



Larissa Simões Novelino

**Aplicação de Técnicas de 'Fast Multipole'
nos Métodos de Elementos de Contorno**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Julho de 2015



Larissa Simões Novelino

**Aplicação de Técnicas de ‘Fast Multipole’
nos Métodos de Elementos de Contorno**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Paulo Sollero

UNICAMP

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de julho de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Larissa Simões Novelino

Graduada em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará em 2013.

Ficha Catalográfica

<p>Novelino, Larissa Simões</p> <p>Aplicação de Técnicas de 'Fast Multipole' nos Métodos de Elementos de Contorno / Larissa Simões Novelino; orientador: Ney Augusto Dumont. – 2015.</p> <p>92 f. il. (color.); 30 cm</p> <p>Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2015.</p> <p>Inclui bibliografia</p> <p>1. Engenharia civil – Teses. 2. Método fast multipole. 3. Elementos de contorno. 4. Métodos variacionais. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.</p>

CDD: 624

Agradecimentos

A minha mãe, por todo o suporte e incentivo ao longo deste mestrado.

Ao Prof. Ney, meu orientador, por todo o conhecimento e apoio transmitidos ao longo desse mestrado.

Ao Hélivio, pela amizade, ajuda e discursões que foram fundamentais a este trabalho.

A Graciele e Patrick, pelas horas de estudo, pelos cafés, pelos brigadeiros e principalmente pela amizade.

Aos amigos Carlos, Wellington, Elvis e Daniel por todas as horas de estudo e conversas.

Aos meus amigos de Belém, Maria Cecilia, Larissa, Debora, Wylk, Gustavo e Philipe, que sempre estavam disponíveis para me ajudar e sempre arranjavam tempo nas minhas breves idas em Belém.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

A todos os professores do curso de Engenharia Civil da PUC-Rio que de alguma forma contribuíram para minha formação.

A todos os professores do curso de Engenharia Civil da UFPA, em especial aos professores Sandoval, Ronaldson e Remo.

Resumo

Novelino, Larissa Simões; Dumont, Ney Augusto. **Aplicação de Técnicas de 'Fast Multipole' nos Métodos de Elementos de Contorno**. Rio de Janeiro, 2015. 92p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho visa à implementação de um programa de elementos de contorno para problemas com milhões de graus de liberdade. Isto é obtido com a implementação do Método 'Fast Multipole' (FMM), que pode reduzir o número de operações, para a solução de um problema com N graus de liberdade, de $O(N^2)$ para $O(N \log N)$ ou $O(N)$. O uso de memória também é reduzido, por não haver o armazenamento de matrizes de grandes dimensões como no caso de outros métodos numéricos. A implementação proposta é baseada em um desenvolvimento consistente do convencional, Método de colocação dos elementos de contorno (BEM) – com conceitos provenientes do Híbrido BEM – para problemas de potencial e elasticidade de larga escala em 2D e 3D. A formulação é especialmente vantajosa para problemas de topologia complicada ou que requerem soluções fundamentais complicadas. A implementação apresentada, usa um esquema para expansões de soluções fundamentais genéricas em torno de níveis hierárquicos de polos campo e fonte, tornando o FMM diretamente aplicável para diferentes soluções fundamentais. A árvore hierárquica dos polos é construída a partir de um conceito topológico de superelementos dentro de superelementos. A formulação é inicialmente acessada e validada em termos de um problema de potencial 2D. Como resolvidores iterativos não são necessários neste estágio inicial de simulação numérica, pode-se acessar a eficiência relativa à implementação do FMM.

Palavras-chave

Método Fast Multipole; elementos de contorno; métodos variacionais.

Abstract

Novelino, Larissa Simões; Dumont, Ney Augusto (Advisor). **Application of Fast Multipole Techniques in the Boundary Element Methods**. Rio de Janeiro, 2015. 92p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work aims to present an implementation of a boundary element solver for problems with millions of degrees of freedom. This is achieved through a Fast Multipole Method (FMM) implementation, which can lower the number of operations for solving a problem, with N degrees of freedom, from $O(N^2)$ to $O(N\log N)$ or $O(N)$. The memory usage is also very small, as there is no need to store large matrixes such as required by other numerical methods. The proposed implementations are based on a consistent development of the conventional, collocation boundary element method (BEM) - with concepts taken from the variationally-based hybrid BEM - for large-scale 2D and 3D problems of potential and elasticity. The formulation is especially advantageous for problems of complicated topology or requiring complicated fundamental solutions. The FMM implementation presented in this work uses a scheme for expansions of a generic fundamental solution about hierarchical levels of source and field poles. This makes the FMM directly applicable to different kinds of fundamental solutions. The hierarchical tree of poles is built upon a topological concept of superelements inside superelements. The formulation is initially assessed and validated in terms of a simple 2D potential problem. Since iterative solvers are not required in this first step of numerical simulations, an isolated efficiency assessment of the implemented fast multipole technique is possible.

Keywords

Fast Multipole Method; boundary elements; variational methods.

Sumário

1 Introdução	13
1.1. Objetivos	14
1.2. Estrutura	14
2 Método dos elementos de contorno (BEM)	16
2.1. Formulação consistente do método convencional dos elementos de contorno para elasticidade	16
2.1.1. CBEM aplicado a um problema de potencial	19
3 Método Fast Multipole (FMM)	21
3.1. FMM para problemas de potencial 2D	23
3.1.1. Expansão da solução fundamental u^* para um polo próximo ao ponto campo	23
3.1.2. Expansão da solução fundamental u^* para um polo próximo ao ponto fonte	25
3.1.3. Aplicação FMM no CBEM	27
3.1.4. Algoritmo	30
4 Método 'fast multipole' para uma solução fundamental genérica (GFMM)	36
4.1. Definições básicas	36
4.2. Expansão da solução fundamental	37
4.3. Expansões sucessivas	39
4.4. Aplicação do GFMM no BEM para um problema de potencial	39
4.4.1. Desenvolvimento	40
4.4.2. Integração no GFMBEM	43
4.4.3. Tabelas de Integração	44

5	Implementação computacional do GFBEM	47
5.1.	Implementação computacional	47
5.1.1.	Refinamento hierárquico da malha	48
5.1.2.	Algoritmo unificado para as expansões do GFBEM	51
5.2.	Execução do algoritmo	57
6	Exemplos Numéricos para Problema de Potencial	59
6.1.	Exemplo unidimensional	59
6.2.	Exemplos bidimensionais	62
6.2.1.	Resultados para elementos constantes	63
6.2.2.	Resultados para elementos curvos	66
7	Conclusões e sugestões	68
7.1.	Conclusões	68
7.2.	Sugestões para trabalhos futuros	69
8	Referências Bibliográficas	70
9	Apêndice 1	72
9.1.	A Unified algorithm for hierarchical mesh refinement	72
9.1.1.	Input data	74
9.1.2.	Output data	74
9.1.3.	Initial definitions	75
9.1.4.	Execution of the algorithm	75
10	Apêndice 2	78
10.1.	A unified algorithm for pole expansions	78
10.2.	Unified algorithm for the generation of refined boundary meshes – use of a hierarchical concept	78
10.2.1.	Input data	78
10.2.2.	Output data	79
10.2.3.	Algorithm for the first level ($k = 1$)	79
10.2.4.	Algorithm for the next levels ($k > 1$)	80

10.2.5. Procedures referred to in the algorithm	82
10.2.6. Preliminary procedures for the GFMM	91

Lista de figuras

- Figura 1 - Ilustração gráfica das interações entre pontos campo e pontos fonte pelo (a) CBEM e (b) fast multipole BEM. 21
- Figura 2 - Esquema genérico da expansão do ponto campo z em torno de um polo z_c próximo a este e distante do ponto fonte z_0 , considerando um plano complexo. 24
- Figura 3 - Esquema genérico da expansão do ponto fonte z_0 em torno de um polo z_L próximo a este e distante do ponto campo z . 25
- Figura 4 - Esquema genérico de sucessivas expansões em torno dos pontos campo e fonte para novos polos de expansão (Adaptado de Liu, 2009). 26
- Figura 5 - Esquema das expansões. Na legenda, encontram-se a referencia as equações empregadas para cada expansão. 29
- Figura 6 - Discretização do contorno S com o uso de elementos constantes (LIU, 2009). 30
- Figura 7 - Estrutura hierárquica de células. O quadrado pequeno no canto inferior direito apresenta o esquema de numeração das células filhas, independente do nível destas. (Adaptado de Liu, 2009). 32
- Figura 8 - Estrutura hierárquica das células apresentadas na Figura 7. Os quadrados na cor cinza estão representando as folhas. (Liu, 2009) 32
- Figura 9 – *Upward pass*: Multipole expansions e translações M2M. Os quadrados representam o centro de cada folha e os triângulos e as cruces representam o centro das células mães no nível 3 e 2, respectivamente. (Adaptado de Liu, 2009). 34
- Figura 10 - Esquema das translações M2L e L2L. A célula na cor cinza representa a folha a qual o nó fonte 29 pertence. (Liu, 2009) 35
- Figura 11 - Esquema genérico da expansão do ponto campo z em torno do polo $z_{c^{nk}}$ e da expansão do ponto fonte z_0 em torno de um polo $z_{L^{nl}}$ próximo a este e distante do ponto campo z . 37
- Figura 12 - Esquema das expansões. Cada linha representa uma parcela da expansão. O esquema a direita representa as expansões considerando

- expansões do ponto fonte e o da direita não às considera. 42
- Figura 13 - Elemento isoparamétrico cúbico e o polo de expansão $z_{c,0}$ (Peixoto, 2014). 46
- Figura 14 - Esquema do refinamento hierárquico de uma malha de elementos lineares. (a) Estrutura fornecida, ou seja, equivale à malha no menor nível de refinamento ($k=1$). (b) Estrutura no segundo nível de refinamento ($k=2$). 49
- Figura 15 - Esquema de Refinamento, considerando $m=3$, resultando em um total de 4 níveis de refinamento. 50
- Figura 16 - (a) Macroelemento 1 e seus filhos. A numeração apresentada se refere aos elementos. (b) Estrutura hierárquica do macroelemento 1. 51
- Figura 17 - Esquema dos elementos adjacentes ao microelemento 8. Os elementos pontilhados compõem a estrutura hierárquica do microelemento 8 e os na cor cinza são os elementos adjacentes em cada nível de refinamento. 52
- Figura 18 - Esquema das expansões dos pontos campo de acordo com a ordem dos elementos, para $k_{child}=1$. Os círculos em vermelho representam os polos (a) os círculos representam os nós e os traços delimitam a geometria do elemento. (b), (c) e (d) Os nós externos dos elementos estão representados por círculos e os internos por losangos. 54
- Figura 19 - Esquema de expansão dos polos de acordo com a variável k_{child} . Os losangos representam os nós geométricos dos elementos e os círculos os graus de liberdade dos elementos constantes (Peixoto, et al., 2015). 54
- Figura 20 - Esquema das expansões campo-fonte para um contorno discretizado em elementos constantes considerando expansões (a) em torno do ponto campo e fonte (b) apenas em torno do ponto campo. Os losangos representam os nós geométricos, os círculos em azul os graus de liberdade e os em vermelho os polos de expansão; 56
- Figura 21 - Erro do algoritmo desenvolvido para o caso sem expansão em torno do ponto fonte (esquerda) e com expansão em torno deste (direita). 60
- Figura 22 – Tempo de execução do algoritmo sem expansão do ponto fonte (esquerda) e com expansão do ponto fonte (direita) 61
- Figura 23 - Esquema das expansões dos pontos campo. 61

Figura 24 - Esquerda: erro do algoritmo calculado segundo a Equação (1.4) para um contorno quadrado. Direita: tempo de execução do algoritmo para o contorno quadrado, utilizando $n_c = 2$ (Peixoto, et al., 2015). 63

Figura 25 - Erro por coeficientes do vetor \mathbf{Gt} . Cada linha do gráfico representa um ponto fonte. 64

Figura 26 - Erro por elemento fonte considerando apenas o nó do microelemento 1 como ponto campo. 65

Figura 27 - Domínio quadrilateral distorcido para um estudo com elementos quadráticos e resultados de precisão para diferentes números de filhos por polo de expansão e termos de expansão (Peixoto, et al., 2015). 67

Figure 28 - Scheme of three different elements that are split each into two sub-elements. 72