



Jhonatan Edwar García Rojas

**Análise limite numérica usando programação
semidefinida e cônica de segunda ordem
com aplicação em estabilidade de túneis rasos**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Eurípides do Amaral Vargas Junior
Co-orientadora: Prof^a. Raquel Quadros Velloso

Rio de Janeiro

Julho de 2018



Jhonatan Edwar García Rojas

**Análise limite numérica usando programação
semidefinida e cônica de segunda ordem
com aplicação em estabilidade de túneis rasos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Eurípides do Amaral Vargas Junior

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof^a. Raquel Quadros Velloso

Co-Orientadora

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Ivan Fabio Mota Menezes

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

Dr. José Ademar de Mello Franco

Consultor Privado

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 julho de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Jhonatan Edwar Garcia Rojas

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidad Nacional de Ingeniería - Peru, em 2014. No ano 2016 ingressou no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, na área de Geotecnia, onde vem desenvolvendo investigações na linha de pesquisa em Análise Limite Numérica e Programação em Otimização e Estabilidade de Túneis.

Ficha Catalográfica

García Rojas, Jhonatan Edwar.

Análise limite numérica usando programação semidefinida e cônica de segunda ordem com aplicação em estabilidade de túneis rasos / Jhonatan Edwar García Rojas; orientador: Eurípides do Amaral Vargas Junior– 2018.

73 f.: il;(color); 29,7 cm.

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2018.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil e ambiental – Teses. 2. Tunes rasos. 3. Análise numérica. 4. Mohr-Coulomb. 5. Drucker-Prager. I. Vargas Junior, Eurípides A. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

*Aos meus pais, Aldomiro e Lilia.
À minha irmã, Johana.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me levar pelo caminho certo; tenho a certeza que ele é meu guia e me cuida todo dia.

Aos meus orientadores Eurípides do Amaral Vargas Junior pela orientação para o desenvolvimento deste trabalho e Raquel Quadros Velloso pelo acompanhamento em todos os momentos, orientação e dedicação, obrigado pelos conhecimentos transmitidos.

Agradeço a Hugo Bruno e Guilherme Barros por terem me ensinado e ajudado na programação semidefinida.

Aos meus amigos: Andrés, Carlo, Celso, Erland, Jainor, Jessica, Kevin, Lizardo, Miguel, Paul, Raul, Renata, Thalita e Thamiris pelos conselhos e conhecimentos transmitidos no desenvolvimento do trabalho.

Agradeço à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

O presente trabalho foi realizado com o apoio da coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior- Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

Resumo

García Rojas, Jhonatan Edwar; Vargas Junior, Eurípides do Amaral (Orientador); Velloso, Raquel Quadros (Co-Orientadora). **Análise limite numérica usando programação semidefinida e cônica de segunda ordem com aplicação em estabilidade de túneis rasos.** Rio de Janeiro, 2018. 73p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho é avaliada a solução numérica do colapso na frente de escavação em túneis rasos, através da teoria de análise limite numérico, usando o teorema do limite inferior, a partir da condição de equilíbrio para as condições plásticas, além de considerar o comportamento do material rígido perfeitamente plástico. O teorema de limite inferior implica em maximizar o fator multiplicador na carga atuante, por isso a análise limite se torna um problema de otimização, nele tem que se usar a programação matemática para ser resolvido. É avaliada a solução numérica tridimensional da análise limite através do método dos elementos finitos, usando malha de elementos hexaédricos de oito nós, a análise dos elementos finitos é feita com o próprio código gerado na linguagem de programação do MATLAB 2017. As metodologias de programação matemática empregadas são: programação cônica de segunda ordem e programação semidefinida. Antes deve-se adaptar os critérios de ruptura de Drucker Prager à programação cônica de segunda ordem e Mohr-Coulomb tridimensional à programação semidefinida. Para a otimização se usa o algoritmo comercial MOSEK Aps 7.1 baseado no método do ponto interior em grande escala, na linguagem do MATLAB 2017. Além disso, obteve-se o mecanismo de colapso através da propriedade da dualidade do problema de otimização, dualidade que é cumprida pelos teoremas de limite superior e inferior.

Palavras-chave

Túneis rasos; análise numérica; mohr-coulomb; drucker-prager.

Abstract

García Rojas, Jhonatan Edwar; Vargas Junior, Eurípides do Amaral (Advisor); Velloso, Raquel Quadros (Co-advisor). **Numerical limit analysis using semidefinite and second order conic programming with application in stability of shallow tunnels**. Rio de Janeiro, 2018. 73p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work the numerical solution of the collapse in the front of excavation in shallow tunnels is evaluated through the theory of numerical limit analysis, using the lower limit theorem, from the equilibrium condition for the plastic conditions, considering the behavior of the perfectly plastic rigid material. The lower limit theorem implies maximizing the multiplier factor in the acting load, so that the limit analysis becomes an optimization problem. The three-dimensional numerical solution of the limit analysis using the finite element method is evaluated using a mesh of eight-node hexahedral elements. The finite element analysis is done using the code generated in the MATLAB 2017 programming language. The mathematical programming methodologies used are: second order conic programming and semidefinite programming. The Drucker-Prager three-dimensional criteria should be adapted to the conic programming of the second order and Mohr-Coulomb three-dimensional to the semidefinite programming. For the optimization, the MOSEK Aps 7.1 commercial algorithm based on the large-scale interior point method is used in the MATLAB 2017 language. In addition, the collapse mechanism was obtained through the duality property of the optimization problem, duality that is fulfilled by the upper and lower limit theorems.

Keywords

Shallow tunnels; numerical limit analysis; mohr-coulomb; drucker-prager.

Sumário

1	Introdução	15
1.1.	Objetivos	16
1.2.	Organização da dissertação	17
2	Análise limite	18
2.1.	Hipótese da Análise Limite	18
2.2.	Teoremas de Drucker e Prager	20
2.2.1.	Teorema do Limite Inferior (TLI)	20
2.2.2.	Teorema do Limite Superior (TLS)	20
2.2.3.	Teorema de unicidade	21
2.3.	Lei de Fluxo	21
2.4.	Crítérios de Ruptura Tridimensional	22
2.4.1.	Crítério de ruptura de Drucker-Prager	23
2.4.2.	Crítério de Mohr-Coulomb	24
2.5.	Princípio dos Potências Virtuais	26
2.6.	Análise limite como problema de otimização	29
2.6.1.	Problema primal	29
2.6.2.	Problema dual	29
2.6.3.	Programação Cônica	31
3	Implementação numérica	34
3.1.	Formulação numérica	34
3.2.	Integração numérica	34
3.3.	Adaptação de Drucker- Prager na forma Cônica de Segunda Ordem	38
3.4.	Adaptação de Mohr-Coulomb na forma Semidefinida	40
4	Resultados	44
4.1.	Modelagem numérica do modelo físico desenvolvido por Sterpi et al. (1996)	44

4.2. Modelagem numérica de modelo físico desenvolvido por Kirsch (2010)	51
4.3. Análise do problema da escavação dos túneis paralelos vizinhos	56
4.4. Modelagem numérica do exemplo apresentado por Mollon et al. (2012)	61
5 Conclusões e sugestões	66
6 Referências bibliográficas	68

Lista de figuras

Figura 2.1 - a) Resultado típico de ensaio de laboratório em solo b) Curva Tensão-Deformação comportamento Rígido Perfeitamente Plástico	19
Figura 2.2 - Taxa de deformação plástica para função de escoamento fixa.	22
Figura 2.3 - Função de escoamento de Drucker-Prager	24
Figura 2.4 - Função de escoamento de Mohr-Coulomb.	25
Figura 2.5 - Comparativa, no plano P_i , das funções de escoamento de Drucker-Prager (menos e mais resistente) com a função do Mohr-Coulomb.	25
Figura 2.6 - Corpo de volume V , superfície S e vetor \mathbf{n} normal à superfície.	26
Figura 2.7 - Subcampos da programação cônica. (Bruno et al., 2017)	31
Figura 3.1 - Pontos de integração (X_i) para um elemento hexaédrico de 8 nós.	35
Figura 3.2 - Singularidade da função de escoamento de Mohr Coulomb (adaptado, Davis e Selvadurai, 2002)	41
Figura 3.3 - Diagrama de fluxo geral para resolver o problema da análise limite numérica	43
Figura 4.1 - Dimensões em metros da parcela simétrica do modelo físico apresentado por Sterpi et al. (1996)	44

Figura 4.2 - Representação qualitativa do mecanismo de colapso, limitada pela superfície de cisalhamento (Sterpi e Cividini, 2004)	45
Figura 4.3 - Condições de contorno velocidade para o exemplo de aplicação.	45
Figura 4.4 - Malha semiestruturada de 20424 elementos hexaédricos e 22962 nós.	46
Figura 4.5 - Campo de velocidades da NLA com SOCP, ângulo de atrito 32° e coesão 1kPa. Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.0.	47
Figura 4.6 - Campo de velocidades da NLA com SDP, ângulo de atrito 32° e coesão 0.001kPa. Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.	47
Figura 4.7 - Análise numérica do modelo do túnel 3D com malha refinada (17940 Elementos): malha deformada e iso linhas de deslocamento (Sterpi e Cividini, 2004)	48
Figura 4.8 - Campo de velocidades da NLA com SOCP, ângulo de atrito 24° e coesão 0.001kPa. Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.	48
Figura 4.9 - Campo de velocidades da NLA com SDP, ângulo de atrito 24° e coesão 0.001kPa. Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.	49
Figura 4.10 - Campo de deslocamentos, obtido com a modelagem do Método do Ponto Material (MPM). (Fernandez, 2018)	50
Figura 4.11 - Deslocamentos incrementais para deslocamento do pistão de 1.00 até 1.5mm. Na fila superior, areia densa (DR=80-85%), para a)C/D=0.5, b)C/D=1.0, c)C/D=1.5. Na fila inferior, areia fofa (DR=26-29%) para d)C/D=0.5, e)C/D=1.0, f) C/D=1.5. (Kirsch, 2010)	52
Figura 4.12 - Mapa de velocidade da NLA-SOCP. Em a) b) c), areia densa ($\phi=32.5^\circ$ e $c=0.1\text{kPa}$). Em c) d) e), areia fofa ($\phi=31.3^\circ$	

e $c = 0.1 \text{ kPa}$). Em linhas tracejadas a superfície de deslocamentos obtidas no experimento, para avanços do pistão ($s = 1.5, 3.0$ e 6.0 mm), em Kirsch (2010). 53

Figura 4.13 - Mapa de velocidade da NLA-SDP. Em a) b) c), areia densa ($\phi = 32.5^\circ$ e $c = 0.1 \text{ kPa}$). Em c) d) e), areia fofa ($\phi = 31.3^\circ$ e $c = 0.1 \text{ kPa}$). Em linhas tracejadas a superfície de deslocamentos obtidas no experimento, para avanços do pistão ($s = 1.5, 3.0$ e 6.0 mm), em Kirsch (2010). 54

Figura 4.14 - Comparção do valor da pressão externa obtida com NLA SOCP e SDP em relação as metodologias analíticas, experimentais e empíricas. Para $C/D = 1.0$ (Adaptado, Kirsch (2010)) 55

Figura 4.15 - Condições de contorno e geometria dos túneis paralelos para $C/D = 1.0$ e $d/D = 1.5$, quando $D = 6 \text{ m}$. 58

Figura 4.16 - Malha de 39380 elementos hexaédricos de oito nós. 58

Figura 4.17 - Análise com NLA-SOCP da ruptura lateral do túnel T1 59

Figura 4.18 - Análise com NLA-SOCP da ruptura lateral do túnel T1 e T2 59

Figura 4.19 - Análise com NLA-SDP da ruptura lateral do túnel T1 59

Figura 4.20 - Análise com NLA-SDP da ruptura lateral do túnel T1 e T2 60

Figura 4.21 - Geometria do tunel, em metros, para o exemplo 4.5 (adaptado, Mollon et al., 2012) 62

Figura 4.22 - Pressão externa em relação à profundidade do túnel para $\phi = 0^\circ$ e $c_u = 20 \text{ kPa}$ 63

Figura 4.23 - Pressão externa em relação à profundidade do túnel para $\phi = 0^\circ$ e $c_u = 30 \text{ kPa}$. 63

Figura 4.24 - Campo de velocidades na frente de escavação do túnel (adaptado, Mollon et al., 2012). 64

Figura 4.25 - Campo de velocidades obtida com NLA-SOCP para $\phi=0^\circ$ e $c_u=20\text{kPa}$. Em linhas tracejadas a superfície do mecanismo de colapso M1 e M2, descritas por Mollon et al (2012). 64

Figura 4.26 - Campo de velocidade axial e radial obtida pelo mecanismo M1 para $\phi=0^\circ$ e $c_u=20\text{kPa}$, descrita por Mollon et al. (2012) 65

Figura 4.27 - Campo de velocidade axial e radial obtida pelo mecanismo M2 para $\phi=0^\circ$ e $c_u=20\text{kPa}$, descrita por Mollon et al. (2012) 65

Lista de tabelas

Tabela 4.1 - Comparação de resultados de NLA SOCP e NLA SDP com MPM e Experimental	49
Tabela 4.2 - Resumo dos resultados obtidos na modelagem com NLA SOCP e NLA SDP	50
Tabela 4.3 - Comparação da pressão externa segundo a análise de vários autores e metodologias	55
Tabela 4.4 - Resumo de resultados obtidos para o exemplo de túnel a diferentes profundidades avaliado com NLA-SOCP e NLA-SDP, para o problema de Kirsch (2010)	57
Tabela 4.5 - Resultados de fator de colapso determinados com NLA usando SOCP e SDP para o problema de túnes paralelos	60
Tabela 4.6 - Comparação do tempo de processamento	65

1

Introdução

Na escavação de um túnel raso em solos, como é o caso das áreas urbanas, o problema durante sua construção é instabilidade das paredes e da face na frente de escavação. Além disso, um dos problemas gerados pela instabilidade são os recalques na superfície que podem afetar os edifícios ou outras estruturas. O foco principal nesse trabalho é a análise da estabilidade da face na frente de escavação.

Existem diferentes trabalhos que abordam o problema, tem-se modelos físicos (Chambon e Corté, 1994; Sterpi et al., 1996; Kirsch, 2010), também de modelagem numérica tridimensional através de software de elementos finitos comerciais (Mafra, 2011; Rocha, 2014; Zamora, 2016) e modelagem probabilística e analítica (Mollon et al. 2009, 2011, 2012). Nesse trabalho se faz uma modelagem numérica tridimensional do colapso baseada na análise limite numérica (NLA pelas iniciais em inglês).

Problemas de estabilidade em meios geológicos, como: a capacidade de carga em fundações, estabilidade de taludes e estabilidade de escavações subterrâneas são em geral determinados através de soluções analíticas ou através de métodos numéricos. Dentre os métodos numéricos, a análise elastoplástica é frequentemente empregada, usando a ferramenta da redução dos parâmetros, porém este método apresenta problemas quando o nível de carregamento se aproxima à carga de colapso solicitando maior custo computacional. Alternativamente, podem-se empregar métodos baseados na teoria do estado limite, o mais empregado na geotecnia é o equilíbrio limite e a análise limite, o primeiro método usa a filosofia básica do teorema de limite superior, ou seja, procura a mínima resposta supondo uma superfície de falha, mas não cumpre com todas as regras do teorema de limite superior, o segundo método é baseado nos chamados teoremas dos limites superior e inferior da teoria da plasticidade ou teoremas de Drucker-Prager.

A instabilidade da frente de escavação dependerá do método de escavação, das condições do maciço e condições externas. As condições internas do maciço são os parâmetros do solo e a presença de água. As condições externas são as forças externas adicionais ao peso próprio do túnel, como o peso das edificações na superfície e a pressão atuante na frente de escavação.

1.1.Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é validar a implementação e a aplicação, na estabilidade de túneis rasos, da análise limite usando as programações cônica de segunda ordem e semidefinida através da modelagem numérica própria.

Os objetivos específicos são:

- Implementação e uso do método dos elementos finitos para o cálculo da solução numérica ao problema.
- Uso e acondicionamento dos critérios de ruptura tridimensional, como Drucker-Prager e Mohr-Coulomb às programações cônicas.
- Uso do algoritmo comercial de programação cônica, MOSEK Aps 7.1.
- Determinação do fator de colapso para a túneis, através da solução primal do problema de otimização.
- Determinação do mecanismo de colapso através das velocidades dos nós, obtidas através da solução dual do problema de otimização.
- Comparação dos mecanismos de colapso e pressão externa atuante na frente de escavação, obtidas com programação cônica de segunda ordem, semidefinida e os modelos físicos desenvolvidos por Sterpi et al. (1996) e Kirsch (2010).
- Análise tridimensional da influência no fator de colapso, da ruptura lateral de um e dois tuneis vizinhos paralelos.
- Comparação dos resultados da análise limite numérica, com os modelos numéricos implementados por Sterpi e Cividini (2004) e Mollon et al. (2012). Além disso, com a solução analítica também apresentada por Mollon et al. (2012).

1.2. Organização da dissertação

Este trabalho está dividido em cinco capítulos que são descritos a seguir:

Primeiro Capítulo: Capítulo introdutório, objetivos e organização do trabalho.

Segundo Capítulo: Revisão da base teórica da análise limite e sua formulação, apresentação dos critérios de ruptura tridimensionais, apresentação dos métodos de otimização de grande escala usados, revisão bibliográfica dos trabalhos feitos com esses métodos.

Terceiro Capítulo: Implementação numérica, adaptação dos critérios de ruptura à programação cônica de segunda ordem ou à programação semidefinida, uso do algoritmo de otimização MOSEK Aps 7.1 apresentado por Andersen et al. (2003).

Quarto Capítulo: Apresentação dos resultados e discussão dos exemplos. Comparação dos resultados usando programação cônica de segunda ordem e semidefinida em relação com trabalhos feitos por outros autores.

Quinto Capítulo: Conclusões e sugestões para trabalhos futuros de pesquisa.

2 Análise limite

Está demonstrado que as implicações da teoria da plasticidade e da análise limite para mecânica de solos é realmente de grande alcance (Drucker e Prager, 1952).

Na geotecnia, as relações tensão-deformação para materiais geológicos são usualmente aproximadas para obtenção de soluções analíticas ou numéricas de problemas da mecânica dos solos ou das rochas. O conceito mais simples é o material rígido perfeitamente plástico (RPP) onde deformações elásticas são desprezadas e o material sofre deformações plásticas ilimitadas uma vez atingido valor da tensão de ruptura (σ_f). A relação tensão - deformação não é bem estabelecida pois para o valor de tensão igual à σ_f a deformação plástica é indeterminada e para deformação igual a zero o valor da tensão para não é único. A modelagem do solo como material RPP é frequentemente empregada para estimativas de cargas de colapso, sem preocupação com o campo das deformações como, por exemplo, na determinação da capacidade de suporte de fundações ou na investigação da estabilidade de taludes por método de equilíbrio limite.

Os primeiros trabalhos de aplicação da análise limite em problemas geotécnicos, onde utilizaram métodos analíticos foram: Finn (1967); Chen (1975); Chen e Liu (1990).

A análise limite com o método dos elementos finitos é um tema de investigação na PUC Rio, na área da geotecnia da engenharia civil (Camargo et al., 2016; Chahua et al., 2013; Tapia, 2013; Pachás 2008 e 2009; Farfán, 2000)

2.1. Hipótese da Análise Limite

As hipóteses da análise limite são as seguintes (Chen, 2008):

- No comportamento RPP do material, ignora-se o endurecimento ou amolecimento do material, dessa forma a superfície de escoamento é fixa. Além disso, não depende do histórico de carregamentos.

- O resultado típico de um ensaio de carregamento e descarregamento em um solo é mostrado na Figura 2.1.a. Segundo a hipótese da análise limite não existem deformações elásticas ($\varepsilon_{ij}^e = 0$), então só existem deformações plásticas ε_{ij}^p , mostrado na Figura 2.1.b. Está comprovado (Drucker et al., 1952) quando a carga de colapso é atingida as taxas de deformação são puramente plásticas, como está descrito na equação (2.1), então só poderia ser considerado o comportamento do material RPP no colapso.

$$\varepsilon_{ij}^{total} = \varepsilon_{ij}^p \quad (2.1)$$

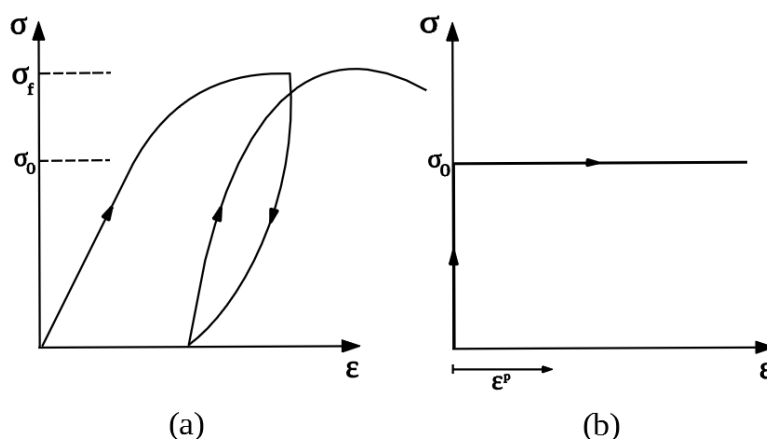


Figura 2.1 - a) Resultado típico de ensaio de laboratório em solo b) Curva Tensão-Deformação comportamento Rígido Perfeitamente Plástico

- A superfície da função de escoamento é convexa e as taxas de deformação são deduzidas a partir da função de escoamento por meio da lei de fluxo associada. Qualquer incremento de tensões não ultrapassa e é tangente à superfície de escoamento.

- As mudanças de geometria do corpo são consideradas insignificantes quando o solo atinge o colapso. Essa hipótese é empregada para que se possa aplicar o princípio do trabalho virtual. Do ponto de vista da engenharia, o colapso implica a mudança considerável na geometria da estrutura sob cargas constantes. Entretanto o significado de colapso segundo Drucker e Prager (1952) refere-se às condições para onde o fluxo plástico ocorreria sob cargas constantes, com a mudança de geometria desconsiderada, embora as deformações constituam uma variável do problema. Então, isso torna-se uma hipótese simplificadora na análise limite.

2.2. Teoremas de Drucker e Prager

Teoremas da plasticidade também considerados como teoremas da análise limite, foram propostos por Drucker e Prager (1952).

2.2.1. Teorema do Limite Inferior (TLI)

O colapso não ocorre se o solo apresenta um estado de tensões que satisfaz as equações de equilíbrio e as condições de contorno, abaixo do limite ($f(\sigma_{ij}) \leq 0$). (Drucker et al., 1952).

Se um campo de tensões σ_{ij} distribuído em todo o corpo satisfaz as condições de equilíbrio, com as cargas no contorno, e no domínio não viola o critério de escoamento ($f(\sigma_{ij}) \leq 0$), então o campo das tensões é estaticamente admissível e a carga correspondente é um limite inferior da carga de colapso. (Chen, 2008).

Nesse trabalho se pode ver a aplicação de esse teorema, no problema de otimização na equação (2.28).

2.2.2. Teorema do Limite Superior (TLS)

O colapso ocorre para qualquer deformação plástica compatível, nesse caso, a potência virtual das forças externas sobre o corpo é igual ou maior do que a taxa dissipação de energia interna (Drucker et al., 1952).

Se um mecanismo compatível de deformação plástica satisfaz as condições de compatibilidade em velocidades no contorno, então o campo das velocidades é cinematicamente admissível. Esse campo será determinado pela igualdade da taxa do trabalho externo com a taxa da dissipação de energia interna, em que ambos serão iguais ou maiores que a carga limite verdadeira (Chen, 2008).

Embora a metodologia do equilíbrio limite empregue a filosofia do teorema do limite superior da análise limite, essa não satisfaz os requisitos do teorema, pois não considera a cinemática do meio. Portanto, a solução obtida através do equilíbrio limite não é necessariamente um limite superior ou inferior (Chen, 2008).

2.2.3. Teorema de unicidade

É um teorema complementar que garante a existência de uma solução única para a carga de colapso. A partir dos dois teoremas da análise limite, pode-se encontrar uma carga de forma a satisfazer duas condições (Barros, 2014):

- 1) A existência de um campo de tensões estaticamente admissível correspondente às tensões dentro ou sobre a superfície de colapso. Nesse caso o carregamento correspondente é menor ou igual à carga de colapso.
- 2) A existência de um campo de deslocamentos geometricamente admissível. Nesse caso, o carregamento correspondente é obtido da igualdade do trabalho externo e trabalho interno plástico.

Quando ambas condições são satisfeitas simultaneamente, o fator de carga encontrado é igual ao fator de carga de colapso, que é assim determinado de maneira única.

2.3. Lei de Fluxo

A teoria da lei de fluxo se origina na teoria de plasticidade dos metais proposta por Hencky (1924), uma relação constitutiva entre tensão atual e a deformação plástica total, independente da trajetória de tensões que o material é submetido. Esta teoria é de interesse apenas histórico, não aplicável a materiais como solos onde evidências experimentais mostram que o comportamento mecânico depende fundamentalmente da trajetória de tensões imposta pelo carregamento externo. A teoria da plasticidade incremental (ou teoria de escoamento) admite como própria hipótese básica que existe uma relação linear entre o incremento infinitesimal de tensão e o incremento infinitesimal de deformações plásticas (Davis e Salvadurai, 2002).

A lei de fluxo depende da função de escoamento (f), se a função for fixa, para materiais que não apresenta nem endurecimento nem amolecimento, então pode-se chamar de lei de fluxo associada, se não, terá que ser usada a lei de fluxo não

associada, essa última vai depender do potencial plástico (Q). (Davis e Salvadurai, 2002)

A lei de fluxo associada (Eq. 2.2) deve ser empregada só quando o ângulo de atrito for igual a zero, ou seja, para solos coesivos saturados na condição não drenada.

$$\dot{\varepsilon}_k^p = \delta \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

onde:

$\dot{\varepsilon}^p$: Taxa de deformação plástica

$f(\sigma)$: Função de escoamento

σ_k : Tensões nas direções principais

δ : Coeficiente multiplicador ou coeficiente de Lagrange (Não tem relação com o fator de colapso)

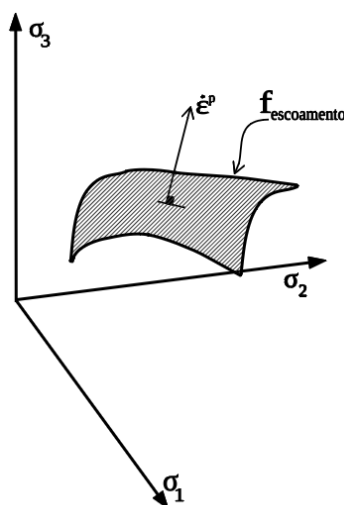


Figura 2.2 - Taxa de deformação plástica para função de escoamento fixa.

2.4. Critérios de Ruptura Tridimensional

Na teoria de plasticidade se admite uma função de escoamento inicial $f_0(\sigma_{ij})$ e uma função $F(\sigma_{ij}) = 0$ considerada como o critério de ruptura, como hipótese fundamental.

As funções $f_0(\sigma_{ij})$ e $F(\sigma_{ij})$ são hipersuperfícies de tensões no espaço de seis dimensões. Então, para se representar graficamente, σ_{ij} pode ser substituído pelas tensões principais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ que atuam na partícula e suas respectivas direções $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$. Se admite assim somente o comportamento isotrópico do solo. Para um material com comportamento RPP a função de escoamento e ruptura são coincidentes, ou seja, não considera endurecimento nem amolecimento.

Nesse trabalho é considerado uma análise tridimensional porque o problema de estabilidade da frente de escavação do túnel não pode ser avaliado através de uma análise de estado plano de deformações, porque o túnel não é infinito lateralmente.

2.4.1. Critério de ruptura de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager é considerado como uma generalização do critério de von Mises em que se introduz uma sensibilidade ao escoamento do material quanto à pressão hidrostática. Tal prioridade é imposta por meio do termo adicional (primeiro invariante) à expressão do critério de von Mises, resultando a equação (2.3) (Bruno et al., 2017).

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (2.3)$$

onde I_1 e J_2 são invariantes:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = S_{ii} \quad (2.4)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (2.5)$$

e α e k são constantes dependentes dos parâmetros de Mohr-Coulomb, ângulo de atrito e coesão, além das considerações do critério. Nesse trabalho será empregado o critério de cone interior ou menos resistente, no qual os parâmetros são definidos como:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \text{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 + \text{sen} \phi)} \quad (2.6)$$

$$k = \frac{6c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3}(3 + \sin\phi)} \quad (2.7)$$

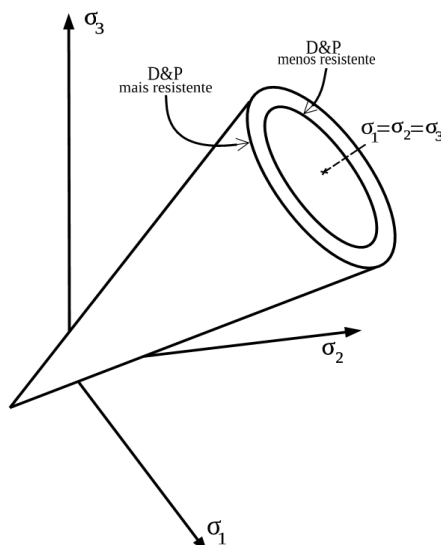


Figura 2.3 - Função de escoamento de Drucker-Prager

A vantagem do critério de Drucker-Prager é a simplicidade, suavidade da curva, simetria e facilidade de implementação nos códigos numéricos (Cividini, 1993). A desvantagem é que esse critério superestima o efeito da tensão σ_2 adicional na resistência, em relação à resistência determinada com Mohr-Coulomb (Alejano e Bobet, 2012).

2.4.2. Critério de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb é o critério de ruptura padrão para os engenheiros geotécnicos e é muito usado na análise bidimensional. Sempre se teve o problema para trabalhar na análise tridimensional, por apresentar singularidades (interseção dos planos). A função de escoamento em termos das tensões principais, ou dos autovalores maior e menor do tensor de tensões do elemento ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), é dada pela equação (2.8).

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_1(1 + \sin\phi) - \sigma_3(1 - \sin\phi) - 2c \cdot \cos\phi \quad (2.8)$$

onde ϕ é o ângulo de atrito e c a coesão do solo.

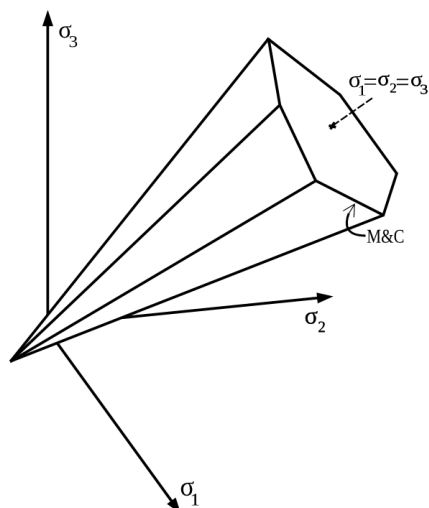


Figura 2.4 - Função de escoamento de Mohr-Coulomb.

Observa-se na figura 2.4 que o critério de escoamento de Mohr-Coulomb está formado pela intersecção de seis planos e eles são descritos como:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2c \cdot \cos\phi - (\sigma_1 + \sigma_2) \sin\phi \quad \dots (2 \text{ planos}) \quad (2.9)$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \leq 2c \cdot \cos\phi - (\sigma_2 + \sigma_3) \sin\phi \quad \dots (2 \text{ planos}) \quad (2.10)$$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \leq 2c \cdot \cos\phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin\phi \quad \dots (2 \text{ planos}) \quad (2.11)$$

Os seis planos descritos são devido à hipótese de isotropia, os eixos principais podem ser trocados sem afetar o critério.

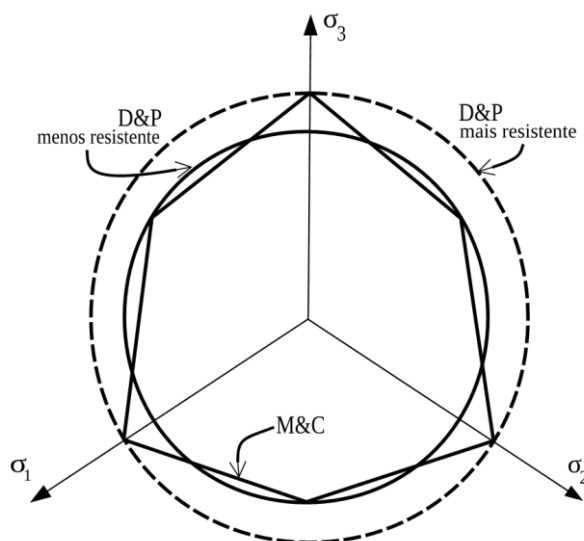


Figura 2.5 - Comparativa, no plano Π , das funções de escoamento de Drucker-Prager (menos e mais resistente) com a função do Mohr-Coulomb.

2.5.Princípio dos Potências Virtuais

A formulação forte da equação do movimento de um corpo de volume V , superfície S e vetor normal à superfície \mathbf{n} , ver Figura (2.6), é apresentada por Cauchy no caso de equilíbrio estático e é descrita na equação (2.12)

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.12)$$

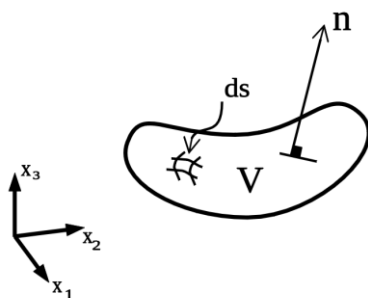


Figura 2.6 - Corpo de volume V , superfície S e vetor \mathbf{n} normal à superfície.

Para se aplicar o método dos elementos finitos utiliza-se, em geral a formulação do método dos resíduos ponderados (2.13), conhecida também como princípio dos trabalhos virtuais. Ou seja, multiplicar as equações do movimento por um deslocamento virtual (inexistente, porém possível) u_i e integrar no volume V resulta:

$$\int_V \mathbf{u}_i (\sigma_{ij,j} + b_i) dV = 0 \quad (2.13)$$

Lembrando que:

$$(\mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} = \mathbf{u}_i \sigma_{ij,j} + \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} \quad (2.14)$$

então,

$$\mathbf{u}_i \sigma_{ij,j} = (\mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} - \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} \quad (2.15)$$

Substitui-se a equação (2.15) na equação (2.13)

$$\int_V ((\mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} - \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij}) dV + \int_V (\mathbf{u}_i b_i) dV = 0 \quad (2.16)$$

Lembrando o teorema de divergência de Gauss (aplicável só para um meio contínuo e irrotacional):

$$\int_V (\mathbf{u}_i \boldsymbol{\sigma}_{ij})_{,j} dV = \int_S \mathbf{u}_i \boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{n}_j dS = \int_S \mathbf{u}_i \mathbf{t}_i dS \quad (2.17)$$

Então a equação (2.16), pode ser escrita como:

$$\int_V (\mathbf{u}_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij}) dV = \int_V \mathbf{u}_i \mathbf{b}_i dV + \int_S \mathbf{u}_i \mathbf{t}_i dS \quad (2.18)$$

onde \mathbf{b}_i é força por unidade de volume V e \mathbf{t}_i força externa por unidade de área S .

Tendo em vista a simetria do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ji}$ para um meio isotrópico, se tem que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij} + \mathbf{u}_{j,i} \boldsymbol{\sigma}_{ji}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij} + \mathbf{u}_{j,i} \boldsymbol{\sigma}_{ij}) \\ \mathbf{u}_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ij} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Finalmente se tem que:

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ij} dV = \int_V \mathbf{u}_i \mathbf{b}_i dV + \int_S \mathbf{u}_i \mathbf{t}_i dS \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é conhecida como formulação fraca ou formulação do trabalhos virtuais (não contém derivadas) e é comumente usada na metodologia dos elementos finitos.

Para se levar em conta o que foi exposto anteriormente sobre a plasticidade, tem-se que adotar os dois postulados de Drucker (1959-1964).

- O trabalho realizado por uma força externa que se aplica lentamente um conjunto de tensões, deve ser positivo.
- O trabalho realizado por um agente externo que se remove um conjunto de tensões, deve ser positivo.

Agora se pode definir o trabalho plástico,

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.21)$$

onde:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (2.22)$$

Na equação (2.1) se considera a hipótese do comportamento do material RPP ($d\epsilon_{ij}^e = 0$), a seguir se divide por (dt) as duas equações (2.20) e (2.22). Então, tem-se que a definição da potência virtual pelo agente externo (\dot{W}), equação (2.24) e taxa de dissipação de energia interna, equação (2.25):

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.23)$$

$$\dot{W} = \int_V \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{b}_i dV + \int_S \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{t}_i dS \quad (2.24)$$

$$\dot{P} = \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (2.25)$$

Para que o sistema se encontre em equilíbrio, a potência virtual deve ser menor ou igual à taxa de dissipação de energia interna, ver equação (2.26) ou (2.27).

$$\dot{W} \leq \dot{P} \quad (2.26)$$

ou

$$\int_V \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{b}_i dV + \int_S \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{t}_i dS \leq \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \quad (2.27)$$

Pelo teorema de limite inferior e condição de equilíbrio (potência virtual igual à taxa de dissipação de energia), então se obtém a equação (2.28)

maximizar λ
sujeito a:

$$\begin{cases} \lambda \left(\int_V \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{b}_i dV + \int_S \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{t}_i dS \right) = \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \\ f(\sigma_{ij}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

onde o máximo valor de λ é o fator de colapso segundo o teorema de limite inferior.

O princípio das pontencias virtuais é usado para o problema de colapso, justificada pela última hipótese descrita na seção 2.1.1, nela assume-se que as deformações geradas durante o colapso são desprezíveis então pode-se considerar que todas as deformações virtuais são geradas pelo trabalho virtual das forças. Aqui, relaciona-se um campo estaticamente admissível, em equilíbrio com um campo cinematicamente admissível (Chen, 2008).

2.6. Análise limite como problema de otimização

2.6.1. Problema primal

O problema primal é o problema original da otimização. A forma padrão de um problema de otimização é dada por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Então, o problema da análise limite dado pela equação (2.28), é expresso da forma da equação (2.29), como segue:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } (-\lambda) \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda \left(\int_V \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{b}_i dV + \int_S \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{t}_i dS \right) - \int_V \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p \sigma_{ij} dV = 0 \\ &f(\sigma_{ij}) \leq 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.6.2. Problema dual

O conceito de dualidade de Wolfe (1961) permite que a partir de um problema de programação matemática chamado primal, obtenha-se outro problema chamado dual, cuja solução tem relação com a solução do problema primal. Além disso é possível, conhecendo-se a solução de um deles, obter a solução do outro. Isso é conhecido como o teorema forte da dualidade. No caso de análise limite, os teoremas de limite inferior e superior se apresentam como duais. Ou seja, por meio da solução do problema primal (análise limite com teorema do limite inferior) pode-

se obter a solução dual que é a solução do problema dual (análise limite com teorema do limite superior) (Vaz et al., 2012)

Antes da definição do problema dual do problema primal (2.30) tem que ser definida a função lagrangeana \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(\sigma_{ij}, \mu, \gamma) = -\lambda + \mu \left[\lambda \left(\int_V \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{b}_i dV + \int_S \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{t}_i dS \right) - \int_V \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \right] + \gamma f(\sigma_{ij}) \quad (2.31)$$

onde μ, γ são os multiplicadores de Lagrange.

Derivando a função Lagrangeana (2.31) em relação a σ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_{ij}} = -\mu \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\int_V \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^p \sigma_{ij} dV \right) + \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.32)$$

Agora se pode definir o problema dual na equação (2.33)

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } \mathcal{L}(\sigma_{ij}, \mu, \gamma) \\ & \text{sujeito a:} \\ & \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \\ \gamma \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.33)$$

No caso do problema da análise limite para estruturas geotécnicas o significado dos multiplicadores de Lagrange têm grande importância. Aqueles que estão associados às restrições de igualdade são as taxas de deformação nodais no colapso, o qual mostra o mecanismo de falha da estrutura, e aqueles que estão associados às restrições de desigualdade são os fatores de plastificação presentes na estrutura. (Chahua et al., 2013)

Para garantir que o problema de otimização da análise limite, ou seja, o limite inferior ou superior, tenha um ponto crítico, tem que satisfazer as condições de primeira ordem ou condições necessárias ou também conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Como o problema da análise limite é convexo, as condições KKT são necessariamente suficientes. Elas são bem descritas em Lyamin e Solan (2002).

2.6.3. Programação Cônica

Fundamentalmente, a programação matemática teve um início com a programação linear por Dantzig (1949). Depois disso, a programação matemática teve um avanço significativo com o desenvolvimento da programação cônica, tendo como um dos primeiros trabalhos de aplicação desenvolvido por Lobo et al. (1998).

A programação cônica (PC) é empregada em muitos setores da engenharia e economia, para se resolver certos problemas de otimização. Os problemas de PC podem ser vistos como uma generalização dos problemas de programação linear (LP) (Mosek, 2017), onde se apresenta uma restrição cônica da seguinte forma:

$$x \in \mathcal{K} \quad (2.34)$$

onde \mathcal{K} é um cone convexo.

A PC usa o método de ponto interior em grande escala, além disso, envolve as programações do tipo linear, cônica de segunda ordem e semidefinida como se observa na Figura 2.7. Uma implementação numérica passo a passo do algoritmo de pontos interiores primal dual para otimização cônica quadrática é apresentada por Andersen et al., (2003).

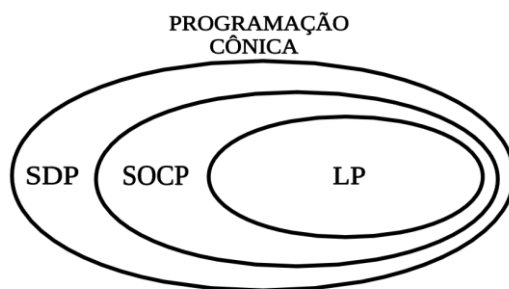


Figura 2.7 - Subcampos da programação cônica. (Bruno et al., 2017)

2.6.3.1. Programação Cônica de Segunda Ordem

A programação cônica de segunda ordem (SOCP pelas iniciais em inglês) é considerada um caso particular da PC também é conhecida como cones de Lorentz, com uma função objetivo linear.

O problema de SOCP em geral é colocado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } c^T x \\
& \text{sujeito a:} \\
& \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x_1 \geq \|x_{2:n}\| \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

onde a restrição cônica \mathcal{K} de segunda ordem é:

$$x_1 \geq \|x_{2:n}\| \equiv x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^n x_j^2} \quad (2.36)$$

Nesse caso, a restrição que se adapta a esse tipo de programação é o critério de Drucker- Prager ou se for o caso também o critério de von Mises

2.6.3.2. Programação Semidefinida

A programação semidefinida (SDP pelas iniciais em inglês) é também um tipo de PC, além disso, abrange a programação SOCP, ou seja, qualquer problema resolvido por SOCP pode ser resolvido por SDP. Os cones de SDP são aqueles formados por um conjunto de matrizes semidefinidas (aqueles em que os autovalores forem não negativos). Da mesma forma que a SOCP, a SDP tem que ter uma função objetivo do tipo linear. A forma geral do problema de SDP é dada pela equação 2.37, mostrada em Mosek (2017).

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } \langle C, X \rangle \\
& \text{sujeito a:} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \langle A_i, X \rangle = b_i \\ X \succeq 0 \end{array} \right. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

onde $X \succeq 0$ é a restrição semidefinida e a operação $\langle A, B \rangle$ é conhecida como o produto interno de Frobenius, e dada por:

$$\langle A, B \rangle \equiv Tr(AB^T) \equiv \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} \quad (2.38)$$

A restrição semidefinida X é uma matriz semidefinida positiva, garantindo assim um conjunto convexo para a otimização.

A programação SDP pode unificar vários problemas de programação linear e quadrática. Embora os programas de SDP sejam mais gerais do que LP, não significa que sejam mais difíceis de resolver. (Vandenberghe e Boyd, 1999)

Muitas pesquisas trabalham no problema de minimização dos autovalores máximos de matrizes simétricas. Esse tipo de problema é o que a SDP consegue resolver.

Nesse caso, as restrições que se adaptam a esse tipo de programação, podem ser os critérios de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb ou também os critérios de von Mises e Tresca.

A programação SDP também é baseada no método do ponto interior onde usa uma função barreira para resolver este tipo de problema. A função barreira é um artifício que se usa para retirar a restrição de desigualdade e substituí-la por um termo penalizante na função objetivo. No caso particular de SDP a função barreira é do tipo logarítmica da determinate da inversa da função matricial, e é bem descrita na secção 4 em Vandenberghe e Boyd (1999).

3 Implementação numérica

3.1. Formulação numérica

Para a formulação numérica da análise limite pelo limite inferior, a equação (2.28) deve levar em conta a relação taxa de deformação - velocidade através da matriz \mathbf{B} e as matrizes de interpolação para deslocamento \mathbf{N}_u e tensões \mathbf{N}_σ , aquelas relações são:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_i \mathbf{N}_u, \quad \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{N}_\sigma, \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i \mathbf{N}_u, \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i \mathbf{N}_u \quad (3.1)$$

Então, substitui-se as relações (3.1) na equação (2.28):

$$\dot{\mathbf{u}}_i \int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{B} dV = \dot{\mathbf{u}}_i \lambda \left(\int_S \mathbf{t}_i \mathbf{N}_u dS + \int_V \mathbf{b}_i \mathbf{N}_u dV \right) \quad (3.2)$$

Para uma velocidade diferente de zero, a equação (3.2) pode ser colocada da seguinte forma:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} dV = \lambda \left(\int_S \mathbf{t}_i \mathbf{N}_u dS + \int_V \mathbf{b}_i \mathbf{N}_u dV \right) \quad (3.3)$$

onde as variáveis desconhecidas são: o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ e o fator de colapso λ . Logo, o problema de otimização (2.28) fica expresso por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } (-\lambda) \\ & \text{sujeito a:} \\ & \left\{ \begin{aligned} \int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} dV &= \lambda \left(\int_S \mathbf{t}_i \mathbf{N}_u dS + \int_V \mathbf{b}_i \mathbf{N}_u dV \right) \\ f(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) &\leq 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2. Integração numérica

O problema descrito na equação (3.4) possui integrais de funções matriciais definidas, ou em intervalos finitos. Pode ocorrer o caso de haver uma expressão analítica para resolver a integral, mas a avaliação dessa expressão é tão complicada (ou cara) que se torna mais eficiente computar a integral numericamente.

A integração envolvida na formulação da equação (3.4) é determinada por meio da integração numérica, equação (3.5).

$$\int f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n W_i \cdot f(x_i) \quad (3.5)$$

onde $f(x)$ é a função a integrar, W_i são os pesos de ponderação e x_i os pontos de integração de Gauss, dependentes do tipo de elemento escolhido.

Para esse trabalho é escolhido o elemento isoparamétrico hexaédrico de 8 nós linear, porque em relação aos tetraedros, possui menor número de elementos na discretização, portanto menor número de restrições. Além disso, a implementação feita com esse tipo de elemento em Camargo (2016) e Cruz (2013), mostrou bons resultados. A Figura 3.1 mostra as coordenadas locais de cada nó. Os pesos de ponderação e os pontos de integração para esse tipo de elemento são descritos em Cruz (2013).

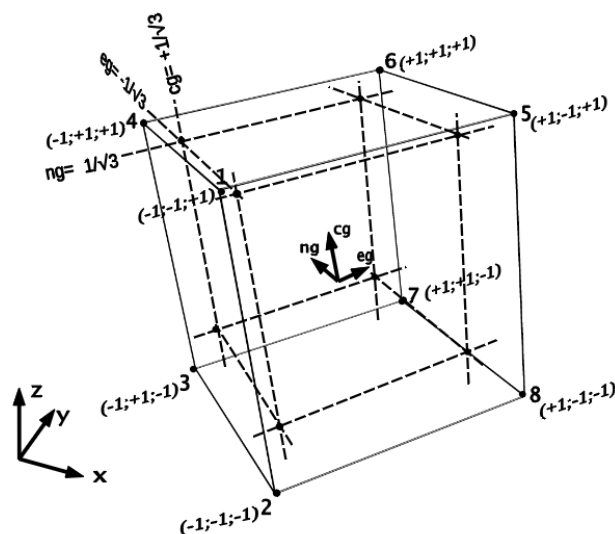


Figura 3.1 - Pontos de integração (X_i) para um elemento hexaédrico de 8 nós.

A numeração dos nós do elemento hexaédrico de 8 nós, será segundo a configuração da geração da malha do software usado. Nesse trabalho é usado o software de pré processamento e pós processamento, GiD v13 (Cimne, 2016).

Então a equação (3.4) fica expressa por:

minimizar $(-\lambda)$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^8 \sigma_{ij} N_{\sigma} B |J| W_{eg_i} W_{ng_i} W_{cg_i} = \lambda \left(\sum_{i=1}^8 t_i N_u |J| W_{eg_i} W_{ng_i} + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^8 b_i N_u |J| W_{eg_i} W_{ng_i} W_{cg_i} \right) \\ f(\sigma_{ij}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Os valores da matriz de interpolação são obtidos mediante as seguintes equações:

$$\begin{aligned} N1 &= \frac{1}{8}(1 - eg)(1 - ng)(1 + cg) \\ N2 &= \frac{1}{8}(1 - eg)(1 - ng)(1 - cg) \\ N3 &= \frac{1}{8}(1 - eg)(1 + ng)(1 - cg) \\ N4 &= \frac{1}{8}(1 - eg)(1 + ng)(1 + cg) \\ N5 &= \frac{1}{8}(1 + eg)(1 - ng)(1 + cg) \\ N6 &= \frac{1}{8}(1 + eg)(1 - ng)(1 - cg) \\ N7 &= \frac{1}{8}(1 + eg)(1 + ng)(1 - cg) \\ N8 &= \frac{1}{8}(1 + eg)(1 + ng)(1 + cg) \end{aligned} \quad (3.7)$$

A matriz de interpolação N para um elemento, segue o seguinte arranjo das equações de (3.7).

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}_{24 \times 3} \quad (3.8)$$

Para determinar a matriz Jacobiana, tem-se que derivar parcialmente as equações de (3.7) em relação a cada eixo local.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial eg} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial eg} x_i & \frac{\partial x}{\partial ng} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial ng} x_i & \frac{\partial x}{\partial cg} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial cg} x_i \\
 \frac{\partial y}{\partial eg} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial eg} y_i & \frac{\partial y}{\partial ng} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial ng} y_i & \frac{\partial y}{\partial cg} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial cg} y_i \\
 \frac{\partial z}{\partial eg} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial eg} z_i & \frac{\partial z}{\partial ng} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial ng} z_i & \frac{\partial z}{\partial cg} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial cg} z_i
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

A matriz Jacobiana apresenta seguinte arranjo das equações (3.9):

$$J = \begin{bmatrix} \partial x / \partial eg & \partial y / \partial eg & \partial z / \partial eg \\ \partial x / \partial ng & \partial y / \partial ng & \partial z / \partial ng \\ \partial x / \partial cg & \partial y / \partial cg & \partial z / \partial cg \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A matriz **B** (relação taxa de deformação – velocidade) é dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n} \mathbf{d} \quad (3.11)$$

onde:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} J^{-1}_{11} & J^{-1}_{12} & J^{-1}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J^{-1}_{21} & J^{-1}_{22} & J^{-1}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J^{-1}_{31} & J^{-1}_{32} & J^{-1}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J^{-1}_{11} & J^{-1}_{12} & J^{-1}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J^{-1}_{21} & J^{-1}_{22} & J^{-1}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J^{-1}_{31} & J^{-1}_{32} & J^{-1}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}_{11} & J^{-1}_{12} & J^{-1}_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}_{21} & J^{-1}_{22} & J^{-1}_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}_{31} & J^{-1}_{32} & J^{-1}_{33} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e

$$Dnd = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial eg} & 0 & 0 & & \frac{\partial N_8}{\partial eg} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial ng} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial ng} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial cg} & 0 & 0 & & \frac{\partial N_8}{\partial cg} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial eg} & 0 & & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial eg} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial ng} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial ng} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial cg} & 0 & & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial cg} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial eg} & & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial eg} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial ng} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial ng} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial cg} & & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial cg} \end{bmatrix}_{9 \times 24} \quad (3.14)$$

3.3. Adaptação de Drucker- Prager na forma Cônica de Segunda Ordem

Na adaptação do critério de ruptura de Drucker-Prager é possível expressar o segundo invariante, da equação (2.5), em função da matriz \mathbf{P} e do vetor $\boldsymbol{\sigma}$, definidos abaixo (Makrodimopoulos, 2006; Bruno et al., 2017)

$$J_2 = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.15)$$

onde:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{21} \ \sigma_{31} \ \sigma_{32}] \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A matriz \mathbf{P} pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{V} = \mathbf{L}^T \mathbf{L} \quad (3.18)$$

onde o \mathbf{V} é a matriz dos autovetores de \mathbf{P} e \mathbf{D} é a matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{P} . A matriz \mathbf{L} é dada por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & 2\sqrt{3}/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

que substituindo na equação (3.15) fornece;

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}} = \|\mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}\| \quad (3.20)$$

O primeiro invariante da equação (2.4) é expresso da seguinte forma:

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{b} \quad (3.21)$$

onde: $\mathbf{b} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$, então se substitui as equações (3.20) e (3.21) na equação (2.3).

$$\|\mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}\| + \alpha \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{b} + -k \leq 0 \quad (3.22)$$

A equação (3.22) pode-se desenvolver como segue:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_{11} + \frac{1}{2}\sigma_{33}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\sigma_{11} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\sigma_{22} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma_{33}\right)^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} + \alpha(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - k \leq 0 \quad (3.23)$$

A equação (3.23) pode ser expressa em função das matriz \mathbf{Q} e os vetores $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, na equação (3.24), ou seja:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} \quad (3.24)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6\}^T$ pertence ao espaço cônico quadrático K , $\rho_1 \geq \sqrt{\rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 + \rho_5^2 + \rho_6^2}$, o vetor $\mathbf{q} = \{k, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$ e a matriz \mathbf{Q} é dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & 2\sqrt{3}/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Logo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\rho} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q} \quad (3.26)$$

Finalmente substitui-se a equação (3.26) na equação (3.4), para se definir o problema de otimização da NLA com o modelo de ruptura de Drucker-Prager em termos de programação SOCP:

minimizar $(-\lambda)$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} dV = \int_V \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} dV + \lambda \left(\int_S t_i \mathbf{N}_u dS + \int_V b_i \mathbf{N}_u dV \right) \\ \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

3.4. Adaptação de Mohr-Coulomb na forma Semidefinida

Na programação semidefinida os cones não são quadráticos, são cones de matrizes positivas semidefinidas. Este é o caso do critério de Mohr-Coulomb (Krabbenhoft et al., 2007; Martin e Makrodimopoulos, 2008).

De acordo com Krabbenhoft et al. (2007), para um estado de tensão tridimensional, pode-se colocar o critério de Mohr-Coulomb da equação (2.8) de uma forma mais compacta:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 \leq k \quad (3.28)$$

onde:

$$a = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi} \quad k = \frac{2c \cos\phi}{1 + \sin\phi} \quad (3.29)$$

As singularidades (arestas) fazem com que o algoritmo de solução tenha desempenho pior do que no caso de critérios de escoamento sem singularidades, especialmente para problemas envolvendo uma pequena coesão e/ou um grande ângulo de atrito. Na Figura 3.2 se consegue ver que a direção da taxa da deformação na aresta da superfície de escoamento de Mohr-Colomb não é conhecida (Krabbenhoft et al., 2007)

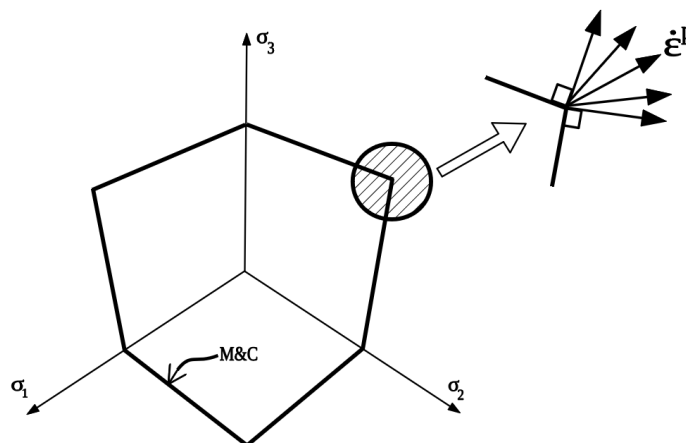


Figura 3.2 - Singularidade da função de escoamento de Mohr Coulomb (adaptado, Davis e Selvadurai, 2002)

Hoje é possível usar uma ferramenta computacional denominada programação semidefinida. Nela pode-se expressar o critério de Mohr Coulomb de forma semidefinida, ou seja, em função de variáveis semidefinidas que serão descritas nas equações (3.31) e (3.32). Onde não se tem problemas pela singularidade. A técnica consegue resolver grandes problemas tridimensionais de uma forma simples. Isso também se aplica para o critério de Tresca (Krabbenhoft et al., 2007).

As tensões principais são os autovalores do tensor de tensões σ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$):

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Defina-se duas restrições semidefinidas X e Z ,

$$X = \sigma + tI \geq 0 \quad (3.31)$$

$$Z = -\sigma + (k - at)I \geq 0 \quad (3.32)$$

onde t é uma variável auxiliar.

Para verificar que as equações (3.31) e (3.32) possam representar a equação (3.28), deve-se lembrar a propriedade dos autovalores se $B = A + nI$ e os autovalores de A são λ_i^A então os autovalores de B são $\lambda_i^B = \lambda_i^A + n$ então $\lambda_1^B \times \dots \times \lambda_n^B = \det(B)$. Se $B \geq 0$ então $\det(B) \geq 0$. Aplicando essa propriedade para as matrizes X e Z :

$$\det(\mathbf{X}) = (\sigma_1 + t)(\sigma_2 + t)(\sigma_3 + t) \geq 0 \quad (3.33)$$

Uma solução desta desigualdade é:

$$t \geq -\sigma_3 \leftrightarrow -\sigma_3 + s_1 = t, \quad s_1 \geq 0 \quad (3.34)$$

Similarmente:

$$\det(\mathbf{Z}) = (-\sigma_1 + k - at)(-\sigma_2 + k - at)(-\sigma_3 + k - at) \quad (3.35)$$

então:

$$(k - at) \geq \sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1 + s_2 = k - at, \quad s_2 \geq 0 \quad (3.36)$$

Das equações (3.36) e (3.34), conclui-se que:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 + as_1 + s_2 = k \quad (3.37)$$

Quando as variáveis de folga são nulas (slack variables) $s_1 = s_2 = 0$, obtém-se a equação original (3.28), então as variáveis semidefinidas do critério de Mohr-Coulomb são:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} t + \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & t + \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & t + \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (k - at) - \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & (k - at) - \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (k - at) - \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Finalmente, o problema (3.4) de otimização da análise limite fica expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } (-\lambda) \\ & \text{sujeito a:} \\ & \left\{ \begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{B} dV &= \lambda \left(\int_S \mathbf{t}_i \mathbf{N}_u dS + \int_V \mathbf{b}_i \mathbf{N}_u dV \right) \\ \mathbf{X} &\geq 0 \\ \mathbf{Z} &\geq 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A Figura 3.3 mostra um resumo do procedimento descrito.

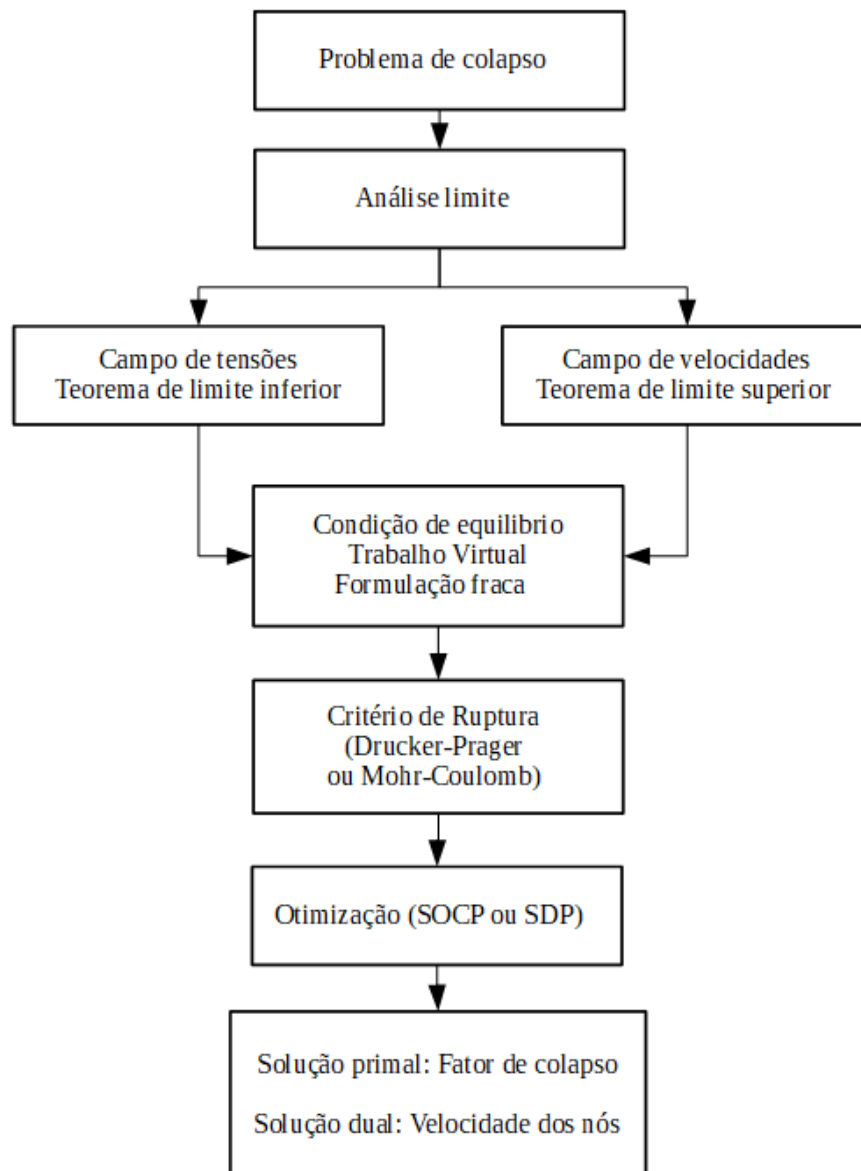


Figura 3.3 - Diagrama de fluxo geral para resolver o problema da análise limite numérica

4 Resultados

4.1. Modelagem numérica do modelo físico desenvolvido por Sterpi et al. (1996)

O modelo físico em escala reduzida, desenvolvido por Sterpi et al. (1996), tenta simular o comportamento tridimensional da estabilidade na frente de escavação de um túnel em um solo ou uma rocha de resistência baixa. Esse modelo físico é sob a gravidade normal (1g). Para isso, foram medidos os recalques na superfície e a pressão atuante na frente de escavação.

No modelo físico a pressão externa é aplicada na face da frente de escavação através de uma bolsa de ar, com pressão controlada por um manômetro, inicialmente possui um valor para o qual o modelo não apresenta deslocamentos, depois essa pressão inicial diminui por estágios e ao mesmo tempo são medidos os recalques gerados na coroa do túnel.

O modelo físico total mede 3.00m de largura, 3.85m de comprimento, e 3.00m de altura. O túnel mede 1.10m de comprimento, 1.22 de largura e 1.145m de altura, como se mostra na Figura (4.1).

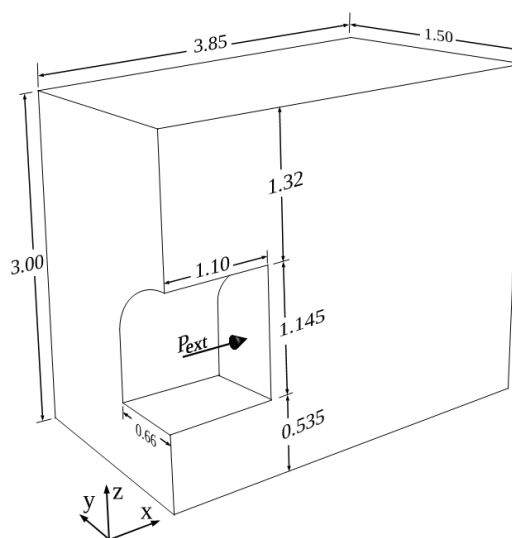


Figura 4.1 - Dimensões em metros da parcela simétrica do modelo físico apresentado por Sterpi et al. (1996)

No presente trabalho é avaliado numericamente a estabilidade do modelo físico através da NLA usando SOCP com o critério de Drucker Prager de menos resistência e SDP com o critério de Mohr Coulomb, considerando material com comportamento rígido perfeitamente plástico (RPP) com o objetivo de determinar o mecanismo de colapso e a determinação da mínima pressão uniforme necessária que se deve aplicar na frente de escavação para garantir o equilíbrio.

Para todos os testes realizados no modelo físico, a ruptura se desenvolveu através de um mecanismo quase simétrico em relação ao plano vertical médio (Sterpi e Cividini, 2004), como se pode observar na Figura (4.2).

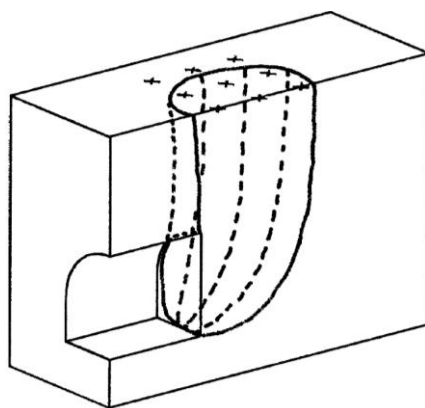


Figura 4.2 - Representação qualitativa do mecanismo de colapso, limitada pela superfície de cisalhamento (Sterpi e Cividini, 2004)

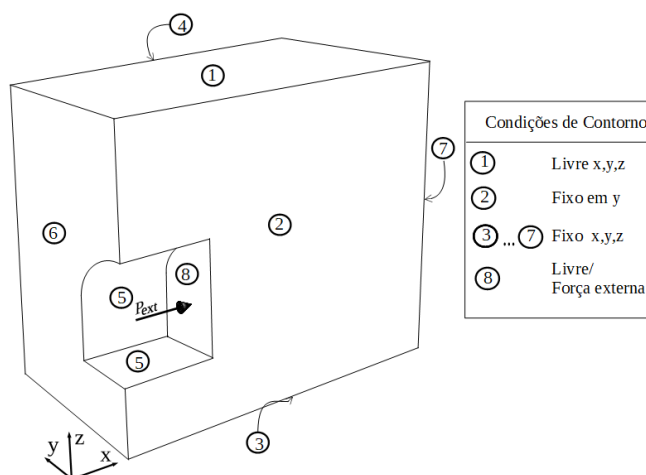


Figura 4.3 - Condições de contorno velocidade para o exemplo de aplicação.

Logo, as condições de contorno serão estabelecidas fixas nos eixos X, Y, Z, nos contornos diferentes ao plano de simetria, e no plano de simetria será fixo só

no eixo Y. As paredes do túnel se consideram fixas e na frente de escavação é livre nos eixos x, y, z, conforme a Figura (4.3).

Para essa modelagem numérica foi criada uma malha 3D no programa GiD v13 (Cimne, 2016). Utilizando-se elementos hexaédricos de oito nós (Figura (4.4)). A malha é do tipo semiestruturada, ou seja, estruturada em todas as regiões na direção X (com concentração de elementos perto da frente de escavação) e não estruturada em todas as regiões paralelas ao plano YZ. Foram criados 20424 elementos e 22962 nós.

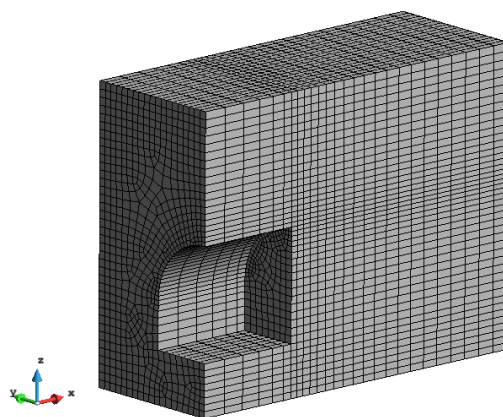


Figura 4.4 - Malha semiestruturada de 20424 elementos hexaédricos e 22962 nós.

A convergência do fator de colapso em relação ao tamanho dos elementos escolhido, segundo os resultados de Camargo (2016), possui uma diminuição de 8%, da malha mais grossa à mais fina.

Os parâmetros usados para a modelagem em Sterpi e Cividini (2004) foram: peso específico 14.4kN/m^3 , ângulo de atrito de 32° no pico e 24° residual e coesão 0kPa . Nesse trabalho apresenta o modelo com os dois ângulos de atrito separadamente só com o objetivo de conseguir fazer uma comparação do comportamento para ângulos de atrito diferentes. Além disso, foi considerada a coesão de 0.001kPa para conseguir a convergência numérica.

Os resultados mostram o mecanismo de colapso e a pressão externa mínima atuante na frente de escavação. Vale atentar para o fato de que, apesar do mecanismo de colapso ser identificado através das velocidades no domínio, o valor dessas velocidades não é representativo. (Camargo et al., 2016).

Os resultados dos campos de velocidade e pressão externa mínima na frente de escavação são determinados para o fator de colapso igual a 1.0, esse valor é o limite para atingir o colapso.

No resultado do mecanismo de colapso para os dois ângulos de atrito, nota-se que para 32 graus (Figura 4.7 e 4.8) é provável que a zona de colapso não atinja a superfície segundo as duas programações. Entretanto, para 24 graus (Figura 4.9 e 4.10) o modelo apresenta maiores velocidades na superfície, por isso é mais provável que a zona de colapso atinja a superfície, verificou-se o mesmo comportamento nas duas programações. Outra diferença no mecanismo de colapso, é que para NLA SDP se espalha horizontalmente mais do que com NLA SOCP.

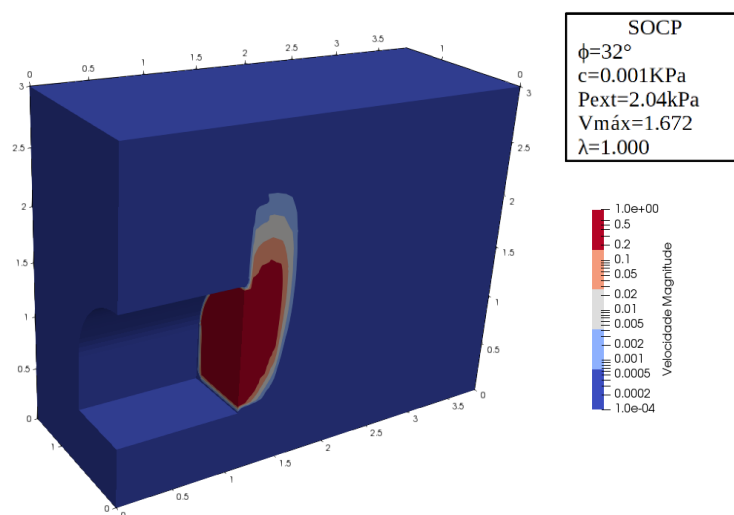


Figura 4.5 - Campo de velocidades da NLA com SOCP, ângulo de atrito 32° e coesão 1kPa.

Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.0.

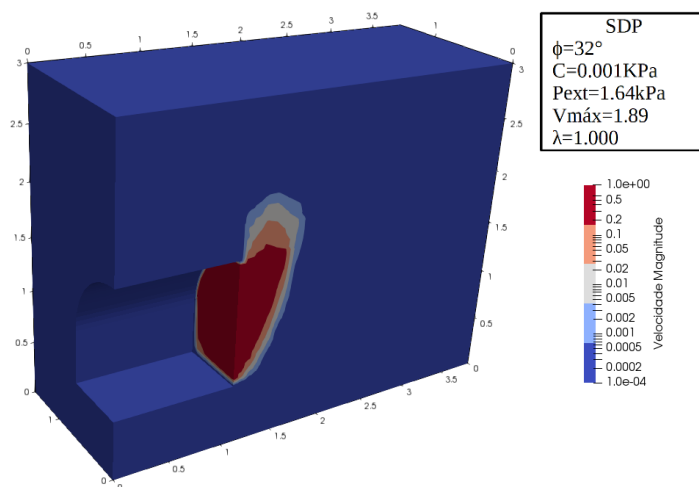


Figura 4.6 - Campo de velocidades da NLA com SDP, ângulo de atrito 32° e coesão 0.001kPa.

Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.

Em Sterpi e Cividini (2004) foram determinados numericamente os recalques, apresentados graficamente na Figura 4.7, considerando o comportamento elastoplástico com amolecimento, com o objetivo de determinar deslocamentos e recalques na superfície para poder comparar com o modelo físico.

Na comparação do comportamento de deslocamentos descrito na Figura 4.7 com os mecanismos de colapso obtidos com NLA SOCP (Figura 4.8) e NLA SDP (Figura 4.9). O modelo que o melhor se ajusta é o obtido com NLA SOCP para ângulo de atrito residual de 24° , porque graficamente se observa que tem comportamento mais suavizado do que com NLA SDP, o que corresponde a um comportamento de material isotrópico.

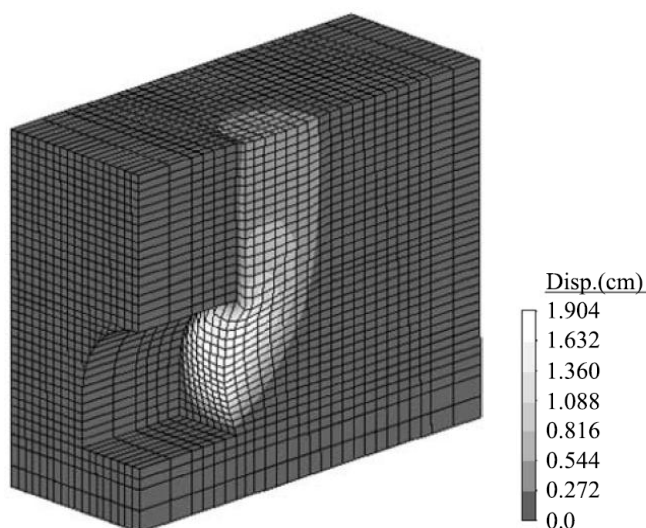


Figura 4.7 - Análise numérica do modelo do túnel 3D com malha refinada (17940 Elementos): malha deformada e iso linhas de deslocamento (Sterpi e Cividini, 2004)

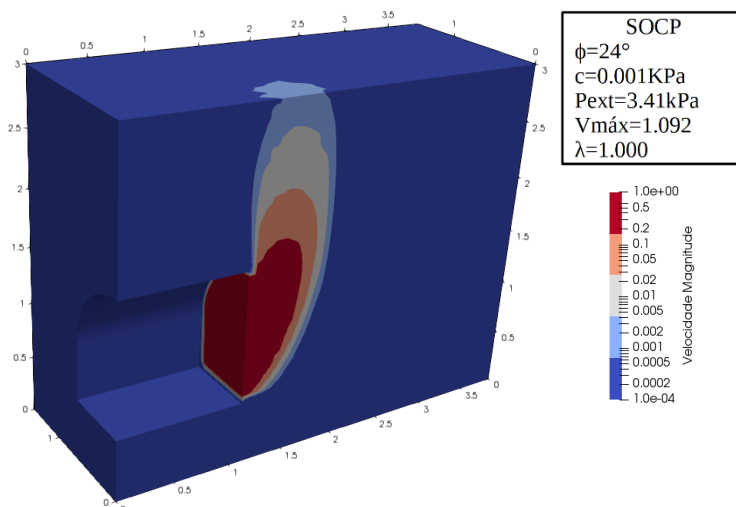


Figura 4.8 - Campo de velocidades da NLA com SOCP, ângulo de atrito 24° e coesão 0.001kPa. Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.

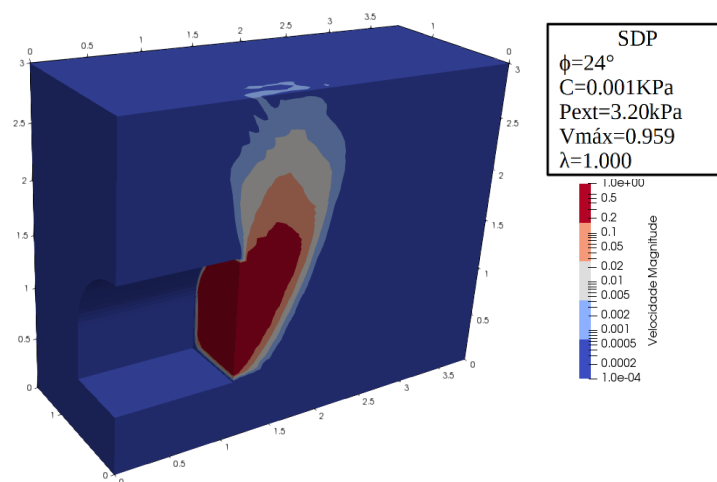


Figura 4.9 - Campo de velocidades da NLA com SDP, ângulo de atrito 24° e coesão 0.001kPa. Aplicando pressão externa para atingir o fator de colapso igual a 1.

Verifica-se na modelagem numérica com NLA que os valores da pressão externa para 32° são menores do que o necessário para 24° . Ocorre o contrário em relação as velocidades máximas na face da escavação.

Os resultados obtidos foram comparados com o resultado experimental de Sterpi (1996) e com um outro método numérico, chamado de Método do Ponto Material (MPM), descrito em Fernandez (2018). Verifica-se o comportamento similar do mecanismo de colapso, apresentado na Figura (4.10) e a pressão externa e levemente menor do que a obtida com NLA SOCP e maior do que NLA SDP, como se mostra na tabela 4.1. Na modelagem no MPM foi considerado o comportamento elastoplástico do material com amolecimento, também foi usado o critério de ruptura de Drucker Prager com ajuste interior ao critério de Mohr Coulomb.

Tabela 4.1 - Comparação de resultados de NLA SOCP e NLA SDP com MPM e Experimental

Metodologia Numérica	NLA				MPM	Experimental
	SOCP D-P* ϕ_r (24°)	SOCP D-P* ϕ_p (32°)	SDP M-C ϕ_r (24°)	SDP M-C ϕ_p (32°)	D-P* (considerando amolecimento) Fernandez ,2018	
Pressão Externa (kPa)	3.41	2.04	3.2	1.64	2.12	15-20%
Relação com a pressão geostática (k_0)	25.0%	15.0%	23.5%	12.0%	15.5%	
Relação com a pressão geostática (MPM)	22.4%	13.4%	21.0%	10.8%	13.9%	

(*)Considera o critério de Drucker Prager com ajuste interior ao critério de Mohr Coulomb.

Na Tabela 4.1 pode-se ver que os valores da pressão externa para o ângulo de atrito residual, obtidos com NLA, se ajustam melhor aos resultados obtidos com o MPM e experimental.

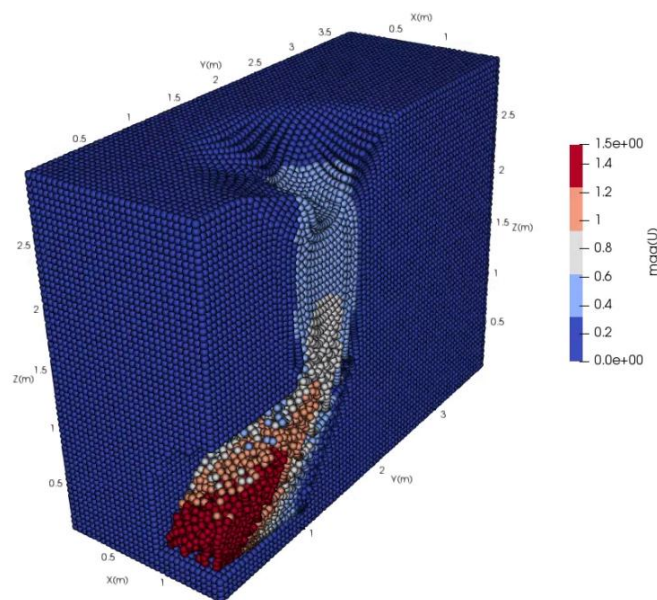


Figura 4.10 - Campo de deslocamentos, obtido com a modelagem do Método do Ponto Material (MPM). (Fernandez, 2018)

Na tabela 4.2 pode-se notar que o tempo de processamento é maior para NLA SDP do que para NLA SOCP, isso ocorre porque a SDP depende do maior número variáveis escalares, variáveis semidefinidas, restrições e iterações. O processador usado para todos os exemplos nesse trabalho é Intel Core i7-7700-CPU 3.60GHz.

Tabela 4.2 - Resumo dos resultados obtidos na modelagem com NLA SOCP e NLA SDP

C/D	1.00	1.00		
Coesão (kPa)	0.001	0.001		
Ângulo atrito	24°	32°		
No. nós	22962	22962		
No. elementos	20424	20424		
	SOCP	SDP	SOCP	SDP
Programação	D-P	M-C	D-P	M-C
Pressão externa (kPa)	3.41	3.20	2.04	1.64
Fator de Colapso	1.00	1.00	1.00	1.00
Velocidade máxima (-)	1.09	0.96	1.70	1.91
Tempo (segundos)	19.48	541.89	17.15	572.15
Iterações	9	11	9	14
Variáveis escalares	122545	142969	122545	142969
Variáveis cônicas	20424	0	20424	0
Variáveis semidefinidas	0	40848	0	40848
Restrições	57972	303060	57972	303060

4.2. Modelagem numérica de modelo físico desenvolvido por Kirsch (2010)

Esse exemplo modela numericamente um outro modelo físico em areia seca, aquele desenvolvido por Kirsch (2010). Nele é tentado simular a construção de um túnel com uma máquina de Balanço de Pressão de Terra (EPB), com objetivo de determinar o mecanismo de colapso e a pressão de suporte necessária para minimizar recalques na superfície e prevenir o colapso na frente de escavação.

O modelo físico também é sob a gravidade normal (1g), sem presença de forças externas na superfície e sem presença de água. Ou seja, tenta-se simular um modelo totalmente isotrópico. A pressão atuante é medida através de uma célula de carga, colocada no pistão, no momento recuar por estágios.

A geometria do modelo físico que se encontra em Kirsch (2010) é uma caixa é de 0.372m de comprimento, 0.28m de largura e 0.41m de altura, o túnel de um diâmetro de 0.10m e um comprimento de 0.07m. Mas a geometria com que se modela numericamente esse exemplo é, 0.30m de comprimento, 0.15m de largura, altura variável (em relação a C/D), diâmetro de 0.1m e comprimento de 0.07m. Nota-se que a geometria é diminuída para evitar divergência numérica pelas condições de contorno. As condições de contorno são as mesmas que para o exemplo 4.1, indicadas na Figura (4.3).

O mecanismo de ruptura no modelo físico, é obtido através de velocimetria por imagem de partículas (PIV), os resultados são apresentados na Figura 4.11, só podem ser registradas as partículas que se encontram no plano de simetria.

Comparações com previsões quantitativas de vários modelos teóricos mostraram que a pressão de suporte necessária é superestimada pela maioria dos modelos. Aqueles por Vermeer et al. (2002) e Leca e Dormieux (1990) mostrou a melhor concordância com as medidas por Kirsch (2010).

Dois tipos de modelos físicos são apresentados por Kirsch (2010). No primeiro é com areia densa (Densidade Relativa=80-85%), os resultados são apresentados na Figura 4.11 a), b), c). O segundo é com areia fofa (Densidade Relativa=26-29%), os resultados são apresentados na Figura 4.11 d), e), f).

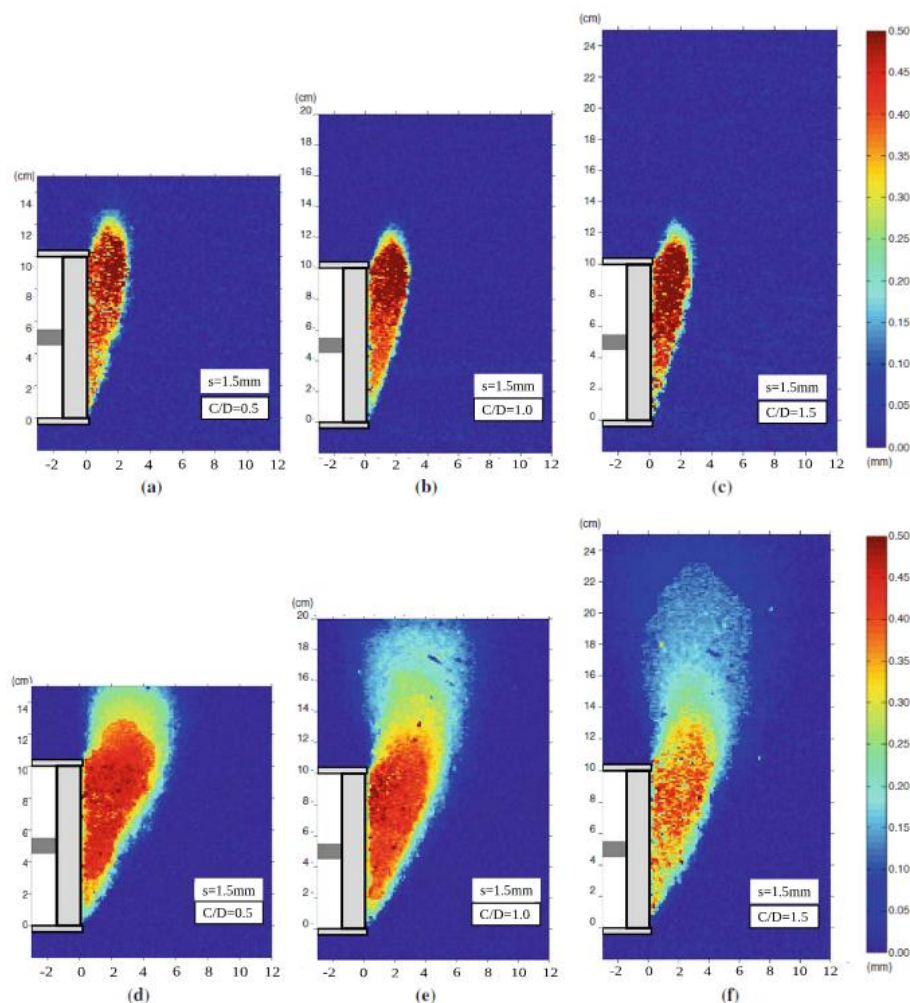


Figura 4.11 - Deslocamentos incrementais para deslocamento do pistão de 1.00 até 1.5mm. Na fila superior, areia densa (DR=80-85%), para a) $C/D=0.5$, b) $C/D=1.0$, c) $C/D=1.5$. Na fila inferior, areia fofa (DR=26-29%) para d) $C/D=0.5$, e) $C/D=1.0$, f) $C/D=1.5$. (Kirsch, 2010)

Os resultados experimentais da Figura 4.11 correspondem ao deslocamento do pistão de 1mm até 1.5mm de direita a esquerda e finalmente se captura a imagem com a câmera. Nota-se que se o pistão recua mais, então a zona de colapso segue acendendo. Nas figuras 4.12 e 4.13 se mostram em linhas tracejadas três iso superfícies de deslocamento para avanço do pistão de 1.5, 3.0 e 6mm, que se obtiveram no experimento de Kirsch (2010).

As interpretações das medições efetuadas nos testes realizados por Kirsch (2010) e Sterpi et al. (1996) indicam que uma banda de cisalhamento se origina quase no ponto médio da face de escavação. Em seguida, ela se desenvolve lateralmente, para os lados e à frente da face da escavação. Esta zona de falha em forma de uma chaminé se espalha para a superfície seguindo uma direção quase vertical, esse comportamento se apresenta em todas as análises feitas (Figuras 4.13

e 4.14). Uma segunda zona de localização, tendo uma forma arqueada, se espalha verticalmente da coroa do túnel. Esse último comportamento se mostra na Figura 4.14 b), c), e), f). O colapso é alcançado, segundo Kirsch (2010), quando as duas superfícies se encontram, isolando um volume de areia cilíndrico.

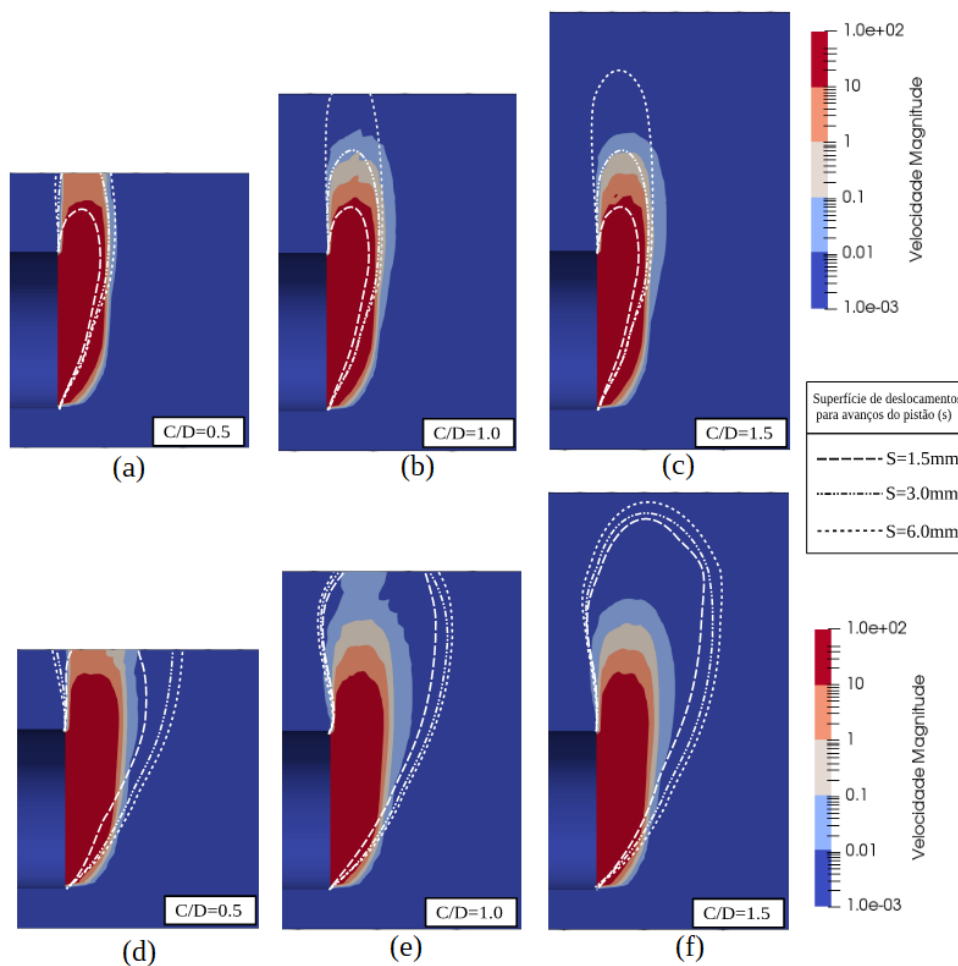


Figura 4.12 - Mapa de velocidade da NLA-SOCP. Em a) b) c), areia densa ($\phi=32.5^\circ$ e $c=0.1\text{kPa}$). Em d) e), areia fofa ($\phi=31.3^\circ$ e $c=0.1\text{kPa}$). Em linhas tracejadas a superfície de deslocamentos obtidas no experimento, para avanços do pistão ($s=1.5, 3.0$ e 6.0mm), em Kirsch (2010).

Para comparar o mecanismo de ruptura descrito por Kirsch (2010) com o modelo de NLA deve-se ter os diagramas de deslocamento incremental para diferentes deslocamentos do pistão (s), Figura 4.11. Percebe-se visualmente que o comportamento do mecanismo de ruptura é similar, apresenta maior largura que para areia fofa (ângulo de atrito 31.3°), Figura 4.12d), e), f) e Figura 4.13 d), e), f) em comparação com a areia densa (ângulo de atrito 32.5°) Figura 4.12 a), b), c) e Figura 4.13 a), b), c). Além disso, observa-se que NLA-SOCP assemelha-se mais ao modelo físico que NLA-SDP.

Observa-se as linhas tracejadas nas Figuras 4.12 e 4.13, elas mostram a superfície dos deslocamentos (banda de 0.10-015mm) obtidos no modelo físico para diferentes avanços ou deslocamentos do pistão ($s=1.5, 3.0$ e 6.0 mm).

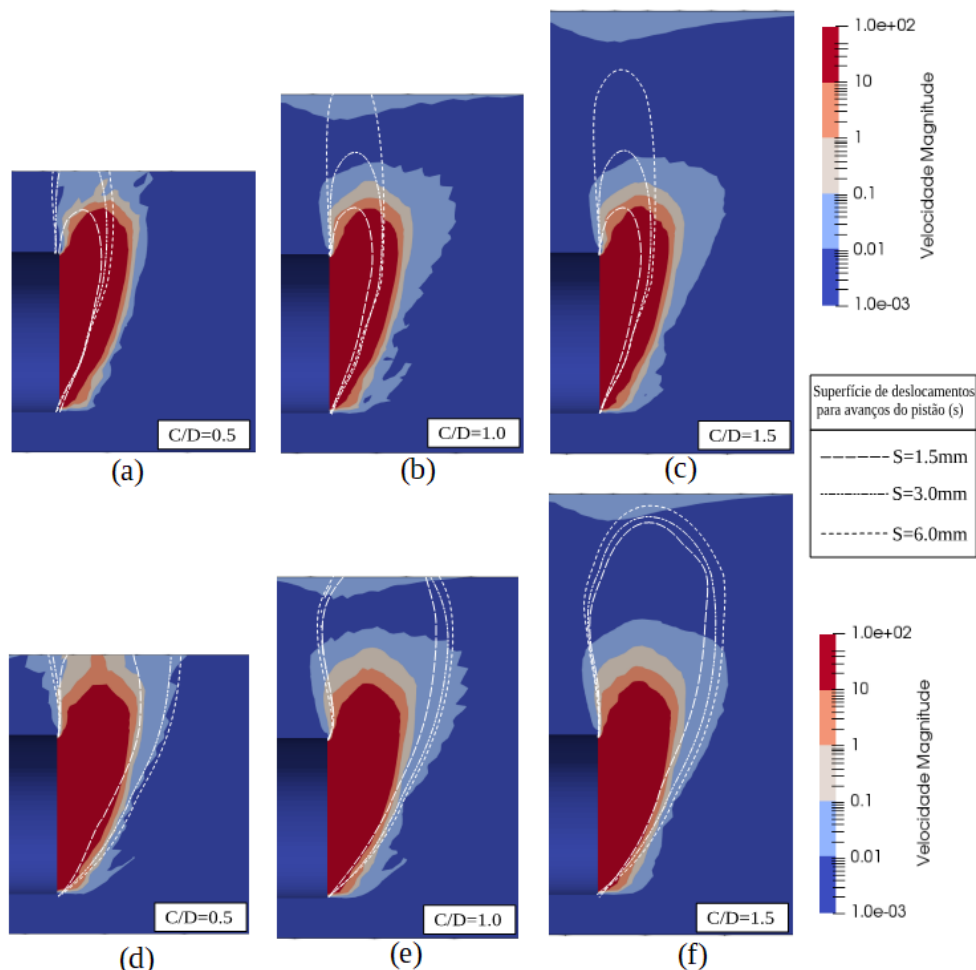


Figura 4.13 - Mapa de velocidade da NLA-SDP. Em a) b) c), areia densa ($\phi=32.5^\circ$ e $c=0.1\text{kPa}$). Em c) d) e), areia fofa ($\phi=31.3^\circ$ e $c=0.1\text{kPa}$). Em linhas tracejadas a superfície de deslocamentos obtidas no experimento, para avanços do pistão ($s=1.5, 3.0$ e 6.0mm), em Kirsch (2010).

O resultado da pressão externa de NLA SOCP e SDP e comparado com o valor da pressão externa medida no modelo experimental de Kirsch (2010). Além disso, é comparado com os métodos analíticos que empregam teorema do limite superior, eles são: Horn (1961), Krause (1987), Léca e Durmieux (1990), Kolymbas (2007) e método empírico de Veermer et al. (2002). Para $C/D=1.0$ os resultados são apresentados na Figura (4.14) e na Tabela 4.3.

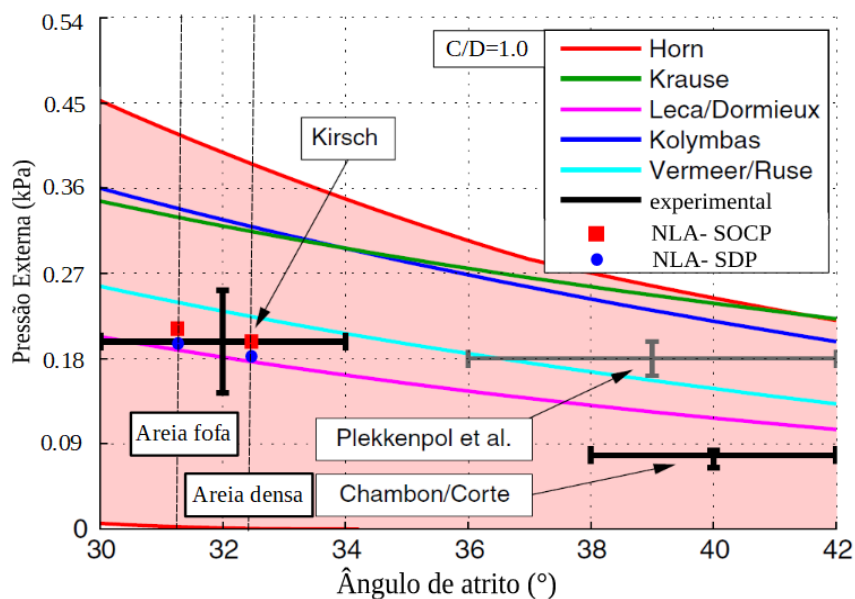


Figura 4.14 - Comparção do valor da pressão externa obtida com NLA SOCP e SDP em relação as metodologias analíticas, experimentais e empíricas. Para $C/D=1.0$ (Adaptado, Kirsch (2010))

Na tabela 4.3, verifica-se que a maior profundidade a pressão de suporte deve aumentar, além disso, mostra-se que para SDP precisa de menor pressão de suporte em relação a aquela obtida mediante SOCP. Isso é compreensível porque a modelagem de NLA SOCP usa o critério de Drucker-Prager de menor resistência, e NLA SDP usa Mohr-Coulomb, de maior resistência.

Tabela 4.3 - Comparação da pressão externa segundo a análise de vários autores e metodologias

C/D	Ângulo de atrito (°)	Coesão (kPa)	Pressão externa (kPa)				
			NLA SOCP D-P	NLA SDP M-C	Kirsch	Léca e Durmieux	Vermer
0.5	32.5	0.001	0.200	0.187	0.167	---	---
	31.3	0.001	0.210	0.202	0.188	---	---
1.0	32.5	0.001	0.201	0.186	0.156	0.166	0.207
	31.3	0.001	0.212	0.202	0.198	0.177	0.219
1.5	32.5	0.001	0.206	0.189	0.171	---	---
	31.3	0.001	0.216	0.205	0.193	---	---

O tempo empregado é muito maior para SDP em relação a SOCP, no exemplo de 29576 elementos demora até 35 vezes mais do que demoraria com SOCP. Então o tempo reduzido é uma boa vantagem de NLA com SOCP, conforme se pode verificar na Tabela 4.4.

4.3. Análise do problema da escavação dos túneis paralelos vizinhos

Adaptou-se outro exemplo, a escavação de dois túneis paralelos na mesma altura. A diferença da análise nesse exemplo será da avaliação da estabilidade numa ruptura na parede lateral de um e dos dois túneis, sem aplicação de pressão externa. O objetivo de esse exemplo é visualizar como ocorre o mecanismo de ruptura e a variação do fator de colapso.

Serão modelados dois casos: ruptura em apenas no túnel T1 e ruptura nos túneis T1 e T2 como aparece na Figura 4.15 (face hachurada 6). Para isso, no primeiro caso nas condições de contorno vai ter livre só a face hachurada 6 do túnel T1, no segundo caso nas condições de contorno vai ter livre nas a face 6 hachurada dos dois túneis T1 e T2.

Gerou-se uma malha do tipo semiestruturada no GiD v.13 (Cimne, 2016). Estruturada na direção X com concentração de elementos para $X=0$ e não estruturada em todas as faces paralelas ao plano YZ, pode-se ver na Figura 4.16. As dimensões e condições de contorno estão estabelecidas na Figura 4.15.

Nesse exemplo, os parâmetros do solo são: peso específico de 14.4 kN/m^3 , ângulo de atrito 24° e coesão 1 kPa . As relações geométricas são: $C/D=1.0$, $d/D=1.50$, com os diâmetros do T1 e T2 iguais a 6 m .

A análise feita nesse exemplo será mediante NLA-SOCP com o critério de ruptura de Drucker-Prager e NLA-SDP com o critério de Mohr Coulumb. A diferença com os exemplos anteriores é que não vai ser aplicada nenhuma pressão externa. Os resultados a avaliar são os fatores de colapso e os mecanismos de colapso.

Tabela 4.4 - Resumo de resultados obtidos para o exemplo de túnel a diferentes profundidades avaliado com NLA-SOCP e NLA-SDP, para o problema de Kirsch (2010)

C/D	0.50	0.50	1.00	1.00	1.50	1.50
Coesão (kPa)	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
Ângulo atrito	32.5	31.3	32.5	31.3	32.5	31.3
No nós	47436	47436	60356	60356	70288	70288
No elementos	18254	18254	24581	24581	29576	29576

	SOCP D-P	SDP M-C	SOCP D-P	SDP M-C	SOCP D-P	SDP M-C	SOCP D-P	SDP M-C	SOCP D-P	SDP M-C	SOCP D-P	SDP M-C
Programação												
Pressão externa (kPa)	0.200	0.187	0.210	0.202	0.201	0.186	0.212	0.202	0.206	0.189	0.216	0.205
Fator de Colapso	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Velocidade máxima ($\times 10^3$)	2.91	2.93	2.76	2.78	2.89	2.93	2.78	2.77	2.95	2.90	2.80	2.77

Tempo (segundos)	15.57	418.69	16.87	425.85	25.51	817.52	26.78	811.85	34.70	1258.56	36.85	1289.51
Iterações	10	14	10	13	10	15	9	14	9	14	10	15
Variáveis escalares	109525	127779	109525	127779	147487	172068	147487	172068	177457	207033	177457	207033
Variáveis cônicas	18254	0	18254	0	24581	0	24581	0	29576	0	29576	0
Variáveis semidefinidas	0	36508	0	36508	0	49162	0	49162	0	59152	0	59152
Restrições	52313	271361	52313	271361	70529	365501	70529	365501	84821	439733	84821	439733

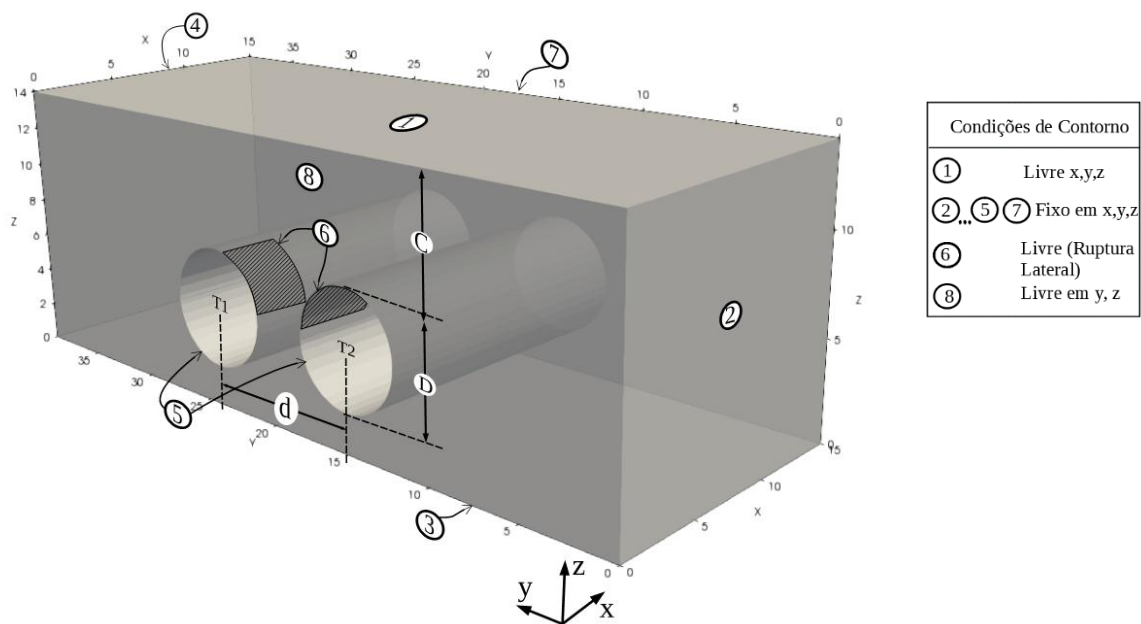


Figura 4.15 - Condições de contorno e geometria dos túneis paralelos para $C/D = 1.0$ e $d/D=1.5$, quando $D=6m$.

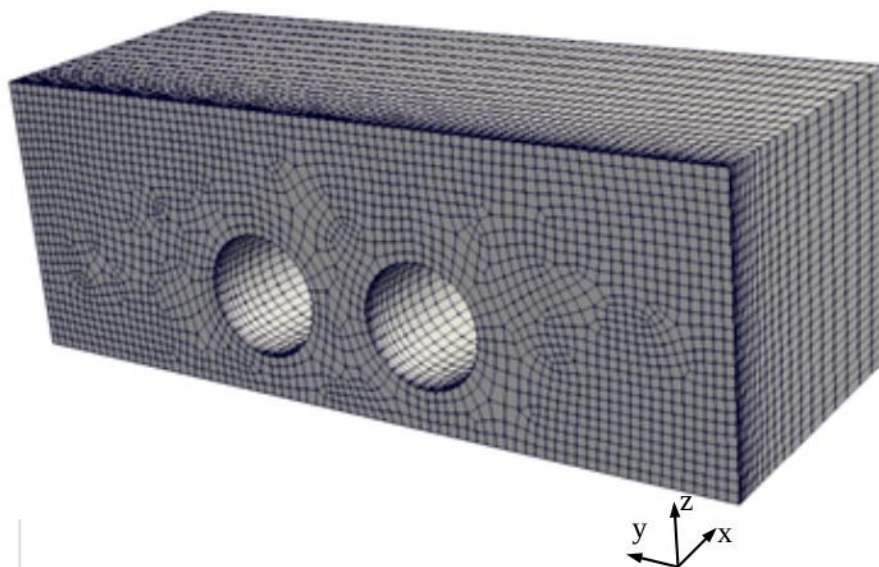


Figura 4.16 - Malha de 39380 elementos hexaédricos de oito nós.

A seguir serão apresentados os mapas de velocidade que servem para determinar os mecanismos de colapso com as propriedades descritas anteriormente e para os dois casos, com uma e duas rupturas. Na parte inferior de cada figura se encontra o plano $X=0$ e na parte superior se encontra o plano da superfície, $Z=14$. O resumo de todos os resultados se pode ver na tabela 4.5.

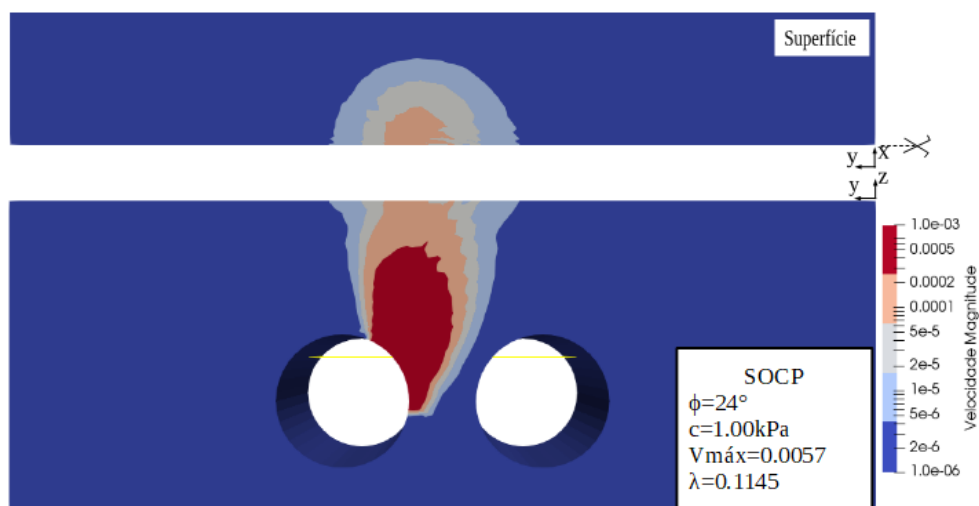


Figura 4.17 - Análise com NLA-SOCP da ruptura lateral do túnel T1

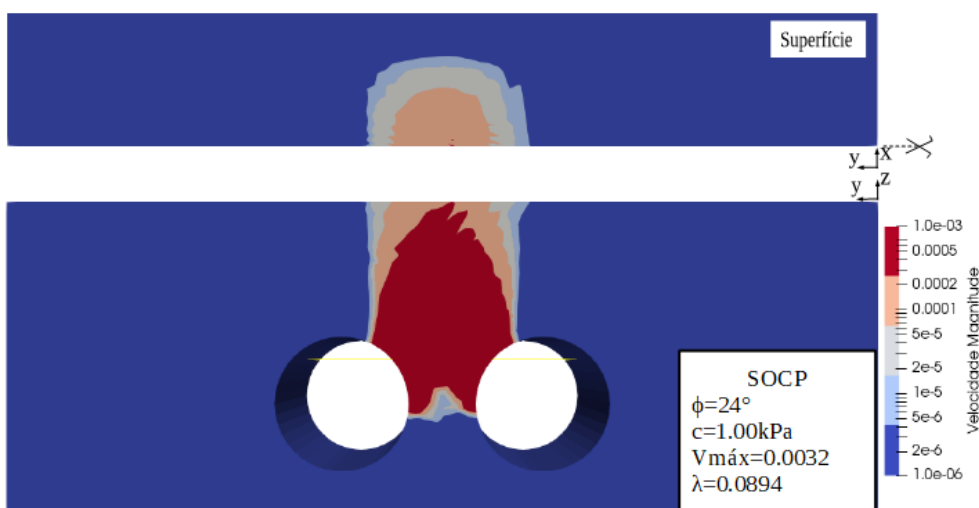


Figura 4.18 - Análise com NLA-SOCP da ruptura lateral do túnel T1 e T2

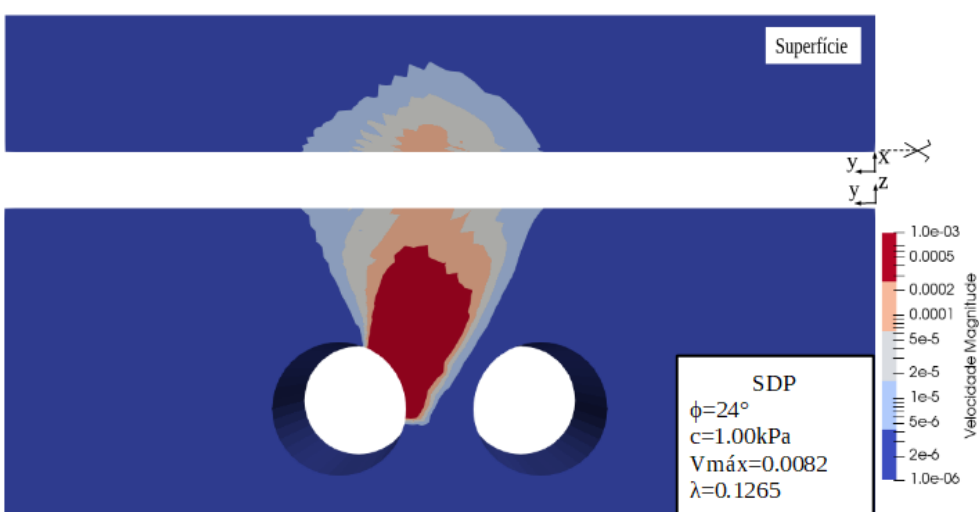


Figura 4.19 - Análise com NLA-SDP da ruptura lateral do túnel T1

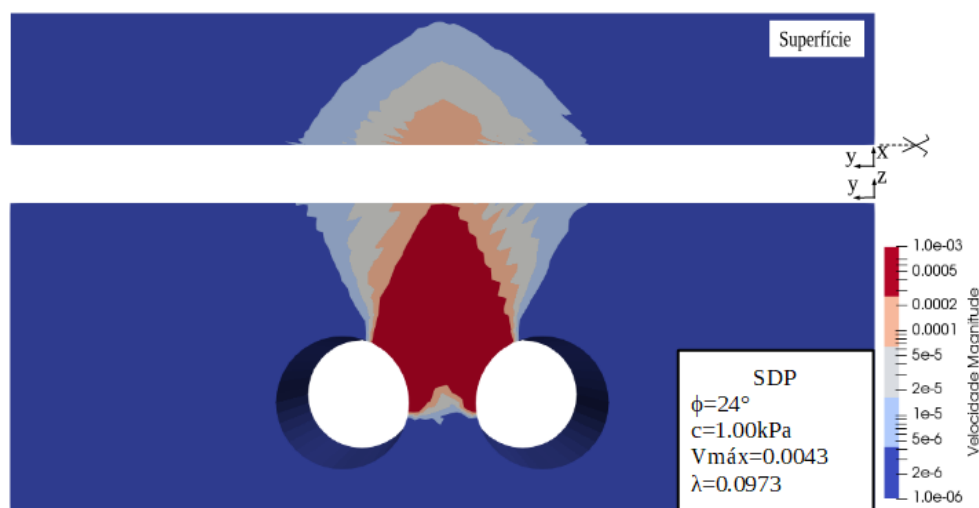


Figura 4.20 - Análise com NLA-SDP da ruptura lateral do túnel T1 e T2

Os mecanismos de colapso obtidos para uma ruptura no túnel T1 têm uma forma cônica, aquela forma se espalha mais horizontalmente com NLA SDP, mostra-se na Figura 4.19, do que com NLA SOCP, mostrado na Figura 4.17.

Tabela 4.5 - Resultados de fator de colapso determinados com NLA usando SOCP e SDP para o problema de túneis paralelos

	Ruptura lateral no túnel T1		Ruptura lateral nos túneis T1 e T2	
C/D	1.00		1.00	
d/D	1.50		1.50	
Coesão (kPa)	1.00		1.00	
Ângulo atrito	24°		24°	
No nós	44373		44373	
No elementos	39380		39380	
	SOCP D-P	SDP M-C	SOCP D-P	SDP M-C
Programação	0.00	0.00	0.00	0.00
Pressão externa (kPa)	0.115	0.127	0.089	0.097
Fator de Colapso	0.0057	0.0082	0.0032	0.0043
Velocidade máxima (-)				
Tempo (segundos)	29.57	1989.15	30.66	2130.81
Iterações	10	10	9	10
Variáveis escalares	236281	275661	236281	275661
Variáveis cônicas	39380	0	39380	0
Variáveis semidefinidas	0	78760	0	78760
Restrições	112628	584924	112628	584924

No caso de se ter duas rupturas no túnel T1 e T2, o resultado para NLA SOCP, é mostrado na Figura 4.18, e para NLA SDP, é mostrado na Figura 4.20. Os mecanismos de ruptura se juntam gerando um único cone. Isto vai influenciar no fator de colapso, diminuindo em relação ao primeiro caso de uma ruptura (ver Tabela 4.5). Esse comportamento é verificado para os dois tipos de programação usadas. Traduzido em termos de pressão no revestimento, seria o mesmo dizer que para o caso de ter uma ruptura é necessário de menos pressão do que o caso de duas rupturas.

Uma observação adicional, é que se a separação entre os túneis (relação d/D) for a suficiente para não influir o mecanismo de colapso um sobre outro, então os valores do fator de colapso serão independentes e não vai mudar de valor.

4.4. Modelagem numérica do exemplo apresentado por Mollon et al. (2012)

Mollon et al. (2012) descreve procedimento analítico baseado em análise limite, considerando o limite superior (método cinemático), considerando o critério o critério de ruptura de Mohr Coulomb. Este último não é uma justificativa para não poder fazer a comparação, porque teoricamente os limites devem convergir à mesma resposta, seja qual for a teorema do limite escolhido.

Nesse trabalho modela-se numericamente o exemplo de túnel raso descrito por Mollon et al. (2012). As considerações da modelagem foram as mesmas daquelas usadas nos dois primeiros exemplos. A geometria é descrita na Figura 4.21 e os parâmetros para o material argiloso em condições não drenadas são: peso específico saturado de 18kN/m^3 , ângulo de atrito de 0° e coesão de 20kPa e 30kPa.

Os objetivos do modelamento numérico deste problema é determinar e comparar o valor da pressão mínima necessária atuante na frente de escavação para evitar o colapso e determinar o mecanismo de colapso, para os dois casos de condição não drenada com coesão de 20kPa e 30kPa.

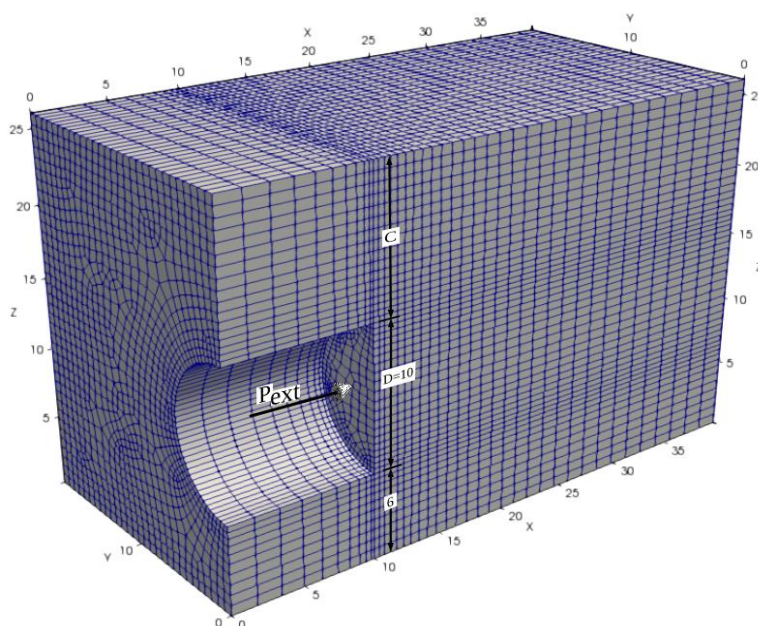


Figura 4.21 - Geometria do tunel, em metros, para o exemplo 4.5 (adaptado, Mollon et al., 2012)

Mollon et al. (2012) apresentam a determinação do limite superior através de dois mecanismos, aqui denominados M1 e M2. Os autores também apresentam comparação dos resultados obtidos com aqueles obtidos com a modelagem numérica usando o software comercial FLAC3D®, usado na geotecnia. Outro modelo analítico desenvolvido por Mollon et al. (2011), também é utilizado na comparação.

O modelamento numérico com NLA SOCP deste problema é similar aos exemplos 4.1 e 4.2, aplica-se uma pressão na frente de escavação e as condições de contorno também são as mesmas. A profundidade do túnel é variável, de acordo à relação C/D (0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0). Logo, se criaram 5 malhas semiestruturadas no programa GiD v.13(Cimne, 2016).

As Figuras 4.22 e 4.23 mostram os resultados da pressão externa obtida com NLA usando SOCP. As Figuras mostram relação entre a força externa e a relação C/D . Os valores obtidos por NLA SOCP estão mais próximos daqueles obtidos com a análise elastoplástica e critério de Mohr Coulomb determinados com programa FLAC 3D.

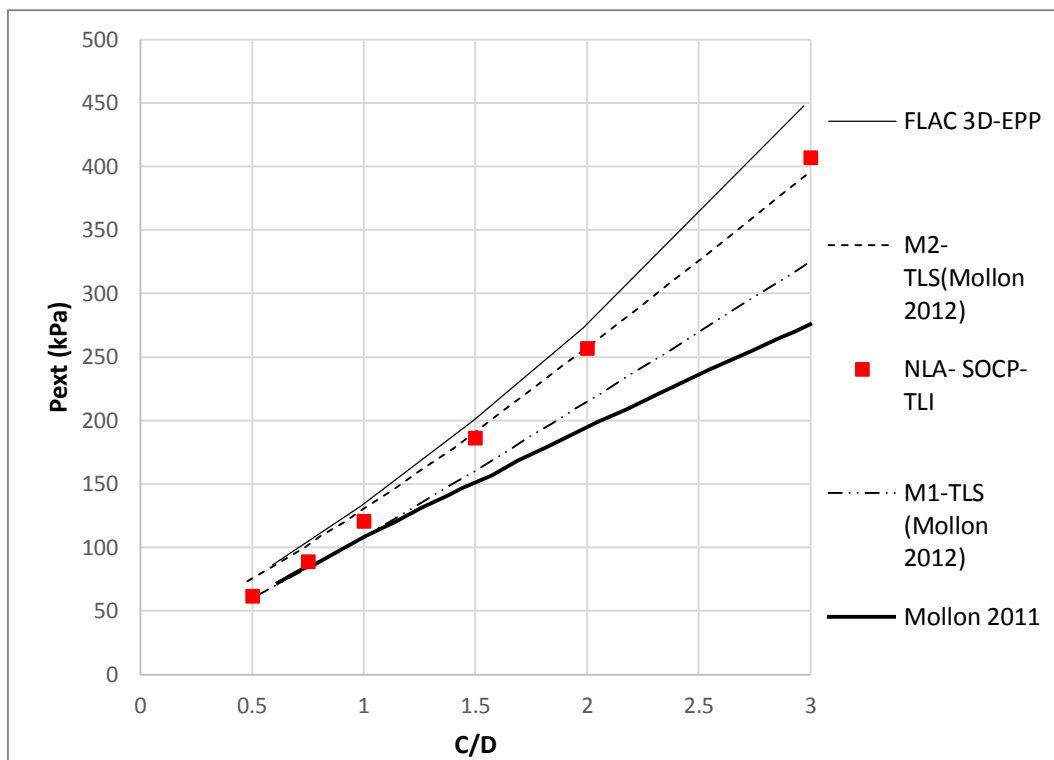


Figura 4.22 - Pressão externa em relação à profundidade do túnel para $\phi=0^\circ$ e $c_u=20\text{kPa}$

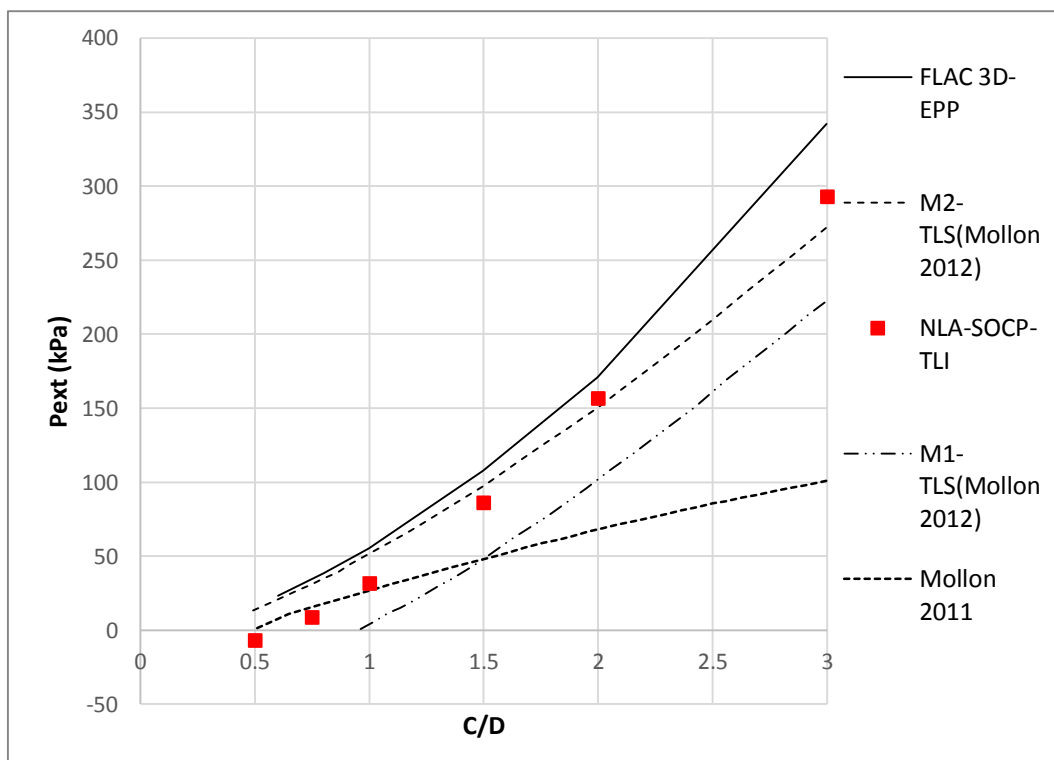


Figura 4.23 - Pressão externa em relação à profundidade do túnel para $\phi=0^\circ$ e $c_u=30\text{kPa}$.

Compara-se também os campos de velocidades justamente na frente de escavação apresentados na Figura 4.24. Nela se observa também um comportamento similar ao obtido pelo FLAC 3D.

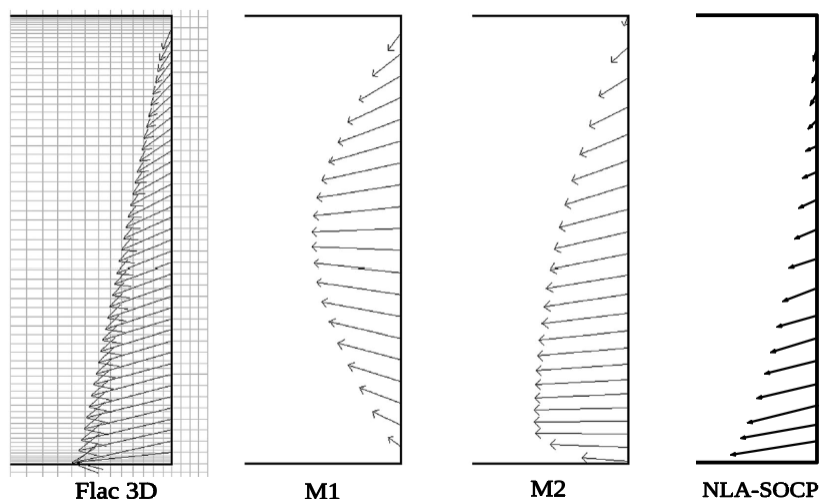


Figura 4.24 - Campo de velocidades na frente de escavação do túnel (adaptado, Mollon et al., 2012).

Das Figuras 4.25, 4.26 e 4.27 compara-se o mecanismo de colapso de NLA-SOCP com os mecanismos de ruptura M1 e M2. Na figura 4.25 se observa que NLA-SOCP se ajusta melhor ao mecanismo M2 do que ao M1.

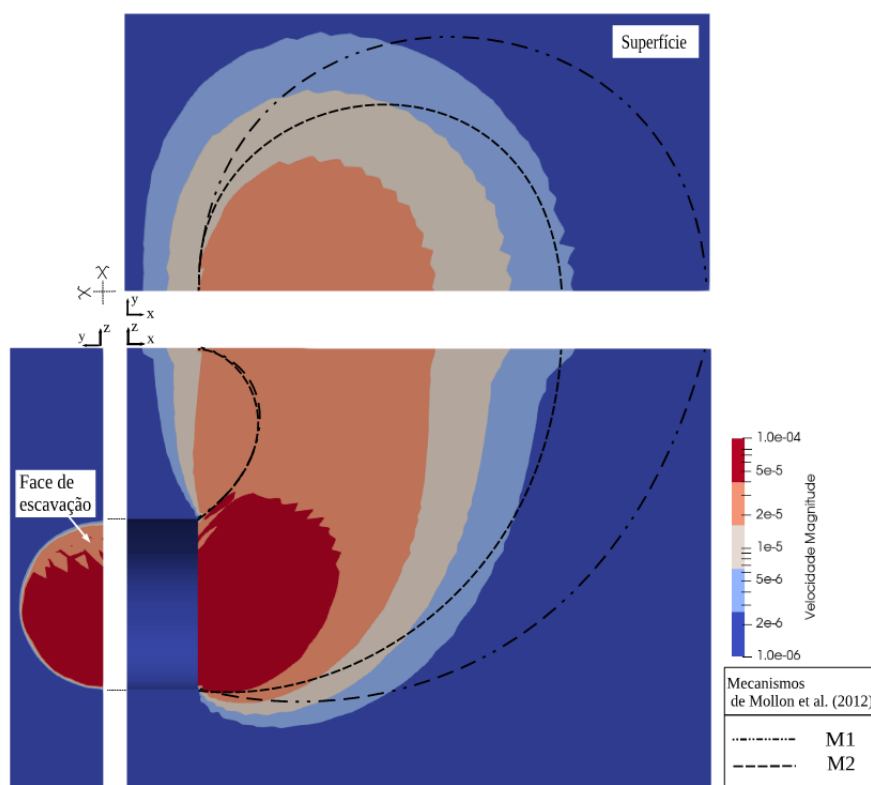


Figura 4.25 - Campo de velocidades obtida com NLA-SOCP para $\phi=0^\circ$ e $c_u=20\text{kPa}$. Em linhas tracejadas a superfície do mecanismo de colapso M1 e M2, descritas por Mollon et al (2012).

Na tabela 4.6 se observa a grande diferença entre os tempos de processamento. O tempo obtido para NLA com SOCP e os métodos analíticos M1

e M2 são menores do que o tempo de processamento com o FLAC 3D. Convertendo-se essa na principal vantagem do método da NLA.

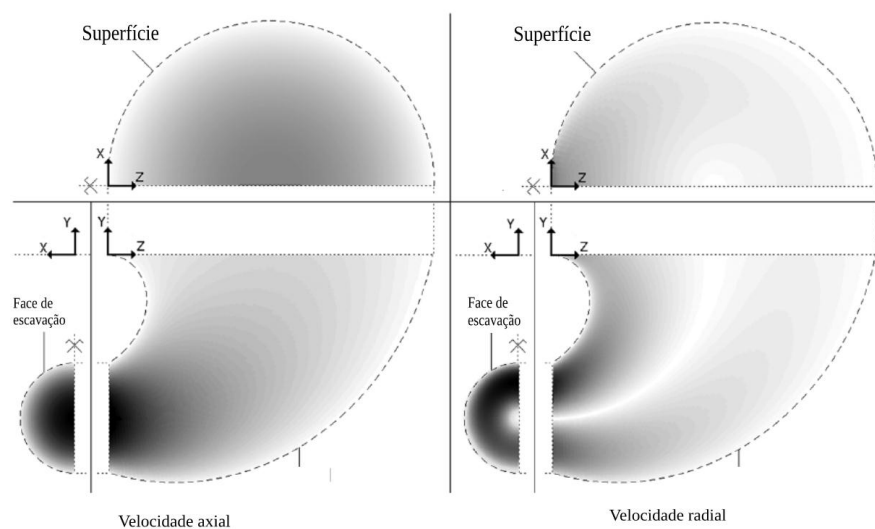


Figura 4.26 - Campo de velocidade axial e radial obtida pelo mecanismo M1 para $\phi=0^\circ$ e $c_u=20\text{kPa}$, descrita por Mollon et al. (2012)

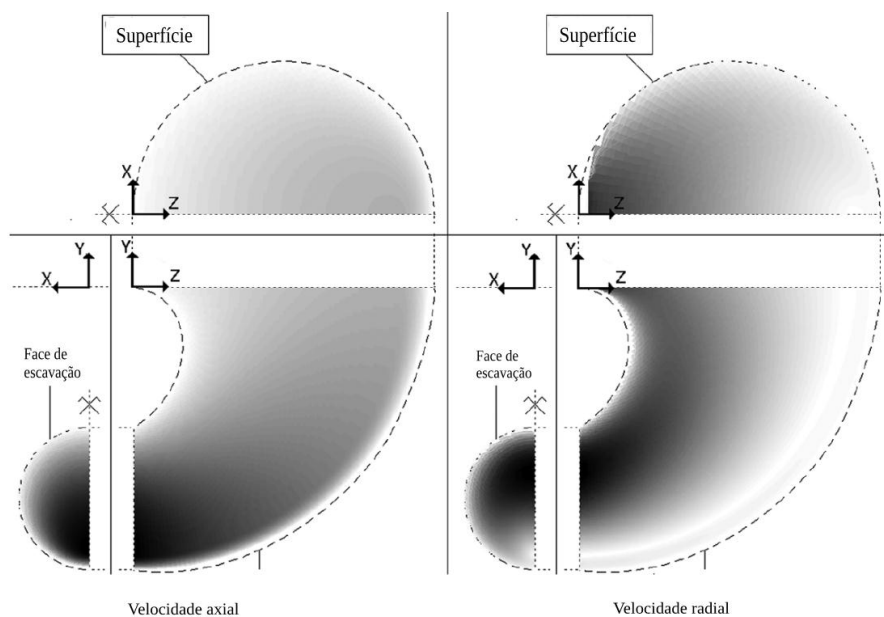


Figura 4.27 - Campo de velocidade axial e radial obtida pelo mecanismo M2 para $\phi=0^\circ$ e $c_u=20\text{kPa}$, descrita por Mollon et al. (2012)

Tabela 4.6 - Comparação do tempo de processamento

Metodologia numérica	NLA SOCP D-P	Mollon et al. (2012)		
		M1	M2	FLAC 3D
Tempo de processamento (médio)	40 seg	20 seg	20 seg	50 hrs
Processador CPU	Core i7 3.6GHz	Quad-Core 2.4GHz		

5

Conclusões e sugestões

Conseguiu-se implementar o problema da análise limite numérica 3D com sucesso, através da programação cônica de segunda ordem e semidefinida. Para isso, adaptou-se e usou-se os critérios de ruptura de Drucker-Prager 3D e Mohr-Coulomb 3D formulados em Krabbenhoft et al. (2007) e Martin e Makrodimopoulos (2005, 2006 e 2008). Os critérios de ruptura foram adaptados corretamente em SOCP e SDP para seu uso no MOSEK Aps 7.1.

Conseguiu-se obter resultados coerentes com ambas programações, determinando-se o fator de colapso. Além disso, obteve-se a solução dual do problema, nela é dado como resultado as velocidades necessárias para determinar o mecanismo de colapso.

A exatidão do contorno no colapso não consegue ser bem definida, não se sabe exatamente até que valor de velocidade mínima tem que se considerar o colapso. Segundo o critério descrito em Sterpi et al. (1996) o colapso é alcançado quando a curva da chaminé se encontra com a curva na coroa do túnel, isolando um volume cilíndrico. Nos modelos físicos observa-se também que nem todas as superfícies atingem o topo do maciço do solo, de todo modo também é chamado de colapso, descrito em Takano et al. (2006).

Em todos os resultados do mecanismo de ruptura obtidos, observa-se o efeito chaminé e cunha que é descrito pelos modelos físicos desenvolvidos por Chambon e Corté (1994); Sterpi et al. (1996); Takano et al. (2006); Kirsch (2010); modelo analítico Mollon et al. (2012) e modelagem numérica Sterpi e Cividini (2004)

A pressão externa mínima necessária para atingir o equilíbrio determinada com programação SDP e com o critério de ruptura de Mohr-Coulomb é sempre menor do que a pressão que necessita com SOCP e o critério de ruptura de Drucker-Prager menos resistente.

A tendência da pressão em relação à profundidade do túnel é muito similar à obtida pela modelagem numérica do FLAC 3D e o mecanismo M2 descritas em Mollon et al. (2012). Por isso, conclui-se que o cálculo da pressão e determinação do mecanismo de colapso pelo método de NLA com SOCP (considerando o teorema de limite inferior) ajusta-se muito bem para avaliar esse tipo de problema.

Em relação ao tempo de processamento do método de NLA com SOCP, é muito mais rápido do que o de processamento de NLA com SDP, por possuir menos variáveis e restrições. Além disso, comparando com o tempo de processamento dos programas comerciais de elementos finitos, o tempo para calcular o colapso é muito menor para ambas programações, como se observou na tabela 4.6.

Uma sugestão nesse trabalho é a implementação do código desenvolvido numa linguagem de programação livre para ser implementado em outro programa comercial, ou seja, linguagem de C++ ou Python, já que o algoritmo do Mosek também se encontra disponível para essas linguagens.

Em presença de água teria que ser considerada a poropressão, mas o efeito não foi considerado nos exemplos avaliados, poderia ser implementado com base nos trabalhos em estabilidade de taludes desenvolvidos por Camargo et al. (2016) e Tapia (2013).

Uma outra sugestão, é a implementação da NLA considerando a lei de fluxo não associada, nela consideram uma função potencial que é diferente a função de escoamento considerada na lei de fluxo associada.

No caso da avaliação da análise limite numérica em maciços rochosos, sugere-se implementar o critério de Hoek-Brown através da programação semidefinida. Essa adaptação é descrita e aplicada na determinação da capacidade de suporte em fundações, por Kumar e Mohapatra (2017).

ALEJANO, L. R., e BOBET, A. **Drucker–Prager Criterion**. Rock Mechanics and Rock Engineering, 45(6), 995-999, 2012.

ANDERSEN, E., ROOS, C. e TERLAKY, T. **On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization**. Mathematical Programming, 95(2), 249-277, 2003.

BARROS G., PEREIRA A., VAZ L.E. e MARTHA L.F. **Análise limite com o método dos elementos de contorno**. XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. CILAMCE 2014. Fortaleza, CE, Brazil, 2014.

BRUNO H., BARROS G., MARTHA L. e MENEZES I. **Formulação e solução de problemas de retorno à superfície de escoamento via programação cônica**. XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. CILAMCE 2017. Florianópolis, SC, Brazil, 2017.

CAMARGO, J., VELLOSO, R. Q., e VARGAS, E. A. **Numerical limit analysis of three-dimensional slope stability problems in catchment areas**. Acta Geotechnica, 11(6), 1369-1383, 2016.

CHAHUA, L. VARGAS, E. A. e VAZ L.E. **Análise limite para o cálculo do fator de segurança de estabilidade de taludes utilizando programação cônica de segunda ordem**. XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. CILAMCE 2013. Pirenópolis, GO, Brazil.

CHAMBON, P., e CORTÉ, J. **Shallow Tunnels in Cohesionless Soil: Stability of Tunnel Face**. Journal of Geotechnical Engineering, 120(7), 1148-1165, 1994.

CHEN, W. **Limit analysis and soil plasticity**. Fort Lauderdale: J. Ross Publishing, 2008.

CHEN, W. **Preface. Limit Analysis and Soil Plasticity Developments in Geotechnical Engineering**, 1975.

CHEN, W.F. e LIU, X.L. **Limit Analysis in Soil Mechanics**. Amsterdam: Elsevier, 1990.

CIMNE. GiD, version 13.0. Technical Report, International Center for Numerical Methods in Engineering, 2016.

CIVIDINI, A. **Constitutive behaviour and numerical modelling**. In: Hudson J (ed) *Comprehensive rock engineering*, vol 1. Pergamon Press, Oxford, pp 395–426, 1993.

DANTZIG, G.B. **Programming in a Linear Structure**. Report of the September 9, 1948 meeting in Madison, *Econometrica*, 17, 73–74, 1949.

DAVIS, R. O. e SELVADURAI, A. P. **Plasticity and geomechanics**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

DRUCKER, D. C. e PRAGER, W. **Soil mechanics and plastic analysis or limit design**. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2), 157-165, 1952.

DRUCKER, D. C., PRAGER, W. e GREENBERG, H. J. **Extended limit design theorems for continuous media**. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(4), 381-389, 1952.

FARFÁN. D. **Aplicação da análise limite a problemas geotécnicos modelados como meios contínuos convencionais e meios de cosserat**. 170f. Tese (Doutorado) – PUC Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2000.

FERNANDEZ, F. **Aplicação do método do ponto material MPM em estabilidade de túneis rasos**. Comunicação pessoal. PUC Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2018.

FINN, W.D.L. **Applications of limit plasticity in soil mechanism.** J. Soil Mech. Found. Div., ASCE,93 (SM5): 39-72, 1967.

HENCKY, H. **Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen nachspannungen.** ZaMM 4,323-335, 1924.

KIRSCH, A. **Experimental investigation of the face stability of shallow tunnels in sand.** Acta Geotechnica, 5(1), 43-62, 2010.

KOLYMBAS D. **Geotechnik – Bodenmechanik,** Grundbau und Tunnelbau, 2nd edn. Springer, Berlin, 2007.

KRABBENHOFT, K., LYAMIN, A. V. e SLOAN, S. W. **Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming.** Communications in Numerical Methods in Engineering, 24(11), 1107-1119, 2007.

KRAUSE T. **Schildvortrieb mit flussigkeits- und erdgestutzter Ortsbrust,** No. 24 in Mitteilung des Instituts fur Grundbau und Bodenmechanik der Technischen Universitat Braunschweig, 1987.

KUMAR, J., e MOHAPATRA, D. **Lower-Bound Finite Elements Limit Analysis for Hoek-Brown Materials Using Semidefinite Programming.** Journal of Engineering Mechanics, 143(9), 04017077, 2017.

LECA E, DORMIEUX L. **Upper and lower bound solutions for the face stability of shallow circular tunnels in frictional material.** Geotechnique; 40(4):581–606, 1990.

LOBO, M. S., VANDENBERGHE, L., BOYD, S. e LEBRET, H. **Applications of second-order cone programming.** Linear Algebra and its Applications 284,1998.

LYAMIN, A. V. e SLOAN, S. W. **Lower bound limit analysis using non-linear programming**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 55(5), 573-611, 2002.

MAFRA, G. **Análise por elementos finitos de maciços escavados por túneis**. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Estruturas e da Geotecnia, São Paulo. 102p, 2011.

MAKRODIMOPOULOS, A. **Computational formulation of shakedown analysis as a conic quadratic optimization problem**. Mechanics Research Communications, 33(1), 72-83, 2006.

MAKRODIMOPOULOS, A. e MARTIN, C. M. **Limit analysis using large-scale SOCP optimization**. 13th ACME conference: university of Sheffield. Department of Engineering Science. University of Oxford, 2005.

MAKRODIMOPOULOS, A. e MARTIN, C. M. **Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66(4), 604-634, 2006.

MAKRODIMOPOULOS, A. e MARTIN, C. M. **Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming**. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 31(6), 835-865, 2007.

MARTIN, C. M. e MAKRODIMOPOULOS, A. **Finite-Element Limit Analysis of Mohr–Coulomb Materials in 3D Using Semidefinite Programming**. Journal of Engineering Mechanics, 134(4), 339-347, 2008.

MATLAB. **The language of technical computing**. The MathWorks, Inc, 2017. Disponível em: <http://www.mathworks.com>.

MOLLON, G., DIAS, D. e SOUBRA, A. **Probabilistic Analysis of the Face Stability of Circular Tunnels**. Contemporary Topics in Situ Testing, Analysis, and Reliability of Foundations, 2009.

MOLLON, G., DIAS, D., & SOUBRA, A. **Continuous velocity fields for collapse and blowout of a pressurized tunnel face in purely cohesive soil.** International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 37(13), 2061-2083, 2012.

MOSEK APS, 2017. **The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual version 7.1(Revision 63).** User's Manual and Reference. Available from <http://www.mosek.com>

PACHÁS, C. M. **Análise Limite com Otimizador de Grande Escala e Análise de Confiabilidade.** 188f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2009.

PACHÁS, M., VAZ, L.E., VARGAS JR., E. A. e HERSKOVITS, J. **Geotechnical Limit Analysis and Optimization.** International Conference on Engineering Optimization, 1–5, 2008.

PLEKKENPOL JW, VAN DER SCHRIER JS E HERGARDEN HJ. **Shield tunnelling in saturated sand-face support pressure and soil deformations.** In: Bezuijen A, van Lottum H (eds) Tunnelling: a decade of progress, GeoDelft 1995–2005. Taylor & Francis, London, 2006.

ROCHA, M.O. **Estudo de estabilidade da frente de escavação de túneis rasos em solo.** Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Minas Gerais.138, 2014.

STERPI, D., CIVIDINI, A., SAKURAI, S. e NISHITAKE, S. **Laboratory model tests and numerical analysis of shallow tunnels.** In: Barla, G. (ed.), Proc., Int. Symp. Eurock '96 – ISRM, Torino, Vol 1. Balkema, Rotterdam, 689–696, 1996.

STERPI, D. e CIVIDINI, A. **A Physical and Numerical Investigation on the Stability of Shallow Tunnels in Strain Softening Media**. Rock Mechanics and Rock Engineering, 37(4), 277-298, 2004.

TAPIA, M. M. **Análise de confiabilidade de taludes em condições saturadas- não saturadas via análise limite no espaço cônico quadrático**. 141f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2013.

TAKANO, D., OTANI, J., NAGATANI, H., e MUKUNOKI, T. **Application of X-ray CT boundary value problems in geotechnical engineering – Research on tunnel face failure**. Gecongress, GSP N, 1–6, 2006.

VANDENBERGHE, L. e BOYD, S. **Applications of semidefinite programming**. Applied Numerical Mathematics, 29(3), 283-299, 1999.

VAZ, L. E., PEREIRA A. e MENEZES, I. **Teoria, algoritmos e aplicações na engenharia**. (Apostila). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 2018.

VERMEER P.A, RUSE N.M, MARCHER T. **Tunnel heading stability in drained ground**. Felsbau; 20(6):8–18, 2002

WOLFE, P. **A Duality Theorem for Nonlinear Programming**. Quarterly of Applied Mathematics, 19 (1961), pp. 239-244, 1961.

ZAMORA, Y.H. **Comportamento da Frente de Escavação de Túneis Rasos**. Dissertação (Mestrado), Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Brasília. 79 p, 2016.