2
Cabos em catenária

Neste capítulo é feita uma descrição do método utilizado na determinação das forças axiais que agem nas extremidades do cabo, da equação que define a forma que o mesmo assume quando sujeito a ação de seu próprio peso e de como o esforço de tração varia ao longo do comprimento. A seguir, um breve estudo sobre as deformações sofridas pelos cabos é apresentado para justificar a hipótese de inextensibilidade. Por último, apresentam-se algumas características fornecidas pelos fabricantes de cabos.

2.1. Determinação das reações sobre os pontos de fixação do cabo

Cabos são, por definição, elementos estruturais capazes de resistir somente a esforços axiais de tração. A Figura 2.1a apresenta alguns cabos de mesma seção transversal, densidade e comprimentos s distintos, presos aos pontos A e B.

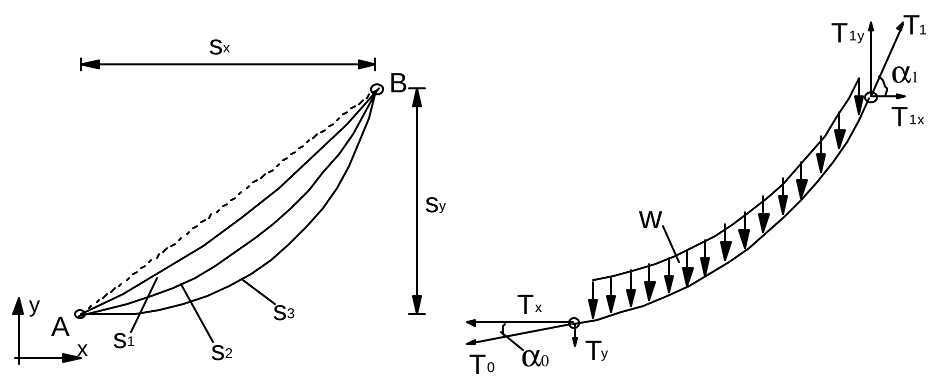


Figura 2.1: (a) Algumas configurações de cabos; (b) diagrama de corpo livre de um cabo.

Os pontos de fixação A e B, exercem sobre o cabo, reações na direção tangencial ao seu eixo, que são decompostas segundo as direções x e y (Figura 2.1b). A reação no ponto A é indicada pela força T_0 e sua direção é dada pelo ângulo a_0. No ponto B a força que age sobre o cabo, ou sobre a torre, é T_1 e sua direção é dada por a_1.

Para as três configurações indicadas na Figura 2.1a (comprimentos s_1, s_2 e s_3), tem-se três valores diferentes para as reações em A e B. Estas reações, ou esforços que os cabos exercem sobre os apoios, são justamente o que se deseja conhecer. As variáveis que influenciam estas forças são:

Projeção horizontal do cabo, s_x.

Projeção vertical do cabo, s_y;

Comprimento do cabo, *s*;

Peso do cabo por metro, *w*;

O esforço axial de tração é diferente em cada seção transversal ao longo do comprimento *s*, ao passo que a componente horizontal, T_x, se mantém constante. Isto fica evidenciado ao se considerar o equilíbrio das forças horizontais no diagrama de corpo livre da Figura 2.1b. Tem-se pois que

$$T_1 \cos a_1 - T_0 \cos a_0 = 0 \tag{2.1}$$

Assim, T_x é constante e dado por

$$T_x = T_0 \cos a_0 \tag{2.2}$$

Considerando o equilíbrio das forças segundo *y*, tem-se

$$T_1 \operatorname{sen} a_1 = T_0 \operatorname{sen} a_0 + ws \tag{2.3}$$

Dividindo a equação (2.3) por T_x e lembrando que a tangente à curva é a derivada com relação a *x* ($\tan a = dy/dx$), chega-se a:

$$\frac{dy}{dx} = \tan a_0 + \frac{ws}{T_x} \tag{2.4}$$

Sabendo que o comprimento de um elemento infinitesimal do cabo é dado por

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{2.5}$$

pode-se escrever *dx* em função de *dy* e *ds* ou *dy* em função de *dx* e *ds.*

A partir das equações (2.4) e (2.5), tem-se

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\tan a_0 + \frac{ws}{T_x}\right)^2}} \tag{2.6.a}$$

$$dy = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\tan a_0 + \frac{ws}{T_x}\right)^2}}} \tag{2.6.b}$$

Integrando ambos os lados das equações (2.6) e aplicando as condições de contorno, chega-se às equações que definem os valores das projeções s_x e s_y do comprimento do cabo, a saber

$$s_x = \frac{T_x}{w}\left(\ln\left(\tan a_0 + \frac{ws}{T_x} + \sqrt{1 + \left(\tan a_0 + \frac{ws}{T_x} \right)^2} \right) - \ln\left(\frac{sin a_0 + 1}{\cos a_0} \right) \right) \qquad (2.7.a)$$

$$s_y = \frac{\sqrt{T_x^{\ 2} + (\tan a_0 T_x + ws)^2} - Tx\sqrt{1 + \tan^2 a_0}}{w} \qquad (2.7.b)$$

As incógnitas das equações (2.7) são a componente horizontal da força no cabo, T_x, e o ângulo inicial do cabo com a horizontal a_0, uma vez que as projeções s_x e s_y, o peso ao longo do comprimento w e o comprimento s são valores conhecidos de acordo com as características do cabo e do projeto da torre.

É possível determinar T_x em (2.7.b) e inseri-lo em (2.7.a), restando apenas o ângulo a_0 como incógnita, que deve ser obtido por um processo iterativo. Os valores de a_0 e T_x encontrados devem atender às equações (2.7) com um certo grau de tolerância.

O valor de T_x obtido em 2.7.b é dado por

$$T_x = \frac{w\left(s^2 - s_y^{\ 2}\right)}{2\left(s_y\sqrt{1 + \tan^2 a_0} - s\tan a_0\right)} \qquad (2.8)$$

Após determinar a_0, calcula-se T_x, que é constante ao longo do cabo. Dispondo de a_0 e T_x obtém-se T_0 por (2.2). O valor da componente vertical, T_y, da força do cabo T_1 que atua sobre o ponto B deverá ser calculado para obter a força resultante T_1. Do somatório de forças verticais, tem-se que

$$T_y = T_0 \operatorname{sen} a_0 + ws \qquad (2.9)$$

A força que atua na extremidade B é, portanto:

$$T_1 = \sqrt{T_x^{\ 2} + T_y^{\ 2}} \qquad (2.10)$$

2.2. Determinação da inclinação inicial da catenária incompleta- a_0

O ângulo inicial a_0 que o cabo faz com a horizontal é considerado positivo no sentido anti-horário, medido a partir do eixo horizontal. Quando a_0 vale zero, a forma assumida pelo cabo é chamada de catenária completa e corresponde a uma situação limite da catenária incompleta

Valores negativos para α_0 são aceitos dependendo do relevo do terreno, isto pode ser melhor compreendido pela Figura 2.2. Na figura, tem-se um cabo em um terreno plano, e a medida em que a torre gira para a esquerda, o cabo afrouxa até tocar o solo. Dessa forma, o ponto de apoio inicialmente em A, passa a ser A' e a inclinação α_0 permanece nula no início da catenária. Neste trabalho considerou-se este segundo tipo de comportamento e, portanto, o α_0 só é determinado quando a catenária for incompleta, quando a catenária é completa o procedimento a ser seguido está indicado a seguir.

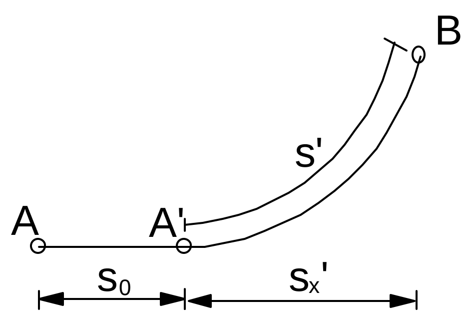


Figura 2.2: cabo em uma configuração frouxa.

Para obter α_0, deve-se passar s_x para o lado direito da equação (2.7.a), obtendo-se

$$e = \frac{T_x}{w}\left(\ln\left(\tan\alpha_0 + \frac{ws}{T_x} + \sqrt{1+\left(\tan\alpha_0 + \frac{ws}{T_x}\right)^2}\right) - \ln\left(\frac{\sin\alpha_0 + 1}{\cos\alpha_0}\right)\right) - s_x = 0 \qquad (2.11)$$

Para saber se o cabo possui a forma de catenária incompleta, faz-se inicialmente $\alpha_0 = 0$ em (2.11), e verifica-se se o erro e é maior ou menor que zero. Se e for menor que zero, quer dizer que é necessário afrouxar o cabo para que o mesmo torne-se uma catenária completa. Neste caso o cabo é uma catenária incompleta e o α_0 que produz $e = 0$ é obtido através de pequenos incrementos em α_0, até que a igualdade seja satisfeita. Para $e > 0$ significa que o cabo deve ser esticado para ser uma catenária completa, conseqüentemente o α_0 que é obtido é menor que zero. Uma outra forma de saber se o cabo tem a forma de uma catenária incompleta é sugerido em [10], através da fixação de um valor limite para T_x.

Deve-se ter um cuidado especial quando o comprimento do cabo, *s*, for próximo a $\sqrt{s_x^{\,2}+s_y^{\,2}}$, porque durante o processo iterativo, a_0 poderá assumir valores que resultam em um T_x negativo. Isto conseqüentemente produz um $e<0$, indicando assim que a_0 deve ser incrementado novamente. Para obter a solução, valores negativos para T_x não poderão ser aceitos. Deste modo, deve-se voltar ao valor anterior de a_0 e diminuir o valor do incremento e continuar o processo.

2.3.
Determinação do comprimento do cabo e sua projeção horizontal em catenárias completas

Como já mencionado, no caso em que $e>0$, o cabo terá que ser esticado para atingir a forma de catenária completa, estando portanto, frouxo. Como foi assumido que uma parte, de comprimento, s_0, do cabo frouxo está sobre o solo, a reação no apoio B irá diminuir, já que apenas uma parcela do cabo está pendurada (fig. 2.2).

Para determinar a nova reação em B, é necessário descobrir quais são os novos valores de s_x e *s*. Sabendo que tanto *s* quanto s_x diminuem de um valor s_0 e que $a_0=0$, substitui-se estes valores na equação (2.11), de onde se tem que

$$e=\frac{\left((s-s_0)^2-s_y^{\,2}\right)}{2}\ln\left(2\frac{s_y}{(s-s_0)^2-s_y^{\,2}}+\sqrt{1+\frac{4(s-s_0)^2 s_y^{\,2}}{((s-s_0)^2-s_y^{\,2})^2}}\right)-s_x+s_0 \qquad (2.12)$$

Incrementa-se s_0, partindo de zero até se obter $e=0$ na equação (2.12). Em seguida, dispondo do s_0 que faz com que $e=0$, calcula-se as reações nos apoios A' e B tendo como parâmetros $s_x'=s_x-s_0$, s_y, $s'=s-s_0$ e *w*.

2.4.
Equação da catenária

Para obter a equação da catenária em função de *x*, basta derivar a equação (2.4) em relação a *s*, dividir ambos os lados por *dx*, e substituir o valor de ds/dx dado por (2.5). A partir deste procedimento, chega-se à seguinte equação diferencial não-linear

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{w}{Tx}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0 \tag{2.13}$$

Resolvendo a equação diferencial e aplicando as condições de contorno ($y = 0$ e $dy/dx = \tan a_0$ quando $x = 0$), chega-se à seguinte solução

$$y = \frac{Tx}{w}\left(\cosh\left(\frac{wx}{Tx} + \mathrm{arcsen}h(\tan a_0)\right) - \sqrt{\tan^2 a_0 + 1}\right) \tag{2.14}$$

Detalhes poderão ser obtidos na referência [11], que chega à equação (2.13) a partir do equilíbrio de um elemento infinitesimal e apresenta ainda soluções para outros tipos de carregamento.

2.5. Variação da forca de tração ao longo do cabo

Derivando a equação (2.14) em relação a x, se obtém a inclinação da tangente, α, para cada ponto ao longo deste, ou seja

$$a = \arctan\frac{dy}{dx} \tag{2.15}$$

Como T_x é conhecido em qualquer ponto obtém-se a força T ao longo de s em função de x, a saber

$$T = \frac{T_x}{\cos a} \tag{2.16}$$

Assim:

$$T = T_x\sqrt{1 + \mathrm{senh}^2\left(\frac{wx}{Tx} + \mathrm{arcsen}h(\tan a_0)\right)} \tag{2.17}$$

Para facilitar o estudo paramétrico apresentado nos próximos capítulos, o comprimento, s, do cabo, passa a ser definido como a distância entre as extremidades da catenária (segmento pontilhado que une os pontos A e B na Figura 2.1a), multiplicado por uma variável, f. Assumiu-se chamar esta variável de fator de protensão, porém ela está diretamente relacionado com a geometria. Quanto maior for o valor de f, mais comprido é o cabo e menor é o nível de tensão a que o mesmo está sujeito. O valor 1 para f corresponde a uma situação limite e o cabo, por ser considerado inextensível, neste caso apresenta um valor infinito para o esforço de tração.

$$s = f\sqrt{s_x^{\ 2} + s_y^{\ 2}} \tag{2.18}$$

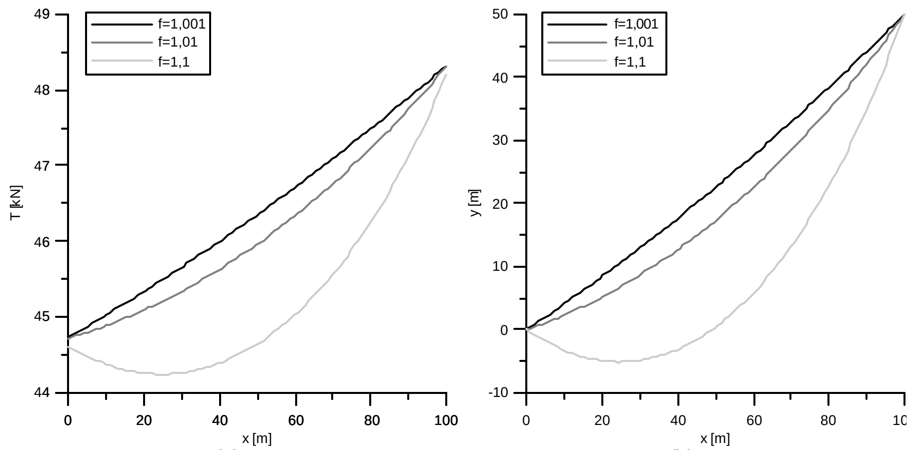
A variação de T (equação (2.17)) ao longo de x é idêntica à de y, como mostra a Figura 2.3, para alguns valores de f, tomando como exemplo um cabo com as seguintes características:

Projeção horizontal do cabo, $s_x = 100m$.

Projeção vertical, $s_y = 50m$.

Peso próprio do cabo, $w = 71{,}81 N/m$.

Nas duas curvas inferiores da Figura 2.3a foram adicionadas a y m fator de correção para facilitar a comparação das formas mostradas em (a) com aquelas mostradas em (b).



(a) (b)

Figura 2.3: (a) Variação da tração ao longo do cabo; (b) forma da catenária

2.6. Deformações dos cabos

Conforme já dito, os cabos são considerados inextensíveis, o que é uma hipótese usual na literatura, pois produz uma simplificação nas equações diferenciais do cabo. Nesta seção mostra-se que as deformações possuem um efeito muito pequeno, justificando essa hipótese.

Como a força varia ao longo do cabo, o alongamento do mesmo é dado por

$$\Delta l = \frac{1}{EA_m} \int T ds \qquad (2.19)$$

onde ds é escrito em função de x usando a relação (2.6.a) e:

E é o módulo de elasticidade longitudinal.

A_m é a área da seção transversal.

E e A_m são fornecidos pelo fabricante de acordo com o tipo do cabo.

De acordo com a referência [12], pode-se estimar em 0,25% a 0,50% a deformação de um cabo, quando o mesmo estiver submetido a um 1/5 da carga de ruptura.

A fim de verificar esta recomendação, analisou-se um cabo fixado aos pontos A e B, como na Figura 2.1a. Os resultados obtidos pela equação (2.19) foram sempre menores, até mesmo para carregamentos bem superiores a um quinto da carga de ruptura. A Tabela 2.1 exibe as deformações obtidas dividindo a equação (2.19) pelo comprimento inicial do cabo, e comparando-as com a deformação obtida quando a força no cabo é considerada constante ao longo do mesmo.

Na análise, o único carregamento considerado foi o de peso próprio. De acordo com o cabo escolhido (bitola 5/8", $w = 71{,}81 N/m$), adotou-se $E = 153{,}036 GPa$ e $A_m = 9{,}216e-4 m^2$, resultando numa carga de 247,21 kN como sendo 1/5 da carga de ruptura do cabo. Para poder atingir um esforço de tração em B aproximadamente igual a este valor precisou-se adotar cabos extremamente longos, com comprimentos bem superiores aos usuais em torres estaiadas, como mostrado na Tabela 2.1.

De agora em diante α é utilizado para representar a inclinação do segmento pontilhado que une os pontos A e B na Figura 2.1a, e não mais a inclinação da catenária. Em todos os casos aqui analisados adotou-se em (2.18) $f = 1{,}001$, o que corresponde a um cabo bem esticado.

α [°]	S [m]	$\Delta l / s$ [%]	T / EA_m [%]	T [kN]
5	550,55	0,180	0,182	256,49
20	580,58	0,179	0,185	260,63
35	650,65	0,175	0,185	261,26
50	800,80	0,170	0,186	261,92
65	1101,10	0,155	0,180	254,32
85	3003,00	0,111	0,187	263,64

Tabela 2.1: Deformação do cabo em função da inclinação da reta que passa pelos pontos extremos do cabo, α.

Considerando que os cabos em dimensões mais usuais apresentam menores deformações devido ao menor carregamento de peso próprio que terão que suportar, pode-se desprezar as deformações nos cabos.

Um aspecto interessante que foi observado, mantendo-se s constante, foi que, à medida que a inclinação da hipotenusa diminui, f terá que ir se aproximando cada vez mais de 1 para que a resposta seja uma catenária incompleta, isto é, para que o ângulo da catenária no ponto A seja diferente de zero.

2.7. Principais características dos cabos de aço

As informações e todas as figuras contidas nesta seção foram retiradas da referência [12].

A Figura 2.4 exibe um modelo onde se explica a nomenclatura e o processo usado na construção de cabos de aço. O tipo da construção revela quantas pernas tem o cabo, quantos arames possuem cada perna, etc. Os cabos de aço são catalogados de acordo com essas características.

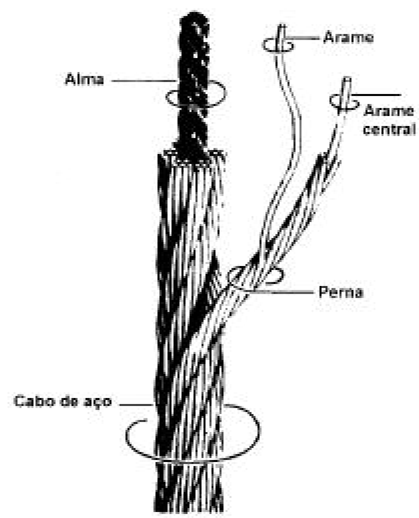


Figura 2.4: Nomenclatura empregada na fabricação de cabos de aço, figura retirada da referência [12].

A carga de serviço máxima que um cabo pode suportar é a carga de ruptura divida por um fator de segurança. O fator de segurança que este fabricante recomenda para torres estaiadas é de três a quatro.

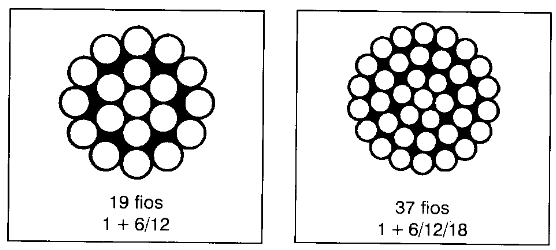
Um aspecto importante que é mencionado pelo fabricante é a deformação produzida pelo acomodamento das pernas do cabo em relação a sua alma. Ela é de caráter permanente e inicia-se assim que o cabo é solicitado, geralmente ocorrendo nos primeiros dias de serviço. O alongamento do cabo devido a esta acomodação pode chegar a 0,75% do comprimento, para cabos comuns.

A deformação estrutural pode ser quase totalmente removida por um pré-tensionamento no cabo. Esta tensão deve ser maior que a tensão de serviço do cabo e menor que a tensão limite de proporcionalidade do mesmo. Cabos préesticados e cabos usados possuem modulo de elasticidade aproximadamente 20% maior que um cabo novo que não foi pré-esticado.

A carga limite de proporcionalidade de um cabo vale aproximadamente 55% a 60% da carga de ruptura mínima.

Para os modelos desenvolvidos neste trabalho adotou-se um cabo de construção 6x19, galvanizado e pré-esticado. A tabela do fabricante que apresenta as características das cordoalhas recomendadas para torres estaiadas está reproduzida na Figura 2.5.

CORDOALHAS DE 19 E 37 ARAMES - TIRANTES
19 AND 37 WIRES STRAND - GUYS



Diâmetro *Diameter*		Construção da cordoalha *Strand construction*	Massa aproximada em kg/m *Approximate mass in kg/m*	Carga de ruptura mínima efetiva em tf *Minimum breaking load in tf*	
mm *mm*	Polegada *Inch*			140-160 kgf/mm²	155-175 kgf/mm²
13,0	1/2"	1x19	0,77	-	13,0
14,5	9/16"	1x19	0,98	-	17,0
16,0	5/8"	1x19	1,22	-	21,0
19,0	3/4"	1x37	1,76	26,5	29,0
20,2	13/16"	1x37	1,98	29,0	32,8
22,0	7/8"	1x37	2,40	36,2	40,0
26,0	1"	1x37	3,12	46,6	50,0
29,0	1.1/8"	1x37	3,96	60,0	66,00

O valor da massa indicado na tabela é referencial, podendo variar em função da tolerância do passo da cordoalha.

Figura 2.5: Tabela de cabos para torres estaiadas, referência [12].