

4 Análise da Estabilidade - Modelo de Cabos

A Figura 4.1a apresenta um modelo com dois cabos presos a uma barra rígida de comprimento L , representando uma torre numa configuração perfeita (vertical), enquanto na Figura 4.1b apresenta-se a torre numa configuração perturbada. A única diferença deste para os modelos anteriores é o trabalho produzido pelas cargas externas. As forças dos cabos, que agem sobre a barra, são consideradas como cargas externas.

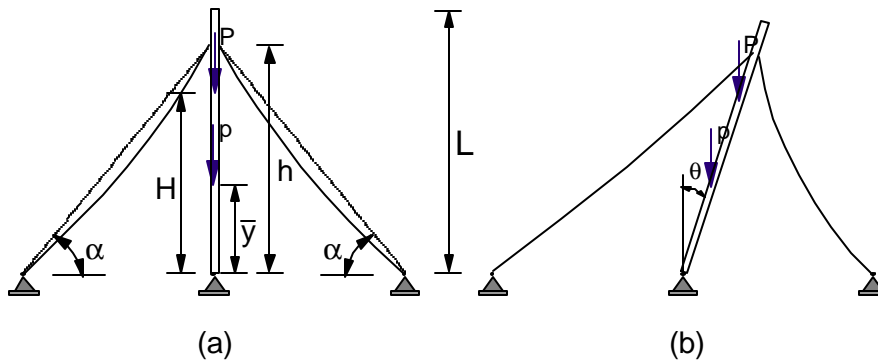


Figura 4.1: Torre estaiada. Modelo com cabos inextensíveis: (a) configuração fundamental de equilíbrio; (b) configuração perturbada (perturbação - rotação \mathbf{q}).

4.1.1. Variação da energia devida a mudança de configuração dos cabos

Ao aplicar-se uma rotação infinitesimal $d\mathbf{q}$ sobre a barra na posição inicial, tomada como positiva no sentido horário, as projeções s_x e s_y dos cabos mudam de valor, implicando em alterações nas forças T_x e T_y que os cabos exercem sobre a barra. Como o cabo é considerado inextensível, não há energia interna de deformação. Durante uma pequena rotação, o trabalho devido as forças T_x e T_y , para um cabo genérico i tem-se

$$dW_i = T_{x_i}(\mathbf{q})dx_i + T_{y_i}(\mathbf{q})dy_i \quad (4.1)$$

onde dx_i e dy_i são as derivadas das funções que definem a posição do ponto de fixação do cabo a barra segundo as direções x e y . A origem do sistema de referência de cada cabo é o ponto de fixação do cabo na base.

Para os cabos cuja projeção horizontal aumenta durante uma rotação dq , a derivada dx é dado por

$$dx_i = g_i L \cos q dq \quad (4.2)$$

Se a projeção horizontal diminui, dx é dado por

$$dx_i = -g_i L \cos q dq \quad (4.3)$$

Como a projeção vertical sempre diminui, dy é dado sempre por

$$dy_i = -g_i L \sin q dq \quad (4.4)$$

O trabalho externo devido às cargas concentradas e às forças dos cabos atuantes sobre a barra, em uma configuração final q , é dado pela equação

$$\begin{aligned} \Delta W = & \sum_{i=1}^{nc/2} g_i L \int_0^q (T_{xi}(q) \cos q) dq - \sum_{i=nc/2+1}^{nc} g_i L \int_0^q (T_{xi}(q) \cos q) dq - \\ & \sum_{i=1}^{nc} g_i L \int_0^q (T_{yi}(q) \sin q) dq + \sum_{i=2}^{np} P_i \Gamma_i \sin q + p y \sin q \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde nc é o número de cabos.

As funções $T_x(q)$ e $T_y(q)$ não são conhecidas analiticamente, já que representam as componentes da força no cabo que são obtidas numericamente para cada configuração da catenária.

Considerando uma rotação q positiva, o primeiro termo da equação (4.5) representa o trabalho realizado pelas componentes horizontais das forças nos cabos à esquerda da torre (figura 4.1b) e o segundo termo representa o trabalho das componentes horizontais nos cabos que estão à direita da torre. Como observado no Capítulo 2, o primeiro termo sempre é maior que o segundo, já que a componente horizontal da força cresce com o aumento da projeção horizontal do cabo e decresce com o decréscimo dessa projeção. O terceiro termo representa o trabalho das componentes verticais de todos os cabos.

4.1.2. Equação do caminho pós-crítico de equilíbrio

Considere o caso geral em que a torre está submetida ao peso próprio, a várias cargas concentradas e sustentada por diversos cabos. Derivando Δp em relação à coordenada generalizada q , tem-se para uma carga de referência P_1 :

$$P_1 = \frac{1}{\Gamma_1 \operatorname{sen} q} \left(\sum_{i=1}^{nc/2} g_i T_{xi}(q) \cos q - \sum_{i=nc/2+1}^{nc} g_i T_{xi}(q) \cos q - \sum_{i=1}^{nc} g_i T_{yi}(q) \operatorname{sen} q - \sum_{i=2}^{np} P_i \Gamma_i \operatorname{sen} q - p_y \operatorname{sen} q \right) \quad (4.6)$$

Para traçar o caminho pós-crítico neste caso, incrementa-se a perturbação q em pequenos valores a partir de $q = 0$ e, para cada valor de q , encontram-se as forças que os cabos exercem sobre a barra e obtém-se o P_1 necessário para atender o equilíbrio.

4.1.3. Análise da carga crítica

A carga crítica é obtida diretamente da equação (4.6) fazendo-se a perturbação q tender a zero. Na determinação das configurações ótimas para a carga crítica, foram feitas duas análises: (a) variando a inclinação com o comprimento do cabo mantido constante, e (b) variando simultaneamente a inclinação e o comprimento do cabo (cabo preso ao solo em um ponto fixo).

4.1.3.1. Comprimento do cabo constante

Para facilitar a análise paramétrica, o comprimento do cabo, s , é dado, como mostrado no Capítulo 2, por $s = f \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$, onde f é sempre maior que 1 e $\sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ é o comprimento do segmento de reta que liga os pontos A e B, de fixação do cabo, tendo inclinação α , como ilustrado na Figura 4.2.

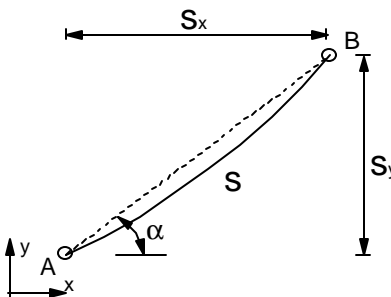


Figura 4.2: Inclinação e projeções da reta que une os pontos de fixação do cabo.

A Figura 4.3 apresenta a variação da carga crítica de uma torre sustentada por dois cabos, a medida em que varia-se a inclinação, α , do segmento de reta

que une os pontos de fixação dos cabos. O comprimento do cabo e do segmento A-B foram mantidos constantes e variou-se em cada caso a inclinação α . O modelo apresentado possui uma barra, cujo peso foi desprezado, e cabos com 10m comprimento e peso $w = 71,81\text{N/m}$. A torre tem $L=10\text{m}$. Na Figura 4.3a tem-se $f=1,05$, enquanto na Figura 4.3b, tem-se $f=1,001$ (cabo muito mais tenso).

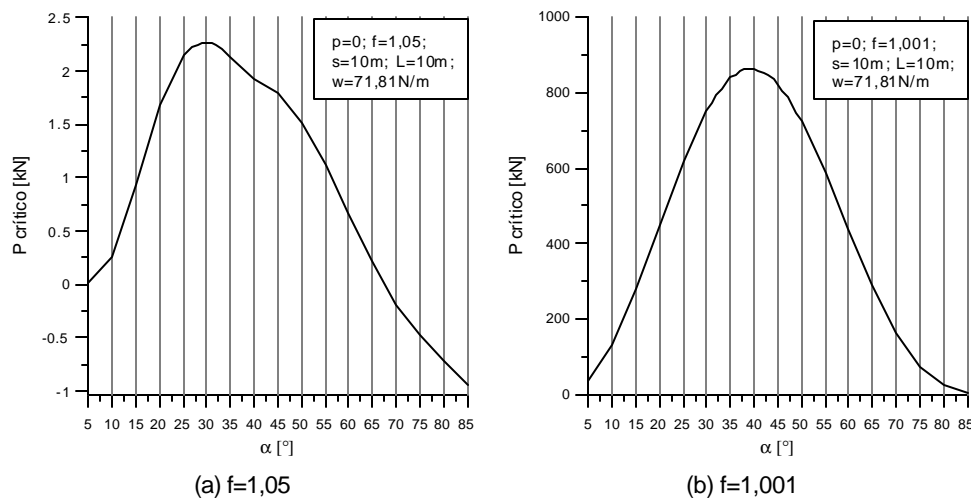


Figura 4.3: Variação da carga crítica em função da inclinação α .

No caso exibido na Figura 4.3a, em que o cabo está em uma configuração de catenária completa, a máxima carga crítica para o modelo de cabos é obtida com uma inclinação de trinta graus. Pode-se notar que as inclinações maiores que setenta graus levam a cargas críticas negativas. Isto significa que, para manter o equilíbrio na posição fundamental, é necessária uma força atuando de baixo para cima. Em 4.3b, com o cabo bem mais tenso, a carga crítica máxima ocorre para $\alpha=39^\circ$. Deve-se observar que há uma grande diferença no valor da carga crítica em ambos os casos, mostrando a grande influência que tem a protensão inicial no cabo, que é intimamente ligada a geometria do mesmo, sobre a carga crítica da estrutura.

4.1.3.2. Influência do comprimento do cabo na carga crítica

Um aspecto interessante a considerar é a influência do comprimento do cabo na carga crítica. Para isto, mantém-se fixo o ponto de ancoragem no solo e varia-se a posição em que o mesmo é fixado à torre, mantendo-se constante o fator de protensão f . Espera-se que o máximo não ocorra mais nas posições já encontradas, já que um cabo mais longo é também mais pesado e o ângulo que o cabo faz com a torre também varia.

Na Figura 4.4, mostra-se a variação da carga crítica da torre estaiada em função da inclinação, α , e do comprimento do cabo, s , mantendo-se constante o ponto de fixação ao solo. Na Figura 4.4a têm-se os resultados para $f=1,05$, enquanto na Figura 4.4b, tem-se os resultados para $f=1,001$. A máxima carga crítica foi obtida com uma inclinação de aproximadamente quarenta e nove graus para o caso (a) e cinquenta e cinco para o caso (b). Novamente observa-se a grande influência da protensão inicial no cabo sobre a carga crítica da torre.

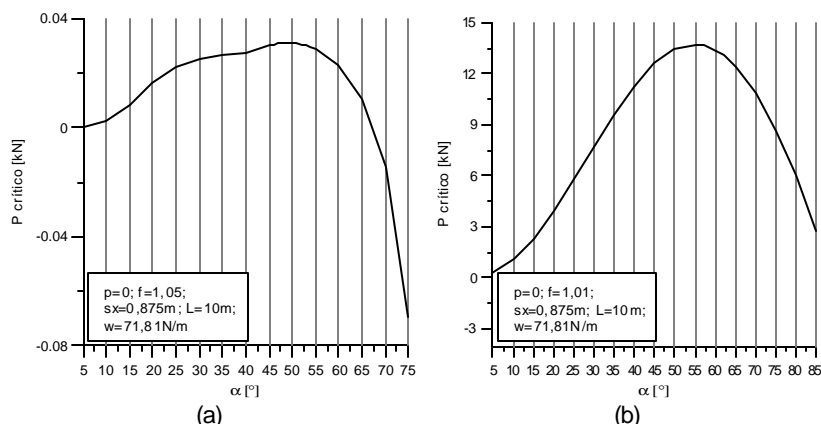


Figura 4.4: Variação da carga crítica em função da inclinação e do comprimento do cabo.

Ao comparar as Figuras 4.3 e 4.4 para cada valor de f , percebe-se que a primeira apresenta valores bem mais elevados para a carga crítica, isto porque o comprimento do cabo, para a maioria das inclinações, é maior na análise apresentada na Figura 4.3. A influência do comprimento do cabo pode ser melhor observada na seção seguinte.

4.1.3.3. Influência do peso e comprimento do cabo

A Figura 4.5a apresenta a variação da carga crítica em função da seção transversal do cabo, para um cabo com uma inclinação constante de sessenta graus ($\alpha=60^\circ$). As seções adotadas foram retiradas da Figura 2.7. A Figura 4.5b apresenta a variação da carga crítica quando o comprimento do cabo é variável, mantendo-se constantes a inclinação, o fator de protensão f e o peso do cabo. Pode-se perceber que, quanto mais pesado e mais comprido for o cabo, maior será a carga crítica, isto porque o momento restaurador, devido aos cabos, é maior.

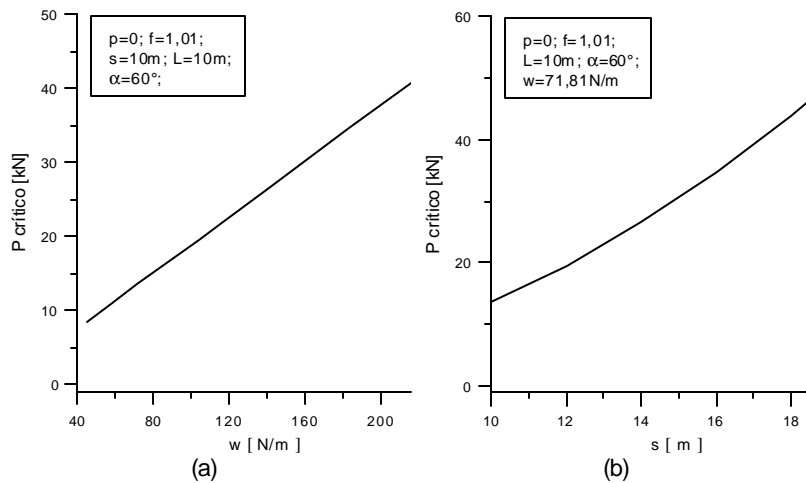


Figura 4.5: (a) Variação da carga crítica em função do peso do cabo. (b) variação da carga crítica em função do comprimento cabo.

4.1.3.4. Influência do fator de protensão f

A Figura 4.6 apresenta a variação da carga crítica para um modelo de dois cabos. Os pontos de fixação dos cabos são mantidos constantes, apenas varia-se o comprimento do cabo, através do fator de protensão f . Nota-se que, à medida que f aumenta, o cabo se torna mais longo, diminuindo paulatinamente a carga crítica da torre que tende assintoticamente a zero. À medida que o cabo se torna mais longo neste caso, diminui a sua força sobre a coluna e o ângulo entre esta força e a torre, diminuindo assim as forças de restauração do equilíbrio face a uma perturbação q .

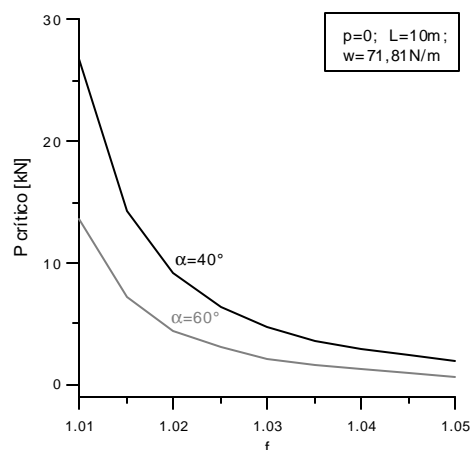


Figura 4.6: Variação da carga crítica em função do pré-tensionamento.

4.1.4. Análise do caminho pós-crítico de equilíbrio

Novamente o estudo é realizado em um modelo com apenas dois cabos, já que o comportamento apresentado fornece uma boa previsão para modelos com mais cabos e diminui o número de variáveis na análise paramétrica.

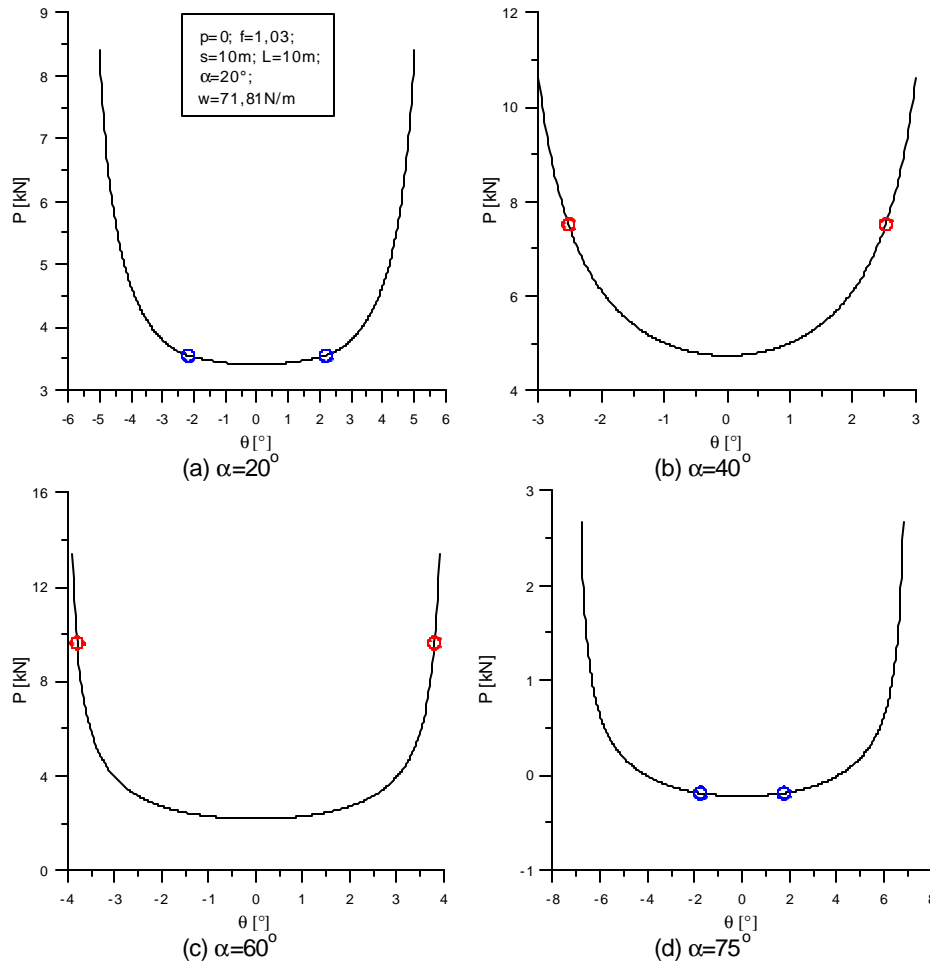


Figura 4.7: Caminhos pós-críticos de equilíbrio para diferentes inclinações.

A Figura 4.7 exibe o caminho pós-crítico de equilíbrio (eq. (4.6)), no caso em que há somente uma carga axial P , localizada no topo de uma coluna de 10m altura, sustentada por dois cabos, para quatro valores diferentes de α . Os pontos assinalados indicam em cada caso onde uma das catenárias passa de completa a incompleta, ou vice-versa. Verifica-se que em todos os casos a estrutura apresenta uma bifurcação simétrica estável. Entretanto a curvatura inicial do caminho pós-crítico é quase nula, tal como acontece na coluna de Euler. Nota-se que, após a rotação de alguns graus, há um crescimento considerável da rigidez efetiva associada ao caminho pós-crítico. Isto se explica

pelo crescimento acentuado da força no cabo que alonga. Como pode-se observar na Figura 4.12, mais adiante, a força no cabo, dada pela equação da catenária, cresce inicialmente a uma taxa pequena a medida que o cabo alonga, mas, a partir de um determinado valor de alongamento, depois que a catenária se torna incompleta, a força de tração no cabo passa a crescer a uma taxa cada vez maior, tendendo a infinito.

4.1.4.1. Estabilidade do caminho pós-crítico

A Figura 4.7 exhibe caminhos pós-críticos para determinadas inclinações que seguramente seriam instáveis, caso fossem usadas molas lineares no lugar dos cabos. Acreditava-se que os cabos também apresentariam este comportamento para determinadas configurações, porém em todas as análises aqui realizadas a curvatura inicial do caminho pós-crítico foi sempre positiva.

Entretanto, em alguns casos, a carga crítica pode chegar a zero ou se tornar negativa, o que não é certamente desejável. A Figura 4.8 exhibe para cada valor de f os valores limites do ângulo α para o qual a carga crítica se torna nula. Portanto valores entre as duas curvas, correspondem a configurações que possuem carga crítica positiva e caminho pós-crítico estável. As duas curvas correspondem exatamente aos pontos onde a torre perde o equilíbrio em virtude somente das forças exercidas pelos cabos sobre a mesma.

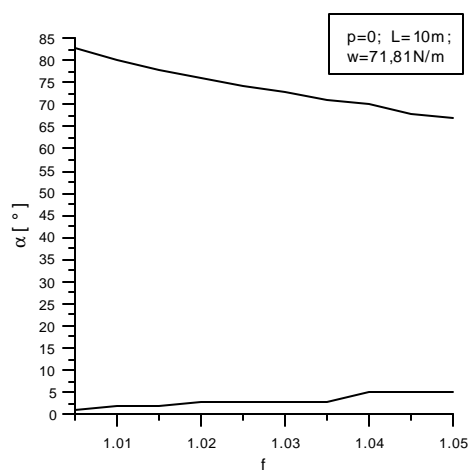


Figura 4.8: Curvas limite para o qual o sistema apresenta caminhos pós-críticos estáveis com carga crítica positiva.

Para a obtenção dos valores apresentados na Figura 4.8, foi desprezado o peso próprio da torre. Pela equação (4.6), a consideração do peso próprio

diminui a região de equilíbrio estável, deslocando a curva superior para baixo e a inferior para cima.

Os casos que não estão situados entre as duas curvas da Figura 4.8, apresentam cargas críticas negativas. O momento de tombamento, causado por algumas componentes das forças dos cabos é maior que o momento estabilizador.

4.1.4.2. Afrouxamento de cabos e estabilidade

Na configuração inicial perfeita, $q = 0$, os cabos de ambos os lados têm as mesmas características e exercem sobre a coluna as mesmas componentes de força horizontal e vertical. Quando uma perturbação é imposta ao sistema, os cabos de um lado esticam e os do outro lado afrouxam, as componentes das forças se modificam, gerando um desequilíbrio nos momentos em torno da base. Verifica-se que este momento tende a trazer a estrutura para a configuração original de equilíbrio. Isto permite haver um incremento para a carga externa, a fim de atender o equilíbrio, o que explica a existência de uma bifurcação simétrica estável.

A Figura 4.9 exhibe o caminho pós-crítico de um modelo com 2 cabos, impondo uma perturbação positiva, para duas hipóteses: (a-c) considerando-se os dois cabos; e (d-f) o mesmo caminho, só que desprezando o cabo que sofre um afrouxamento durante o incremento da perturbação, ou seja, apenas o cabo esquerdo é mantido. Comparando-se as partes (a) com (d), (b) com (e) e (c) com (f), pode-se verificar que, na presença de um único cabo, não há mais equilíbrio na posição vertical. Se a coluna tomba na direção do cabo, não é possível haver equilíbrio com cargas positivas (para baixo). Se a coluna tomba no sentido oposto, podem existir duas configurações de equilíbrio, uma instável, associada a um pequeno valor de θ , e outra estável, associada a um ângulo maior, ver Figura.4.9g. Este estudo permite prever o que ocorre quando há em um acidente ou colapso de um dos cabos. Dependendo das imperfeições iniciais, ou a torre cai ou só alcança o equilíbrio para uma configuração bem afastada da original.

Em uma estrutura com mais de dois cabos, o colapso de um deles sempre leva a uma mudança brusca na configuração de equilíbrio, podendo inclusive causar o colapso de toda a estrutura. Também, qualquer assimetria no sistema de cabos tem o mesmo efeito de uma imperfeição inicial.

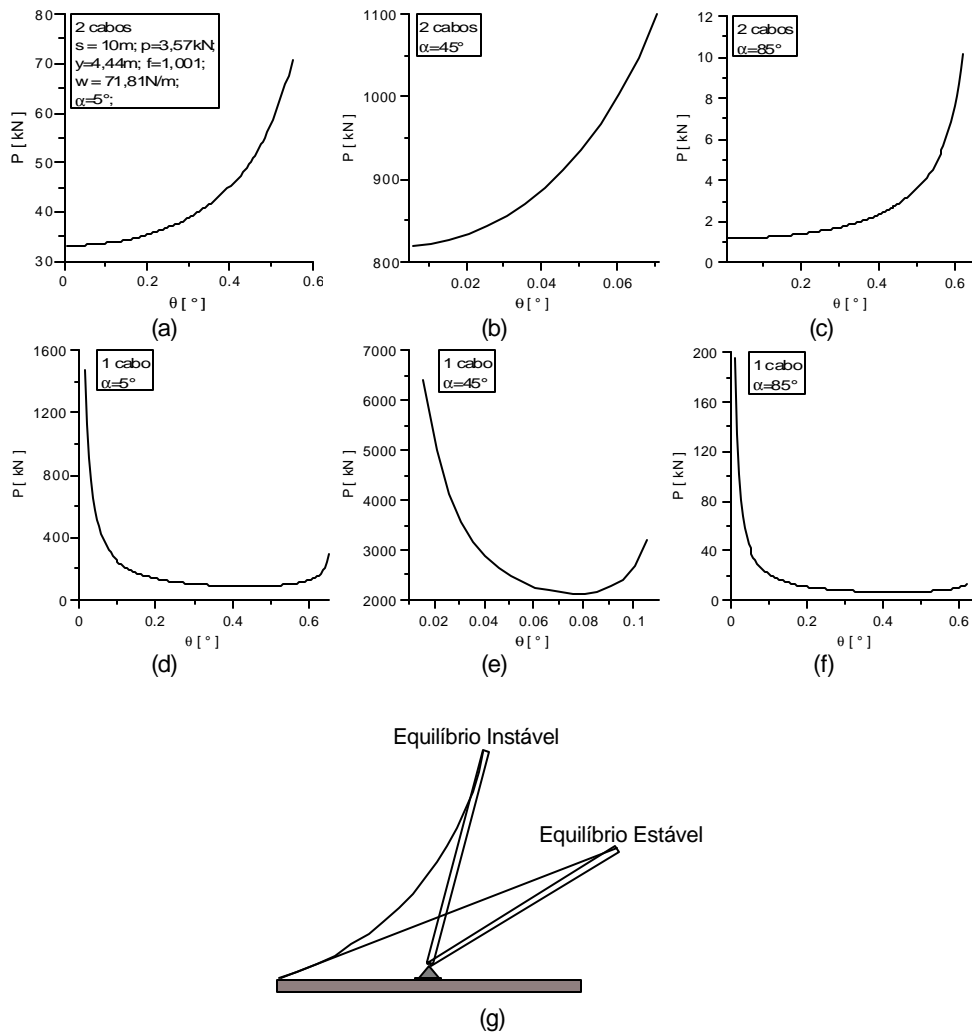


Figura 4.9 (a-f) Caminhos de equilíbrio considerando dois ou somente um cabo. (g) análise qualitativa do equilíbrio.

4.1.5.

Campos de equilíbrio considerando imperfeições iniciais

Considerando o modelo imperfeito exibido na Figura 4.10, em que a barra está em uma configuração inicial com uma rotação q_0 , sujeita a uma carga lateral q , e a cargas axiais P excêntricas, o caminho de equilíbrio é dado por

$$P_1 = \frac{1}{\Gamma_1(\text{sen}q + e_1 \cos q)} \left(\sum_{i=1}^{nc/2} g_i T_{xi}(q) \cos q - \sum_{i=nc/2+1}^{nc} g_i T_{xi}(q) \cos q - \sum_{i=1}^{nc} g_i T_{yi}(q) \text{sen}q - \sum_{i=2}^{np} P_i \Gamma_i(\text{sen}q + e_i \cos q) - p y \text{sen}q - \frac{1}{2} q L \cos q \right) \quad (4.7)$$

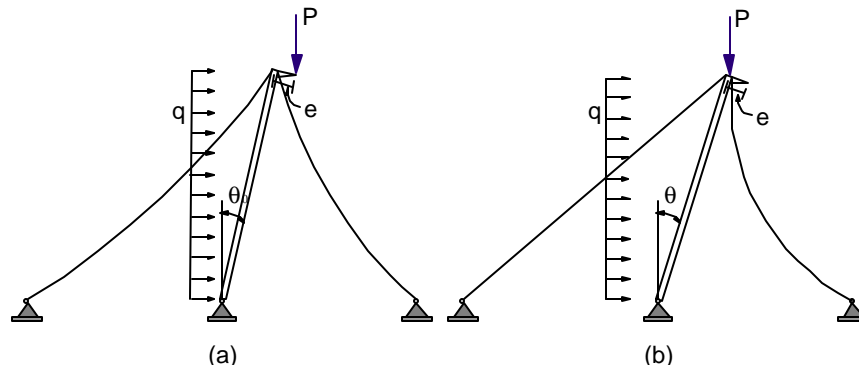


Figura 4.10: Modelo imperfeito.

Quando a torre está inicialmente em uma configuração não perturbada, como na Figura 4.10a, significa que existe uma assimetria no sistema de cabos, por exemplo, comprimentos diferentes. A Figura 4.11 apresenta o caminho pós-crítico estando o modelo com imperfeições iniciais para dois diferentes valores de α (40° e 70°). Neste caso os cabos possuem comprimentos ligeiramente diferentes ($s_1=10,1\text{m}$ e $s_2=10\text{m}$).

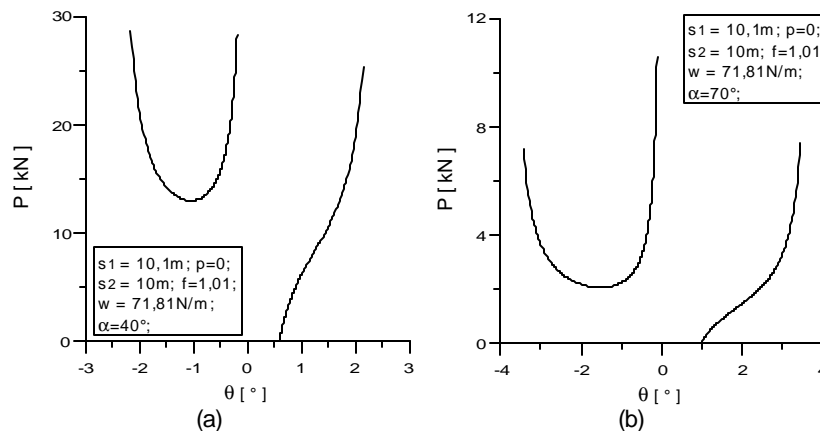


Figura 4.11: modelo com cabos com comprimentos diferentes

Pode-se observar que o comportamento é típico de um sistema imperfeito, apresentando um caminho não linear de equilíbrio onde as rotações crescem em uma taxa maior na vizinhança da carga crítica e um caminho complementar de equilíbrio.

A inclusão da carga lateral q e da excentricidade das cargas axiais, provocarão o mesmo efeito do exibido na Figura 4.11, como já visto no estudo do modelo de molas.

4.2. Representação de cabos por molas não-lineares

Em muitos trabalhos sobre o projeto de torres estaiadas recomenda-se modelar os cabos como molas lineares [14]. Em alguns trabalhos de pesquisa (ver, por exemplo, referência [10]), os cabos são modelados como molas não-lineares, facilitando assim o estudo analítico do modelo não-linear. O único problema é encontrar as constantes de molas adequadas para representar cada cabo.

Se para um determinado cabo, faz-se q variar em pequenos incrementos, de zero até 5° , por exemplo, para cada valor de q obtém-se um valor diferente para a força T do cabo que atua no ponto de fixação do cabo à barra. O conjunto de pontos obtido corresponde a uma curva que pode ser representada por um polinômio com coeficientes ajustados, por exemplo, através do método dos mínimos quadrados.

Para um dado ângulo de rotação q pode-se obter o correspondente alongamento Δl da hipotenusa do triângulo cujos catetos são as projeções horizontal e vertical do cabo (equações (3.8) e (3.9)), isto é, o segmento de reta que passa pelos pontos de fixação do cabo ao solo e do cabo a coluna. Assim, se ao invés de cabos, forem consideradas molas conectadas à barra, onde a força em cada mola irá variar segundo um polinômio determinado a partir da curva T versus Δl , os modelos de cabos e molas deverão ser praticamente equivalentes.

4.2.1. Funções que representam a variação da força do cabo

A força no cabo agindo sobre a torre é substituída pelo polinômio

$$T_1 = a_0 + a_1 \Delta l_q + a_2 \Delta l_q^2 + a_3 \Delta l_q^3 \quad (4.8)$$

A força T_1 do cabo é conhecida para cada Δl_q , que por sua vez é determinado em função da perturbação q , restando os coeficientes como incógnitas.

O método dos mínimos quadrados [15], usado para determinar os coeficientes de (4.8), consiste na resolução do sistema

$$\begin{bmatrix} \sum n & \sum \Delta l & \sum \Delta l^2 & \sum \Delta l^3 \\ \text{simétrica} & \sum \Delta l^2 & \sum \Delta l^3 & \sum \Delta l^4 \\ & \sum \Delta l^4 & \sum \Delta l^5 & \sum \Delta l^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T \\ \sum \Delta l T \\ \sum \Delta l^2 T \\ \sum \Delta l^3 T \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Os dados da curva T_1 versus Δl são manipulados de forma a garantir um comportamento igual na tração e compressão para a equação (4.8), dessa forma o coeficiente a_2 acaba se anulando.

Fazendo $F_0 = a_0$, $k_1 = a_1$ e $k_2 = a_3$, a força na mola é dada pela equação

$$F = F_0 + k_1 \Delta l_q + k_2 \Delta l_q^3 \quad (4.10)$$

Fazendo a integral da equação (4.10), obtém-se a energia interna de deformação para o modelo de molas

$$U = F_0 \Delta l_q + \frac{1}{2} k_1 \Delta l_q^2 + \frac{1}{4} k_2 \Delta l_q^4 \quad (4.11)$$

Neste trabalho, na determinação das constantes de mola, variou-se a perturbação de zero até 10° em pequenos incrementos. Nos casos em que não foi possível resolver a catenária até a perturbação de 10° , os dados que foram levados em conta na hora de calcular as constantes foram aqueles referentes ao intervalo de perturbação de zero até a metade do valor de perturbação que desse origem a uma configuração em que não era possível resolver a catenária. Isto resultou na determinação de constantes que representam melhor o cabo, quando comparadas com as determinadas a partir de um intervalo iniciado em zero e que vai até a perturbação que causa uma configuração em que não é possível resolver a catenária.

A Figura 4.12 apresenta uma comparação entre a curva T_1 versus Δl_q , obtida pela catenária e a mola não-linear dada pela equação (4.8), para várias inclinações e dois níveis de pré-tensionamento.

Pode-se perceber que a aproximação por molas apresenta bons resultados, porém, quando o cabo está numa configuração muito esticado a sua força tende para infinito, enquanto que a da mola permanece bem inferior.

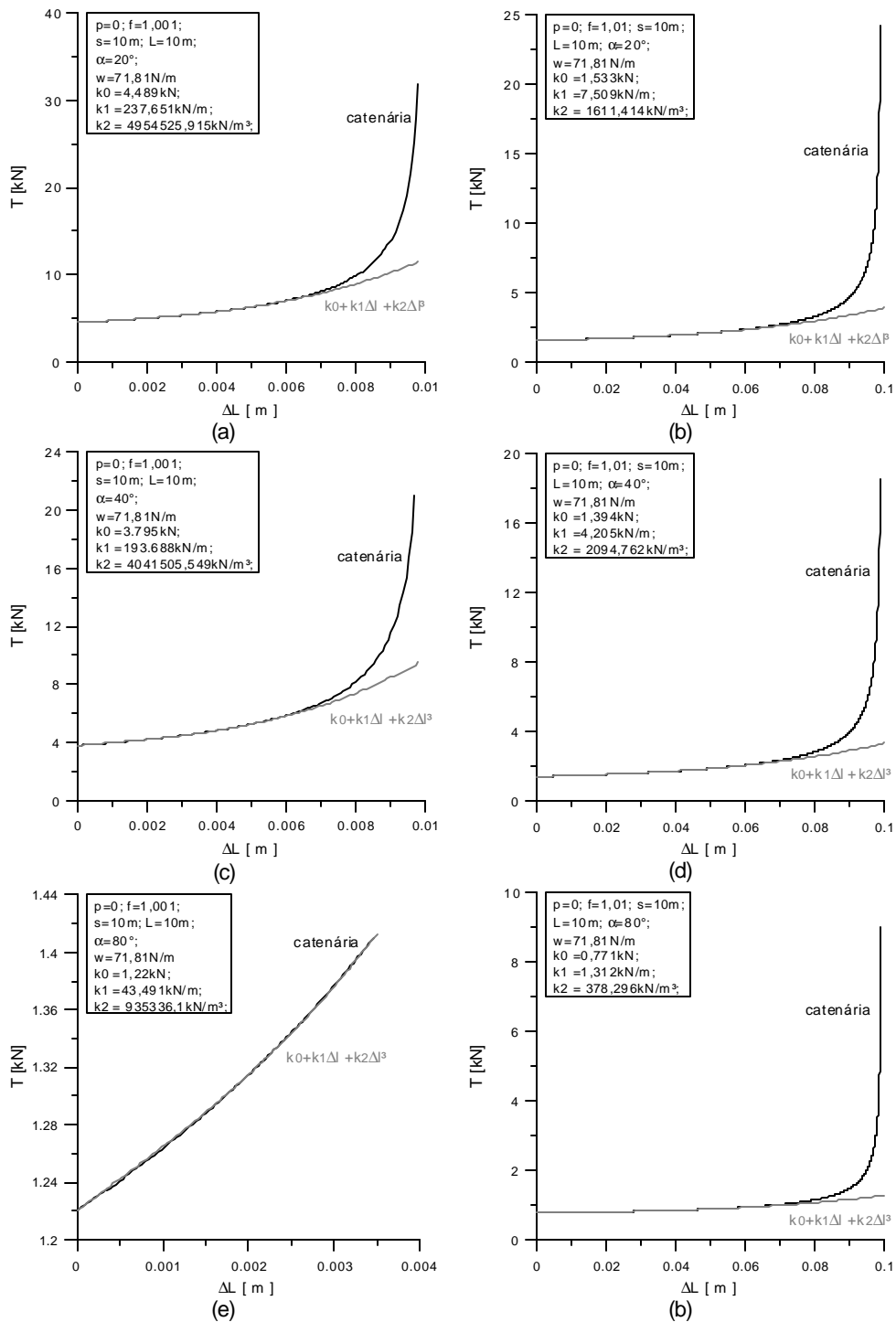


Figura 4.12: Comparação entre a força dada pela catenária e a equação (4.8) com as constantes determinadas pelo método dos mínimos quadrados.