

2

Método dos elementos de contorno (BEM)

Neste capítulo será apresentada a formulação do método convencional consistente dos elementos de contorno (CCBEM) (Dumont, 2010), e do método expedito dos elementos de contorno (EBEM) (Dumont e Aguilar, 2012).

2.1.

Formulação consistente do método convencional dos elementos de contorno (CCBEM) para elasticidade

O método consistente dos elementos de contorno se diferencia do método convencional de colocação dos elementos de contorno (CBEM) por realizar uma adequada consideração das constantes de corpo rígido, além de apresentar uma nova proposição vantajosa para a integração da matriz \mathbf{G} . O desenvolvimento apresentado a seguir está baseado em Dumont (2010) e Oliveira (2004).

Partindo da forma forte do princípio da energia potencial total estacionária, tem-se a equação

$$\delta \Pi = -\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji} \eta_j - t_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (2.1)$$

para um corpo linear elástico submetido a forças b_i no domínio Ω e forças \bar{t}_i no contorno Γ_{σ} , onde σ_{ji} é o tensor de tensões. O campo de tensões satisfaz o equilíbrio no domínio e no contorno, além de os deslocamentos \bar{u}_i serem prescritos em Γ_u , ou seja

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_i &= 0 & \text{em } \Omega & \quad (a) \\ \sigma_{ij} \eta_j &= \bar{t}_i & \text{em } \Gamma_{\sigma} & \quad (b) \\ u_i &= \bar{u}_i & \text{em } \Gamma_u & \quad (c) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde η_j representa as componentes do vetor unitário normal ao contorno segundo as direções dos eixos das coordenadas, representadas por j . Também foi suposto

que o tensor de tensões σ_{ji} é simétrico ($\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$) e satisfaz a relação constitutiva

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \quad (2.3)$$

Formulando o problema para um campo de soluções fundamentais δu_i^* , em termos de resíduos ponderados, obtemos uma equação menos restritiva que a Equação (2.1)

$$-\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji} \eta_j - t_i) \delta u_i^* d\Gamma = 0 \quad (2.4)$$

Integrando-se duas vezes por partes a Equação (2.4), aplicando o teorema de Green duas vezes e através da relação constitutiva apresentada na Equação (2.3), da qual se obtém $\sigma_{ji} \delta u_{i,j}^* = u_{k,l} c_{jikl} \delta u_{i,j}^* = u_{k,l} \delta \sigma_{kl}^*$, chega-se à expressão

$$\int_{\Gamma} (\delta \sigma_{ji}^* \eta_j u_i) d\Gamma - \int_{\Omega} (\delta \sigma_{ji,j}^* u_i) d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i^* d\Gamma \quad (2.5)$$

As soluções fundamentais em termos de tensões ($\delta \sigma^*$) e deslocamentos (δu^*) podem ser escritas em termos de parâmetros arbitrários de forças virtuais p_m^* como

$$\delta \sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* \delta p_m^* \quad (2.6)$$

$$\delta u_i^* = (u_{im}^* + u_{is}^r c_{sm}) \delta p_m^* \quad (2.7)$$

onde u_{is}^* corresponde aos n^r deslocamentos de corpo rígido, com $s = 1..n^r$, C_{sm} são constantes arbitrárias de corpo rígido e o índice m representa os pontos de aplicação da carga e a direção de δp_m^* .

A função σ_{ijm}^* apresentada na Equação (2.6) pode ser normalizada de modo que, para um certo domínio Ω_0 que contenha δp_m^* ,

$$\int_{\Omega_0} \sigma_{jim,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma_0} \sigma_{jim}^* \eta_j = -\delta_{im} \quad (2.8)$$

onde δ_{im} é o delta de Kronecker e Γ_0 é o contorno de Ω_0 . Utilizando a Equação (2.8), o segundo integrando da Equação (2.5) pode ser escrito na forma

$$\int_{\Omega} (\delta \sigma_{ji,j}^* u_i) d\Omega = -u_m \delta p_m^* \quad (2.9)$$

Aplicando as Equações (2.6), (2.7) e a igualdade apresentada na Equação (2.9) à Equação (2.5), tem-se

$$u_m = \int_{\Omega} b_i \delta u_{im}^* d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} t_i \delta u_{im}^* d\Gamma + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_i u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) é idêntica à identidade de Somigliana, exceto pelos termos multiplicados por C_{sm} . Tais termos são nulos para o caso de forças equilibradas. No entanto, quando há aproximação isso não é verdade, e os resultados apresentam erros proporcionais à C_{sm} (Dumont, 2010).

Usando aproximações nos contornos Γ_u e Γ_{σ} , podemos escrever

$$u_i = u_{in} d_n \quad \text{onde } u_{in} = \delta_{im} \quad (2.11)$$

$$t_i = t_{il} t_l \quad (2.12)$$

onde d_n é o vetor de deslocamentos nodais, t_l são atributos das forças de superfície ligados ao vetor normal à superfície (η_i), u_{in} e t_{il} são as funções de interpolação de d_n e t_l , respectivamente, com suporte local.

Em geral, é utilizada uma formulação isoparamétrica, em que a geometria do contorno é descrita pelas mesmas funções u_{in} que descrevem os deslocamentos. Além disso, usam-se também as mesmas funções polinomiais para t_{il} e u_{in} .

Aplicando na identidade Somigliana, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n = & \left(\int_{\Gamma} t_{il} u_{im}^* d\Gamma \right) t_l + \int_{\Omega} b_i u_{im} d\Omega + C_{sm} \\ & + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{il} u_{is}^r d\Gamma t_l + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

que é a mesma expressão obtida no CBEM, exceto pelos termos de deslocamentos de corpo rígido e que pode ser escrita de forma matricial como

$$\mathbf{Hd} = \mathbf{Gt} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Gamma} t_{il} \delta u_{im}^* d\Gamma \quad (2.16)$$

$$\mathbf{b} = \int_{\Omega} b_i \delta u_{im}^* d\Omega \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{il} t_l u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \quad (2.18)$$

O termo ε corresponde aos resíduos devidos à magnitude dos deslocamentos de corpo rígido e à aproximação da solução fundamental. Este termo é uma das diferenças entre o método consistente dos elementos de contorno e a sua forma inconsistente apresentada em Brebbia (1978) e Trevelyan (1994).

Para integração da matriz \mathbf{G} , propõe-se que as funções de forma usuais t_{il} apresentadas na Equação (2.12) sejam substituídas por

$$t_{il} \leftarrow \frac{t_{il} |J|_{(eml)}}{|J|} \quad (2.19)$$

onde $|J|_{(eml)}$ é o valor do Jacobiano no ponto caracterizado pelo subscrito le e $|J|$ é o Jacobiano.

Esta substituição proposta por Dumont (2010) permite que o Jacobiano proveniente da transformação de coordenadas da integração ($d\Gamma = |J|d\xi$), seja cancelado com o apresentado no denominador da Equação (2.19). Esta modificação faz com que a integração da matriz \mathbf{G} se torne mais simples.

A partir da aplicação das condições contorno e troca das colunas das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , o sistema de equações apresentado na Equação (2.14), pode ser escrito na forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (2.20)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz corresponde a matriz de coeficientes, \mathbf{x} é o vetor de incógnitas a serem calculadas, e o vetor \mathbf{y} é o resultado da multiplicação dos coeficientes pelas suas respectivas condições de contorno.

2.1.1. CBEM aplicado a um problema de potencial

A solução fundamental normalizada (fonte unitária) para um problema de potencial bidimensional em meio isotrópico homogêneo é expressa, a menos de uma constante, como

$$u^* = \frac{-\ln(\Delta r)}{2\pi k} \quad (2.21)$$

onde Δr é a distância entre o ponto campo e fonte, e k é uma propriedade que depende do problema. No caso de um problema de propagação de calor, k é a condutividade térmica.

O fluxo nas direções x e y é dado pelas equações

$$q_x^* = \frac{\Delta x}{2\pi\Delta r^2}, \quad q_y^* = \frac{\Delta y}{2\pi\Delta r^2} \quad (2.22)$$

Retomando a equação (2.14), tem-se que \mathbf{H} é a matriz de transformação cinemática e \mathbf{G} é uma matriz que transforma fluxo em potencial, sendo esta, em geral, retangular. Para elementos constantes, por exemplo, esta se apresenta na forma quadrada. \mathbf{d} e \mathbf{t} são os vetores correspondentes ao potencial e ao fluxo no contorno, respectivamente.

Para um problema de potencial, as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , da equação (2.14), são calculadas na forma

$$\begin{aligned} G_{ml} &= \int_{\Gamma} u_m^* t_l d\Gamma \\ H_{mj} &= -\int_{\Gamma} q_{im}^* \eta_i u_j d\Gamma + \delta_{mj} \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde u_m^* e q_{im}^* são as soluções fundamentais de problemas de potencial mostradas anteriormente nas Equações (2.21) e (2.22), respectivamente. O índice m se refere ao ponto fonte, l e j referem-se ao ponto campo e i refere-se às direções x e y .

2.2. Método expedito dos elementos de contorno (EBEM)

O método expedito dos elementos de contorno (Dumont e Aguilar, 2012) combina o método híbrido dos elementos de contorno (Dumont, 1987) com a formulação consistente do CBEM no intuito de obter uma formulação mais eficiente. Este método conta basicamente com as equações

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* &= \mathbf{p} \\ \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* &= \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.24)$$

para condições de contorno mistas em termos de deslocamentos nodais \mathbf{d} e forças equivalentes \mathbf{p} , onde \mathbf{H} é a mesma matriz apresentada na equação (2.15) e \mathbf{U}^* é a matriz da solução fundamental em termos de deslocamentos nodais. Uma vez que o vetor de forças internas \mathbf{p}^* for resolvido a partir da Equação (2.24), podem ser avaliados deslocamentos e tensões em pontos internos diretamente, sem a necessidade de se aplicar a identidade de Somigliana, como no caso do CBEM.