares como, por exemplo, escape de um vale potencial (instabilidade dinâmica), bifurcações de diversos tipos e até mesmo caos. Este comportamento caótico é devido à não-linearidade dos estais expressa pela presença do termo cúbico no modelo de molas. Caminhos de equilíbrio, como o exibido em 5.8b, permite haver escape, até mesmo para carregamentos menores que o crítico.

Com base na análise estática, verifica-se que, em modelos de mola não linear e cabos, o escape do vale de potencial associado a uma posição de equilíbrio fundamental é mais difícil de ocorrer do que no modelo de molas lineares. Entretanto, como mostrado neste trabalho, a ruptura de um estai pode provocar mudanças bruscas no comportamento da estrutura e esta possibilidade deve ser futuramente incluída na análise dinâmica.

Assim sendo, deve haver um rigoroso cuidado com o nível de carregamento presente na torre, para que sob alguma tormenta, a mesma não venha a apresentar colapso.