

## 4

### Método 'fast multipole' para uma solução fundamental genérica (GFMM)

Neste capítulo será apresentada uma formulação genérica do FMM 2D, introduzida por Dumont e Peixoto (2014). Esta se difere da apresentada no capítulo 3 por ser aplicável diretamente para qualquer solução fundamental, ao contrário da formulação apresentada na literatura, que necessita do desenvolvimento de uma técnica de expansão para cada tipo de solução fundamental.

#### 4.1.

##### Definições básicas

$z - z_0$  = diferença entre o ponto fonte  $z_0$  e o ponto campo  $z$  ;

$z_c$  = ponto a partir do qual se desenvolve a expansão da solução fundamental em torno do ponto campo. Também são introduzidas expansões em torno de polos mais distantes  $z_{c^k}$ ,  $k=1,2,\dots,n_c$  (onde, por definição  $z_{c^0} \equiv z_c$ , sendo este o polo mais próximo ao ponto campo).

$z_L$  = ponto a partir do qual se desenvolve a expansão em torno do ponto fonte. Também são introduzidas expansões em torno de polos mais distantes  $z_{L^l}$ ,  $l=1,2,\dots,n_L$  (onde, por definição  $z_{L^0} \equiv z_L$ , sendo este o polo mais próximo ao ponto fonte).

$f(z - z_0)$  representa uma solução fundamental genérica.

## 4.2. Expansão da solução fundamental

Seja uma solução fundamental  $f(z - z_0)$  definida em termos de números complexos em um espaço 2D. A expansão em torno de um ponto  $z_{c^{nk}}$  próximo a um ponto campo  $z$  e distante de um ponto fonte  $z_0$  (Figura 11) é dada por

$$f(z - z_0) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{q!} (z - z_{c^{nk}})^q D^{(q)} \left( f(z_{c^{nk}} - z_0) \right) + O(z - z_{c^{nk}})^{n+1} \quad (4.1)$$

onde  $D^{(0)} \left( f(z_{c^{nk}} - z_0) \right) = f(z_{c^{nk}} - z_0)$  e  $D^{(q)} \left( f(z_{c^{nk}} - z_0) \right) = \frac{\partial^{(q)} f(z_{c^{nk}} - z_0)}{\partial (z_{c^{nk}} - z_0)^{(q)}}$

A partir da notação introduzida por Dumont e Peixoto (2014), a Equação (4.1) pode ser escrita na forma:

$$f(z - z_0) = \sum_{q=1}^{n+1} fac_q P_q(z - z_{c^{nk}}) Q_q(z_{c^{nk}} - z_0) + O(z - z_{c^{nk}})^{n+1} \quad (4.2)$$

onde

$$fac = \left[ \frac{1}{0!} \quad \frac{1}{1!} \quad \frac{1}{2!} \quad \frac{1}{3!} \quad \dots \right] \quad (4.3)$$

$$P(Z) = [1 \quad Z \quad Z^2 \quad Z^3 \quad \dots] \quad (4.4)$$

$$Q(Z) = \left[ f(Z) \quad \frac{\partial f(Z)}{\partial Z} \quad \frac{\partial^2 f(Z)}{\partial Z^2} \quad \frac{\partial^3 f(Z)}{\partial Z^3} \quad \dots \right] \quad (4.5)$$

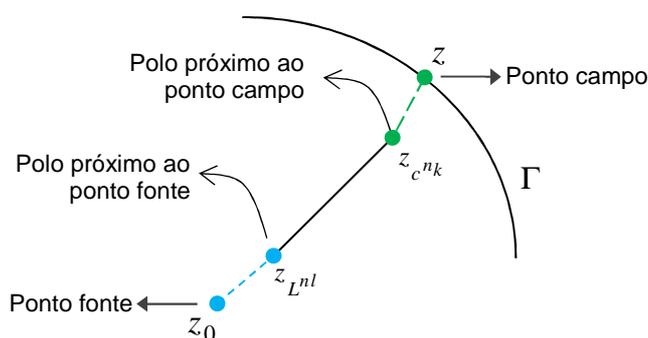


Figura 11 - Esquema genérico da expansão do ponto campo  $Z$  em torno do polo  $z_{c^{nk}}$  e da expansão do ponto fonte  $Z_0$  em torno de um polo  $z_{L^{nl}}$  próximo a este e distante do ponto campo  $Z$ .

Na Equação (4.2), verifica-se que as variáveis relativas aos pontos campo e fonte tornaram-se independentes, o que será de grande valor ao aplicar o FMM ao BEM, conforme será visto adiante. Vale notar que o erro proveniente desta expansão está associado à distância entre o ponto campo  $z$  e o polo de expansão.

A solução fundamental  $f(z - z_0)$  pode ser expandida em torno de um ponto  $z_L$  próximo ao ponto fonte  $z_0$  e distante do ponto campo  $z$  (Figura 11).

Esta expansão envolverá apenas a parcela  $Q_i(z_{c^{nk}} - z_0)$ , uma vez que é a única parcela em função do ponto fonte. A expansão desta parcela resulta em

$$\begin{aligned} Q_q(z_{c^{nk}} - z_0) &= D^{(q)}\left(f(z_{c^{nk}} - z_0)\right) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (z_{L^{nl}} - z_0)^j D^{(q+j)}\left(f(z_{c^{nk}} - z_{L^{nl}})\right) + O(z_{L^{nl}} - z_0)^{n+1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

que pode ser escrita na forma:

$$Q_q(z_{c^{nk}} - z_0) = \sum_{j=1}^{n+1} fac_q P_q(z_{L^{nl}} - z_0) Q_{q+j-1}(z_{c^{nk}} - z_{L^{nl}}) + O(z_{L^{nl}} - z_0)^{n+1} \quad (4.7)$$

Substituindo a expansão apresentada anteriormente na Equação (4.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} f(z - z_0) &= \sum_{q=1}^{n+1} fac_q P_q(z - z_c) \sum_{j=1}^{n+1} fac_j P_j(z_L - z_0) Q_{q+j-1}(z_c - z_L) \\ &\quad + O(z - z_c)^{n+1} + O(z_L - z_0)^{n+1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vale notar que o erro proveniente desta expansão está associado à distância entre o ponto campo  $z$  e o ponto fonte  $z_0$  com os seus respectivos polos de expansão, o que ressalta a importância dos polos estarem próximos aos pontos que são expandidos para ele.

É de extrema importância notar que o vetor  $Q(Z)$  é o único que depende da solução fundamental  $f(z - z_0)$ , sendo facilmente obtido através de derivação, conforme apresentado na Equação (4.5), mostrando o poder desta formulação no que diz respeito a sua generalização para diversos problemas.

### 4.3. Expansões sucessivas

Sucessivas expansões em torno dos pontos fonte e campo envolvem apenas a expansão do vetor  $P(Z)$ , uma expansão exata. Para expansão do ponto campo  $z$  em torno de um novo ponto  $z_{c,k}$ , tem-se:

$$P_q(z - z_{c,k}) = \sum_{j=1}^q C_{j,q+1-j} P_j(z - z_{c,k-1}) P_{q+1-j}(z_{c,k-1} - z_{c,k}) \quad (4.9)$$

onde  $P(z_{c,k-1} - z_{c,k})$  é avaliado com relação à distância entre dois polos de níveis consecutivos.  $P(z - z_{c,k-1})$  é avaliado recursivamente pela Equação (4.9) até que  $z_{c,k-1} = z_{c,0}$ , ou seja, que este seja equivalente à expansão entre o ponto campo e seu polo mais próximo.  $C_{qj}$  é uma matriz de constantes.

$$C_{qj} = \begin{cases} 1 & \text{se } p=1 \text{ ou } j=1 \\ C_{q-1,j} + C_{q,j-1} \end{cases} \quad (4.10)$$

A expansão sucessiva em torno do ponto fonte se escreve como

$$P_q(z_{L^k} - z_o) = \sum_{j=1}^q C_{j,q+1-j} P_j(z_{L^{k-1}} - z_o) P_{q+1-j}(z_{L^k} - z_{L^{k-1}}) \quad (4.11)$$

onde  $P(z_{L^k} - z_{L^{k-1}})$  é avaliado com relação à distância entre dois polos de níveis consecutivos.  $P(z - z_{c,k-1})$  é avaliado recursivamente pela Equação (4.11) até que  $z_{L^{k-1}} = z_{L^0}$ , ou seja, que este seja equivalente a expansão entre o ponto fonte e seu polo mais próximo.  $C_{qj}$  é a matriz de constantes definida na Equação (4.10).

### 4.4. Aplicação do GFMM no BEM para um problema de potencial

Nesta seção será aplicado o GFMM ao BEM para um problema de potencial 2D. Ao longo dos desenvolvimentos serão explicadas as vantagens da aplicação das expansões apresentadas anteriormente neste capítulo.

#### 4.4.1. Desenvolvimento

Para um problema de potencial a matriz  $\mathbf{G}$  do CBEM é calculada, em coordenadas complexas, na forma:

$$G_{ml} = \int_{\Gamma} u_m^*(z - z_o) t_l(z) d\Gamma(z) \quad (4.12)$$

onde  $u_m^*(z - z_o)$  representa a solução fundamental em termos de potencial,  $t_l(z)$  é função de interpolação do fluxo e  $\Gamma(z)$  é o contorno sobre o qual será realizada a integração. O subscrito  $m$  refere-se ao nó no qual está o ponto fonte e  $l$  faz referência ao ponto campo onde será avaliado o efeito de uma fonte unitária no nó  $m$ .

Substituindo nesta equação a solução fundamental com as expansões em torno do ponto campo (4.2),

$$G_{ml} = \int_{\Gamma} t_l(z) \sum_{q=1}^{n+1} \underline{fac_q P_q(z - z_{c, nk})} Q_q(z_{c, nk} - z_o) d\Gamma(z) \quad (4.13)$$

onde

$$Q_q(z) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \ln(z) \quad \frac{1}{z} \quad -\frac{1}{z^2} \quad \frac{2}{z^3} \quad \dots \right] \quad (4.14)$$

A partir da Equação (4.13), observa-se que apenas os termos sublinhados são dependentes do ponto campo  $z$ , ou seja, estes são os únicos termos a serem integrados sobre o elemento. Por tanto, os demais podem ser retirados da integral, resultando em:

$$G_{ml} = \sum_{q=1}^{n+1} \underline{fac_q} Q_q(z_{c, nk} - z_o) \tilde{G}_{ql} \quad (4.15)$$

com

$$\tilde{G}_{ql} = \int_{\Gamma} P_q(z - z_{c, nk}) t_l(z) d\Gamma(z) \quad (4.16)$$

onde o índice  $q$  faz referência ao índice do somatório apresentado na Equação (4.13). Esta integração está desenvolvida na seção 4.4.2.

A Equação (4.15) mostra uma das grandes vantagens da aplicação do FMM ao BEM. A separação das variáveis relativas aos pontos campo e fonte permite que as integrais sejam avaliadas apenas uma vez para cada ponto campo,

independentemente do ponto fonte, desde que estes estejam suficientemente distantes uns dos outros. O critério de distância será abordado posteriormente.

Caso sejam consideradas expansões em torno do ponto fonte, a Equação (4.15) passa a se apresentar como

$$G_{ml} = \sum_{q=1}^{n+1} fac_i \left( \sum_{j=1}^{n+1} fac_j P_j \left( z_{L^{nl}} - z_o \right) Q_{q+j-1} \left( z_{c^{nk}} - z_{L^{nl}} \right) \right) \tilde{G}_{ql} \quad (4.17)$$

onde  $z_{c^{nk}}$  e  $z_{L^{nl}}$  se referem aos polos campo e fonte, respectivamente, mais altos da expansão. Esta equação é obtida pela expansão do vetor  $Q(z)$  com relação ao ponto fonte, conforme foi apresentado na Equação (4.7).

Para aplicação do FMM no cálculo da matriz  $\mathbf{H}$  é necessário a expandir a solução fundamental em termos de fluxo. A expressão, em coordenadas complexas, para o cálculo da matriz  $\mathbf{H}$ , para um problema de potencial,

$$H_{mf} = \int_{\Gamma} q_m^* (z - z_o) \eta(z) u_f(z) d\Gamma(z) \quad (4.18)$$

onde  $q_m^* (z - z_o)$  representa a solução fundamental em termos de fluxo,  $u_f(z)$  é função de interpolação do potencial e  $\Gamma(z)$  é o contorno sobre o qual será realizada a integração. O subscrito  $m$  refere-se ao nó no qual está o ponto fonte e  $f$  ao ponto campo.

A expansão da solução fundamental em termos de fluxo pode ser facilmente obtida pela forma truncada da expansão da solução fundamental em termos de potencial apresentada na Equação (4.2):

$$\begin{aligned} q^* (z - z_o) &= \frac{\partial u^* (z - z_o)}{\partial z} \eta(z) \\ &= \sum_{i=2}^{n+2} fac_{q-1} P_{q-1} \left( z - z_{c^{nk}} \right) Q_q \left( z_{c^{nk}} - z_o \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Substituindo a Equação (4.19) na (4.18), obtém-se:

$$H_{mf} = \int_{\Gamma} \sum_{q=2}^{n+2} \underline{fac_{q-1} P_{q-1} \left( z - z_{c^{nk}} \right) Q_q \left( z_{c^{nk}} - z_o \right)} \underline{\eta(z) u_f(z)} d\Gamma(z) \quad (4.20)$$

Uma vez que apenas os termos sublinhados são dependentes de  $z$ , devendo ser integrados ao longo do elemento, os demais termos podem ser retirados da integral, resultando em

$$H_{mf} = \sum_{q=2}^{n+2} fac_{q-1} Q_q(z_{c,nk} - z_0) \cdot \widetilde{H}_{qf} \quad (4.21)$$

com

$$\widetilde{H}_{qf} = \int_{\Gamma} P_{q-1}(z - z_{c,nk}) \eta(z) u_f(z) d\Gamma(z) \quad (4.22)$$

onde o índice  $q$  faz referência ao índice do somatório apresentado na Equação (4.21). Esta integração está desenvolvida na seção 4.4.2.

A partir da Equação (4.21) nota-se que, assim como para o cálculo da matriz  $\mathbf{G}$ , a separação das variáveis relativas aos pontos campo e fonte permite que as integrais sejam avaliadas uma vez para cada ponto campo, independentemente do ponto fonte, desde que estes estejam suficientemente distantes daqueles.

Caso sejam consideradas expansões relacionadas ao ponto fonte, a Equação (4.21) passa a se apresentar como

$$H_{mf} = \sum_{q=2}^{n+2} fac_{q-1} \sum_{j=1}^{n+1} fac_j P_j(z_{L^{nl}} - z_0) Q_{q+j-1}(z_{c,nk} - z_{L^{nl}}) \widetilde{H}_{qf} \quad (4.23)$$

Na Figura 12 são apresentados dois esquemas. O primeiro com expansões em torno do ponto fonte e o segundo sem estas expansões.

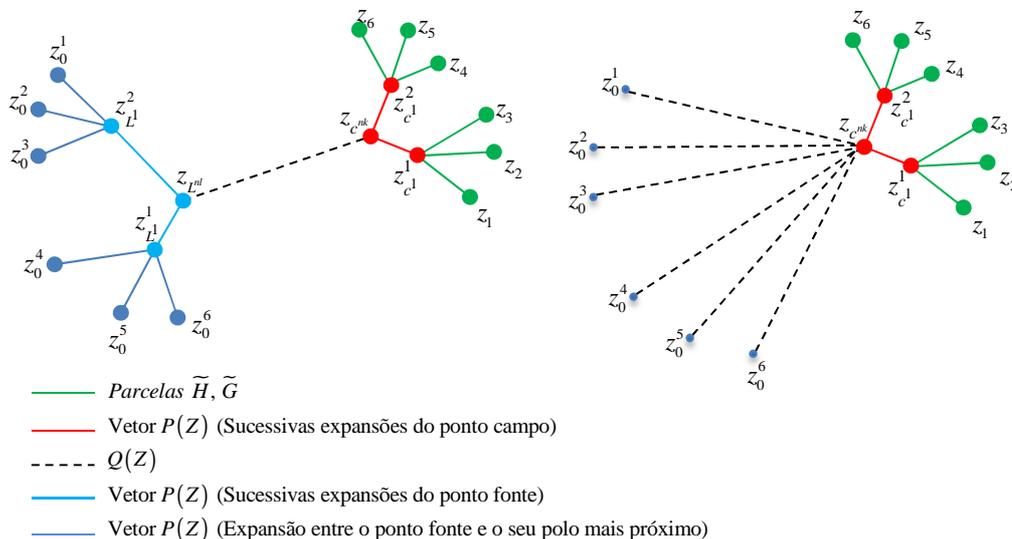


Figura 12 - Esquema das expansões. Cada linha representa uma parcela da expansão. O esquema a direita representa as expansões considerando expansões do ponto fonte e o da direita não às considera.

#### 4.4.2. Integração no GFMBEM

Como visto anteriormente, apenas as parcelas  $\tilde{\mathbf{G}}$  e  $\tilde{\mathbf{H}}$  serão integradas ao longo do contorno. Por conveniência, equações (4.16) e (4.22) serão reescritas a seguir:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}}_{ql} &= \int_{\Gamma_{seg}} P_q(z - z_c) t_l(z) d\Gamma(z), \\ \tilde{\mathbf{H}}_{qf} &= \int_{\Gamma_{seg}} P_{q-1}(z - z_c) \eta(z) u_f(z) d\Gamma(z)\end{aligned}\quad (4.24)$$

Nestas equações  $z$  representa a geometria do segmento a ser integrado, expressa em coordenadas complexas na forma:

$$z = N_k(\xi) z_k \quad \text{onde } k = 1 \dots te \quad (4.25)$$

onde  $N_k$  representa as funções de forma do nó  $k$ ,  $Z_k$  representa as coordenadas complexas do nó  $k$  e os índices repetidos têm o significado de somatório.

Na parcela relativa à matriz  $\mathbf{H}$ ,  $u_f(z)$  surge da interpolação dos potenciais  $u(z)$  ao longo do contorno:  $u(z) = u_f(z) d_f$ , tendo esta equação suporte local e  $d_f$  representa os valores nodais do potencial. Em uma representação isoparamétrica, os valores de potencial serão representado pelas mesmas funções que definem a geometria.

O vetor unitário normal ao contorno é representado, em coordenadas complexas,

$$\vec{\eta}(z) = \frac{1}{|J|} \frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{|J|} \frac{d(N_l(\xi) z_l)}{d\xi} = \frac{N'_l(\xi) z_l}{|J|} \quad (4.26)$$

onde  $N'_l$  representa a derivada da função de forma do nó  $l$  e  $|J|$  é o Jacobiano que será cancelado com proveniente da mudança para a variável paramétrica, tal que  $d\Gamma = |J| d\xi$ .

Para integração da parcela  $\tilde{\mathbf{G}}$ , as funções de forma usuais  $t_l$ , apresentadas na Equação (4.16), serão substituídas por  $t_l |J|_{(em l)} / |J|$ , conforme a Equação (2.19).

No contexto do GFMBEM, esta substituição se prova valiosa, uma vez que o integrando apresentado na Equação (4.24) passa a ser inteiramente polinomial, independentemente da ordem do elemento, o que não seria possível ao se lidar com elementos cúbicos e quadráticos.

Com as considerações expostas acima, a parcela  $\widetilde{\mathbf{G}}$  e  $\widetilde{\mathbf{H}}$  passa a se apresentar na forma:

$$\widetilde{G}_{ql} = \int_{\xi} P_q(N_k(\xi)z_k - z_c) N_l(\xi) |J|_l d\xi \quad (4.27)$$

$$\widetilde{H}_{qf} = \int_0^1 P_{q-1}(N_k(\xi)z_k - z_c) N'_l(\xi) z_l N_f(\xi) d\xi \quad (4.28)$$

estas integrações são inteiramente polinomiais e independentes da solução fundamental, podendo inclusive ser previamente calculadas analiticamente, característica essa que será explorada no tópico a seguir. Nas equações acima, os índices repetidos têm significado de somatório.

#### 4.4.3. Tabelas de Integração

Conforme foi visto anteriormente, as integrações necessárias para o cálculo das matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  se tornam independentes dos pontos fonte, podendo ser calculadas apenas uma vez para cada ponto campo. Além disto, as integrações passam a ser polinomiais, uma vez que envolvem basicamente os vetores  $P(\xi)$  e  $N(\xi)$ .

Uma vez que as integrações são polinomiais, estas passam a apresentar soluções analíticas, não necessitando do emprego de integrações numéricas, como no caso do CBEM. A partir disto, Dumont e Peixoto (2014) propuseram a utilização de tabelas de integrações, as quais fornecem o resultado das parcelas  $\widetilde{\mathbf{G}}$  e  $\widetilde{\mathbf{H}}$  apresentadas nas Equações (4.16) e (4.22). Uma vez que o vetor  $P(z)$  é completamente independente da solução fundamental, estas tabelas podem ser utilizadas independentemente da natureza do problema estudado.

Foram desenvolvidas tabelas de integração para elementos lineares, quadráticos e cúbicos integrados no intervalo  $[0,1]$ . As funções de forma de cada um destes elementos definidas no intervalo  $[0,1]$ , são

$$\begin{aligned}
N^l &= [1 - \xi, \xi] \\
N^q &= [2\xi^2 - 3\xi + 1, -4\xi^2 + 4\xi, 2\xi^2 - \xi] \\
N^c &= \left[ -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1, \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi, -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi, \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \right]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde os índices  $l$ ,  $q$  e  $c$  significam linear, quadrático e cúbico, respectivamente, e suas derivadas são:

$$\begin{aligned}
N^{l'} &= [-1, 1] \\
N^{q'} &= [4\xi - 3, -8\xi + 4, 4\xi - 1] \\
N^{c'} &= \left[ -\frac{27}{2}\xi^2 + 18\xi - \frac{11}{2}, \frac{81}{2}\xi^2 - 45\xi + 9, -\frac{81}{2}\xi^2 + 36\xi - \frac{9}{2}, \frac{27}{2}\xi^2 - 9\xi + 1 \right]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

A partir das Equações (4.27) e (4.28), pode-se notar que os termos a serem integrados são polinômios da diferença entre as coordenadas nodais para o polo mais próximo ( $z_{c0}$ ). Portanto são introduzidas as variáveis  $\Delta_j$ ,

$$\Delta_j = z_j - z_{c0}, \text{ com } j = 1 \dots oe + 1 \tag{4.31}$$

onde o índice  $j$  faz referencia ao nó do elemento e  $oe$  refere-se à ordem do elemento, podendo ser igual a 1, 2 ou 3 para elemento linear, cúbico ou quadrático, respectivamente. Na Figura 13 está apresentado um esquema para facilitar a compreensão do uso da variável  $\Delta_j$ , exemplificado para o caso de um elemento cúbico.

Os únicos dados de entrada necessários para obter o resultado da integração são as variáveis  $\Delta_j$ . As tabelas de integração irão fornecer na forma de um vetor o resultado da integração das parcelas  $\widetilde{\mathbf{G}}$  e  $\widetilde{\mathbf{H}}$ , sendo que no caso da primeira ainda será necessário multiplicar este vetor por  $|J|_{(eml)}$ .

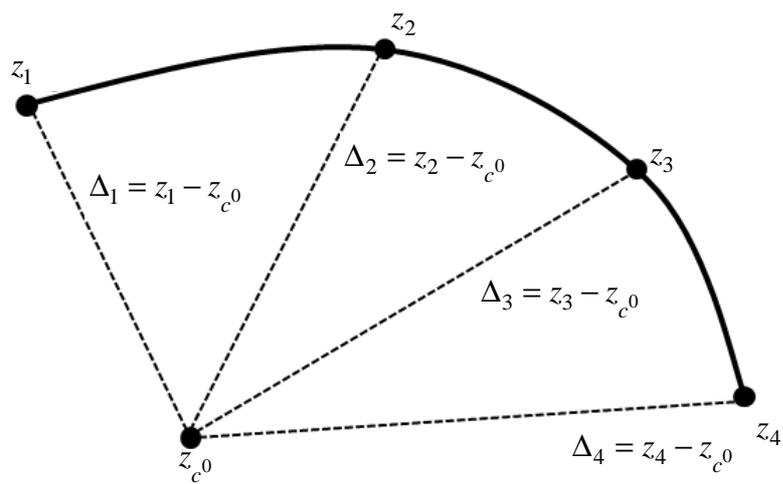


Figura 13 - Elemento isoparamétrico cúbico e o polo de expansão  $z_{c,0}$  (Peixoto, 2014).