



**Rodrigo e Alvim Alexandre**

## **Modelos de Volatilidade Estocástica para Apreçamento de Opções de Ações no Mercado Brasileiro**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia de Produção da  
PUC-Rio.

Orientador: Prof. Fernando Luiz Cyrino Oliveira  
Co-orientadora: Prof. Frances Fischberg Blank

Rio de Janeiro  
Julho de 2017



**Rodrigo e Alvim Alexandre**

## **Modelos de Volatilidade Estocástica para Apreçamento de Opções de Ações no Mercado Brasileiro**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Fernando Luiz Cyrino Oliveira**

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Frances Fischberg Blank**

Co-orientadora

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Davi Michel Valladão**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Antônio Carlos Figueiredo Pinto**

Departamento de Administração – IAG - PUC-Rio

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de julho de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Rodrigo e Alvim Alexandre**

Graduou-se em Engenharia de Produção na Universidade do Estado do Rio de Janeiro em 2014.

#### Ficha Catalográfica

Alexandre, Rodrigo e Alvim

Modelos de volatilidade estocástica para  
apreçamento de opções de ações no mercado brasileiro /  
Rodrigo e Alvim Alexandre ; orientador: Fernando Luiz  
Cyrino Oliveira ; co-orientadora: Frances Fischberg Blank.  
– 2017.

96 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade  
Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia  
Industrial, 2017.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Volatilidade  
estocástica. 3. Heston. 4. Bates. 5. Double Heston. 6.  
Opções de ações. I. Oliveira, Fernando Luiz Cyrino. II.  
Blank, Frances Fischberg. III. Pontifícia Universidade  
Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia  
Industrial. IV. Título.

CDD:658.5

Dedico este trabalho com todo meu carinho a minha mãe, Rosane Alvim.

## Agradecimentos

A Deus, por iluminar meus caminhos e me dar forças para superar os obstáculos.

À minha mãe, pelo apoio de sempre.

A toda minha família pela torcida.

Aos meus orientadores, Fernando Luiz Cyrino Oliveira e Frances Fischberg Blank, pela ajuda na elaboração do presente trabalho e na minha formação como pesquisador.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio, pelos conhecimentos transmitidos e ajuda fornecida.

A todos os professores que me ajudaram a construir minha formação intelectual, em especial, aos professores da PUC-Rio pelos ensinamentos ao longo destes anos de mestrado.

Aos meus amigos de mestrado, pela amizade e horas de estudo em conjunto.

Ao Rodrigo Maranhão pelas trocas de ideias em relação ao mercado de derivativos e na obtenção dos dados da B3.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos para a realização deste trabalho.

## Resumo

Alexandre, Rodrigo e Alvim; Oliveira, Fernando Luiz Cyrino (Orientador). **Modelos de Volatilidade Estocástica para Apreçamento de Opções de Ações no Mercado Brasileiro.** Rio de Janeiro, 2017. 96p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Na tentativa de melhor capturar fatos estilizados do comportamento dos preços de opções financeiras, em especial para tratar a questão do sorriso da volatilidade, modelos de volatilidade estocástica têm sido objeto de estudo em diversos mercados. Neste contexto, o principal objetivo deste trabalho é avaliar os modelos de volatilidade estocástica de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) junto ao método de Lewis (2000) para precificar opções de ações no mercado brasileiro de derivativos, caracterizados por serem de curto prazo. Para isto foram precificadas opções de compra da Petrobrás e Vale. Os modelos foram comparados de acordo com a qualidade do ajuste aos dados in-sample e a capacidade preditiva com dados out-of-sample. Ademais, buscou-se verificar a volatilidade implícita gerada por cada um dos modelos. Ao fim, identificou-se que considerar a volatilidade como estocástica, mesmo quando é descrita por apenas um processo estocástico, é a decisão mais importante a ser tomada a fim de melhorar o apreçamento das opções. Além disso, adicionar saltos a um modelo de volatilidade estocástica parece ser mais relevante do que adicionar um segundo processo estocástico para modelar a volatilidade na precificação de opções de curto prazo.

## Palavras-chave

volatilidade estocástica; Heston; Bates; Double Heston; opções de ações; B3; Brasil.

## Abstract

Alexandre, Rodrigo e Alvim; Oliveira, Fernando Luiz Cyrino (Advisor) **Stochastic Volatility Models for Stock Option Pricing in Brazilian Market.** Rio de Janeiro, 2017. 96p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In an attempt to better capture stylized facts about financial option prices' behavior, especially to address the issue of volatility smile, stochastic volatility models have been the object of study in several markets. In this context, the main purpose of this work is to assess the stochastic volatility models of Heston (1993), Bates (1996) and Double Heston (2009) along with the Lewis' method (2000) for stock option pricing in Brazilian derivative market, featured by being short-term. Therefore, Petrobrás' and Vale's call options were priced. The models were compared according to the in-sample fit skill and the out-of-sample forecasting power. Furthermore, it was verified the implied volatility begot by each model. In the end, it was figured out that consider the volatility as stochastic even when it is described by only one stochastic process is the preeminent matter to do in order to improve option pricing. Plus, adding jumps in a stochastic volatility model seems to be more important than adding a second stochastic process to model the volatility in short-term option pricing.

## Keywords

stochastic volatility; Heston; Bates; Double Heston; stock options; B3; Brazil.

## Sumário

|  |    |
|--|----|
| 1. Introdução  | 12 |
| 1.1. Contexto do Trabalho  | 12 |
| 1.2. Objetivos do Trabalho   | 14 |
| 1.3. Relevância do Trabalho  | 14 |
| 1.4. Estrutura do Trabalho   | 15 |
| 2. Revisão da Literatura   | 16 |
| 2.1. Modelos de volatilidade condicional                             | 21 |
| 2.2. Modelos de volatilidade local                                   | 23 |
| 2.3. Modelos de volatilidade estocástica                             | 26 |
| 2.3.1. Modelo de Hull e White (1987)                                 | 27 |
| 2.3.2. Modelo de Stein e Stein (1991)                                | 27 |
| 2.3.3. Modelo de Heston (1993)                                       | 28 |
| 2.3.4. Modelo de Bates (1996)  | 34 |
| 2.3.5. Modelo Double Heston (2009)                                   | 36 |
| 2.4. Modelos híbridos  | 37 |
| 2.5. Tabela Conceitual dos Modelos de Volatilidade                   | 40 |
| 2.6. Modelos de Volatilidade aplicados ao Mercado Brasileiro         | 43 |
| 3. Solução para o Valor das Opções nos Modelos Propostos             | 44 |
| 3.1. Método de Lewis   | 45 |
| 3.2. Funções Características dos Modelos de Volatilidade Estocástica | 48 |
| 4. Aplicação Empírica  | 51 |
| 4.1. Dados   | 52 |
| 4.2. Estimação dos Parâmetros  | 54 |
| 5. Resultados  | 60 |
| 5.1. Análise dos Parâmetros Estimados                                | 61 |
| 5.2. Análise <i>In-sample</i>  | 67 |



|  |    |
|--|----|
| 5.3. Análise <i>Out-of-sample</i>      | 69 |
| 5.4. Análise da Volatilidade Implícita | 73 |
| 6. Considerações Finais                | 76 |
| 7. Referências bibliográficas          | 80 |
| 8. Apêndice A                          | 89 |
| 9. Apêndice B                          | 91 |
| 9.1. Função Característica de Heston   | 91 |

## Lista de figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 - Smile da Volatilidade Implícita  | 18 |
| Figura 2.2 - Distribuição Implícita dada pelo Smile e Distribuição Lognormal          | 18 |
| Figura 2.3 - Smirk da Volatilidade Implícita  | 19 |
| Figura 2.4 - Distribuição Implícita do Smirk e Distribuição Lognormal                 | 20 |
| Figura 2.5 - Impacto da Reversão à Média na Curva de Volatilidade Implícita           | 29 |
| Figura 2.6 - Impacto da Variância Média na Curva de Volatilidade Implícita            | 30 |
| Figura 2.7 - Efeito da Correlação na Curva de Distribuição                            | 31 |
| Figura 2.8 - Impacto da Correlação na Curva de Volatilidade Implícita                 | 31 |
| Figura 2.9 - Efeito da Volatilidade da Variância na Curva de Distribuição             | 33 |
| Figura 2.10 - Impacto da Volatilidade da Variância na Curva de Volatilidade Implícita | 33 |
| Figura 5.1 - Curvas de Volatilidade Implícita dos Modelos nas Opções da Petrobrás     | 74 |
| Figura 5.2 - Curvas de Volatilidade Implícita dos Modelos nas Opções da Vale          | 74 |
| Figura A.1 - Total de Publicações por Ano sobre o Modelo de Heston (1993)             | 89 |

## Lista de tabelas

|   |    |
|---|----|
| Tabela 2.1 - Resumo dos Principais Modelos de Volatilidade            | 40 |
| Tabela 4.1 - Variação dos Valores Iniciais de cada Parâmetro          | 58 |
| Tabela 5.1 - Total de Preços de Opções                                | 60 |
| Tabela 5.2 - Parâmetros Estimados de cada Modelo                      | 62 |
| Tabela 5.3 - Resultados In-sample                                     | 68 |
| Tabela 5.4 - Resultados Out-of-Sample                                 | 70 |
| Tabela A.1 - Total de Publicações sobre o Modelo de Heston (1993)     | 89 |
| Tabela A.2 - Total de Publicações sobre o Modelo de Bates (1996)      | 90 |
| Tabela A.3 - Total de Publicações sobre o Modelo Double Heston (2009) | 90 |

# 1. Introdução

## 1.1.Contexto do Trabalho

Segundo Hull (2016), o valor dos ativos subjacentes nas transações de derivativos é muito superior ao produto interno bruto mundial. Tal magnitude pode ser explicada, em parte, pela versatilidade característica deste tipo de mercado.

Porém, não menos importante é o fato de que tal mercado é extremamente arriscado. A crise de 2008 expôs ainda mais os riscos deste mercado ao redor do mundo. No Brasil, empresas como a Sadia, a Aracruz e o Grupo Votorantim sofreram perdas de US\$ 360 milhões, US\$ 2,13 bilhões e US\$ 1,04 bilhões, respectivamente, devido a grandes posições em derivativos no momento de desvalorização cambial (Farhi e Borghi, 2009).

Estes expressivos prejuízos devem-se às próprias características de risco do mercado de derivativos, considerando as posições alavancadas que os investidores podem assumir e à dificuldade de operar estes instrumentos financeiros, que carecem de metodologias acuradas de avaliação.

À vista disso, o mundo acadêmico tem se empenhado de maneira crescente no desenvolvimento de métodos e modelos matemáticos para precificar derivativos de maneira cada vez mais precisa.

Fisher Black, Myron Scholes e Robert Merton, em 1973, desenvolveram uma solução analítica para precificar opções financeiras. Dentre as suposições do modelo, a volatilidade do retorno do ativo, a taxa de juros livre de risco e os dividendos pagos pelo ativo são considerados constantes ao longo do tempo. Ademais, os autores pressupõem que os preços dos ativos seguem uma distribuição log-normal e, portanto, os retornos seguiriam uma distribuição normal.

O fato é que estudos empíricos observam excesso de curtose e a assimetria negativa na distribuição de retornos. São os conhecidos fatos estilizados das séries financeiras presentes de forma ampla na literatura. Ademais, no caso das opções

financeiras, o cálculo da volatilidade implícita a partir do modelo de Black & Scholes, doravante BS, evidencia o chamado efeito sorriso (*smile / smirk*) da volatilidade.

Na tentativa de capturar estes fatos estilizados, diversas propostas de modelos tratáveis analiticamente e numericamente têm surgido. Tais modelos se caracterizam por considerar a volatilidade do retorno dos ativos ou a taxa de juros livre de risco como estocásticos, ou ainda, considerar a presença de saltos, ou *jumps*.

Bakshi *et al.* (1997) avaliam o desempenho de diferentes modelos na precificação de opções, concluindo que os modelos que apresentaram as maiores melhorias foram os que consideram a volatilidade como estocástica, seguido pelos modelos de volatilidade estocástica com saltos (*jumps*).

Alguns dos principais modelos que consideram a evolução da volatilidade ao longo do tempo são os modelos de Hull e White (1987), Stein e Stein (1991), Heston (1993), SABR (Hagan *et al.*, 2002) e Double Heston (Christoffersen *et al.*, 2009).

Por outro lado, os modelos de Bates (1996) e Duffie *et al.* (2000) consideram, não somente a volatilidade como estocástica, mas também a presença de saltos nos preços dos ativos subjacentes.

Apesar de serem considerados mais avançados que o modelo de Black & Scholes, estes modelos não dispõem de soluções analíticas fechadas para precificar opções europeias, havendo a necessidade de se recorrer a métodos numéricos. Adicionalmente, existe a dificuldade de se estimarem os parâmetros requeridos. Na maioria dos casos, esta estimação é realizada a partir de algoritmos de otimização não-linear.

No Brasil, não existem muitos artigos publicados aplicando modelos de volatilidade estocástica para precificar opções de ações. Desta forma, esta dissertação busca avaliar os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) para precificar opções de ações no mercado brasileiro de derivativos. Dado que estes modelos não admitem solução analítica fechada, será utilizado o método numérico de Lewis (2000) para obter o valor das opções. O método de Lewis (2000) é um método de Transformada Inversa de Fourier em que a partir da função característica da equação diferencial parcial é possível obter a

função densidade de probabilidade e, dessa maneira, usá-la para precificar uma opção europeia.

## **1.2.Objetivos do Trabalho**

Em face do exposto, esta dissertação tem como objetivo avaliar opções de compra no mercado de ações em um contexto em que a volatilidade é considerada estocástica. Mais especialmente, o propósito deste trabalho é avaliar os ganhos obtidos ao se considerar a volatilidade como estocástica na avaliação de opções de ações no mercado brasileiro. Para isto, serão utilizados os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009).

Para atingir este objetivo, inicialmente, o presente trabalho buscou identificar na literatura os modelos que descrevem a evolução da volatilidade ao longo do tempo. Considerando que, no mercado brasileiro, as opções com maior volume de negociação são as que irão vencer no curto prazo, optou-se pelo estudo dos modelos mencionados. Trabalhos empíricos têm mostrado que tais modelos apresentam boas performances na precificação de opções com pouco prazo para vencimento, de forma que se buscou verificar a aplicabilidade deles na precificação de opções de ações no Brasil.

Por fim, pode-se afirmar que, ao término deste trabalho, espera-se ter respondido as seguintes perguntas: “Como utilizar os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) para precificar opções de ações no mercado bursátil brasileiro?”; “Quais os reais benefícios proporcionados pelo uso destes modelos na precificação de opções de ações?” e “Qual deles têm melhor desempenho no mercado da B3?”.

## **1.3.Relevância do Trabalho**

A partir das pesquisas, pôde-se observar que há poucos estudos que avaliam os modelos de Bates (1996) e Double Heston (2009). O modelo de Heston (1993), por sua vez, apresentou grande notoriedade apenas nos últimos oito anos com a publicação de artigos, conforme pode ser observado no gráfico retirado da base *Scopus* e disponível no Apêndice A.

Em parte, este fato pode ser explicado pelas dificuldades na precificação e calibragem dos parâmetros exigidos por estes modelos. Nos últimos anos, avanços nos métodos computacionais utilizados para calibragem e precificação de opções europeias e americanas trouxeram mais rapidez e acurácia aos resultados e mais pesquisas puderam ser desenvolvidas.

No Brasil, de acordo com as pesquisas realizadas, não foram identificados testes com opções de ações usando os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009). Os resultados das pesquisas, bem como os termos utilizados nas buscas são apresentados no Apêndice A ao final desta dissertação.

#### **1.4.Estrutura do Trabalho**

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma.

No presente capítulo é apresentada a problemática que serviu de inspiração para elaboração do presente projeto de dissertação, seguida pela explanação dos objetivos deste trabalho e relevância da pesquisa.

No capítulo 2 é apresentado um estudo retrospectivo acerca dos modelos que descrevem a evolução da volatilidade.

No capítulo 3, são evidenciadas as funções características dos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009), necessárias para a precificação de opções. Ainda neste capítulo, o método de Lewis (2000) será apresentado, dada sua importância para esta dissertação.

No capítulo 4, são apresentados o processo de calibração e os dados utilizados para a estimação dos parâmetros dos modelos usados neste trabalho.

No capítulo 5, são explicitados os resultados das precificações das opções de compra de ações preferenciais da Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5) com vencimento em Novembro e Dezembro de 2016 e Janeiro de 2017, bem como, expostas as análises e algumas discussões decorrentes dos resultados obtidos e evidenciados.

Por fim, o capítulo 6 traz as conclusões do trabalho, sendo respondidas as perguntas realizadas no presente capítulo. Além disso, serão indicadas sugestões para trabalhos futuros.

Referências bibliográficas e apêndices seguem ao final da dissertação.

## 2. Revisão da Literatura

A volatilidade é uma medida estatística que busca quantificar a magnitude típica das variações dos retornos proporcionados por determinado ativo, podendo ser considerada como uma medida da incerteza quanto aos retornos proporcionados, por exemplo, por uma ação.

Silva Neto (2000) afirma que a volatilidade é fundamental na determinação do valor de uma opção, visto que ela fornece uma noção da probabilidade do preço do ativo-objeto estar acima ou abaixo do preço de exercício e, conseqüentemente, da probabilidade de uma opção escrita sobre este ativo ser exercida ou não.

Segundo Bessada *et al.* (2012), a volatilidade de fato importante para a precificação de derivativos é a volatilidade futura, especialmente, a volatilidade entre a data de apreçamento e a data limite de exercício da opção referente ao ativo. Entretanto, a volatilidade futura é uma variável não diretamente observável no mercado e, portanto, deve ser estimada.

Um dos pressupostos da fórmula de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) para a precificação de opções europeias é de que a volatilidade do ativo-subjacente é constante ao longo do tempo, isto é, a volatilidade não varia entre a data de apreçamento e a data de exercício da opção.

Em vista disso, um ponto que merece destaque é que a partir da equação de Black e Scholes (1973), pode-se identificar a volatilidade futura que o mercado, de uma maneira geral, está prevendo que irá ocorrer. Conhecendo o preço à vista, ou *spot*, do ativo-subjacente, o valor da taxa de juros livre de risco, o prazo de vencimento e o valor de mercado da opção (todos diretamente observados no mercado ou informados no contrato derivativo), pode-se estimar a volatilidade utilizada pelos participantes do mercado para precificar a opção. Tal volatilidade é denominada volatilidade implícita.

Portanto, a volatilidade implícita é, segundo Bessada *et al.* (2012), a volatilidade que, aplicada ao modelo BS, torna o prêmio teórico calculado igual ao preço de mercado da opção (prêmio de mercado).



Como a volatilidade é uma característica inerente ao ativo-objeto, ela deveria ser única para este ativo, isto é, não deveriam existir duas medidas de volatilidade calculadas para um mesmo ativo sob os mesmos pressupostos e condições de mercado. Desta forma, ao se calcularem as volatilidades implícitas a partir do modelo BS, utilizando opções de compra europeias escritas sob o mesmo ativo-subjacente, porém com diferentes datas de vencimento e preços de exercícios, deveria, teoricamente, ser encontrado o mesmo valor.

No entanto, tal entendimento não é observado na prática. Como amplamente verificado em estudos empíricos na literatura de opções financeiras, a volatilidade implícita varia de acordo com o preço de exercício e o prazo de vencimento do contrato (Fouque *et. al*, 2000).

Conforme Back (2010), um padrão usual é a volatilidade implícita ser maior nos casos em que a opção está muito dentro do dinheiro (*deep-in-the-money*) ou muito fora do dinheiro (*deep-out-of-money*), ao contrário das opções no dinheiro (*at-the-money*), que possuem no geral, volatilidade implícita menor. Assim, a volatilidade implícita, nestes casos, seria uma função convexa do preço de exercício. Esse fenômeno é conhecido como o efeito sorriso ou *smile*, e, segundo Hull (2005), é um comportamento típico do mercado de opções sobre moedas estrangeiras.

Algumas vezes, no entanto, o comportamento da volatilidade implícita identificado é a volatilidade ser mais alta quanto menor o preço de exercício da opção (Back, 2010). Tal efeito é conhecido como *smirk* e, segundo Hull (2005), é um comportamento característico do mercado de opções sobre ações.

Fouque *et al.* (2000) destacam ainda que a volatilidade implícita é frequentemente decrescente com relação ao tempo até o vencimento e, no geral, é maior que a volatilidade histórica.

Em face do exposto, observando um gráfico em três dimensões a fim de verificar o quanto a volatilidade implícita varia conforme o *moneyness* (ou seja, dentro, fora ou no dinheiro) e o seu prazo de vencimento, tem-se a chamada superfície de volatilidade. Se a volatilidade fosse constante, conforme preconiza o modelo Black & Scholes, esta superfície seria plana. No entanto, tal fato não é observado.

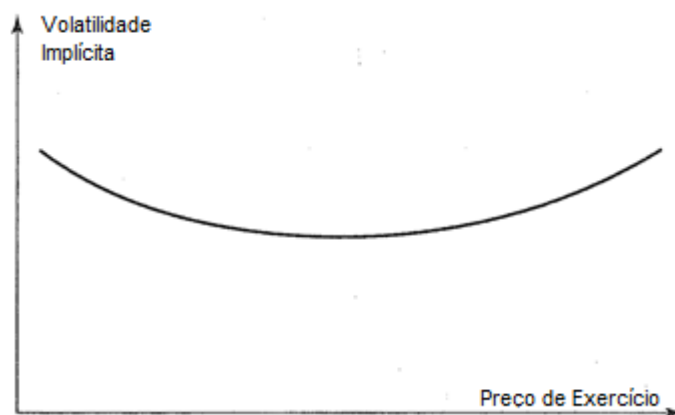
Tais comportamentos da curva de volatilidade implícita têm relação direta com as suposições do modelo Black & Scholes de log-normalidade dos

preços de ativos, normalidade dos retornos e volatilidade constante.

Estudos empíricos observam alguns fatos estilizados, bastante conhecidos na literatura de séries financeiras, como excesso de curtose e assimetria negativa na distribuição de retornos, e aglomerados de volatilidade.

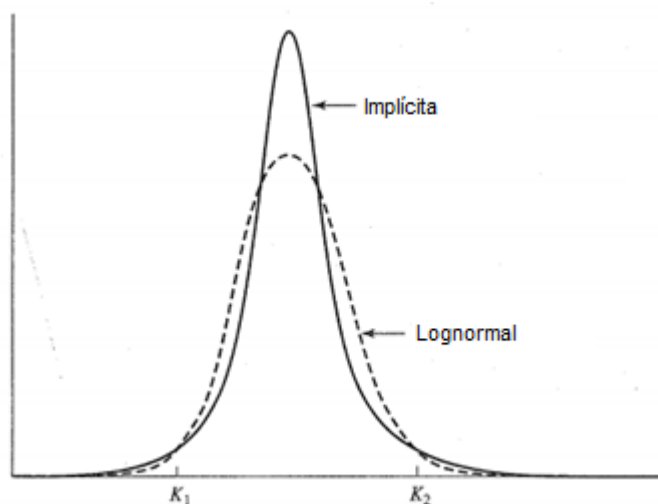
A Figura 2.1 a seguir apresenta o comportamento do *smile* da volatilidade em relação ao preço de exercício de uma opção. Hull (2005) relaciona o comportamento *smile* da volatilidade implícita com a distribuição do preço do ativo-subjacente, como apresentado na Figura 2.2.

**Figura 2. 1 - Smile da Volatilidade Implícita**



Fonte: Hull, 2005, p. 359

**Figura 2. 2 - Distribuição Implícita dada pelo Smile e Distribuição Lognormal**



Fonte: Hull, 2005, p. 359

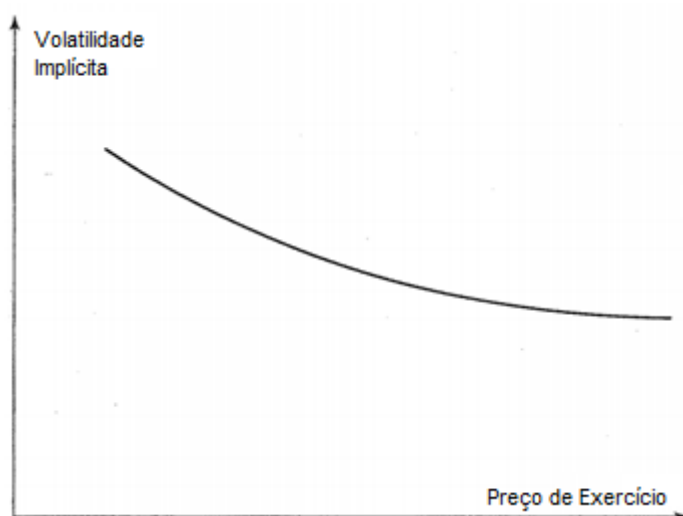
Na Figura 2.2 acima, a linha pontilhada refere-se à distribuição log-normal suposta pelo modelo Black & Scholes, enquanto que a linha cheia se refere à distribuição implícita relacionada à curva *smile*, correspondendo, portanto, à distribuição de probabilidade assumida pelo mercado para o preço futuro do ativo.

Nota-se, pelos gráficos apresentados, que a distribuição implícita possui uma curtose maior do que a distribuição log-normal. Isto implica que opções muito dentro do dinheiro e muito fora do dinheiro têm uma probabilidade maior de serem exercidas pela distribuição de probabilidade implícita do que pela distribuição de probabilidade log-normal. Assim, espera-se que a distribuição implícita produza preços relativamente mais altos para estas opções. Preços mais altos implicam em volatilidades implícitas relativamente mais altas, fato que é constatado pela curva *smile*.

Em outras palavras, pode-se dizer que o efeito *smile* evidencia que a distribuição log-normal está subestimando a probabilidade de movimentos extremos nos preços dos ativos subjacentes.

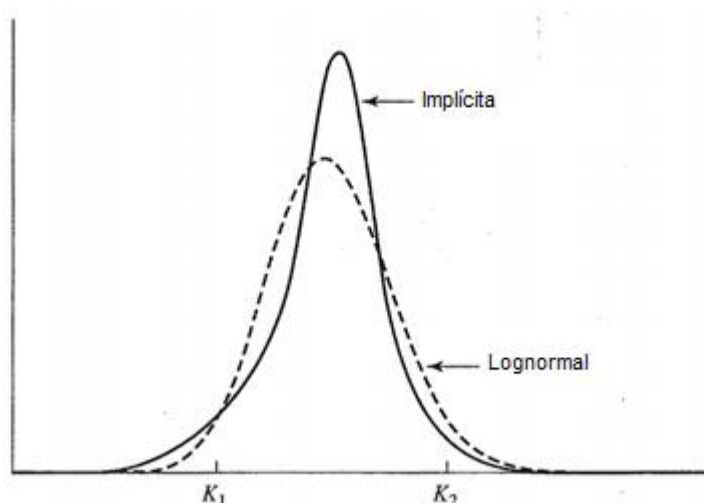
Hull (2005) também relaciona o comportamento *smirk* da volatilidade com a distribuição de preços do ativo-subjacente, conforme pode ser visto nas Figuras 2.3 e 2.4 a seguir:

**Figura 2. 3 - Smirk da Volatilidade Implícita**



Fonte: Hull, 2005, p. 360

**Figura 2. 4 - Distribuição Implícita do Smirk e Distribuição Lognormal**



Fonte: Hull, 2005, p. 361

Nota-se que a distribuição implícita possui uma leve inclinação para direita, isto é, a cauda da esquerda é mais “pesada” e a cauda da direita é mais “fina” se comparada à distribuição log-normal, ou seja, uma assimetria à esquerda.

De acordo com Hull (2005), isto implica que opções de compra muito fora do dinheiro, com preço de exercício  $K_2$  ou acima, têm preço mais baixo quando se considera a distribuição implícita para os preços do ativo-objeto do que quando se considera a distribuição log-normal, como no modelo Black & Scholes. Tal fato pode ser explicado porque para a opção ter algum valor, o preço do ativo deverá ser superior ao preço de exercício  $K_2$  e a distribuição implícita atribui uma probabilidade menor de isto acontecer se comparada a distribuição log-normal. Desta forma, espera-se que a distribuição implícita produza preços relativamente mais baixos para as opções, o que implica numa volatilidade implícita mais baixa.

Por outro lado, as opções de venda muito fora do dinheiro, com preço de exercício  $K_1$  ou abaixo, têm preços mais altos quando se considera a distribuição implícita para o preço do ativo-objeto do que quando se utiliza a distribuição log-normal, pois para ter algum valor, o preço do ativo deve ser inferior ao preço de exercício  $K_1$ , e a distribuição implícita atribui uma probabilidade maior de isto acontecer em comparação com a distribuição log-normal. Assim, espera-se que a distribuição implícita produza preços mais elevados para estas opções, o que implica numa volatilidade implícita mais elevada e, portanto, a caracterização de

um *smirk* como apresentado na Figura 2.3.

Em face destes fenômenos, há a necessidade de desenvolvimento de modelos que incorporem estes efeitos na precificação de opções.

Sendo assim, diversos modelos que buscam tratar a volatilidade como variante no tempo foram desenvolvidos, podendo ser fundamentalmente divididos em três classes: (i) modelos de volatilidade condicional ARCH/GARCH; (ii) modelos de volatilidade local; e (iii) modelos de volatilidade estocástica.

## 2.1. Modelos de volatilidade condicional

Engle (1982) desenvolveu o primeiro modelo de volatilidade condicional, ARCH e, em seguida, Bollerslev (1986) desenvolveu os modelos GARCH. Sendo extensões dos modelos ARCH, os modelos GARCH, segundo Bessada *et al.* (2012), buscam representar de maneira mais parcimoniosa a evolução temporal da variância. Hull (2016) afirma que o modelo GARCH (1,1) é o mais popular dentre os modelos GARCH, e sua equação é dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_t^2$  corresponde à variância no instante de tempo  $t$  e  $u_{t-1}$  é o retorno do ativo no tempo  $t - 1$ . Além disso, os parâmetros  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  são tais que:  $\omega > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  e  $\alpha + \beta < 1$  para garantir estacionariedade.

Bessada *et al.* (2012) ainda argumentam que o modelo GARCH (1,1) é classificado como um modelo simétrico visto que os choques positivos e negativos de retornos impactam de maneira idêntica a volatilidade do ativo. Entretanto, conforme relatado por Cont (2001), entre outros, os retornos negativos impactam mais intensamente a volatilidade do ativo em comparação com os retornos positivos, efeito chamado *leverage effect*. Assim, tendo em vista capturar esta propriedade, foram desenvolvidos modelos alternativos, como o EGARCH (Nelson, 1991). No modelo EGARCH, a equação da variância condicional é definida em termos do logaritmo da variância e permite a caracterização tanto da assimetria quanto do efeito alavanca, comumente observados nas séries de retornos.

Apesar da facilidade de se estimarem os parâmetros exigidos por estes modelos, para usá-los na precificação de opções há a necessidade de métodos numéricos, pois, no geral, eles não dispõem de fórmulas analíticas para o cálculo de opções europeias.

Heston e Nandi (2000), entretanto, desenvolveram uma fórmula quase analítica para precificação de opções a partir do modelo GARCH (1,1) em que é necessário o uso de métodos numéricos de integração. Conforme Rouah e Vainberg (2007) expõem, os autores definem que o logaritmo dos retornos  $r_{t+1}$  e a variância condicional  $\sigma_{t+1}^2$  seguem os seguintes processos:

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r_f + \lambda\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1} \\ \sigma_{t+1}^2 &= \omega + \beta\sigma_t^2 + \alpha(z_t - \gamma\sigma_t)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $r_f$  é a taxa de juros livre de risco e  $z_{t+1}$  é uma variável que segue uma distribuição normal padrão. Além disso,  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  são os demais parâmetros.

Rouah e Vainberg (2007) destacam que, uma vez que a persistência da variância é dada por  $\beta + \alpha\gamma^2$ , o processo será de reversão à média se  $\beta + \alpha\gamma^2 < 1$ . Adicionalmente, o parâmetro  $\alpha$  controla a curtose, enquanto  $\gamma$  é responsável pela assimetria da distribuição, isto é, o parâmetro  $\gamma$  controla o efeito alavancagem, em que existe uma correlação negativa entre a ação e a volatilidade, implicando numa distribuição negativamente assimétrica (Christoffersen *et al.*, 2006).

Christoffersen *et al.* (2008) destacam que o modelo proposto por Heston e Nandi (2000) considera um processo levemente diferente do modelo NGARCH tradicional de modo a ser viável a obtenção de uma fórmula analítica. Como ressaltam Ksieh e Ritchken (2006), a partir destes processos, as probabilidades neutras a risco podem ser obtidas e, desta forma, o preço das opções europeias pode ser calculado a partir de uma fórmula e com o uso de métodos numéricos de integração.

## 2.2. Modelos de volatilidade local

Segundo Kienitz e Wetterau (2012) e Gatheral (2006) os modelos de volatilidade local não buscam representar como a volatilidade evolui ao longo do tempo, mas procuram fornecer uma espécie de média sobre todas as volatilidades instantâneas. Estes modelos ganharam notoriedade devido, basicamente, à sua simplicidade de implementação e calibração em comparação com os modelos de volatilidade estocástica.

Um dos principais modelos de volatilidade local é o modelo de Dupire (1994). O modelo considera a volatilidade como uma função determinística do tempo e do preço do ativo-objeto cuja equação diferencial estocástica é dada por:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma_L(t, S_t)S_t dW_t \quad (2.3)$$

onde  $S_t$  é o preço do ativo no tempo  $t$ ,  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $q$  é rendimento em dividendos,  $\sigma_L(t, S_t)$  é a volatilidade local como função do tempo e do preço do ativo e  $dW_t$  é um processo de Wiener.

Dupire (1994) identificou que, sob o princípio de neutralidade ao risco, existe apenas um processo de difusão consistente com a distribuição dos preços de mercado das *calls* europeias. A partir daí, ele derivou uma fórmula para a volatilidade local:

$$\sigma_L(K, T|t, S_t) = \sqrt{2 \left( \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r - q)K \frac{\partial C}{\partial K} + qC}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \right)} \quad (2.4)$$

onde  $C$  é o preço da opção de compra,  $T$  é o prazo de vencimento,  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $q$  se refere aos dividendos e  $K$  corresponde ao preço de exercício.

Note que o principal obstáculo é o cálculo das derivadas parciais presentes na equação. Como não é simples a obtenção destas derivadas de maneira analítica, é necessário o uso de métodos numéricos, como, por exemplo, o método de diferenças finitas, para o cálculo da volatilidade.

Segundo Kienitz e Wetterau (2012), para aplicar o modelo de maneira

satisfatória, o ideal seria ter à disposição um contínuo de preços de opções. No entanto, somente uma quantidade finita de opções são negociadas no mercado, de modo que, em face deste problema, é necessário recorrer a métodos de interpolação e extrapolação.

Como extensões dos modelos de volatilidade local, podem ser citados ainda os modelos CEV (*Constant Elasticity Variance*), de Cox (1975), e o modelo SABR (*Stochastic Alfa, Beta Rho*), de Hagan *et al.* (2002).

No modelo CEV, segundo Jordan e Tier (2011), a volatilidade é tratada como uma função determinística do preço do ativo subjacente. O processo neutro a risco para o preço de um ativo  $S_t$  é:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + aS_t^\beta dZ \quad (2.5)$$

onde  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $q$  é o rendimento em dividendos,  $dZ$  é um processo de Wiener,  $a$  é um parâmetro da volatilidade e  $\beta$  é uma constante positiva chamada elasticidade da volatilidade. O coeficiente de elasticidade controla o formato da curva de volatilidade implícita, caracterizado pela sua inclinação, de forma que, quanto maior o  $\beta$  maior a inclinação da volatilidade implícita. Por outro lado, o parâmetro  $a$  fixa o valor da volatilidade para opções *at-the-money*.

Note que quando  $\beta = 1$ , o modelo é um Movimento Geométrico Browniano (MGB). Ademais, quando  $\beta < 1$ , a volatilidade aumenta à medida que o preço da ação diminui. Essa situação cria uma distribuição de probabilidade semelhante àquela observada para ações com uma cauda esquerda pesada e uma cauda direita menos pesada (Hull, 2016). Por outro lado, quando  $\beta > 1$ , a volatilidade aumenta à medida que o preço da ação aumenta. Nesse caso, observa-se uma distribuição de probabilidade com uma cauda direita mais pesada e uma cauda esquerda menos pesada. Isso corresponde a um *forward smirk* de volatilidade no qual a volatilidade implícita é uma função crescente do preço de exercício.

Choi *et al.* (2013) destacam que uma das desvantagens do modelo CEV é que pressupõe uma correlação perfeita (positiva ou negativa) entre o preço do ativo subjacente e a sua volatilidade. No entanto, estudos empíricos têm verificado



que esta correlação não necessariamente é perfeita nem constante ao longo do tempo. Igualmente, Kim *et al.* (2015) afirmam que a volatilidade implícita pode não se mover na direção correta quando o preço do ativo subjacente aumenta.

O modelo SABR, proposto por Hagan *et al.* (2002), é uma extensão do modelo CEV em que a volatilidade não é uma função determinística do tempo, mas evolui estocasticamente.

Muito utilizado no mercado de opções sobre juros e de câmbio, o modelo SABR é um modelo de volatilidade estocástica como os abordados na próxima seção, porém, diferentemente dos demais modelos, como o de Heston (1993), ele não é usado de maneira direta para precificar opções. Na verdade, segundo Kienitz e Wetterau (2012), este modelo estima a curva de volatilidade implícita e a usa como *input* para outros modelos.

Segundo Hagan *et al.* (2002), a dinâmica do modelo SABR é dada por:

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma_t S_t^\beta dW_t \\ d\sigma_t &= \xi \sigma_t dZ_t \\ \text{corr}[dW_t, dZ_t] &= \rho dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde  $S_t$  se refere ao preço spot do ativo subjacente,  $\sigma_t$  é a volatilidade do ativo,  $\beta$  é a elasticidade da volatilidade do modelo CEV,  $\xi$  é a volatilidade da volatilidade e  $\rho$  é a correlação entre a volatilidade e o preço ativo objeto.

Segundo Gauthier e Rivaille (2009), no modelo SABR, a correlação é responsável pelo efeito sorriso da volatilidade. Já a volatilidade da volatilidade aumenta a intensidade do efeito sorriso, isto é, quanto maior a volatilidade da volatilidade, mais intenso é o efeito *smile*. Por outro lado, quanto menor a volatilidade da volatilidade, mais plana é a curva de volatilidade implícita. Por fim, o parâmetro de elasticidade da volatilidade apresenta o mesmo efeito que no modelo CEV.

### 2.3. Modelos de volatilidade estocástica

Os modelos de volatilidade estocástica contínuos são modelos que tornam a volatilidade em si uma variável aleatória que evolui continuamente no tempo, de especial interesse e foco nesta dissertação. Nestes modelos, segundo Sheppard (2007), a volatilidade não é mais constante nem determinística, mas segue um processo estocástico de difusão em tempo contínuo. Rouah & Vainberg (2007) afirmam que nos modelos contínuos de volatilidade estocástica tanto o preço do ativo quanto a volatilidade possuem seu próprio processo de difusão, isto é, seguem seu próprio processo browniano, com algum grau de correlação.

Os modelos contínuos de volatilidade estocástica são bastante utilizados na precificação de derivativos dado que conseguem capturar os principais fatos estilizados das séries de retornos e volatilidade.

É consenso na literatura que os principais fatos estilizados de séries de retornos são o excesso de curtose, a assimetria negativa, e o comportamento heteroscedástico condicional.

O excesso de curtose diz respeito à presença de caudas mais pesadas, isto é, a ocorrência de valores extremos (fortes altas e fortes quedas) é mais frequente se comparada à distribuição normal. A assimetria, por sua vez, é ligeiramente negativa, o que significa que quedas nos preços dos ativos são seguidas por aumentos na volatilidade. Por outro lado, o comportamento heteroscedástico condicional, segundo Aiube (2013), reúne as características de aglomerados de volatilidade (*volatility clustering*) e efeito de alavancagem (*leverage effect*). Enquanto os aglomerados de volatilidade se referem à ocorrência de sucessivos períodos de grande volatilidade e de sucessivos períodos de baixa volatilidade no mercado, o *leverage effect* caracteriza o fato de que quedas de preços tendem a gerar maior volatilidade do que as altas de preços. Assim, pode-se dizer que há alguma correlação negativa entre os preços dos ativos e a volatilidade.

Dentre os modelos de volatilidade estocástica contínuos, os modelos de Hull e White (1987), Stein e Stein (1991) e Heston (1993) são os mais utilizados. Considerando o objetivo de aplicação nesse trabalho, são apresentados a seguir também os modelos de Bates (1996) e de Christoffersen *et al.* (2009), conhecido como Double Heston.

### 2.3.1. Modelo de Hull e White (1987)

O modelo de Hull e White (1987) para a volatilidade considera que o preço do ativo subjacente  $S_t$  e a variância do ativo  $v_t$  seguem os seguintes processos estocásticos:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t \\ dv_t &= \psi v_t dt + \sigma_v v_t dZ_t \\ \text{corr}[dW_t, dZ_t] &= \rho dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde  $\mu$  e  $\psi$  são a tendência do ativo-subjacente e da variância respectivamente, e  $\sigma_v$  é a volatilidade da variância. Ademais,  $dW_t$  e  $dZ_t$  correspondem aos processos de Wiener do preço do ativo-objeto e da variância, respectivamente, com correlação  $\rho$ .

Segundo Hull e White (1997), neste modelo, a variância não assume valores negativos e a taxa de juros livre de risco é constante ou determinística. A crítica ao modelo se deve ao fato de descrever a evolução da volatilidade por um Movimento Geométrico Browniano. Desta maneira, a volatilidade cresceria exponencialmente ao longo do tempo, indo contra ao fato estilizado nomeado aglomerado de volatilidade (*volatility clustering*) evidenciado por Cont (2001). Os aglomerados de volatilidade se referem à ocorrência de sucessivos períodos de grande volatilidade e de sucessivos períodos de baixa volatilidade no mercado, o que indicaria característica de reversão à média na volatilidade.

### 2.3.2. Modelo de Stein e Stein (1991)

O modelo de Stein e Stein (1991), ao contrário do modelo de Hull e White (1987), considera que a volatilidade segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck aritmético, isto é:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ d\sigma_t &= \delta(\theta - \sigma_t)dt + \xi dZ_t \end{aligned} \quad (2.8)$$

Neste modelo,  $S_t$  é o preço do ativo enquanto  $\sigma_t$  é a volatilidade do ativo. Nota-se que, o modelo de Stein e Stein (1991) não modela a variância como os demais, mas sim, a volatilidade.

Os parâmetros  $\mu$ ,  $\delta$ ,  $\theta$  e  $\xi$  são constantes e correspondem, respectivamente, ao *drift* ou tendência do ativo-subjacente, velocidade de reversão à média, volatilidade de longo prazo e volatilidade da volatilidade. Ademais,  $dW_t$  e  $dZ_t$  são considerados processos de Wiener independentes. Schöbel e Zhu (1999) estenderam o modelo de forma a considerar uma correlação entre os processos.

O fato de considerar um processo de reversão à média ao invés de um movimento geométrico browniano para descrever a evolução da volatilidade ao longo do tempo, torna este modelo um pouco mais adequado que o de Hull e White (1987). Isto porque um processo de reversão à média para a volatilidade estaria mais aderente ao fato estilizado aglomerado de volatilidade, onde ocorrem sucessivos períodos de grande volatilidade seguidos por sucessivos períodos de baixa volatilidade. Por outro lado, no entanto, vale destacar que o modelo permite a ocorrência de volatilidades negativas.

### 2.3.3. Modelo de Heston (1993)

O modelo de Heston (1993) supõe a seguinte dinâmica para o preço do ativo e sua variância:

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - q)S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t \\ dv_t &= k(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dZ_t \\ \text{corr}[dW_t, dZ_t] &= \rho dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $S_t$  corresponde ao preço do ativo subjacente,  $r$  é a taxa de juros livre de risco e  $q$  representa os dividendos. Ademais,  $v_t$ ,  $k$ ,  $\theta$  e  $\sigma_v$  correspondem, respectivamente, à variância do ativo subjacente, velocidade de reversão à média da variância, variância de longo prazo e volatilidade da variância.  $dW_t$  e  $dZ_t$  são

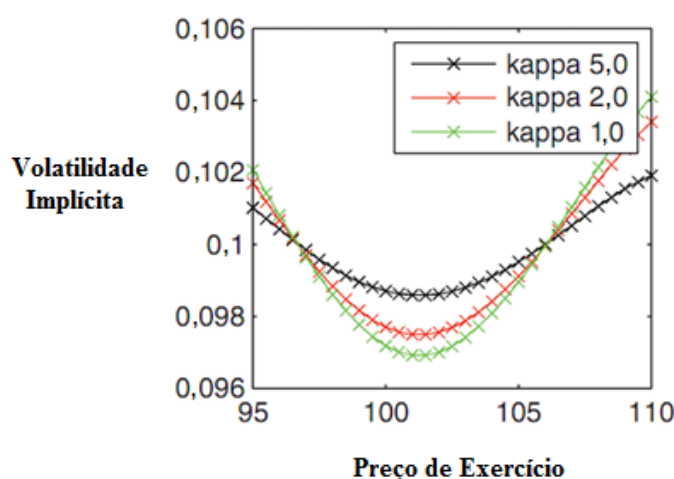
dois processos de Wiener com correlação  $\rho$ .

Nota-se que o modelo de Heston (1993) se assemelha ao modelo CIR (Cox, Ingersoll e Ross, 1985) em que é considerado um processo de reversão à média para a volatilidade. Quando a volatilidade está acima do valor de equilíbrio  $\theta$ , a tendência é a ocorrência de variações negativas na volatilidade, de modo que ela retorne ao ponto de equilíbrio. O inverso ocorre quando a volatilidade está abaixo de  $\theta$ .

De fato, a volatilidade, em geral, apresenta este tipo de comportamento, uma vez que períodos de euforia ou estresse no mercado são sucedidos por períodos de tranquilidade, com a volatilidade voltando ao seu patamar de equilíbrio. Entretanto, a velocidade com que a volatilidade converge para o valor de equilíbrio ( $k$ ) depende do mercado analisado.

A velocidade de reversão à média  $k$  afeta diretamente o efeito de *clustering* – ou aglomerados de volatilidade. Rouah (2013) constata que altas velocidades de reversão à média diminuem a intensidade do efeito sorriso da volatilidade, isto é, a curva de volatilidade implícita fica mais plana, conforme Figura 2.5 abaixo:

**Figura 2. 5 - Impacto da Reversão à Média na Curva de Volatilidade Implícita**



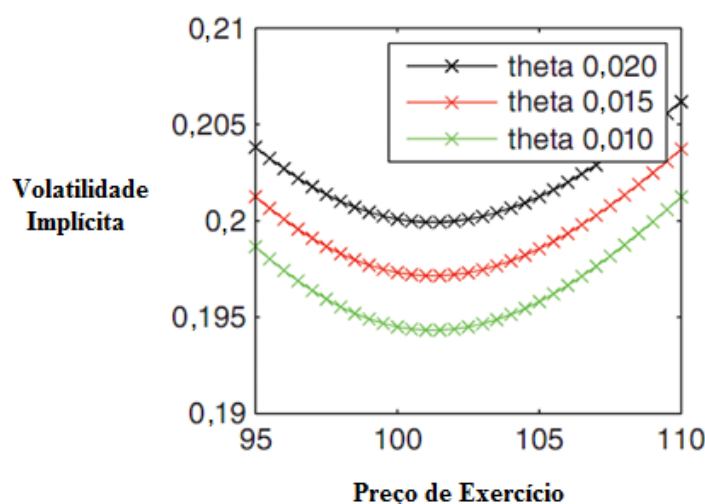
Fonte: Rouah, 2013, p. 39

Observa-se que quanto mais rápida a velocidade de reversão à média, mais rápido a variância tende a se estabilizar e menor é a curtose da distribuição dos preços do ativo, de modo que a curvatura da curva de volatilidade implícita

tende a ser minimizada, ficando mais plana, conforme pode se observado na Figura 2.5.

Por outro lado, quanto maior a variância média, maior é o nível da volatilidade implícita, evidenciado na Figura 2.6.

**Figura 2. 6 - Impacto da Variância Média na Curva de Volatilidade Implícita**



Fonte: Rouah, 2013, p. 39

Outro ponto em questão é que no modelo de Heston existem dois movimentos brownianos: um referente à evolução do preço do ativo e o outro referente à evolução da variância ao longo do tempo. Segundo Bauer (2012), os dois processos são correlacionados e, no geral, no mercado acionário, esta correlação é negativa, isto é, quedas no preço do ativo tendem a ser acompanhadas por aumentos na volatilidade.

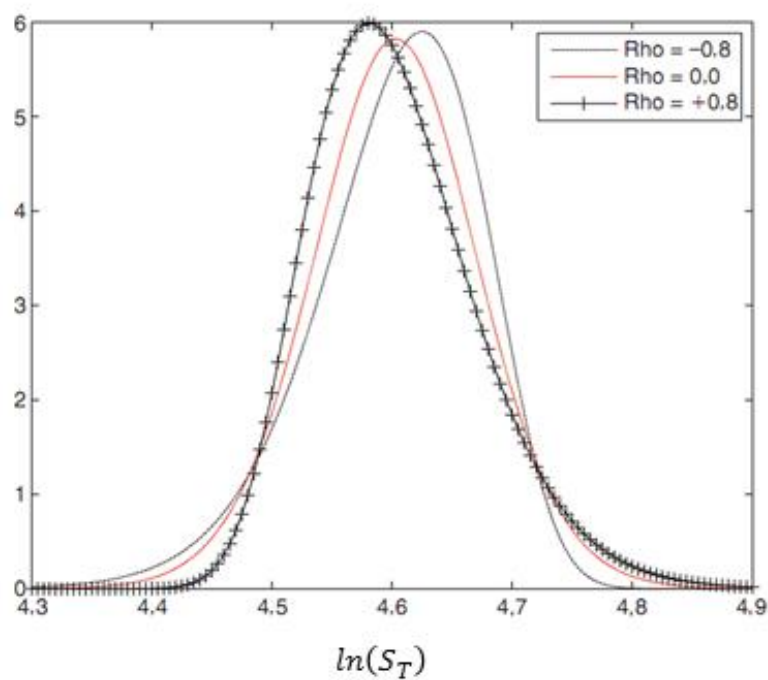
Moodley (2005) acrescenta ainda que tal correlação afeta também a simetria da distribuição dos retornos. Segundo o autor, quando a correlação entre o retorno do ativo e a volatilidade é negativa, a tendência é que a cauda esquerda fique mais “pesada” enquanto a cauda direita fica mais “fina”, caracterizando uma assimetria negativa. Isto significa que a volatilidade aumenta à medida que o preço da ação cai, fenômeno denominado *leverage effect*.

Por outro lado, quando a correlação entre o retorno do ativo e a volatilidade é positiva, a tendência é que a cauda esquerda fique mais “fina” enquanto a cauda direita fica mais “pesada”, caracterizando uma assimetria positiva. Tal comportamento representa que aumentos nos preços das ações

implicam num aumento da volatilidade.

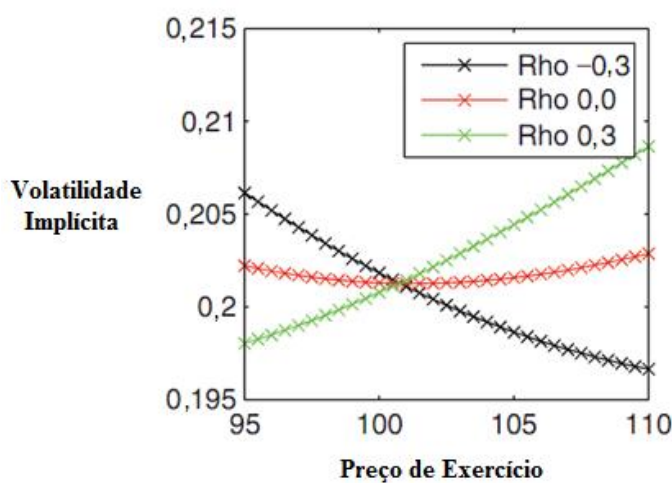
Rouah (2013) relaciona o grau de correlação entre a variância e o ativo-subjacente com o comportamento da curva de volatilidade implícita e a distribuição dos logaritmos do preço do ativo-objeto, conforme pode ser visualizado abaixo:

**Figura 2. 7 - Efeito da Correlação na Curva de Distribuição**



Fonte: Rouah, 2013, p. 34

**Figura 2. 8 - Impacto da Correlação na Curva de Volatilidade Implícita**



Fonte: Rouah, 2013, p. 39

Observa-se ainda que correlações negativas produzem retornos negativamente assimétricos que geram uma curva de volatilidade implícita inclinada para a esquerda, caracterizando o efeito *smirk*.

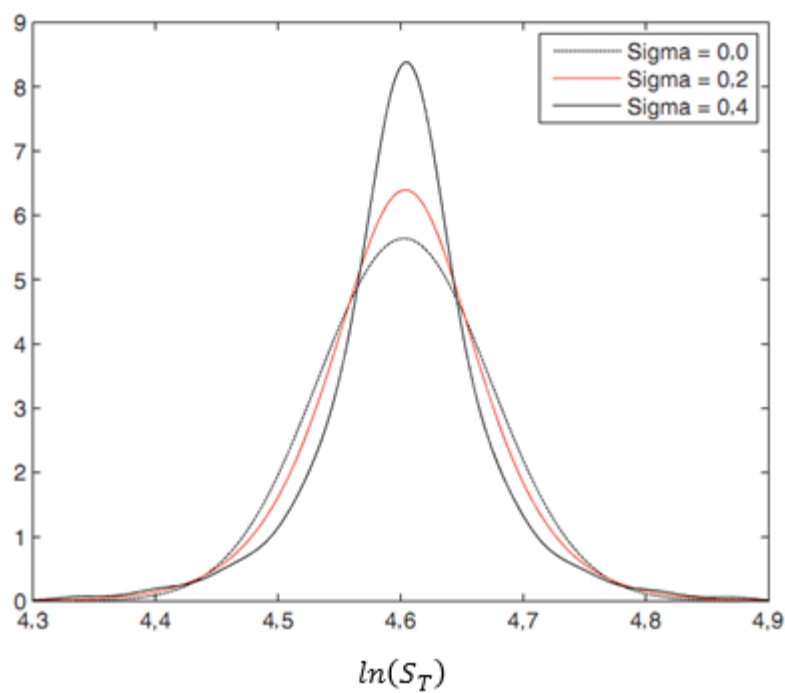
Por outro lado, quando a correlação é positiva, a distribuição dos retornos é assimétrica positiva e gera uma curva de volatilidade implícita inclinada para a direita, efeito conhecido como *forward smirk*. Finalmente, correlações nulas sugerem uma distribuição simétrica e uma curva de volatilidade do tipo *smile*.

Moodley (2005) ainda afirma que o parâmetro  $\sigma_v$  afeta a curtose da distribuição. Quando  $\sigma_v = 0$ , a volatilidade é determinística e, portanto, os log-retornos serão normalmente distribuídos. Em contrapartida, à medida que  $\sigma_v$  aumenta, a presença de eventos extremos aumenta em ambos os lados da distribuição. Tal fato faz sentido visto que, se a volatilidade da variância passa a ser alta, a ocorrência de eventos mais raros passa a ser mais frequente. Assim, os emissores de opções de compra tenderão a exigir um prêmio maior para um determinado preço de exercício, afetando, portanto, a volatilidade implícita e consequentemente o “sorriso” da volatilidade.

Este impacto da volatilidade da variância sobre a distribuição dos logaritmos dos preços do ativo-subjacente e sobre a curva de volatilidade implícita é descrito por Rouah (2013).

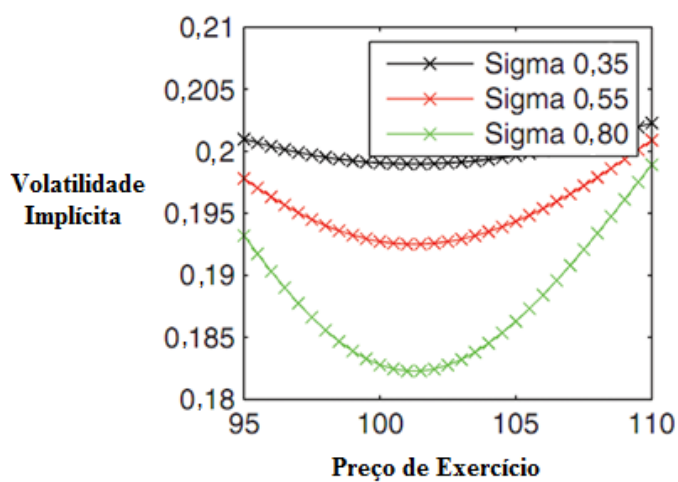


**Figura 2. 9 - Efeito da Volatilidade da Variância na Curva de Distribuição**



Fonte: Rouah, 2013, p. 35

**Figura 2. 10 - Impacto da Volatilidade da Variância na Curva de Volatilidade Implícita**



Fonte: Rouah, 2013, p. 39

Nota-se que, quando o  $\sigma_v$  é zero, isto significa que a variância é constante e, desta forma, os retornos teriam uma distribuição normal como preconiza o modelo de Black & Scholes e a curva da volatilidade implícita seria uma reta. Por outro lado, quanto maior o  $\sigma_v$ , maior a curtose e mais acentuado é o efeito *smile/smirk* da volatilidade.

Por último, vale destacar uma importante propriedade do modelo de Heston (1993) que, assim como em todo modelo do tipo CIR, a volatilidade não assume valores negativos ao longo do tempo se, e somente se, a seguinte condição, conhecida como condição de Feller, seja satisfeita (Kienitz e Wetterau, 2012):

$$2k\theta \geq \sigma_v^2 \quad (2.10)$$

Dentre todos os modelos acima mencionados, o modelo de Heston é o mais utilizado para a precificação de opções de ações.

Entretanto, segundo Rouah (2013), o modelo de Heston em alguns momentos não se ajusta bem à volatilidade implícita de opções muito próximas ao vencimento, caso das opções no mercado brasileiro. Helgadóttir e Ionescu (2016) argumentam que o efeito *skew* observado no mercado para opções de prazo de vencimento muito curto é muito mais acentuado do que o modelo de Heston consegue reproduzir.

Objetivando resolver este problema, surgiram modelos que adicionam saltos ao modelo de Heston, como, por exemplo, os modelos de Bates (1996) e Duffie *et al.* (2000). Além destes, surgiram ainda modelos em que os parâmetros do Heston (1993) variam no tempo, como o modelo de Benhamou *et al.* (2010). Christoffersen *et al.* (2009), por sua vez, desenvolveram um modelo que considera dois processos CIR para volatilidade, denominado Double Heston.

### 2.3.4. Modelo de Bates (1996)

O modelo de Bates (1996) é um processo misto de difusão com saltos, sendo o processo estocástico para o preço do ativo e para variância do ativo dados por:

$$\begin{aligned}
dS_t &= (r - q - \lambda\mu_J)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t + J_t S_t dN_t \\
dv_t &= k(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dZ_t \\
corr[dW_t, dZ_t] &= \rho dt
\end{aligned} \tag{2.11}$$

As variáveis e os parâmetros dados por  $S_t, r, q, v_t, k, \theta, \sigma_v$  e  $\rho$  são os mesmos do modelo de Heston (1993).  $dW_t$  e  $dZ_t$  são dois processos de Wiener com correlação  $\rho$ . No entanto, na equação acima,  $\lambda$  corresponde à frequência dos saltos e  $J_t$  corresponde ao tamanho do salto. Bates (1996) considera que  $J_t$  é independente e identicamente distribuído das outras variáveis e segue uma distribuição log-normal dada por:

$$\log(1 + J_t) \sim N\left(\log(1 + \mu_J) - \frac{\sigma_J^2}{2}, \sigma_J^2\right) \tag{2.12}$$

onde  $\mu_J$  e  $\sigma_J^2$  correspondem ao tamanho médio do salto e à sua variância, respectivamente.

O incremento de Poisson  $dN_t$  é independente dos incrementos de Wiener  $dW_t$  e  $dZ_t$  e pode assumir o valor de 1, com probabilidade  $\lambda dt$ , ou, 0, com probabilidade  $(1 - \lambda)dt$ . O fato de  $dN_t$  ser independente dos incrementos de Wiener não é uma premissa do modelo, mas sim um requisito probabilístico, segundo Shreve (2004).

Kovachev (2014) ressalta que a velocidade de reversão à média, a variância de longo prazo, a volatilidade da variância e a correlação possuem a mesma importância que no modelo de Heston (1993). Entretanto, no modelo de Bates (1996), o parâmetro  $\mu_J$  afeta a assimetria da distribuição dos retornos, ou seja, quando positivo produz uma distribuição positivamente assimétrica e, quando negativo, produz uma distribuição negativamente assimétrica.

Por outro lado,  $\sigma_J$  afeta a curtose da distribuição de retornos, uma vez que valores maiores para  $\sigma_J$  aumentam a variância do processo dos retornos. Ademais, conforme comentado,  $\lambda$  determina a frequência dos saltos no preço do ativo subjacente. Portanto, maiores valores para  $\lambda$  significam maior quantidade de saltos ao longo do tempo que, por sua vez, implicam numa maior volatilidade para o processo.

Ao contrário do modelo de Bates (1996), Duffie, Pan e Singleton (2000) desenvolveram um modelo em que saltos na volatilidade e no preço do ativo são correlacionados. No entanto, Gatheral (2006), comparando os desempenhos dos modelos de Heston (1993), Bates (1996), e Duffie *et al.* (2000), identificou que o modelo de Bates (1996) prevalece em comparação aos demais e que o modelo de Duffie *et al.* (2000) não apresentou um bom ajuste aos preços das opções sobre o índice S&P500. O autor conclui ainda que adicionar saltos à volatilidade não ajuda a explicar o *skew* da volatilidade, especialmente para opções com vencimento no curto prazo.

Além dos modelos que acrescentam saltos, existem modelos que consideram os parâmetros de Heston (1993) variando no tempo, conhecidos como *time-dependent Heston models*. Salvo suas respectivas particularidades, nestes modelos, não existe uma equação estocástica nem uma função matemática que descreva a evolução destes parâmetros no tempo. Ao contrário, são estabelecidos conjuntos de valores fixos para os parâmetros (*piecewise constant parameter*) a depender do prazo até o vencimento (Benhamou *et al.*, 2010).

### 2.3.5. Modelo Double Heston (2009)

Christoffersen (2009) propôs mais uma extensão ao modelo de Heston (1993) ao acrescentar mais um processo do tipo CIR para descrever a evolução da variância, de modo que os processos estocásticos envolvidos são:

$$\begin{aligned}
 dS_t &= (r - q)S_t dt + \sqrt{v_1}S_t dW_1 + \sqrt{v_2}S_t dW_2 \\
 dv_1 &= k_1(\theta_1 - v_1)dt + \sigma_{v,1}\sqrt{v_1}dZ_1 \\
 dv_2 &= k_2(\theta_2 - v_2)dt + \sigma_{v,2}\sqrt{v_2}dZ_2 \\
 \text{correl}[dW_1, dZ_1] &= \rho_1 dt \\
 \text{correl}[dW_2, dZ_2] &= \rho_2 dt
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde, assim como no modelo de Bates (1996), as variáveis e os parâmetros dados por  $S_t$ ,  $r$ ,  $q$ ,  $v_i$ ,  $k_i$ ,  $\theta_i$  e  $\sigma_{v,i}$  (para  $i = 1,2$ ) desempenham as mesmas funções que no modelo de Heston. Ademais,  $dW_i$  e  $dZ_i$  para  $i = 1,2$  são processos de Wiener

com suas respectivas correlações.

Segundo Rouah (2013), a vantagem deste modelo é que ele é capaz de prover maior flexibilidade na modelagem da superfície de volatilidade.

Christoffersen *et al.* (2009) afirmam que o formato e a intensidade da curva de volatilidade implícita variam de forma bastante independente, de forma que modelos com apenas um processo estocástico para descrever a volatilidade não conseguem capturar este fenômeno. Segundo os autores, podem existir dias em que a volatilidade é bastante elevada, mas a curva de volatilidade implícita pode ser quase uma reta horizontal assim como pode ser um *smile* bem acentuado. Da mesma maneira, nos dias em que a volatilidade é muito baixa, é possível existir uma curva de volatilidade implícita com um *smile* acentuado bem como uma reta horizontal.

Além deste fenômeno, os autores argumentam que a curva de volatilidade implícita varia ao longo do tempo, como se a correlação entre o ativo-subjacente e a volatilidade não fosse constante.

Tendo em vista esse comportamento, Christoffersen *et al.* (2009) adicionaram ao modelo de Heston (1993), um segundo processo estocástico para descrever a evolução da volatilidade ao longo do tempo.

Em seus estudos, os autores identificaram que o processo estocástico que possui maior velocidade de reversão à média é o que determina a correlação entre os retornos de curto prazo e a variância do preço do ativo. Por outro lado, o processo estocástico que apresenta a menor velocidade de reversão à média determina a correlação entre os retornos de longo prazo e a variância do preço do ativo. Segundo eles, isto traz mais flexibilidade para capturar o nível, formato e as mudanças da curva de volatilidade ao longo do tempo.

## 2.4. Modelos híbridos

Em vista da importância em também se considerar a taxa de juros estocástica na precificação de algumas opções de longo prazo, surgiram na literatura os modelos híbridos, que combinam modelos de volatilidade estocástica com taxa de juros estocástica. Alguns dos principais modelos existentes na literatura são conhecidos como HCIR, ou Heston-Cox-Ingersoll-Ross, (Grzelak *et*

*al.*, 2011, Ahlip e Rutkowski, 2013, Recchioni e Sun, 2016, Samimi *et al.*, 2016) e HHW, ou Heston-Hull-White (Hout e Ploeg, 2007, Grzelak *et al.*, 2011, Grzelak *et al.*, 2012, Kammeyer e Kienitz, 2012, Guo *et al.*, 2013, Samimi *et al.*, 2016).

Estes modelos foram desenvolvidos em função da sensibilidade das opções às variações nas taxas de juros, em especial, as opções com prazo de vencimento mais longo. Bakshi *et al.* (1997), por exemplo, ao comparar os modelos Black & Scholes com os modelos de volatilidade estocástica e de volatilidade estocástica com saltos e juros estocásticos, identificaram que o modelo com juros estocásticos apresentou a melhor performance na precificação de opções do índice da S&P500 com prazo de vencimento mais longo.

O modelo HCIR, segundo Samimi *et al.* (2016), é uma combinação do modelo CIR para modelar a taxa de juros com o modelo de Heston para a modelagem da variância. O modelo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1(t) \\
 dv_t &= k(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_2(t) \\
 dr_t &= \lambda(\theta - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_3(t) \\
 S_0 &> 0, v_0 > 0, r_0 > 0
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

onde  $S_t$  corresponde à evolução do preço do ativo-subjacente,  $v_t$  diz respeito à evolução da variância do ativo ao longo do tempo e  $r_t$  é a taxa de juro livre de risco. Os parâmetros  $k$ ,  $\theta$ , e  $\sigma_v$  são os mesmos do modelo de Heston (1993). No entanto,  $\lambda$ ,  $\theta$  e  $\sigma_r$  correspondem à velocidade de reversão à média da taxa de juros livre de risco, taxa de juros livre de risco de longo prazo e volatilidade da taxa de juros livre de risco.  $S_0$ ,  $v_0$ ,  $r_0$  correspondem ao preço inicial do ativo-subjacente, a variância inicial do preço do ativo e a taxa de juros livre de risco inicial. Vale destacar que os processos brownianos  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  estão correlacionados dois a dois e suas correlações são dadas por:

$$\text{corr}[dW_i, dW_j] = \rho_{i,j} dt \text{ tal que } i, j = 1, 2, 3
 \tag{2.15}$$

O modelo HHW é uma junção do modelo de Heston (1993) para a variância com o modelo de Hull e White (1987) para a taxa de juros. Pode ser

matematicamente representado por:

$$\begin{aligned}
 dS_t &= (r_t - q)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_1(t) \\
 dv_t &= k(\theta - v_t)dt + \sigma_v\sqrt{v_t}dW_2(t) \\
 dr_t &= \lambda(\theta_t - r_t)dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dW_3(t) \\
 S_0 &> 0, v_0 > 0, r_0 > 0 \\
 \text{corr}[dW_i, dW_j] &= \rho_{i,j}dt \text{ tal que } i, j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde  $S_t, r_t, q, v_t, \theta, \sigma_v, \lambda, \sigma_r, S_0, v_0$  e  $r_0$  correspondem aos mesmos parâmetros do modelo HCIR.

A diferença essencial entre os modelos HCIR e HHW é com relação à taxa de juros de equilíbrio. Enquanto no modelo HCIR a taxa de juros de equilíbrio ( $\theta$ ) é uma constante, no modelo HHW ela é variável no tempo ( $\theta_t$ ) e se ajusta à estrutura a termo inicial da taxa de juro corrente.

## 2.5. Tabela Conceitual dos Modelos de Volatilidade

Na Tabela 2.1 abaixo, são apresentadas as principais características de cada modelo mencionado neste trabalho, bem como, as suas principais aplicações na precificação de derivativos financeiros.

**Tabela 2. 1 - Resumo dos Principais Modelos de Volatilidade**

| Classificação                       | Modelos (Artigo)  | Características  | Observações   |
|-------------------------------------|---|--|---|
| Modelos de Volatilidade Condicional | GARCH (Bollerslev, 1986), EGARCH (Nelson, 1991)         | <ul style="list-style-type: none"> <li>Modelam a evolução da variância condicional;</li> <li>Consideram os principais fatos estilizados das séries de retornos;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Necessitam de métodos numéricos de simulação para precificar opções;</li> <li>Heston e Nandi (2000) fornecem uma fórmula que necessita do uso de métodos numéricos de integração para apreçar opções;</li> </ul> |
| Modelos de Volatilidade Local       | Dupire (1994)   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Preço do ativo segue MGB;</li> <li>Volatilidade como uma função determinística do tempo e do preço do ativo-objeto;</li> </ul>      | <ul style="list-style-type: none"> <li>Necessita do uso de métodos numéricos de diferenças finitas;</li> <li>Usado para apreçar opções exóticas;</li> </ul>   |
|                                     | CEV - <i>Constant Elasticity Variance</i> , (Cox, 1975) | <ul style="list-style-type: none"> <li>Preço do ativo segue MGB;</li> <li>Volatilidade como uma função determinística do tempo e do preço do ativo-objeto;</li> </ul>      | <ul style="list-style-type: none"> <li>Possui uma solução analítica;</li> <li>Bastante usado na precificação de opções exóticas;</li> </ul>   |
|                                     | SABR (Hagan <i>et al.</i> 2002)                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>Preço do ativo segue MGB;</li> <li>Volatilidade segue MGB sem tendência;</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Especialmente aplicado no mercado de moeda e juros;</li> </ul>   |
| Modelos de Volatilidade Estocástica | Hull e White (1987)                                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Preço do ativo e segue MGB;</li> <li>Volatilidade segue MGB;</li> <li>Preço do ativo e Volatilidade são correlacionados;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>A volatilidade não assume valores negativos;</li> <li>A volatilidade cresce exponencialmente no tempo;</li> </ul>  |



Tabela 2. 1 (Cont.) - Resumo dos Principais Modelos de Volatilidade

| Classificação                       | Modelos (Artigo)                                   | Características   | Observações  |
|-------------------------------------|--|---|--|
| Modelos de Volatilidade Estocástica | Stein e Stein (1991)                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Preço do ativo segue MGB;</li> <li>• Volatilidade segue MRM-Aritmético;</li> <li>• Preço do ativo e Volatilidade são independentes;</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• A volatilidade pode assumir valores negativos;</li> </ul>   |
|                                     | Heston (1993)                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Preço do ativo segue MGB;</li> <li>• Volatilidade segue MRM-CIR;</li> <li>• Preço do ativo e Volatilidade são correlacionados;</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Amplamente utilizado na literatura;</li> <li>• Apresenta uma fórmula analítica com uso de métodos numéricos de integração para o apreamento de opções;</li> </ul> |
|                                     | Bates (1996)                                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Preço do ativo segue MGB com saltos;</li> <li>• Volatilidade segue MRM-CIR;</li> <li>• Preço do ativo e Volatilidade são correlacionados;</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Extensão do modelo de Heston para melhorar a precificação de opções de curto prazo;</li> </ul>  |
|                                     | Double Heston (Christoffersen <i>et al</i> , 2009) | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Preço do ativo segue MGB;</li> <li>• Os dois processos para a Volatilidade são MRM-CIR;</li> <li>• Preço do ativo é correlacionado com cada processo que descreve a Volatilidade;</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Extensão do modelo de Heston para melhorar a precificação de opções de curto prazo;</li> </ul>  |
| Modelos Híbridos                    | Heston-Cox-Ingersoll-Ross (Grzelak et al., 2010)   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Preço do ativo segue MGB;</li> <li>• Volatilidade segue MRM-CIR;</li> <li>• Taxa de Juros Livre de Risco segue um MRM-CIR</li> <li>• Preço do ativo, Volatilidade e Taxa de Juros Livre de Risco são correlacionados;</li> <li>• Taxa de Juros de Equilíbrio é constante;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Especialmente útil na precificação de opções de longo prazo de vencimento;</li> </ul>   |

Tabela 2. 1 (Cont.) - Resumo dos Principais Modelos de Volatilidade

| Classificação    | Modelos (Artigo)                          | Características   | Observações   |
|------------------|---|---|---|
| Modelos Híbridos | Heston-Hull-White<br>(Hout e Ploeg, 2007) | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Preço do ativo segue MGB;</li> <li>• Volatilidade segue MRM-CIR;</li> <li>• Taxa de Juros Livre de Risco segue um MRM-CIR</li> <li>• Preço do ativo, Volatilidade e Taxa de Juros Livre de Risco são correlacionados;</li> <li>• Taxa de Juros de Equilíbrio varia ao longo do tempo;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Especialmente útil na precificação de opções de longo tempo de vencimento;</li> <li>• É um modelo que se ajusta à estrutura a termo da taxa de juros;</li> </ul> |

Em face de todo o exposto, o modelo de Heston (1993) foi escolhido para precificar as opções de compra de ações na B3. A escolha por esse modelo como ponto de partida para análise leva em conta as características por ele implicadas, como reversão à média e não negatividade da volatilidade.

Vale destacar que, no mercado brasileiro, as opções mais líquidas são as que irão vencer no curto prazo. Assim, conforme já mencionado, uma vez que, os modelos de Bates (1996) e Double Heston (2009) são extensões que buscam melhorar o ajuste à volatilidade implícita de opções muito próximas ao vencimento, nesta dissertação, é proposta uma comparação entre o modelo de Heston (1993) e estes dois modelos.

Por outro lado, o fato de as opções mais líquidas serem de vencimento mais curto, faz com que, a princípio, não sejam esperados ganhos expressivos ao utilizar extensões do modelo de Heston (1993) que considerem os juros estocásticos, de forma que estes modelos não foram considerados para análise nesta dissertação.

No entanto, para aplicar os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) na precificação de opções é necessário o uso de métodos numéricos uma vez que tais modelos não dispõem de solução analítica fechada. Neste trabalho, portanto, será utilizado o método numérico proposto por Lewis (2000) e seu desenvolvimento será objeto de estudo do próximo capítulo.

## 2.6. Modelos de Volatilidade aplicados ao Mercado Brasileiro

No Brasil, não existem muitos artigos publicados aplicando modelos de volatilidade estocástica para precificar opções de ações.

No entanto, Martin (2004) analisa do ponto de vista teórico as principais linhas de estudo sobre precificação de opções quando a variância dos retornos do ativo-objeto é estocástica.

Neste contexto, Vicente *et al.* (2006) verificaram uma boa capacidade do modelo de Heston (1993) em se ajustar às flutuações dos preços das ações na B3, mas não precificaram nenhuma opção e seus resultados não são comparáveis com os obtidos por este trabalho.

Pezzo e Uberti (2006) também estudaram os modelos de Heston (1993) e Bates (1996) nos mercados emergentes, incluindo o Brasil, e identificaram uma boa capacidade destes modelos em descrever os movimentos dos preços dos ativos.

Por outro lado, Çepni *et al.* (2013) identificaram que, no geral, os modelos de Black & Scholes e Heston (1993) possuem dificuldades em se ajustar à distribuição do retornos dos índices de ações nos mercados emergentes.

Por sua vez, Costa e Yoshino (2004) e Bustamante (2010) estudaram a calibração do modelo de Heston (1993) no mercado brasileiro de opções de câmbio.

Em contrapartida, Gomes (2015) avaliou o modelo de Heston e Nandi (2000) no apreçamento de opções de ações na B3, tendo concluído que o supracitado modelo aparece como uma melhor alternativa preditiva em relação ao Black & Scholes.

Ainda no Brasil, Luccas (2007) testou o modelo de Kou (2002) para avaliar as opções de compra da Petrobrás e Vale. Por outro lado, Araújo *et al.* (2003) estudaram o modelo de Duan (1995) na precificação de opções de compra da Telebrás, enquanto que Almeida e Dana (2005) aplicaram o modelo de Fouque *et al.* (2000) na avaliação das ações da Telemar.

Ademais, Hunzinger *et al.* (2014) estudaram o comportamento da volatilidade implícita dos índices de ações nos BRICS e Vitiello Júnior (2000) comparou os modelos Black & Scholes e CEV (Cox e Ross, 1976) para apreçamento de opções de compra no mercado brasileiro.

### 3. Solução para o Valor das Opções nos Modelos Propostos

Modelos mais complexos para precificação de opções, como os de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009), resultam em equações diferenciais parciais que não possuem uma solução analítica fechada.

Assim, para precificar opções europeias cujos ativos subjacentes são definidos a partir destes modelos, é necessário o uso de métodos numéricos que envolvem a fundamentação teórica apresentada na presente seção.

Dentre os métodos numéricos para precificação de opções considerando a volatilidade como estocástica existem: o método de Carr e Madan (1999), o de Lewis (2000), o de Attari (2004) e o COS desenvolvido por Fang e Oosterlee (2008). Dentre estes métodos, os de Lewis (2000), Attari (2004) e COS (2008) são de mais rápida convergência. Uma das vantagens dos métodos de Lewis (2000) e Attari (2004) é que, por serem métodos que exigem apenas a resolução de uma integral, são considerados mais rápidos em comparação aos demais. Apesar de igualmente rápido, o método COS (2008), segundo Kraska (2015), apresenta erros significativos ao ser aplicado ao modelo de Bates (1996) a depender da magnitude dos parâmetros dos saltos. Ademais, Le Floc'h (2014) constatou que as opções muito dentro-do-dinheiro e próximas à data de expiração podem ser severamente mal apreçadas mesmo com um amplo intervalo de integração que aumenta consideravelmente o tempo computacional.

Assim, nesta dissertação optou-se por estudar e analisar com mais profundidade o método de Lewis (2000), de modo a utilizá-lo na aplicação empírica proposta para precificar opções de ações. Desse modo, em seguida, será apresentado o desenvolvimento matemático de Lewis (2000)<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Para maior detalhamento do processo de construção do método, o leitor poderá consultar Lewis (2000)

### 3.1.Método de Lewis

Segundo Lewis (2000), o preço em  $t = 0$  de uma opção  $V$  na medida martingale é dado por:

$$V(S_0) = e^{-rT} E^Q[w(x, T)] \quad (3.1)$$

onde  $x(t) = \ln S_t$  e  $w(x, T)$  é a função de *payoff* da opção.

Seja  $\hat{w}(z, t)$  a transformada generalizada de Fourier calculada para o valor da opção  $w(x, t)$  no tempo  $t$ , de modo que:

$$\hat{w}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} w(x, t) dx \quad (3.2)$$

onde  $x = x(t) = \ln S_t$ ,  $i = \sqrt{-1}$  e  $z$  é a variável de transformação complexa ( $z = z_r + iz_i$ ). Desta forma,  $w(x, t)$  pode ser determinado pelo teorema da transformada inversa de Fourier:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} e^{-izx} \hat{w}(z, t) dz \quad (3.3)$$

Juntando as equações 3.1 e 3.3, obtém-se:

$$V(S_0) = \frac{e^{-rT}}{2\pi} E^Q \left[ \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} e^{-izx} \hat{w}(z, T) dz \right] \quad (3.4)$$

Uma *call* europeia tem *payoff* na data  $T$  dado por  $Max(S_T - K, 0)$ , onde  $K$  é o preço de exercício da opção, de modo que pode ser escrito como:

$$w(x, T) = Max(e^x - K, 0) \quad (3.5)$$

Dessa forma, a transformada de Fourier de  $w(x, T)$ , a partir da equação 3.2 é dada por:

$$\hat{w}(z, T) = -\frac{K^{1+iz}}{z^2 - iz} \quad (3.6)$$

Esta expressão é chamada por Lewis (2000) como a transformação do payoff da opção de compra. Vale destacar que  $Im(z) > 1$ . Substituindo 3.6 em 3.4:

$$C(S_0) = -\frac{e^{-rT}}{2\pi} E^Q \left[ \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} e^{-izx} \frac{K^{1+iz}}{z^2 - iz} dz \right] \quad (3.7)$$

onde  $C(S_0)$  é o valor em  $t = 0$  da opção de compra europeia. Lewis (2000), considera que, sob neutralidade ao risco, o preço do ativo-objeto em  $t=T$  é dado por:

$$S_T = S_0 e^{(r-q)T + X_T} \quad (3.8)$$

onde  $S_0$ ,  $q$  e  $r$  correspondem ao preço *spot* do ativo, dividendos e a taxa de juros livre de risco, respectivamente, e  $X_T$  é um processo de Lévy para o qual  $E[X_T] = 1$ . Sendo  $x = x(T) = \ln S_T$ , a equação 3.7 para  $C(S_0)$  pode ser reescrita como:

$$C(S_0) = -\frac{e^{-rT}}{2\pi} E^Q \left[ \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} (S_0 e^{(r-q)T + X_T})^{-iz} \frac{K^{1+iz}}{z^2 - iz} dz \right] \quad (3.9)$$

Em seguida, passando o valor esperado para dentro da integral e fazendo  $Y_T = \ln S_0 + (r - q)T$ , tem-se que:

$$C(S_0) = -\frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} E^Q [(e^{Y_T + X_T})^{-iz}] \frac{K^{1+iz}}{z^2 - iz} dz \quad (3.10)$$

$$C(S_0) = -\frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} e^{-izY_T} E^Q [e^{-izX_T}] \frac{K^{1+iz}}{z^2 - iz} dz \quad (3.11)$$

Sendo  $f(-z) = E^Q[e^{-izX_T}]$  a função característica do processo  $X_T$ , tem-se que:

$$C(S_0) = -\frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} e^{-izY_T} f(-z) \frac{K^{1+iz}}{z^2 - iz} dz \quad (3.12)$$

$$C(S_0) = -\frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} e^{-izU_T} f(-z) \frac{dz}{z^2 - iz} \quad (3.13)$$

$$\text{onde } U_T = \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - q)T.$$

Para resolver a integral da equação 3.13 e obter o valor da opção, Lewis (2000) mostra como alterar os limites de integração aplicando o teorema do resíduo para integral complexa, de modo que obtém, conforme apresentado por Rouah (2013), a seguinte expressão para o valor da opção de compra europeia:

$$C(S_0) = S_0 e^{-qT} - \frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{iv_2 - \infty}^{iv_2 + \infty} e^{-izU_T} f(-z) \frac{dz}{z^2 - iz} \quad (3.14)$$

para  $v_2 \in (0,1)$ .

Lewis (2000) propõe então uma nova alteração dos limites de integração e, aplicando novamente o teorema do resíduo, finalmente expressa o valor da opção europeia de compra como uma integral agora real dada por:

$$C(S_0) = S_0 e^{-qT} - \frac{\sqrt{KS_0} e^{-(r+q)\frac{T}{2}}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ e^{izU_T} f\left(u - \frac{i}{2}\right) \frac{1}{u^2 + \frac{1}{4}} \right] du \quad (3.15)$$

onde  $\operatorname{Re}$  é a parte real do número complexo correspondente e  $f$  representa a função característica do modelo em estudo. Em que pese ao prêmio de opções venda, seu preço pode ser calculado através da relação de paridade compra-venda.

Um ponto importante a ser destacado é a necessidade de se resolver a integral da equação 3.15 para obter o preço da *call* europeia. Usualmente, uma integral é avaliada a partir da anti-derivada, considerando os limites de integração.

Entretanto, conforme Rouah (2013), a anti-derivada não está disponível para os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009), de forma que o uso de métodos numéricos se faz necessário.

De um modo geral, os métodos numéricos buscam aproximar o cálculo da integral de uma função  $f(x)$  por um somatório ponderado do integrando avaliado em pontos discretos ao longo dos limites de integração, isto é:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j f(x_j) \quad (3.16)$$

onde  $j = 1$  a  $N$  são os pontos de integração e  $\alpha_j$  os respectivos pesos, que vão depender do método numérico utilizado.

Nesta dissertação será utilizado o método adaptativo Gauss Kronrod Quadrature (Kronrod, 1965), visto que Schmelzle (2010), ao avaliar diversos métodos com relação à precisão e eficiência computacional, constatou que este método possui uma melhor performance em termos de eficiência além de uma boa acurácia.

O software utilizado para os cálculos neste trabalho foi o *Matlab*, de modo que a função utilizada para o método adaptativo Gauss Kronrod Quadrature é dada por  $quadgk(f, a, b, tol)$ , onde  $f$  é o integrando,  $a$  é o limite inferior de integração,  $b$  é o limite superior de integração e  $tol$  é o nível de tolerância do erro.

À luz de Lewis (2000) e Helgadóttir e Ionescu (2016), definiu-se  $a = 0$  e  $b = 1000$ . Ademais, optou-se por utilizar um nível de tolerância de  $10^{-13}$ .

Outro ponto relevante a ser ressaltado é o fato de que para aplicar o método de Lewis (2000) na precificação de opções a partir dos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009), é necessário o uso das respectivas funções características destes modelos. Tais funções características são objeto de estudo da próxima seção.

### 3.2. Funções Características dos Modelos de Volatilidade Estocástica

Considerando os modelos de interesse neste trabalho, para que se possa utilizar o método proposto por Lewis (2000) a partir do uso da transformada de Fourier conforme apresentado na seção anterior, é necessário o uso das funções



características correspondentes aos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009). O valor da opção europeia de compra para cada um dos modelos é obtido a partir da solução da integral dada pela equação 3.15, conhecendo as funções características dos modelos. Tais funções são encontradas na literatura, em trabalhos como os de Rouah (2013) e Kienitz e Wetterau (2012).

Rouah (2013), por exemplo, demonstra que a função característica do modelo de Heston (1993) é dada por:

$$\begin{aligned}
 f_{Heston} &= e^{(A+Bv_0+izx)} \\
 A &= (r-q)iz\tau + \frac{k\theta}{\sigma_v^2} \left[ (k - \rho\sigma_v zi - d)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g}\right) \right] \\
 B &= \frac{k - \rho\sigma_v zi - d}{\sigma_v^2} \left( \frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}} \right) \\
 g &= \frac{k - \rho\sigma_v iz - d}{k - \rho\sigma_v iz + d} \\
 d &= \sqrt{(k - \rho\sigma_v iz)^2 + (iz + z^2)\sigma_v^2}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Além do modelo de Heston (1993), Rouah (2013) apresenta também a função característica do modelo Double Heston (2009), dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 f_{Double\ Heston} &= e^{(A+B_1v_{0,1}+B_2v_{0,2}+izx)} \\
 A &= (r-q)iz\tau + \sum_{j=1}^2 \frac{k_j\theta_j}{\sigma_{v,j}^2} \left[ (k_j - \rho_j\sigma_{v,j}iz - d_j)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - g_j e^{-d_j\tau}}{1 - g_j}\right) \right] \\
 B_j &= \frac{k_j - \rho_j\sigma_{v,j}iz - d_j}{\sigma_{v,j}^2} \left( \frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - g_j e^{-d_j\tau}} \right) \\
 g_j &= \frac{k_j - \rho_j\sigma_{v,j}iz - d_j}{k_j - \rho_j\sigma_{v,j}iz + d_j} \\
 d_j &= \sqrt{(k_j - \rho_j\sigma_{v,j}iz)^2 + (iz + z^2)\sigma_{v,j}^2}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Kienitz e Wetterau (2012) e Persson (2013), por sua vez, apresentam a função característica de Bates (1996) dada pela seguinte equação:

$$f_{Bates} = f_{Heston} e^{-\lambda \mu_J i z \tau + \lambda \tau \left( (1 + \mu_J)^{i z} e^{\frac{1}{2} \sigma_J^2 i z (i z - 1)} - 1 \right)} \quad (3.19)$$

No Apêndice B, é apresentada a demonstração para obtenção da função característica de Heston (1993).

## 4. Aplicação Empírica

O objetivo deste capítulo é apresentar a proposta de comparação entre modelos de volatilidade estocástica aplicados à precificação de opções, em especial os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009), aplicados às opções de compra de ações no mercado brasileiro. Para a definição do levantamento dos dados a serem utilizados e estabelecer o processo de estimação dos parâmetros dos modelos, o presente trabalho referencia, em especial, os artigos de Bakshi *et al.* (1997), Lin *et al.* (2001) e Kim e Kim (2004).

Bakshi *et al.* (1997) compararam quatro modelos de precificação de opções quanto à capacidade de ajuste aos dados dentro da amostra (*in-sample*) e à capacidade preditiva fora da amostra (*out-of-sample*). Além disso, eles avaliaram a adequabilidade do modelo para capturar a estrutura a termo da volatilidade implícita. Os autores utilizaram modelos que consideram a volatilidade como estocástica, além da presença de saltos e dos juros estocásticos. Todos estes modelos foram comparados entre si e também em relação ao modelo Black & Scholes. Para isto, os autores utilizaram, essencialmente, opções de compra sobre o índice S&P 500 no período de 01/06/1988 até 31/05/1991.

Seguindo o mesmo raciocínio, Lin *et al.* (2001) avaliaram o modelo de Heston, comparando-o ao modelo Black & Scholes na precificação de opções de compra baseadas no índice FTSE 100 no período de 22/12/1993 até 18/12/1996.

Kim e Kim (2004), baseados na metodologia usada por Bakshi *et al.* (1997), compararam os modelos GARCH, Variance Gamma (Madan e Seneta, 1990, e Boyarchenko e Levendorskii, 2002) e Heston para precificar opções do índice KOSPI 200, índice do mercado sul-coreano, no período de 03/01/1999 até 26/12/2000.

Esta dissertação busca comparar os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) para precificar opções de compra baseadas nas ações preferenciais da Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5) no período 18/10/2016 até 05/01/2017.

O modelo de Heston foi escolhido devido às suas características de reversão à média e não negatividade. Por outro lado, já que as opções de compra mais líquidas negociadas no mercado brasileiro são as de curto prazo, preferiu-se utilizar os modelos de Bates (1996) e Double Heston (2009), ao invés de um modelo com juros estocásticos como em Bakshi *et al.* (1997). De acordo com os estudos empíricos na literatura, os modelos de Bates (1996) e Double Heston (2009), têm apresentado resultados melhores que os modelos de Heston (1993) e Black & Scholes no apreçamento de opções de curto prazo. Por outro lado, tratar os juros como estocásticos não teria tanto efeito nestas opções, conforme constatado por Bakshi *et al.* (1997) para o mercado norte-americano.

Com relação ao período escolhido para a aplicação empírica, vale destacar que este foi definido tendo como partida a disponibilidade de dados que viabilizassem uma sincronia perfeita entre a cotação do preço da opção e da ação e que respeitassem determinados critérios, descritos a seguir nesse capítulo. Desta forma, optou-se por não utilizar cotações mais antigas.

#### 4.1.Dados

Neste trabalho, foram utilizadas opções de compra de ações preferenciais da Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5) com vencimento em Novembro e Dezembro de 2016 e Janeiro de 2017. No total, foram consideradas 21, 17 e 16 opções de Petrobrás, respectivamente nos meses mencionados; e 28, 28 e 17 opções de Vale, respectivamente também nos meses mencionados. Desta forma, foram realizadas 2000 precificações diárias dentro do período de 18/10/2016 até 05/01/2017<sup>2</sup>.

Os dados foram obtidos na base de dados da B3<sup>3</sup> e consistiram em cotações intradiárias das ações e das opções. Uma vez que no Brasil algumas opções de ações possuem baixo volume de negociação ao longo dos dias, existe a possibilidade de o último preço de negociação da opção ter sido estabelecido tendo como base um preço para a ação diferente do preço de fechamento dela no mercado à vista. Dessa maneira, a fim de evitar problemas decorrentes deste

---

<sup>2</sup> A data de 18/10/2016 foi escolhida para data inicial dos dados considerando os vencimentos das opções do mês de outubro.

<sup>3</sup> [www.ftp.bmf.com.br](http://www.ftp.bmf.com.br)

possível descasamento entre os preços de fechamento da opção e da ação, optou-se por utilizar cotações intradiárias. O uso de cotações intradiárias permitiu fazer uma sincronia perfeita entre os preços da ação e os das opções e, desta forma, obter uma boa estimativa dos parâmetros e, conseqüentemente, um bom apreçamento.

Sumariamente, foram selecionadas as cotações de opções que respeitaram os seguintes critérios:

- Para cada dia dentro da amostra, foi selecionado apenas o último preço de negociação de cada opção entre 16:00 e 17:30. Segundo Kim e Kim (2004), esta janela de tempo é estabelecida com vista a minimizar problemas decorrentes da variação intradiária da volatilidade. Devido ao baixo volume de negociação de algumas opções de ações em comparação com mercados internacionais, cujos artigos foram usados como referência, escolheu-se este período intradiário mais amplo. Caso se estabelecesse um intervalo de tempo menor, poucas opções seriam consideradas, o que implicaria em uma piora no processo de calibração e precificação;
- Opções com menos de seis dias úteis para a expiração foram excluídas da amostra, procedimento equivalente ao adotado na literatura por trabalhos mencionados acima. Os preços destas opções prestes a vencer podem apresentar um comportamento instável considerável e, por isso, foram desconsiderados;
- Da mesma maneira, foram desconsideradas opções com prêmio inferior a R\$0,20. Importa destacar que foi definido um valor inferior ao estabelecido nos artigos acima, pois um valor de prêmio maior levaria a uma baixa disponibilidade de opções para o estudo;
- Hull (2005) afirma que as opções muito dentro do dinheiro e muito fora do dinheiro possuem pouca sensibilidade à volatilidade, de modo que as volatilidades implícitas calculadas a partir dos preços dessas opções não se apresentam como bons resultados. Sendo assim, para a calibração dos parâmetros, foram excluídas as opções muito dentro do dinheiro, com uma razão entre o preço da ação e o

preço de exercício superior a 1,17. No entanto, como em Bakshi *et al.* (1997), tais opções foram mantidas na precificação.

- À vista de Hull (2016) e seguindo Oliveira (2013), preços que não respeitavam a condição de arbitragem foram eliminados:

$$C \geq Se^{-qT} - Ke^{-rT} \quad (4.1)$$

onde  $C$ ,  $S$ ,  $q$ ,  $T$ ,  $K$  e  $r$  correspondem, respectivamente, ao preço de mercado das opções, preço à vista do ativo-subjacente, taxa de dividendos, prazo para o vencimento, preço de exercício da opção e taxa de juros livre de risco. Caso esta condição não seja satisfeita, o arbitrador poderia vender a ação a descoberto, comprar a opções de compra e investir a diferença à taxa de juros livre de risco.

## 4.2. Estimação dos Parâmetros

Antes de proceder com a explanação do processo de calibração dos modelos, é necessário compreender os parâmetros a serem estimados nos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009).

A aplicação do modelo de Heston (1993) exige a estimação de cinco parâmetros, enquanto os modelos de Bates (1996) e Double Heston (2009) necessitam da estimação de oito e dez parâmetros, respectivamente.

Para os modelos de Heston (1993) e Double Heston (2009) há a necessidade de estimação dos parâmetros relacionados à velocidade de reversão à média, variância de longo prazo, volatilidade da variância, variância inicial e correlação entre a variância e o ativo-subjacente, conforme definidos nas equações 2.9 e 2.13.

Por outro lado, o modelo de Bates (1996) exige que, além dos parâmetros do modelo de Heston (1993), sejam estimados os parâmetros de frequência dos saltos, média e variância da magnitude dos saltos, conforme definidos na equação 2.11.

A estimação dos parâmetros dos três modelos foi realizada através de um problema de otimização não linear cuja função objetivo a ser minimizada foi a *Relative Squared Price Error* (RSPE) para cada um dos modelos:

$$RSPE = \sum_{i=1}^N \left( \frac{P_i^{modelo} - P_i^{mercado}}{P_i^{mercado}} \right)^2 \quad (4.2)$$

onde  $N$  corresponde ao número de opções utilizadas na calibração do modelo,  $i$  corresponde a cada opção,  $P_i^{mercado}$  refere-se ao último prêmio observado da opção no mercado da B3 dentro da janela de tempo considerada e  $P_i^{modelo}$  é prêmio teórico de cada opção calculado por cada um dos modelos utilizados: Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009).

Gschnaidtner e Escobar (2015) avaliaram os riscos relacionados à calibração destes tipos de modelos, tendo constatado que as funções-objetivos que apresentaram os melhores desempenhos foram a *Relative Squared Volatility Error* (RSVE) e *Relative Squared Price Error* (RSPE), respectivamente. O RSVE se assemelha ao RSPE, utilizando, no entanto, a volatilidade implícita ao invés dos preços de mercado das opções para cálculo do erro.

Neste trabalho, optou-se pelo uso do RSPE, uma vez que, com frequência, o cálculo da volatilidade implícita é inexecutável em virtude da menor liquidez do mercado brasileiro de opções de ações. Kim e Kim (2004) utilizaram a mesma função objetivo para apreçar opções do índice KOSPI.

O algoritmo de otimização utilizado foi o *trust-region-reflective* presente no otimizador *Nonlinear Least Square* do software *Matlab*. Trata-se de um algoritmo de otimização local cujos resultados tanto em valores estimados quanto em tempo para estimação são reportados na literatura como satisfatórios quando comparado a algoritmos de otimização global, que também são utilizados na calibração de modelos de volatilidade estocástica para apreçamento de opções.

Alguns autores comparam o uso de algoritmos de otimização local e global para calibração de modelos de volatilidade estocástica, como, por exemplo, Helgadóttir e Ionescu (2016), Crisóstomo (2014), Lee (2013) e Moodley (2005). Como otimizador global, o algoritmo *Adaptive Simulated Annealing* (dado pela função *asamin* no *Matlab*) é usado pelos autores citados.

Segundo Gschnaidtner e Escobar (2015), algoritmos de otimização global como o *Adaptative Simulated Annealing* possuem uma probabilidade maior de encontrar a melhor solução se comparados aos otimizadores locais como o *Nonlinear Least Square*, cuja qualidade da otimização depende dos parâmetros iniciais utilizados. Apesar disso, os primeiros demandam maior tempo computacional do que os últimos para convergir para uma solução. Ainda segundo os autores, para os profissionais do mercado financeiro, uma rápida estimação dos parâmetros é crucial dado que os modelos precisam ser recalibrados diversas vezes num período curto de tempo. Dessa maneira, é prática comum no mercado, assim como, na academia, o uso de otimizadores locais em substituição aos otimizadores globais.

O *Nonlinear Least Square* permite que se definam os valores para os limites inferiores e superiores dos parâmetros a serem estimados. Tal fato é crucial, pois impede que a otimização resulte em valores para os parâmetros que, embora viáveis matematicamente, não sejam viáveis do ponto de vista econômico.

Sendo assim, seguindo Helgadóttir e Ionescu (2016), Crisóstomo (2014), Persson (2013), Yang (2013) e Oliveira (2013), foram estabelecidos os seguintes valores para os limites inferiores e superiores de cada parâmetro:

- Variância Média e Inicial: Considerando que a volatilidade sempre é positiva e que apenas em condições extremas alcança valores acima de 100%, estabeleceu-se como limites inferior e superior 0 e 1, respectivamente;
- Correlação: Para a correlação, adotou-se -1 como limite inferior e 1 como limite superior. Em face do fato estilizado *leverage effect*, amplamente verificado em estudos empíricos de séries financeiras, como em Cont (2001), é esperado que a correlação entre o preço da ação e a volatilidade seja negativa;
- Volatilidade da Variância: Devido à caracterização do mercado brasileiro como bastante volátil, considerou-se como limite superior 10. Para limite inferior, definiu-se 0, em virtude da impossibilidade da volatilidade assumir valores negativos;
- Velocidade de Reversão à Média: Seguindo Mikhailov e Nögel (2003), o parâmetro de reversão à média foi estimado indiretamente



a partir da condição de Feller. A condição de Feller, representada pela inequação 2.10, se respeitada, garante a positividade da volatilidade descrita por um processo CIR, como nos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009). Desse modo, estabeleceram-se como limites inferior e superior os valores de 0 e 10 para o parâmetro de Feller ( $F$ ), isto é,  $0 < F < 10$ , onde  $F = 2\kappa\theta - \sigma_v^2$ . Com os valores para o parâmetro de Feller ( $F$ ), variância de longo prazo ( $\theta$ ) e volatilidade da variância ( $\sigma_v$ ), estimados pelo processo de otimização, pode-se determinar o valor da velocidade de reversão à média ( $\kappa$ ).

- Frequência dos Saltos: Os limites inferior e superior deste parâmetro foram determinados de acordo com Persson (2013) como 0 e 10, respectivamente.
- Média dos Saltos: Seguindo Persson (2013), estabeleceram-se como limites inferior e superior -3 e 3, respectivamente.
- Variância dos Saltos: Os limites da variância dos saltos foram determinados pelos mesmos critérios usados para a volatilidade inicial. Sendo assim, o limite inferior foi estabelecido como 0 e o superior, como 1.

Um aspecto importante é que, como todo algoritmo de otimização local, os resultados dependem da escolha dos valores iniciais para os parâmetros do modelo. Isto é, a depender dos valores iniciais estipulados para os parâmetros que se desejam estimar, o resultado final da otimização pode ser um mínimo global ou local. Não há certeza sobre o resultado encontrado ser o melhor possível. Uma forma de amenizar esse problema é considerar diferentes valores iniciais para cada parâmetro a ser estimado e, assim, resolver o problema de otimização inúmeras vezes, para comparar os resultados finais obtidos.

Em face do exposto, no primeiro dia de calibragem (18/10/2016), optou-se pela criação de um *grid* formado pela combinação dos valores iniciais de cada parâmetro de cada modelo. Este *grid* com valores iniciais foi criado variando-se os parâmetros dentro do intervalo estabelecido pelos limites superiores e inferiores detalhados anteriormente.

Por exemplo, para o parâmetro de correlação foi definido um limite inferior e superior de -1 e 1, respectivamente. Por outro lado, foi escolhido que a variação no parâmetro seria 0,25 de modo a ter uma discretização adequada para cobrir melhor o espaço paramétrico. Diante disso, um conjunto com os valores iniciais para correlação foi construído, dado por:

$$(-1; -0,75; -0,50; -0,25; 0; 0,25; 0,50; 0,75; 1)$$

Este procedimento foi replicado para cada parâmetro e, em seguida, a partir da combinação dos valores iniciais de cada parâmetro, o *grid* foi construído. A variação em cada parâmetro pode ser visualizada na Tabela 4.1 abaixo:

**Tabela 4. 1 - Variação dos Valores Iniciais de cada Parâmetro**

| Parâmetros | Descrição                 | Variação no Parâmetro |
|------------|---------------------------|-----------------------|
| $F$        | Parâmetro de Feller       | 0,70                  |
| $\theta$   | Variância de longo prazo  | 0,30                  |
| $\sigma_v$ | Volatilidade da variância | 0,70                  |
| $\rho$     | Correlação                | 0,25                  |
| $v_0$      | Variância inicial         | 0,30                  |
| $\mu_J$    | Média dos saltos          | 0,50                  |
| $\sigma_J$ | Variância dos saltos      | 0,30                  |
| $\lambda$  | Frequência dos saltos     | 0,70                  |

A construção deste *grid* permitiu que fossem obtidos inúmeros conjuntos com os valores iniciais para os parâmetros. Entretanto, para economizar tempo computacional, executou-se o algoritmo de otimização uma vez para cada um dos 1.000 conjuntos de valores iniciais dos parâmetros e se obteve um conjunto de parâmetros ótimos estimados para cada execução da otimização. Em seguida, dentre os 1.000 conjuntos de parâmetros ótimos obtidos, escolheu-se o conjunto que gerou o menor valor para a função objetivo. Considerou-se este, portanto, como o conjunto de parâmetros ótimos estimados para o primeiro dia da amostra. A partir daí, na calibragem dos dias seguintes, foram utilizados como valores iniciais para os parâmetros, os parâmetros ótimos encontrados na estimação do dia anterior.

Como explicado no Capítulo 3, o método na calibragem dos parâmetros e na precificação das opções foi o método de Lewis (2000).

É relevante destacar aqui, ainda, dois pontos importantes referentes aos dados de mercado utilizados neste projeto: o número de opções necessárias na calibragem e a liquidez do mercado brasileiro.

Com relação à quantidade de opções utilizadas na estimação dos parâmetros, é essencial ressaltar que, para rodar um problema de otimização, o número de opções utilizadas na calibração deve ser pelo menos igual ao número de parâmetros a ser determinado. Além disto, Gschnaidtner e Escobar (2015) identificaram que o número de opções utilizadas na calibração aumenta significativamente a acurácia dos resultados. Em seus estudos, eles verificaram que aumentando o número de opções na calibração de seis para dez, os resultados melhoravam em dez vezes. Ademais, ao aumentar o tamanho da amostra para vinte e cinco opções, o erro na calibragem caiu para a metade.

Por outro lado, considerando a aplicação do presente trabalho, o mercado brasileiro de opções de ações é pouco líquido de forma geral, o que implica na dificuldade de escolher um grande número de opções para calibragem do modelo. Esta baixa liquidez é referente à ausência de negociação de algumas opções ou à baixa negociabilidade delas durante o dia que resulta numa defasagem entre o preço de fechamento da opção e preço de fechamento da ação. Em outras palavras, por exemplo, o preço de fechamento da opção pouco líquida pode ser dado por uma negociação feita às 11:30, enquanto o preço de fechamento da ação é dado por uma negociação realizada às 17:50. Neste exemplo, o preço da opção seria estabelecido com base em um preço da ação próximo às 11:30, e não às 17:50.

Para superar este obstáculo foram utilizadas cotações intradiárias conforme mencionado na seção anterior. As cotações intradiárias permitem fazer uma sincronia perfeita entre o preço do ativo e da opção e, desta forma, eliminar qualquer defasagem na cotação deles. No entanto, algumas opções, simplesmente, não são negociadas em alguns dias ou foram negociadas fora do horário estabelecido de 16:00 às 17:30.

Além disso, devido aos critérios de eliminar opções muito dentro do dinheiro e muito fora do dinheiro, acabou-se por obter, em média, 15 opções por dia para calibragem e precificação.

## 5. Resultados

Neste capítulo são apresentadas as comparações entre as performances dos modelos de volatilidade estocástica escolhidos para a aplicação proposta, com relação à capacidade de ajuste aos dados *in-sample* e a capacidade preditiva com dados *out-of-sample*. Ademais, é feita uma análise da volatilidade implícita resultante de cada modelo em estudo.

Para realizar as análises, os dados foram segmentados de acordo com o quão dentro ou fora do dinheiro as opções se encontram. Seguindo Bakshi *et al.* (1997), a partir da razão S/K, ou seja, entre o preço do ativo e o preço de exercício da opção, as opções com razão menor que 0,97 foram estabelecidas como OTM (*out-of-money* ou dentro do dinheiro). Por outro lado, opções cuja razão situa-se entre 0,97 e 1,03 foram consideradas ATM (*at-the-money* ou no dinheiro). Por último, opções com razão maior que 1,03 foram definidas como ITM (*in-the-money* ou dentro do dinheiro).

A totalidade de preços diários de opções no período considerado de 18/10/2016 a 05/01/2017, segundo o grau de *moneyness*, pode ser visualizada na Tabela 5.1.

**Tabela 5. 1 - Total de Preços de Opções**

|              | Petrobrás | Vale |
|--------------|-----------|------|
| <b>ITM</b>   | 490       | 694  |
| <b>ATM</b>   | 144       | 147  |
| <b>OTM</b>   | 263       | 262  |
| <b>Total</b> | 897       | 1103 |

Ademais, assim como Kim e Kim (2004), as métricas utilizadas na comparação dos modelos foram: MAE (*Mean Absolute Errors*), MPE (*Mean Percentage Errors*), MAPE (*Mean Absolute Percentage Errors*), MSE (*Mean Squared Errors*) e RMSE (*Root Mean Squared Errors*).

As supracitadas medidas agregadas de erro escolhidas são definidas da seguinte forma:

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^N |P_i^{Teórico} - P_i^{Mercado}|}{N} \quad (5.1)$$

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{|P_i^{Teórico} - P_i^{Mercado}|}{P_i^{Mercado}}}{N} \quad (5.2)$$

$$MPE = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{P_i^{Teórico} - P_i^{Mercado}}{P_i^{Mercado}}}{N} \quad (5.3)$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^N (P_i^{Teórico} - P_i^{Mercado})^2}{N} \quad (5.4)$$

$$RMSE = \sqrt{MSE} \quad (5.5)$$

onde  $N$  corresponde ao número de opções utilizadas na calibração do modelo,  $i$  corresponde a cada opção,  $P_i^{mercado}$  refere-se ao último preço de negociação das opções no mercado da B3 dentro de uma janela de tempo considerada e  $P_i^{modelo}$  é preço teórico de cada opção calculado pelos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009).

Note que, enquanto o MAE e MAPE medem a magnitude dos erros, o MPE indica a direção dos erros na precificação, isto é, indica se os modelos subapreçam ou sobreapreçam as opções. Assim como em Bakshi *et al.* (1997), Lin *et al.* (2001), Kim e Kim (2004), será dado um enfoque maior sobre as medidas agregadas de erro MAPE e MPE.

### 5.1. Análise dos Parâmetros Estimados

Aplicando as funções características dos modelos no método de Lewis (2000), dadas pelas equações 3.17, 3.18 e 3.19, foram estimados os parâmetros para os modelos de Heston (1993), Double Heston (2009) e Bates (1996), respectivamente.

O processo de estimação foi realizado através de otimização não linear, usando o algoritmo *trust-region-reflective* através da função *lsqnonlin* referente ao

otimizador *Nonlinear Least Square* presente no *software Matlab* junto ao RSPE como função objetivo a ser minimizada.

Para o cálculo dos preços das opções pelo modelo Black & Scholes, houve a necessidade de se estimar a volatilidade dos ativos subjacentes. As volatilidades das ações preferenciais da Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5) foram estimadas por uma média aritmética das volatilidades implícitas calculadas no dia anterior. Isto é, para precificar as opções no dia seguinte, utilizou-se uma média aritmética das volatilidades implícitas calculadas a partir dos preços de mercado das opções no dia anterior.

A Tabela 5.2 apresenta os valores médios estimados e os desvios-padrão (entre parêntesis) correspondentes a cada parâmetro do processo de volatilidade estocástica para os três diferentes modelos, considerando as séries de opções de Novembro e Dezembro de 2016 e Janeiro de 2017. Ao todo foram realizadas 55 calibrações para cada ação, correspondendo à quantidade de dias úteis entre o período de 18/10/2016 e 05/01/2017.

**Tabela 5. 2 - Parâmetros Estimados de cada Modelo**

|             | Petrobrás        |                  |                  | Vale             |                  |                  |
|-------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|             | Heston           | Bates            | Double Heston    | Heston           | Bates            | Double Heston    |
| $\kappa_1$  | 16,78<br>(10,97) | 29,48<br>(29,67) | 27,20<br>(34,42) | 16,11<br>(10,59) | 28,71<br>(18,01) | 10,67<br>(8,83)  |
| $\theta_1$  | 0,90<br>(0,17)   | 0,37<br>(0,19)   | 0,29<br>(0,18)   | 0,79<br>(0,22)   | 0,37<br>(0,25)   | 0,48<br>(0,27)   |
| $\sigma_1$  | 5,08<br>(1,56)   | 4,08<br>(2,65)   | 3,03<br>(1,39)   | 4,52<br>(1,61)   | 3,92<br>(3,02)   | 2,51<br>(1,05)   |
| $\rho_1$    | -0,05<br>(0,11)  | -0,25<br>(0,35)  | -0,27<br>(0,84)  | -0,10<br>(0,15)  | -0,41<br>(0,33)  | -0,18<br>(0,89)  |
| $\nu_{0,1}$ | 0,11<br>(0,12)   | 0,27<br>(0,11)   | 0,11<br>(0,07)   | 0,10<br>(0,11)   | 0,26<br>(0,10)   | 0,07<br>(0,05)   |
| $\mu_j$     | -                | 0,01<br>(0,65)   | -                | -                | 0,09<br>(0,50)   | -                |
| $\sigma_j$  | -                | 0,53<br>(0,31)   | -                | -                | 0,31<br>(0,22)   | -                |
| $\lambda$   | -                | 0,49<br>(0,43)   | -                | -                | 1,45<br>(1,67)   | -                |
| $\kappa_2$  | -                | -                | 13,42<br>(11,87) | -                | -                | 16,39<br>(22,34) |
| $\theta_2$  | -                | -                | 0,59<br>(0,28)   | -                | -                | 0,52<br>(0,24)   |
| $\sigma_2$  | -                | -                | 3,43<br>(1,23)   | -                | -                | 2,61<br>(1,37)   |
| $\rho_2$    | -                | -                | 0,25<br>(0,79)   | -                | -                | 0,20<br>(0,88)   |
| $\nu_{0,2}$ | -                | -                | 0,06<br>(0,07)   | -                | -                | 0,12<br>(0,11)   |
| <b>RSPE</b> | 0,0275           | 0,0244           | 0,0267           | 0,0211           | 0,0084           | 0,0197           |

Analisando os parâmetros acima, pode-se verificar que os parâmetros de volatilidade da variância e velocidade de reversão à média são bem superiores aos valores encontrados por Bakshi *et al.* (1997), Lin *et al.* (2001) e Kim e Kim (2004). No entanto, vale destacar que tanto Bakshi *et al.* (1997) quanto Lin *et al.* (2001) trabalharam com opções de índice de mercados desenvolvidos. Mercados desenvolvidos possuem, em geral, menor volatilidade. Além disso, índices de bolsa de valores apresentam apenas risco sistemático. Dessa forma, os autores supracitados obtiveram baixos valores para volatilidade da variância e velocidade de reversão à média.

Por outro lado, Kim e Kim (2004), apesar de também usarem opções de índice em seus trabalhos, apresentaram uma aplicação empírica em um mercado emergente. Portanto, a volatilidade da variância bem como a velocidade de reversão à média obtidas na calibração foram maiores que as encontradas por Bakshi *et al.* (1997) e Lin *et al.* (2001).

Nesta dissertação, não só os modelos foram aplicados em um mercado emergente, mas também foram aplicados a opções de ações, que possuem risco sistemático e não-sistemático. Vale destacar ainda que as ações da Petrobrás e Vale, devido à natureza de seus negócios, apresentam uma alta volatilidade no mercado de modo que foram obtidas altas volatilidades da variância e velocidades de reversão à média.

Helgadóttir e Ionescu (2016) e Crisóstomo (2014) afirmam que ativos financeiros podem ser bastante voláteis no curto prazo, podendo a volatilidade da variância alcançar valores como esta dissertação obteve. Pelos mesmos motivos supracitados, a variância média encontrada nesta dissertação foi superior a encontrada nos artigos de Bakshi *et al.* (1997), Lin *et al.* (2001) e Kim e Kim (2004). Aqui, é importante mencionar que, neste trabalho, foram utilizadas apenas opções de curtíssimo prazo ao contrário dos demais artigos de Bakshi *et al.* (1997), Lin *et al.* (2001) e Kim e Kim (2004) que usaram opções de curto e longo prazo.

Outro ponto que merece destaque é referente aos valores obtidos na estimação da correlação dos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009). Segundo a literatura, a volatilidade das ações tende a aumentar quando os preços das ações caem, caracterizando uma correlação negativa. Tal

fato estilizado é conhecido como *leverage effect*. Em face do exposto, era esperado obter uma correlação negativa entre a volatilidade e o preço da ação, o que de fato aconteceu nos modelos de Heston (1993) e Bates (1996). No entanto, no modelo Double Heston (2009), há duas correlações a serem estimadas, de modo que uma das correlações deu negativa enquanto a outra deu positiva. Tal fato aconteceu tanto na calibração com as opções da Petrobrás quanto com as da Vale.

Uma possível explicação pode ser o fato de terem sido utilizadas opções de um único vencimento de curto prazo. O modelo Double Heston (2009) possui dois processos estocásticos para descrever a volatilidade. Conforme Christoffersen *et al.* (2009) expõem, cada processo estocástico é responsável por descrever o comportamento da volatilidade num determinado intervalo tempo. Em outras palavras, enquanto um processo estocástico é responsável por descrever o comportamento da volatilidade no curto prazo, o outro é responsável por descrever o comportamento da volatilidade implícita no longo prazo. Neste sentido, Grasselli e Romo (2016) afirmam que o modelo de Double Heston (2009) busca modelar tanto o efeito *smile/smirk* quanto à estrutura a termo da volatilidade. A estrutura a termo da volatilidade implícita é como a volatilidade implícita varia ao longo do tempo. Em face do exposto, o uso de opções de um único vencimento pode estar implicando, essencialmente, em dois problemas.

Primeiramente, como apenas opções de curto prazo estão sendo utilizadas e não estão sendo utilizadas opções de longo prazo, o modelo pode estar capturando o efeito *smile* das opções que irão vencer no curto prazo, mas pode não estar capturando uma possível mudança que a curva de volatilidade poderá sofrer ao longo do tempo em face de não se estar considerando opções mais longas. O fato de uma das correlações ser positiva pode estar indicando isso.

Por outro lado, a correlação positiva pode estar indicando que o modelo Double Heston pode até estar capturando o efeito *smile* da volatilidade, mas à custa de um valor pouco realista para o parâmetro da correlação. Uma possibilidade é a correlação negativa estar, de modo geral, se sobrepondo a correlação positiva e, dessa maneira, o efeito *leverage* pode estar sendo caracterizado e, conseqüentemente, o efeito *smile* capturado. Conforme mencionam Ané e Labidi (2001), Hafner e Wallmeier (2001), Kassberger (2004) e Hafner e Schmid (2005), os modelos de volatilidade estocástica muitas vezes



capturam bem o efeito *smile/smirk*, mas para isso necessitam atribuir valores altos e um pouco desconexos com a realidade para os parâmetros do modelo em questão.

Na revisão da literatura realizada por este autor, não foi identificado nenhum trabalho que tenha relatado correlação positiva no modelo Double Heston (2009). No entanto, todos os estudos empíricos realizados até o presente momento utilizaram opções de prazo de vencimento diferentes e, portanto, esta questão pode não ter sido identificada ainda pelos pesquisadores. Dessa maneira, o que o autor deste trabalho busca com esta discussão é apenas lançar uma luz sobre o assunto para que futuros trabalhos possam verificar as hipóteses aqui elencadas.

Considerando as correlações estimadas para os modelos de Heston (1993) e Bates (1996), pode-se afirmar que estas foram semelhantes, em magnitude, às encontradas por Kim e Kim (2004), entretanto, diferentes das encontradas por Bakshi *et al.* (1997) e Lin *et al.* (2001). Tal fato, também pode ser explicado pelos mercados estudados em cada trabalho. Enquanto os últimos usaram opções em mercados desenvolvidos, Kim e Kim (2004) focaram em um mercado emergente.

Cabe ainda destacar que dentre todos os modelos, o modelo de Bates (1996) é o que possui maior velocidade de reversão à média para o processo da volatilidade, bem como, a menor volatilidade de longo prazo e a menor volatilidade da variância quando comparado ao modelo de Heston (1993). Tais resultados são corroborados por Bakshi *et al.* (1997) e, parte deles, deve-se ao fato de que o modelo de Bates (1996) atribui parcela da variância média e volatilidade da variância à ocorrência de saltos no preço das ações. Da mesma maneira, a ocorrência de saltos impõe uma rápida reversão à média da variância.

Analisando os valores dos parâmetros dos modelos de Heston (1993) e Bates (1996) para as ações preferenciais da Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5), por exemplo, podemos extrair algumas informações importantes com relação às expectativas do mercado quanto ao comportamento futuro do preço dessas ações.

Tendo isso em vista, pode-se perceber que, de uma forma geral, a magnitude dos valores dos parâmetros dos modelos da Petrobrás e da Vale não difere muito. Com relação ao modelo de Heston (1993), importa destacar, primeiramente, que o modelo estima parâmetros indicando maior volatilidade da variância para Petrobrás em comparação com a ação da Vale, sugerindo que, no período, era esperado que a Petrobrás apresentasse uma maior volatilidade. Na prática, a

diferença foi pequena. O oposto é observado com a correlação, ou seja, o modelo estima que os retornos da Petrobrás no período tenham uma correlação menor com a variância do que a Vale. Isto indica que o *leverage effect* esperado da ação da Petrobrás seria menor que o da Vale.

Com relação ao modelo de Bates, os valores dos parâmetros relacionados aos saltos podem também ser comparados. Como pode ser visto, o modelo reflete que, durante o período, retornos da Petrobrás e da Vale apresentassem, em média, saltos positivos, mas de baixa magnitude. Entretanto, a frequência dos saltos na ação da Vale seria superior à frequência dos saltos na ação da Petrobrás ao longo do período em análise.

Conforme pode ser observado na Tabela 5.2, os parâmetros dos modelos de volatilidade estocástica, assim como em Kim e Kim (2004), apresentam maiores desvios-padrão. Tal acontecimento, segundo os autores, evidencia a existência de instabilidade dos parâmetros na calibração dos modelos.

Conforme evidenciado neste trabalho e explicado por Kienitz e Wetterau (2012) e Rouah (2013), os modelos de volatilidade estocástica de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) apresentam parâmetros que possuem efeitos similares ou opostos na modelagem da curva de volatilidade implícita. Isto implica que, na calibração destes modelos via otimização não linear, podem ser obtidos diferentes conjuntos de parâmetros ótimos com a mesma qualidade de ajuste aos dados, isto é, com valores muito próximos para a função objetivo (RSPE), implicando no problema de instabilidade. Tal fenômeno se configura em um obstáculo na implementação destes modelos e tem sido objeto de estudo e publicação de artigos.

Entretanto, conforme relatado por Kim e Kim (2004), os modelos de volatilidade estocástica, mesmo com maiores desvios-padrão, tiveram um desempenho superior aos demais. Tal fato, também foi constatado neste trabalho e será exposto nas seções seguintes.

Por último, observando a média do RSPE diário, constata-se que, apesar de o modelo Double Heston (2009) possuir maior quantidade de parâmetros, ele não apresentou um melhor ajuste aos dados se comparado ao modelo de Bates (1996). Na verdade, quando comparado ao ajuste do modelo de Heston (1993), o modelo de Bates apresentou uma melhora no ajuste aos dados de 11% para opções de compra da Petrobrás e 60% para opções de compra da Vale, resultado este

semelhante ao encontrado por Bakshi *et al.* (1997). Enquanto isso, o modelo de Double Heston, melhorou o ajuste em 3% e 7%, respectivamente, nas opções de compra da Petrobrás e da Vale quando comparado ao modelo de Heston.

## 5.2. Análise *In-sample*

Nesta seção são expostos os resultados da precificação *in-sample*. A precificação *in-sample* consistiu em estimar os preços das mesmas opções que foram utilizadas para a estimação dos parâmetros. Por exemplo, no dia 19/10/2016, a partir das opções que tiveram negociação, foram estimados os parâmetros dos modelos estudados. Em seguida, estas mesmas opções foram precificadas usando cada modelo e os valores teóricos obtidos foram comparados com os preços de negociação registrados no mesmo dia, 19/10/2016, usando as medidas agregadas de erro. Assim, foi realizada a análise para todas as datas do período proposto no capítulo anterior.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados das medidas agregadas de erro de apreçamento em relação aos valores das opções estimados a partir de cada um dos modelos (Black & Scholes, Heston, Bates e Double Heston) comparados com os valores de mercado das opções. As informações foram calculadas no período 18/10/2016 a 05/01/2017, para opções de compra da PETR4 e VALE5, fazendo a separação das informações considerando opções fora do dinheiro (OTM), no dinheiro (ATM) e dentro do dinheiro (ITM). Os melhores resultados para cada medida agregada de erro estão destacados em negrito.

Tabela 5. 3 - Resultados *In-sample*

|       |      | Petrobrás |        |               |               | Vale   |        |               |               |
|-------|------|-----------|--------|---------------|---------------|--------|--------|---------------|---------------|
|       |      | BS        | Heston | Bates         | Double Heston | BS     | Heston | Bates         | Double Heston |
| ITM   | MAE  | 0,0268    | 0,0150 | 0,0149        | <b>0,0137</b> | 0,0341 | 0,0296 | <b>0,0207</b> | 0,0271        |
|       | MAPE | 1,18%     | 0,53%  | 0,47%         | <b>0,45%</b>  | 1,00%  | 0,69%  | <b>0,49%</b>  | 0,61%         |
|       | MPE  | 0,02%     | -0,17% | -0,05%        | 0,00%         | 0,19%  | 0,06%  | -0,01%        | 0,19%         |
|       | MSE  | 0,0051    | 0,0042 | 0,0034        | 0,0041        | 0,0025 | 0,0025 | 0,0012        | 0,0022        |
|       | RMSE | 0,0717    | 0,0649 | <b>0,0579</b> | 0,0644        | 0,0498 | 0,0499 | <b>0,0347</b> | 0,0472        |
| ATM   | MAE  | 0,0523    | 0,0084 | <b>0,0060</b> | 0,0071        | 0,0642 | 0,0121 | <b>0,0079</b> | 0,0100        |
|       | MAPE | 7,13%     | 1,37%  | <b>0,84%</b>  | 1,15%         | 6,52%  | 0,99%  | <b>0,67%</b>  | 0,83%         |
|       | MPE  | 5,66%     | -0,84% | 0,18%         | -0,58%        | 5,96%  | -0,46% | 0,08%         | -0,24%        |
|       | MSE  | 0,0042    | 0,0002 | 0,0001        | 0,0001        | 0,0074 | 0,0003 | 0,0001        | 0,0002        |
|       | RMSE | 0,0646    | 0,0149 | <b>0,0080</b> | 0,0118        | 0,0858 | 0,0182 | <b>0,0111</b> | 0,0148        |
| OTM   | MAE  | 0,0454    | 0,0140 | <b>0,0132</b> | 0,0137        | 0,0539 | 0,0108 | <b>0,0085</b> | 0,0101        |
|       | MAPE | 15,11%    | 3,19%  | <b>1,99%</b>  | 3,02%         | 13,88% | 2,40%  | <b>1,70%</b>  | 2,14%         |
|       | MPE  | 4,00%     | -0,58% | -0,55%        | -0,69%        | 7,70%  | 0,07%  | -0,17%        | -0,10%        |
|       | MSE  | 0,0294    | 0,0267 | 0,0266        | 0,0267        | 0,0055 | 0,0004 | 0,0003        | 0,0003        |
|       | RMSE | 0,1714    | 0,1635 | <b>0,1632</b> | 0,1635        | 0,0743 | 0,0193 | <b>0,0173</b> | 0,0186        |
| TODAS | MAE  | 0,0363    | 0,0137 | 0,0130        | <b>0,0126</b> | 0,0428 | 0,0228 | <b>0,0161</b> | 0,0208        |
|       | MAPE | 6,22%     | 1,44%  | <b>0,97%</b>  | 1,31%         | 4,80%  | 1,14%  | <b>0,80%</b>  | 1,00%         |
|       | MPE  | 2,09%     | -0,40% | -0,16%        | -0,29%        | 2,75%  | -0,01% | -0,03%        | 0,07%         |
|       | MSE  | 0,0121    | 0,0102 | 0,0097        | 0,0101        | 0,0039 | 0,0017 | 0,0008        | 0,0015        |
|       | RMSE | 0,1100    | 0,1008 | <b>0,0983</b> | 0,1006        | 0,0621 | 0,0412 | <b>0,0291</b> | 0,0389        |

Pelos resultados da tabela, observa-se que, independentemente do grau de *moneyness*, o RMSE do modelo de Bates é o menor, seguido pelos modelos de Double Heston, Heston e Black & Scholes. Da mesma maneira, excetuando-se as opções ITM da Petrobrás, as medidas de erro agregadas MAPE e MAE também apresentaram os menores valores para o modelo de Bates, seguido pelos modelos Double Heston, Heston e Black & Scholes. Se considerarmos o agregado de todas as opções, podemos verificar que o modelo de Bates possui os menores MAPE e RMSE. Em seguida aparecem os modelos Double Heston, Heston e Black & Scholes. Isto é também uma indicação de que o modelo de Bates produziu um melhor ajuste aos dados *in-sample* no período estudado, além dos resultados observados de ajuste por conta da calibração.

Analisando o MPE, podemos verificar que, assim como observado por Kim e Kim (2004), o modelo de Heston, predominantemente, subapreçou as opções.

Da mesma maneira, verificamos que o modelo de Bates subapreçou todas as opções, exceto as opções ATM, que foram sobreapreçadas. Com relação ao modelo Double Heston, verificamos que, excetuando-se as opções ITM, ele subapreçou todas as demais opções. O modelo Black & Scholes sobreapreçou as opções ATM e OTM de maneira semelhante aos achados de Kim e Kim (2004). No entanto, o mesmo modelo também sobreapreçou levemente as opções ITM. Neste contexto, é importante ressaltar que, quando um modelo subapreça uma determinada opção, significa que o modelo está considerando uma volatilidade menor do que a volatilidade que o mercado está considerando. Da mesma maneira, quando um modelo sobreapreça a opção, significa que o modelo está considerando uma volatilidade maior que o mercado está considerando para aquela determinada opção, uma vez que quanto maior a volatilidade maior o prêmio da opção. Características de volatilidade implícita implicada pelos modelos serão analisadas adiante.

### 5.3. Análise *Out-of-sample*

Após a estimação dos parâmetros e análise dos erros de apreçamento *in-sample*, foi realizada uma análise da capacidade preditiva dos modelos. Desta forma, foram estimadas novamente medidas agregadas de erro, porém considerando a performance dos modelos fora da amostra na qual os parâmetros são estimados, ou seja, *out-of-sample*. A partir dos parâmetros estimados de 18/10/2016 a 05/01/2017, o preço um-dia-a-frente para cada modelo foi calculado e comparado com o valor de mercado da opção. Os resultados são apresentados na Tabela 5.4 seguindo a mesma classificação de *moneyness* das opções. Os melhores resultados para cada medida agregada de erro estão destacados em negrito.

Conforme pode ser visualizado na Tabela 5.4 abaixo, de acordo com o MAPE, o modelo de Bates apresentou, de modo geral, o melhor desempenho, seguido pelos modelos Double Heston, Heston e Black & Scholes.

Tabela 5. 4 - Resultados *Out-of-Sample*

|       |      | Petrobrás |               |               |               | Vale      |               |               |               |
|-------|------|-----------|---------------|---------------|---------------|-----------|---------------|---------------|---------------|
|       |      | <u>BS</u> | <u>Heston</u> | <u>Bates</u>  | <u>Double</u> | <u>BS</u> | <u>Heston</u> | <u>Bates</u>  | <u>Double</u> |
| ITM   | MAE  | 0,0282    | 0,0235        | 0,0260        | <b>0,0222</b> | 0,0442    | 0,0457        | <b>0,0400</b> | 0,0425        |
|       | MAPE | 1,41%     | 1,17%         | 1,16%         | <b>1,08%</b>  | 1,39%     | 1,40%         | <b>1,21%</b>  | 1,27%         |
|       | MPE  | -0,01%    | -0,56%        | -0,18%        | -0,27%        | 0,03%     | -0,39%        | -0,21%        | -0,13%        |
|       | MSE  | 0,0015    | 0,0011        | 0,0014        | 0,0010        | 0,0037    | 0,0038        | 0,0028        | 0,0035        |
|       | RMSE | 0,0391    | 0,0330        | 0,0370        | <b>0,0312</b> | 0,0609    | 0,0619        | <b>0,0532</b> | 0,0588        |
| ATM   | MAE  | 0,0556    | 0,0380        | <b>0,0333</b> | 0,0353        | 0,0910    | 0,0620        | <b>0,0604</b> | 0,0612        |
|       | MAPE | 7,70%     | 5,21%         | <b>4,42%</b>  | 4,81%         | 8,67%     | 5,32%         | <b>5,24%</b>  | 5,29%         |
|       | MPE  | 5,90%     | -3,16%        | -0,39%        | -1,97%        | 6,07%     | -2,05%        | 0,11%         | -1,07%        |
|       | MSE  | 0,0045    | 0,0025        | 0,0019        | 0,0021        | 0,0143    | 0,0056        | 0,0051        | 0,0053        |
|       | RMSE | 0,0668    | 0,0497        | <b>0,0435</b> | 0,0462        | 0,1198    | 0,0748        | <b>0,0711</b> | 0,0726        |
| OTM   | MAE  | 0,0510    | 0,0408        | <b>0,0391</b> | 0,0397        | 0,0748    | 0,0526        | <b>0,0503</b> | 0,0523        |
|       | MAPE | 17,54%    | 12,57%        | <b>10,90%</b> | 12,22%        | 18,84%    | 12,47%        | <b>11,77%</b> | 12,38%        |
|       | MPE  | 5,30%     | -6,85%        | -1,00%        | -5,58%        | 5,66%     | -5,08%        | -2,05%        | -4,50%        |
|       | MSE  | 0,0318    | 0,0307        | 0,0304        | 0,0305        | 0,0098    | 0,0044        | 0,0040        | 0,0042        |
|       | RMSE | 0,1782    | 0,1751        | <b>0,1744</b> | 0,1747        | 0,0988    | 0,0663        | <b>0,0629</b> | 0,0651        |
| TODAS | MAE  | 0,0392    | 0,0308        | 0,0309        | <b>0,0294</b> | 0,0577    | 0,0495        | <b>0,0452</b> | 0,0473        |
|       | MAPE | 7,06%     | 5,10%         | <b>4,49%</b>  | 4,89%         | 6,48%     | 4,54%         | <b>4,24%</b>  | 4,43%         |
|       | MPE  | 2,47%     | -2,79%        | -0,45%        | -2,07%        | 2,17%     | -1,72%        | -0,61%        | -1,29%        |
|       | MSE  | 0,0107    | 0,0098        | 0,0098        | 0,0097        | 0,0066    | 0,0042        | 0,0034        | 0,0039        |
|       | RMSE | 0,1035    | 0,0991        | 0,0991        | <b>0,0983</b> | 0,0810    | 0,0648        | <b>0,0582</b> | 0,0623        |

De maneira geral, os modelos de volatilidade estocástica apresentaram melhores resultados do que o modelo Black & Scholes. Ademais, de forma semelhante à análise *in-sample*, o modelo de Bates, excetuando-se as opções ITM da Petrobrás, apresentou o melhor resultado, independente da medida agregada de erro utilizada, seguido pelos modelos Double Heston, Heston e Black & Scholes.

Considerando todas as opções, quando comparamos os modelos de Heston e de Black & Scholes, podemos notar que, pelo MAPE, o modelo de Heston apresentou uma melhora de 28% e 30% em relação ao modelo Black & Scholes na previsão dos preços das opções de compra da Petrobrás e Vale, respectivamente. Por sua vez, o modelo de Bates apresentou uma melhora com relação ao modelo de Heston da ordem de 12% e 7% no aprecio das mesmas opções. Por outro lado, o modelo Double Heston apresentou uma melhora de 4% e 2% em relação ao modelo de Heston na precificação das opções de compra da Petrobrás e Vale, respectivamente.

No entanto, considerando o RMSE, os modelos de Heston e Bates se igualaram na precificação das *calls* da Petrobrás, enquanto o modelo Double Heston apresentou o melhor desempenho. Por outro lado, o modelo de Bates foi o melhor modelo para precificar as opções da Vale, seguido pelos modelos de Double Heston, Heston e Black & Scholes, respectivamente.

Em face do exposto, observa-se que, pelo MAPE, tornar a volatilidade estocástica, ainda que descrita por apenas um processo estocástico, é o mais importante a ser feito para melhorar tanto o ajuste aos dados quanto à capacidade de previsão dos preços das opções. Estes resultados são corroborados por Bakshi *et al.* (1997). Em seguida, considerando o MAPE como medida de comparação, acrescentar saltos ao modelo de Heston se mostra mais importante do que acrescentar um segundo processo estocástico para a volatilidade na precificação opções de curto prazo, considerando a base de dados analisada.

Moyaert e Petitjean (2011) comentam que o modelo de Heston (1993) é mais adequado para a precificação de opções com prazos de vencimento mais longos e Rouah (2013) explica que o modelo tem dificuldades para se ajustar ao efeito *smile/smirk* de opções com vencimento de curto prazo, pois o *skew* é mais intenso quanto menor o tempo até o vencimento. Grasselli e Romo (2016) também explicam que o modelo de Heston (1993) consegue gerar tanto um *skew* mais plano quanto um *skew* mais intenso dado um nível de volatilidade, mas não consegue gerar ambos com a mesma parametrização. Desta forma, se forem consideradas opções com diferentes prazos de vencimento o modelo de Heston (1993) teria dificuldade em ajustar às opções com vencimento no curto prazo.

Christoffersen *et al.* (2009), ao acrescentarem no modelo de Heston (1993) um segundo processo CIR para descrever a evolução da volatilidade, proporcionaram um efeito de correlação estocástica entre o ativo-subjacente e a variância de forma que trouxeram maior flexibilidade à modelagem do efeito *skew* e à estrutura a termo da volatilidade, como comentam Grasselli e Romo (2016). Assim, dadas opções com diferentes prazos de vencimento, este modelo tenderia a ter um ajuste melhor que o modelo de Heston (1993).

Moyaert e Petitjean (2011) afirmam que, por outro lado, o modelo de Bates (1996) apresenta uma performance superior na precificação de opções com menor tempo até o vencimento. Bates (2003) ressalta que o modelo apresenta bons resultados quando se utilizam opções de uma único prazo de vencimento, mas apresenta resultados inferiores ao utilizar opções com diferentes prazos de vencimento. Bates (2000) explica que a assunção de retornos independentes e identicamente distribuídos nos modelos com saltos implica que estes modelos convergem para os preços do modelo Black & Scholes nas opções com vencimento de longo prazo e, desta forma, não capturariam os efeitos *smile* e

*smirk*. Finalmente, ele também compara os modelos com saltos em relação aos modelos com dois processos CIR para a volatilidade e concluiu que, embora o modelo Double Heston melhore consideravelmente o modelo de Heston, a presença de *jumps* ainda é importante na precificação de opções mesmo com diferentes prazos de vencimento.

Em face de todo o exposto e considerando que no presente trabalho foram utilizadas apenas opções de curto prazo, faz sentido que o modelo de Bates (1996) apresente resultados melhores que o modelo Double Heston (2009).

Com relação à direção dos erros, podemos verificar que, de uma maneira geral, os modelos de Heston, Bates e Double Heston subapreçaram as opções de compra de curto prazo. Tais resultados diferem dos encontrados por Bakshi *et al.* (1997), mas se assemelham aos encontrados por Kim e Kim (2004), o que pode estar relacionado ao fato de ambas as aplicações serem em mercados emergentes. O modelo Black & Scholes subapreçou as opções ITM da Petrobrás e sobreapreçou as opções ATM e OTM, corroborado pelos resultados de Bakshi *et al.* (1997) e Kim e Kim (2004). Vale destacar, entretanto, que as opções ITM da Vale foram ligeiramente sobreapreçadas. Porém, Kim e Kim (2004) encontraram resultados semelhantes ao apreçar as opções do índice KOSPI. Uma possível explicação para este resultado é o fato de a volatilidade estimada para o modelo de Black & Scholes ter sido maior do que a volatilidade implícita que o mercado estava considerando, de maneira que as opções acabaram sendo sobreapreçadas.

Observe que a magnitude do erro variou bastante de modelo para modelo, de acordo com o *moneyness* das opções. Via de regra, o modelo de Black & Scholes, por exemplo, apresentou o menor MPE para as opções ITM, seguido pelos modelos Double Heston, Bates e Heston. Por outro lado, em geral, com relação às opções ATM e OTM, os modelos com os menores MPE foram Bates, Double Heston, Heston, Black & Scholes, respectivamente. Considerando todas as opções, o modelo de Bates apresentou, de maneira geral, melhor performance pelo MPE, seguido por Double Heston, Heston e Black & Scholes. Em seu trabalho, Bakshi *et al.* (1997) também concluíram que o modelo de Bates apresentou, no geral, o menor MPE, seguido pelo modelo de Heston e, por último, Black & Scholes.

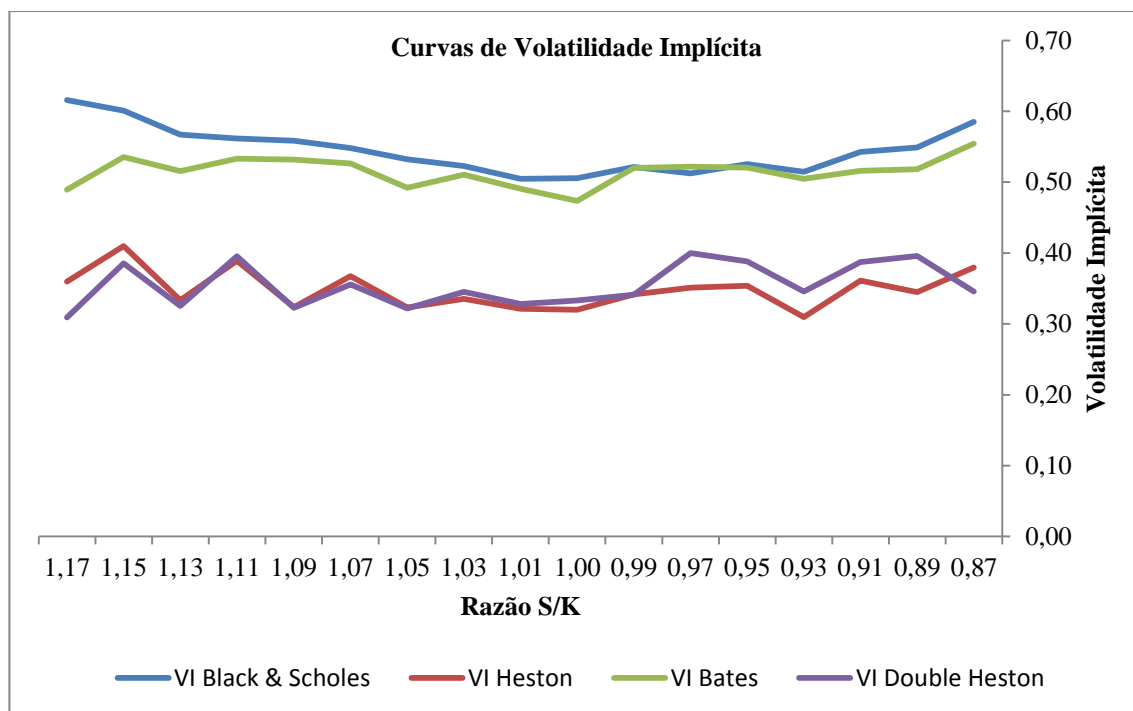


#### 5.4. Análise da Volatilidade Implícita

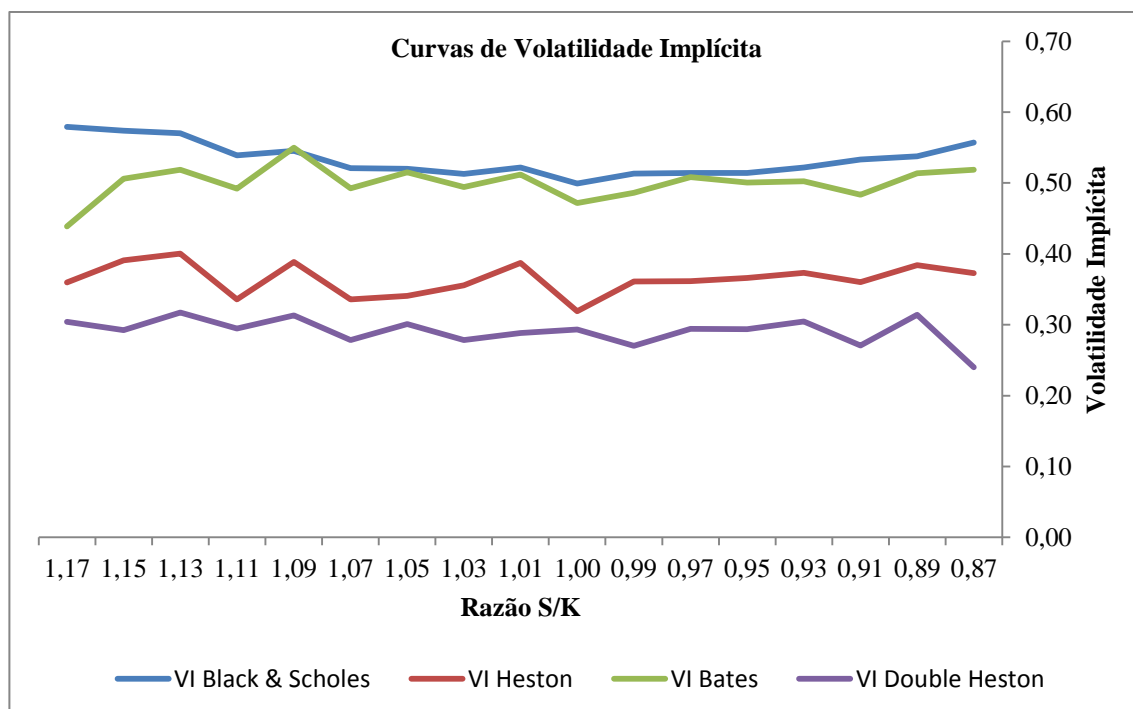
As análises apresentadas até aqui pressupõem o cálculo do valor da opção a partir dos modelos. Entretanto, na prática do mercado financeiro, a partir dos valores de mercado das opções o que se calcula é o valor da volatilidade implícita. Assim, da mesma maneira que Bakshi *et al.* (1997) e Lin *et al.* (2001) seguiram os trabalhos de Bates (1996), aqui foi realizada uma análise da consistência dos parâmetros estimados a partir da curva de volatilidade implícita produzida por cada modelo. A volatilidade implícita estimada dos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) foi calculada da seguinte maneira:

- A partir dos parâmetros estimados e o preço de mercado da opção, calculou-se a variância inicial que, imputada nos modelos e usando o método numérico de Lewis (2000), tornava o prêmio teórico calculado igual ao prêmio de mercado;
- Este procedimento foi realizado para cada dia da amostra;
- Em seguida, calculou-se a média no período para diferentes valores da relação entre o preço da ação e o preço de exercício da opção, refletindo o grau de *moneyness*, e tomou-se a raiz quadrada desta variância, obtendo-se assim a volatilidade implícita;
- Por último, foram plotadas as curvas de volatilidade implícita, conforme podem ser vistas a seguir nas Figuras 5.1 e 5.2 abaixo:

**Figura 5. 1 - Curvas de Volatilidade Implícita dos Modelos nas Opções da Petrobrás**



**Figura 5. 2 - Curvas de Volatilidade Implícita dos Modelos nas Opções da Vale**



De acordo com a literatura, quanto mais plana for a curva de volatilidade implícita, mais adequado é o modelo para precificar opções. Nota-se, nos

resultados referentes à volatilidade implícita apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2 acima, de uma forma geral, os modelos de volatilidade estocástica analisados apresentam uma curva razoavelmente mais plana do que a inferida pelo modelo Black & Scholes.

Tais resultados foram diferentes dos encontrados por Bakshi *et al.* (1997) e Lin *et al.* (2001). Eles compararam os modelos de Heston (1993) e Bates (1996) e encontraram uma curva *smile* semelhante a do modelo Black & Scholes. No entanto, segundo os autores, o modelo de Bates apresentou o *smile* mais suave, isto é, o modelo de Bates gerou o *smile* mais plano, seguido pelos modelos de Heston e Black & Scholes, nesta ordem.

Em parte, esta diferença em relação aos resultados obtidos por este trabalho pode ser justificada pelo fato de que o *smile* gerado pelo modelo Black & Scholes a partir das opções de compra da PETR4 e VALE5 já ser mais suave do que o observado pelos referidos autores para as opções de índice por eles analisadas, de maneira que, os demais modelos, sendo evoluções deste modelo original, apresentam uma melhora ainda superior. Esta explicação é corroborada pelos trabalhos de Branger e Schlag (2004) e Bakshi *et al.* (2003) dado que, ao compararem a curva de volatilidade implícita de opções de ações com as de opções de índice, constataram que a curva de volatilidade implícita de opções de índice são, em geral, mais acentuadas que as curvas de volatilidade implícita de opções de ações.

## 6. Considerações Finais

Sumariamente, pode-se afirmar que esta dissertação buscou responder as seguintes perguntas: “Como utilizar os modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) para precificar opções de ações no mercado bursátil brasileiro?”; “Quais os reais benefícios proporcionados pelo uso destes modelos na precificação de opções de ações?” e “Qual deles têm melhor desempenho no mercado da B3?”.

Foi utilizada como base de dados informações de opções de compra de ações preferenciais da Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE5) com vencimento em Novembro e Dezembro de 2016 e Janeiro de 2017. Os dados foram obtidos na base de dados da B3 e consistiram em cotações intradiárias das ações e das opções. Dentre estas cotações, foram selecionadas aquelas que respeitaram determinados critérios relatados no Capítulo 4 deste estudo.

Em seguida, procedeu-se com a estimação de cada parâmetro dos modelos. Esta estimação foi realizada através de um problema de otimização não linear cuja função objetivo a ser minimizada foi o *Relative Squared Price Error* em conjunto com o algoritmo de otimização *trust-region-reflective* presente no otimizador *Nonlinear Least Square* do software *Matlab*.

Como resultado deste processo de calibração, verificou-se que os valores estimados para as volatilidades da variância, velocidades de reversão à média e variâncias médias foram superiores aos encontrados por Bakshi *et al.* (1997), Lin *et al.* (2001) e Kim e Kim (2004). Entretanto, diferente dos supracitados autores, o trabalho em tela aplicou os modelos na precificação de opções de ações, e não de índices. Deve-se considerar ainda que a base de dados envolve ações negociadas em um mercado emergente e que são referentes a empresas cuja natureza de seus negócios implica numa alta volatilidade no mercado. Deste modo, os resultados aqui encontrados para tais parâmetros se mostram adequados.

Por motivos semelhantes, as correlações estimadas foram parecidas, em magnitude, às encontradas por Kim e Kim (2004), mas diferentes das encontradas por Bakshi *et al.* (1997) e Lin *et al.* (2001). Tal fato, também pode ser explicado

pelos mercados estudados em cada trabalho. Enquanto os últimos usaram opções em mercados desenvolvidos, Kim e Kim (2004) focaram em um mercado emergente. Cabe ainda destacar que, para o modelo Double Heston (2009), uma das duas correlações apresentou valor positivo. Tal fato não era esperado dado que diversos estudos empíricos, como em Cont (2001) e Bekaert e Wu (2000), têm constatado que a volatilidade das ações tende a aumentar quando os preços das ações caem, caracterizando uma correlação negativa. Em face do exposto, o presente trabalho detalhou no Capítulo 5 algumas possíveis justificativas para os resultados encontrados a fim de que futuros trabalhos possam verificá-las.

Adicionalmente, verificou-se que o modelo de Bates (1996) apresentou maior velocidade de reversão à média para o processo da variância, bem como, menor variância de longo prazo e menor volatilidade da variância quando comparado ao modelo de Heston (1993). Tais resultados podem ser explicados pelo fato de que o modelo de Bates (1996) atribui uma parcela da variância média e volatilidade da variância à ocorrência de saltos no preço das ações. Da mesma maneira, a ocorrência de saltos impõe uma rápida reversão à média da variância.

Por último, observando a média do RSPE diário, constatou-se que, apesar do modelo Double Heston (2009) possuir maior quantidade de parâmetros, ele não apresentou um melhor ajuste aos dados se comparado ao modelo de Bates (1996).

Após a estimação dos parâmetros, seguiu-se com a precificação das opções com dados *in-sample* e *out-of-sample*, além do cálculo da curva de volatilidade implícita proveniente de cada modelo.

Vis-à-vis os resultados e estudos realizados, foi observado que o modelo de Bates (1996), de uma maneira geral, apresentou o melhor ajuste aos dados *in-sample* no período analisado, seguido pelos modelos Double Heston (2009), Heston (1993) e Black & Scholes. Mais uma vez pôde-se perceber que, apesar da maior quantidade de parâmetros, o modelo Double Heston (2009) não apresentou um melhor ajuste aos dados quando comparado o modelo de Bates (1996).

Considerando a análise com dados *out-of-sample*, verificou-se que os modelos de volatilidade estocástica também apresentaram resultados superiores aos do modelo Black & Scholes. Neste contexto, foi possível constatar que tornar a volatilidade estocástica parece ser o mais fundamental a ser feito para melhorar tanto o ajuste aos dados quanto à capacidade de previsão dos preços das opções. Em seguida, acrescentar saltos ao modelo de Heston (1993) se mostrou mais

importante do que acrescentar um segundo processo estocástico para a volatilidade na precificação de opções de curto prazo. Tais resultados estão em linha com os encontrados por trabalhos como de Bakshi *et al.* (1997) e Bates (2000).

Por último, este trabalho verificou, à luz de Bakshi *et al.* (1997), que as curvas de volatilidade implícita proveniente dos modelos de volatilidade estocástica foram razoavelmente horizontais, não indicando, desta forma, nenhuma flagrante má especificidade dos modelos considerados.

Finalmente, a pesquisa traz oportunidades de trabalhos futuros neste campo de estudo. Quanto à metodologia proposta neste trabalho, dado que os modelos analisados não admitem solução analítica fechada, foi utilizado o método numérico de Lewis (2000) para obter o valor das opções. Porém, vale ressaltar a existência de outros métodos para obter o valor do prêmio, em especial, o método Fourier-Cousine Series Expansion (COS), desenvolvido por Fang e Oosterlee (2008). Ao longo do processo de revisão de literatura, não foram identificadas muitas pesquisas que testaram o referido método no apreçamento de opções a partir dos modelos de Bates (1996) e Double Heston (2009). Desta maneira, futuras pesquisas podem ser realizadas a fim de avaliar a eficácia e eficiência deste método combinado aos modelos mencionados acima na obtenção dos prêmios destes instrumentos financeiros.

Do mesmo modo, em relação ao processo de otimização para estimação dos parâmetros dos modelos, não existe, na literatura, uma unanimidade quanto a qual método de estimação utilizar. À vista disso e dado que o processo de calibração é custoso, mas crucial para aplicação destes modelos, esta dissertação sugere que futuros trabalhos avaliem outros algoritmos de otimização não linear, bem como, outros métodos de estimação de parâmetros.

Cabe ainda destacar que, em face dos resultados encontrados serem promissores, esta dissertação sugere ainda que futuros trabalhos possam estender as análises aqui descritas, avaliando e comparando as performances dos modelos de Heston (1993), Bates (1996) e Double Heston (2009) para fazer delta-hedge, assim como Bakshi *et al.* (1997) e Kim e Kim (2004) implementaram em seus estudos. Segundo os autores, esta é uma estratégia na qual são utilizados instrumentos de hedge tantos quanto necessários para neutralizar as fontes de risco existentes. Além disso, próximas pesquisas podem se concentrar no cálculo das

letras gregas provenientes desses modelos quando aplicados no mercado brasileiro, bem como, podem analisar estes modelos na precificação de opções de ações por um horizonte de tempo maior que o estudado neste trabalho ou aplicá-los em opções de índice ou de câmbio negociadas na B3.

Por último, futuros trabalhos podem buscar comparar o modelo Double Heston (2009) com os modelos desenvolvidos por Teng *et al.* (2016). Enquanto o modelo Double Heston (2009) adiciona ao modelo de Heston (1993) um segundo processo CIR para modelar a volatilidade, buscando incorporar um efeito de correlação estocástica, os modelos de Teng *et al.* (2016) adicionam ao modelo de Heston (1993) um processo Ornstein-Uhlenbeck e um processo de Jacobi para descrever a correlação em si. Outra possibilidade é comparar estes modelos ao modelo desenvolvido por Gatheral (2007, 2008). Como destaca Bayer *et al.* (2013), no modelo de Gatheral (2007, 2008), a variância é descrita por um processo em que ela reverte a uma média de longo prazo que, por sua vez, também é descrita por uma processo de reversão à média.

## 7. Referências bibliográficas

AHLIP, R.; RUTKOWSKI, M. Pricing of foreign exchange options under the Heston stochastic volatility model and CIR interest rates. **Quantitative Finance**, v. 13, n. 6, p. 955-966, 2013.

AIUBE, F. A. L. **Modelos Quantitativos em Finanças: Com enfoque em commodities**. Porto Alegre: Bookman, 2013.

ALBRECHER, H. *et al.* The Little Heston Trap. **Wilmott Magazine**, p. 83-92, 2007.

ALMEIDA, C. I. R. de; DANA, S. Stochastic Volatility and Option Pricing in the Brazilian Stock Market: An Empirical Investigation. **Journal of Emerging Market Finance**, v. 4, n. 2, 2005.

ANÉ, T.; LABIDI, C. Implied Volatility Surfaces and Market Activity over Time. **Journal of Economics and Finance**, v. 25, n. 3, p. 259-275, 2001.

ATTARI, M. **Option pricing using Fourier transforms: A numerically efficient simplification**. Working Paper, Charles River Associates, 2004.

ARAÚJO, G. S. *et al.* Contornando os Pressupostos de Black & Scholes: Aplicação do Modelo de Precificação de Opções de Duan no Mercado Brasileiro. **Trabalhos para Discussão**, n. 78, p. 1-30, 2003.

BACK, K. E. **Asset Pricing and Portfolio Choice Theory**. New York: Oxford University Press, 2010.

BAKSHI, G.; CAO, C.; CHEN, Z. Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. **The Journal of Finance**, v. 52, n. 5, p. 2003-2049, 1997.

BAKSHI, G.; KAPADIA, N.; MADAN, D. Stock Return Characteristics, Skew Laws, and the Differential Pricing of Individual Equity Options. **The Review of Financial Studies**, v. 16, n. 1, p. 101-143, 2003.

BAKSHI, G.; MADAN, D. Spanning and derivative-security valuation. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 1, p. 205-238, 2000.



BATES, D. S. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. **Review of Financial Studies**, v. 9, n. 1, p. 69-107, 1996.

BATES, D. S. Post-'87 crash fears in the S&P 500 futures option market. **Journal of Econometrics**, v. 94, n. 1-2, p. 181-238, 2000.

BATES, D. S. Empirical Option Pricing: a retrospection. **Journal of Econometrics**, v. 116, n. 1-2, p. 387-404, 2003.

BAUER, R. **Fast Calibration in the Heston Model**. Tese (Mestrado), Faculty of Mathematics, Vienna University of Technology, Vienna, 2012.

BAYER, C.; GATHERAL, J.; KARLSMARK, M. Fast Ninomiya-Victoir calibration of the Double-Mean-Reverting Model. **Quantitative Finance**, v. 13, n. 11, p. 1813-1829, 2013.

BEKAERT, G.; WU, G. Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets. **The Review of Financial Studies**, v. 13, n. 1, p. 1-42, 2000.

BENHAMOU, E.; GOBET, E.; MIRI, M. Time Dependent Heston Model. **SIAM Journal on Financial Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 289-325, 2010.

BESSADA, O.; BARBEDO, C. ARAÚJO, G. **Mercado de Derivativos no Brasil**. Rio de Janeiro: Record, 2012.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, n.3, p. 637-659, 1973.

BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.

BOYARCHENKO, S.I.; LEVENDORSKII, S.Z. **Non-Gaussian-Merton-Black-Scholes Theory**, Singapura: World Scientific, 2002.

BRANGER, N.; SCHLAG, C. Why is the Index Smile So Steep?. **Review of Finance**, v. 8, n. 1, p. 109-127, 2004.

BUSTAMANTE, P. Z. **Construção de superfície de volatilidade para o mercado brasileiro de opções de dólar baseado no modelo de volatilidade estocástica de Heston**. Dissertação (Mestrado), Escola de Economia de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2010.

CARR, P.; MADAN, D. Option valuation using the fast Fourier transform. **Journal of Computational Finance**, v. 24, n. 1, p. 61-73, 1999.

ÇEPNI, O. *et al.* **Goodness-of-fit of the Heston, Variance-Gamma and Normal-Inverse Gaussian Models**, Working Paper, Bogazici University, 2013.

CHEUNG, Y.; NG, L. Stock Price Dynamics and Firm Size: An Empirical Investigation. **Journal of Finance**, v. 47, n. 5, p. 1985-1997, 1992.

CHOI, S.; FOUQUE, J.; KIM, J. Option Pricing under Hybrid Stochastic and Local Volatility. **Quantitative Finance**, v. 13, n. 8, p. 1157-1165, 2013.

CHRISTIE, A. A. The Stochastic Behavior of Common Stock Variances – Value, Leverage and Interest Rate Effects. **Journal of Financial Economics**, v. 10, n. 4, p. 407-432, 1982.

CHRISTOFFERSEN, P. *et al.* Option valuation with long-run and short-run volatility components. **Journal of Financial Economics**, v. 90, n. 3, p. 272-297, 2008.

CHRISTOFFERSEN, P.; HESTON, S.; JACOBS, K. The Shape and Term Structure of Index Option Smirk: Why Multifactor Stochastic Volatility Models Work so Well. **Management Science**, v. 55, n. 12, p. 1914-1932, 2009.

CHRISTOFFERSEN, P.; JACOBS, K.; MIMOUNI, K. **An Empirical Comparison of Affine and Non-Affine Models for Equity Index Options**. Working Paper, McGill University, 2006.

CONT, R. Empirical Properties of Asset Returns: Stylized facts and statistical issues. **Quantitative Finance**, v. 1, n.2, p. 223-236, 2001.

COSTA, M. N.; YOSHINO, J. A. Calibração do Modelo de Heston para o Mercado Brasileiro de Opções de Câmbio (FX). **Revista Brasileira de Finanças**, Rio de Janeiro, v.2, n. 1, p. 23-46, 2004.

COX, J. **Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusion**. Unpublished Note, Stanford University, Graduate School of Business, 1975.

COX, J. C.; INGERSOLL, J. E.; ROSS, S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. **Econometrica**, v. 53, n. 2, p. 385-408, 1985.

COX, J. C.; ROSS, S. A. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. **Journal of Financial Economics**, v. 3, n. 1, p. 145-166, 1976.

CRISÓSTOMO, R. **An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab**. Dissertação (Mestrado). Department of Mathematics, Cornell University, New York, 2014.

DUAN, J. The GARCH Option Pricing Model. **Mathematical Finance**, v. 5, n. 1, p. 13-32, 1995.

DUFFIE, D.; PAN, J.; SINGLETON, K. Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. **Econometrica**, v.68, n. 6, p. 1343-1376, 2000.

DUPIRE, B. Pricing with a Smile. **Risk**, v. 7, n. 1, p. 18-20, 1994.

ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of UK inflation. **Econometrica**, v. 50, n. 4, p. 987-1008, 1982.

FANG, F.; OOSTERLEE, C. W. A novel pricing method for European option based on Fourier-Cosine series expansions. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 31, n. 2, p. 826-848, 2008.

FARHI, M.; BORGHI, R. A. Z. Operações com derivativos financeiros das corporações de economias emergentes. **Estudos Avançados**, v. 23, n. 66, 2009.

FOUQUE, J. P.; PAPANICOLAOU, G.; SICAR, R. Mean Reverting Stochastic Volatility. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 3, n. 1, p. 101-142, 2000.

FOUQUE, J. P.; PAPANICOLAOU, G.; SICAR, R. Stochastic Volatility Correction to Black-Scholes. **Risk**, v. 13, n. 2, p. 89-92, 2000.

FOUQUE, J. P.; PAPANICOLAOU, G.; SICAR, R. **Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility**. Nova Iorque: Cambridge University Press., 2000.

GATHERAL, J. Consistent modeling of SPX and VIX options. Discussion Paper at The Fifth World Congress of the Bachelier Congress Society, London, 2008.

GATHERAL, J. Developments in volatility derivatives pricing. **Discussion Paper at Global Derivatives**, Paris, 2007.

GATHERAL, J. **The Volatility Surface: A Practitioner's Guide**. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd., 2006.

GAUTHIER, P.; RIVAILLE, P. H. **Fitting the smile: Smart parameters for SABR and Heston**. Working Paper, Pricing Partners, 2009.

GIL-PELAEZ, J. Note on the Inversion Theorem. **Biometrika**, v. 38, n. 3-4, p. 481-482, 1951.

GOMES, V. B. G. **O Modelo de Heston e o mercado brasileiro de opções**. Dissertação (Mestrado) Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

GRASSELLI, M.; ROMO, J. M. Stochastic Skew and Target Volatility Options. **The Journal of Futures Markets**, v. 36, n. 2, p. 174-193, 2016.

GRZELAK, L. A.; OOSTERLEE, C. W. On the Heston Model with Stochastic Interest Rates. **SIAM Journal of Financial Mathematics**, v. 2, n. 1, p. 255-286, 2011.

GRZELAK, L. A.; OOSTERLEE, C. W.; WEEREN, S. van. Extension of Stochastic Volatility Equity Models with Hull-White Interest Rate Process. **Quantitative Finance**, v. 12, n. 1, p. 89-105, 2012.

GSCHNAIDTNER, C.; ESCOBAR, M. **Parameters Recovery via Calibration in the Heston model. A comprehensive review**. Working Paper, 2015.

GUO, S.; GRZELAK, L. A.; OOSTERLEE, C. W. Analysis of an affine version of the Heston-Hull-White option pricing partial differential equation. **Applied Numerical Mathematics**, v. 72, n. 1, p. 143-159, 2013.

HAFNER, R.; WALLMEIER, M. The Dynamics of DAX Implied Volatilities. **International Quarterly Journal of Finance**, v. 1, n. 1, p. 1-27, 2001.

HAFNER, R.; SCHMID, B. **A Factor-based Stochastic Implied Volatility Model**. Working Paper, 2005.

HAGAN, P. S. *et al.* Managing Smile Risk. **Wilmott Magazine**, v. 1, p. 84-108, 2002.

HELGADÓTTIR, A. D.; IONESCU, L. **Option Pricing within the Heston model**. Dissertação (Mestrado em Finanças) – Aarhus University, Denmark, 2016.

HESTON, S. A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, **Review of Financial Studies**, v. 6, n.2, p. 327-343, 1993.

HESTON, S. L.; NANDI, S. A Closed-Form GARCH Option Valuation Model. **Review of Financial Studies**, v. 31, n. 3, p. 585-625, 2000.

HOUT, K. in't.; PLOEG, A. P. C. van der. **A semi closed-form analytic pricing formula for call options in a hybrid Heston-Hull-White model**. Working Paper, University of Utrecht, 2007.

HULL, J. C. **Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções**. 4 ed. São Paulo, BM&F, 2005.

HULL, J. C. **Opções, Futuros e Outros Derivativos**. 9 ed. Porto Alegre: Bookman, 2016.

HULL, J.; WHITE, A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. **The Journal of Finance**, v. 42, n. 2, p. 281-300, 1987.

HUNZINGER, C.B.; LABUSCHAGNE, C. C. A.; BOETTICHER, S. T. Volatility skews of indexes of BRICS securities exchanges. **Procedia Economics and Finance**, v. 14, p. 263-272, 2014.

JORDAN, R.; TIER, C. **Asymptotic Approximations to CEV and SABR Models**, Working Paper, 2011.

KAMMEYER, H.; KIENITZ, J. The Heston-Hull-White Model Part I: Finance and Analytics. **Wilmott Magazine**, n. 57, p. 46-53, 2012.

KAMMEYER, H.; KIENITZ, J. The Heston-Hull-White Model Part II: Numerics and Examples. **Wilmott Magazine**, n. 58, p. 34-45, 2012.

KAMMEYER, H.; KIENITZ, J. The Heston-Hull-White Model Part III: Design and Implementation. **Wilmott Magazine**, n. 59, p. 44-49, 2012.

KASSBERGER, S. M. **Smile-Consistent LIBOR Markets Models: Theory, Approximations and Properties**. Dissertação (Doutorado). London School of Economics and Political Science, Londres, 2004.

KIENITZ, J.; WETTERAU, D. **Financial modeling: Theory Implementation and Practice with Matlab Source**. 1 ed. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd., 2012.

KIM, J.; *et al.* On the stochastic elasticity of variance diffusions. **Economic Modelling**, v. 51, n. 1, p. 263-268, 2015.

KIM, I. J.; KIM, S. Empirical comparison of alternative stochastic volatility option pricing models: Evidence from Korean KOSPI 200 index options market. **Pacific-Basin Finance Journal**, v. 12, n. 2, p. 117-142, 2004.

KOU, S. G. A Jump Diffusion Model for Option Pricing. **Management Science**, v. 48, n. 8, p. 1086-1101, 2002.

KOVACHEV, Y. **Calibration of Stochastic Volatility Models**. Tese (Mestrado). Department of Mathematics, Uppsala University, Sweden, 2014.

KRASKA, B. **A Comparison of the Fourier-Gauss-Laguerre and Fourier Cosine Series Method in Option Pricing**. Tese (Mestrado). Department of Mathematical Statistics, Lund University, Lund, 2015.

KRONROD, A. S. **Nodes and weights of quadrature formulas, sixteen-place tables**. New York: Consultants of Bureau, 1965.

KSIEH, K. C.; RITCHKEN, P. An empirical comparison of GARCH option pricing models. **Review of Derivatives Research**, v. 8, n. 3, p. 129-150, 2006.

LEE, Y. J. **Heston-Hull-White Model for Long Term Exotic Option**. Tese (Mestrado). Kaist Graduate School of Finance, Kaist University, Coreia do Sul, 2013.

LE FLOCH, F. **Fourier Integration and Stochastic Volatility Calibration**. Working Paper, 2014.

LEWIS, A. L. **Option Valuation under Stochastic Volatility: With Mathematica Code**. California: Finance Press, 2000.

LIN, Y.; et al. Pricing FTSE 100 Index Options Under Stochastic Volatility. **The Journal of Future Markets**, v. 21, n. 3, p. 197-211, 2001.

LUCCAS, A. U. de. **Modelos de precificação com saltos: Análise econométrica do modelo de Kou no mercado acionário brasileiro**. Dissertação (Mestrado). Departamento de Administração, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

MADAN, D. B.; SENETA, E. The Variance Gamma model for share market returns. **The Journal of Business**, v. 63, n. 4, p. 511-524, 1990.

MARTIN, D. M. L. Precificação de opções com volatilidade estocástica. **Revista Brasileira de Gestão de Negócios**, v. 6, n. 14, 2004.

MERTON, R. The Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, v. 4, n. 1, p. 141-183, 1973.

MIKHAILOV, S.; NÖGEL, U. Heston's Stochastic Volatility Model: Implementation, Calibration, and Some Extensions. **Wilmott Magazine**, v. 6, p. 74-79, 2003.

MOODLEY, N. **The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code**. Faculty of Science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2005.

MOYAERT, T.; PETITJEAN, M. The performance of popular stochastic volatility option pricing models during the Subprime crisis. **Applied Financial Economics**, v. 21, n. 14, p. 1059-1068, 2011.

NELSON, D. B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. **Econometrica**, v. 59, n. 2, p. 347-370, 1991.

OLIVEIRA, C. M. N. **Análise comparativa de modelos de apreçamento de opções considerando reversão à média, saltos e volatilidade estocástica.** Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

PERSSE, A. **Calibration of FX options and pricing of barrier options.** Dissertação (Mestrado). Department of Mathematical Statistics, Lund University, Lund, 2013.

PEZZO, R.; UBERTI, M. Approaches to forecasting volatility: Models and their performances for emerging equity markets. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 29, p. 556-565, 2006.

RECCHIONI, M. C.; SUN, Y. An explicit solvable Heston model with stochastic interest rate. **European Journal of Operational Research**, v. 259, n. 1, p. 359-377, 2016.

ROUAH, F. D. **The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#.** New Jersey: John Wiley & Sons Ltd., 2013.

ROUAH, F. D.; VAINBERG, G. **Option Pricing Models % Volatility: Using Excel-VBA.** New Jersey: John Wiley & Sons Ltd., 2007.

SAMIMI, O. et al. LSM Algorithm for Pricing American Option Under Heston-Hull-White's Stochastic Volatility Model. **Computational Economics**, v.50, n. 1, p. 1-15, 2016.

SCHMELZLE, M. **Option Pricing Formulae using Fourier Transform: Theory and Application.** Working Paper. University of Regensburg, Germany, 2010.

SCHÖBEL, R.; ZHU, J. Stochastic Volatility With an Ornstein-Uhlenbeck Process: An Extension. **Review of Finance**, v. 3, n. 1, p. 23-46, 1999.

SHEPPARD, R. **Pricing Equity Derivatives under Stochastic Volatility: A Partial Differential Equation Approach.** Dissertação (Mestrado). Faculty of Science, University of the Witwatersrand, South Africa, 2007.

SHREVE, S. E. **Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models.** New York: Springer, 2004.

SILVA NETO, L. A. **Opções: Do Tradicional ao Exótico.** São Paulo: Atlas, 2000.

STEIN, E. M.; STEIN, J. C. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. **The Review of Financial Studies**, v. 4, n. 4, p. 727-752, 1991.

TENG, L.; EHRHARDT, M.; GÜNTHER, M. On the Heston Model with Stochastic Correlation. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 19, n. 6, 2016.

VICENTE, R. et al. Underlying dynamics of typical fluctuations of an emerging market price index: The Heston model from minutes to months. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 361, n. 1, p. 272-288, 2006.

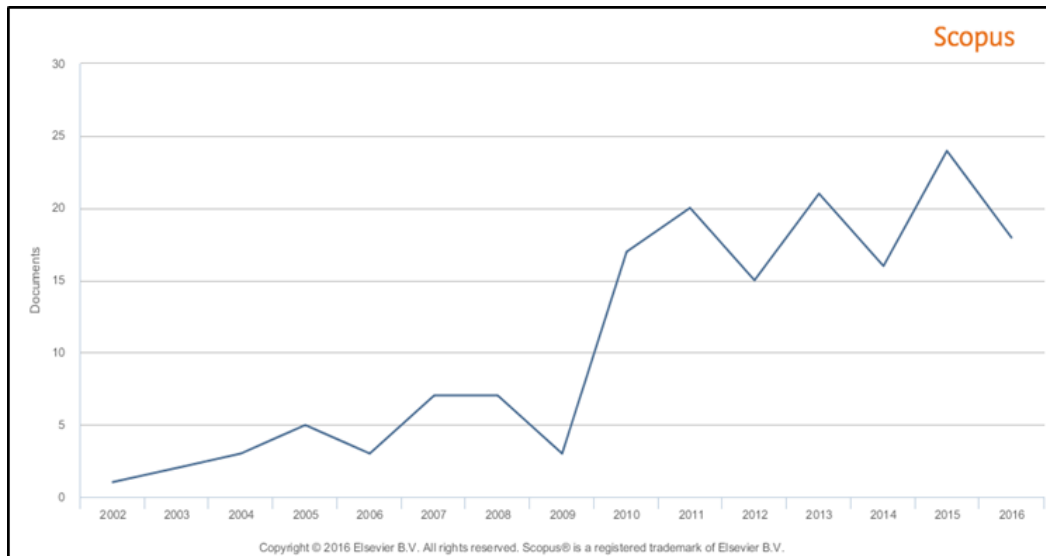
VITIELLO JÚNIOR, L. R. S. Opções de Compra: o Ajustamento ao Mercado Brasileiro de Dois Modelos de Precificação. **Revista de Administração Contemporânea**, v. 4, n. 1, p. 27-45, 2000.

YANG, Y. **Valuing European option with the Heston model**. Dissertação (Mestrado). The School of the Mathematical Sciences, Rochester Institute of Technology, New York, 2013.



## 8. Apêndice A

**Figura A. 1 - Total de Publicações por Ano sobre o Modelo de Heston (1993)**



**Tabela A. 1 - Total de Publicações sobre o Modelo de Heston (1993)**

| Data       | Base   | Estruturação da Busca   | Resultado |
|------------|--------|---|-----------|
| 24/10/2016 | Scopus | TITLE-ABS-KEY ( <b>Heston</b> )   | 689       |
| 24/10/2016 | Scopus | TITLE-ABS-KEY( <b>Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>Brazil</b> )           | 0         |
| 24/10/2016 | Scopus | TITLE-ABS-KEY( <b>Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>BM&amp;F Bovespa</b> ) | 0         |
| 24/10/2016 | Scopus | TITLE-ABS-KEY( <b>Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>BOVESPA</b> )          | 0         |
| 24/10/2016 | Scopus | TITLE-ABS-KEY( <b>Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>IBOVESPA</b> )         | 1         |
| 24/10/2016 | Scopus | TITLE-ABS-KEY( <b>Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>brazilian</b> )        | 2         |

Tabela A. 2 - Total de Publicações sobre o Modelo de Bates (1996)

| <b>Data</b> | <b>Base</b> | <b>Estruturação da Busca</b>   | <b>Resultado</b> |
|-------------|-------------|--|------------------|
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY ( <b>Bates</b> )   | 2695             |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Bates</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>Brazil</b> ) AND TITLE-ABS-KEY(volatility) | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Bates</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>BM&amp;F Bovespa</b> )                     | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Bates</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>BOVESPA</b> )                              | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Bates</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>IBOVESPA</b> )                             | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Bates</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>brazilian</b> )                            | 0                |

Tabela A. 3 - Total de Publicações sobre o Modelo Double Heston (2009)

| <b>Data</b> | <b>Base</b> | <b>Estruturação da Busca</b>   | <b>Resultado</b> |
|-------------|-------------|--|------------------|
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY ( <b>Double Heston</b> )   | 18               |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Double Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>Brazil</b> ) AND TITLE-ABS-KEY(volatility) | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Double Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>BM&amp;F Bovespa</b> )                     | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Double Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>BOVESPA</b> )                              | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY ( <b>Double Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>IBOVESPA</b> )                            | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Double Heston</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>brazilian</b> )                            | 0                |
| 24/10/2016  | Scopus      | TITLE-ABS-KEY( <b>Christoffersen</b> ) AND TITLE-ABS-KEY( <b>2009</b> ) AND TITLE-ABS-KEY(volatility)  | 5                |

## 9. Apêndice B

### 9.1. Função Característica de Heston

Esta demonstração foi baseada em informações a partir do trabalho de Roauh (2013). Considere o seguinte processo neutro a risco para o modelo de Heston (1993):

$$\begin{aligned} dx_t &= \left[ r - q - \frac{1}{2} v_t \right] dt + \sqrt{v_t} dZ_{1,t} \\ dv_t &= k^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dZ_{2,t} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde  $x_t = \ln S_t$ ,  $k^* = k + \lambda$ ,  $\theta^* = k\theta/(k + \lambda)$  e  $\text{corr}[dZ_{1,t}, dZ_{2,t}] = \rho dt$ .

Para a derivação do modelo de Heston, é necessária a construção de um portfólio sem risco,  $\pi$ . O portfólio deverá ser constituído de uma opção  $V = V(S, v, t)$ ,  $\Delta$  unidades do ativo subjacente  $S$  e  $\varphi$  unidades de uma outra opção  $U(S, v, t)$ , de modo a realizar um hedge sobre o ativo e sobre a volatilidade. Desta forma, o portfólio terá o seguinte valor:

$$\pi = V + \Delta S + \varphi U \quad (\text{B.2})$$

Ainda temos que:

$$d\pi = dV + \Delta dS + \varphi dU \quad (\text{B.3})$$

Na sequência, aplica-se o Lema de Itô-Doeblin para obter os processos para  $V$  e  $U$  e, por conseguinte, encontrar o processo para o portfólio,  $\pi$ . Aplicando o Lema de Itô-Doeblin para  $V$ , obtém-se:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{1}{2} v \sigma_v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} dt + \sigma_v \rho v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} dt \quad (\text{B.4})$$

Considera-se ainda que  $(dS)^2 = v S^2 dW^2 = v S^2 dt$ ,  $(dv)^2 = \sigma_v^2 v dt$ ,  $dS dv = \sigma_v v S dW dZ = \sigma_v \rho v S dt$ ,  $(dt)^2 = 0$ ,  $dW dt = dZ dt = 0$ .

Aplicando o Lema de Itô-Doeblin para  $U$ , obtém-se a mesma equação diferencial parcial (EDP) acima, porém em termos de  $U$ . Assim, substituindo  $dV$  e  $dU$  na equação B.3 do portfólio, tem-se que:

$$\begin{aligned} d\pi = & \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\ & + \varphi \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt \quad (\text{B.5}) \\ & + \left[ \frac{\partial V}{\partial S} + \varphi \frac{\partial U}{\partial S} + \Delta \right] dS + \left[ \frac{\partial V}{\partial v} + \varphi \frac{\partial U}{\partial v} \right] dv \end{aligned}$$

É mister destacar que para o portfólio,  $\pi$ , ser livre de risco, os últimos dois termos da equação acima devem ser iguais a zero. Para que isto aconteça:

$$\varphi = - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}} \quad (\text{B.6})$$

$$\Delta = -\varphi \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo-os na equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} d\pi = & \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\ & + \varphi \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que se um portfólio for livre de risco, ele deverá render a taxa livre de risco  $r$ , isto é:

$$d\pi = r\pi dt \quad (\text{B.9})$$

$$d\pi = r(V + \Delta S + \varphi U)dt \quad (\text{B.10})$$

Portanto, igualando as equações, substituindo  $\varphi$  e  $\Delta$ , e organizando, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \\ &= \frac{\left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Note que o lado esquerdo da equação é função apenas de  $V$ . Em contrapartida, o lado direito da equação é função apenas de  $U$ . Isto implica que ambos os lados podem ser escritos como uma função,  $h(S, v, t)$ . Heston (1993) define esta função como:

$$h(S, v, t) = -\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t) \quad (\text{B.12})$$

Nesta função,  $\lambda(S, v, t)$  é o preço do risco da volatilidade, definido por Heston (1993) como uma função linear da volatilidade, isto é,  $h(S, v, t) = \lambda v$ , onde  $\lambda$  é uma constante. Substituindo na EDP acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S} \\ & + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

No entanto, definindo  $x = \ln S$  e expressando a equação B.13 em termos de  $(x, v, t)$  ao invés de  $(S, v, t)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial U}{\partial x} + \rho\sigma_v v \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU \\ + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Como consequência do Lema de Itô-Doeblin, o preço de uma opção de compra europeia  $C(x, v, t)$  será dado pela mesma equação diferencial parcial acima, sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} C(S, v, T) &= \max(0, S - K) \\ C(0, v, t) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial S}(\infty, v, t) &= 1 \\ C(S, \infty, t) &= S \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Desta maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial C}{\partial x} + \rho\sigma_v v \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 v \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} - rC \\ + [k(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial C}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Sendo  $K$  o preço de exercício da opção, pode-se provar que o preço de uma *call* europeia é dado por (Rouah, 2013):

$$C(K) = e^x P_1 - K e^{-r\tau} P_2 \quad (\text{B.17})$$

Onde  $P_1$  e  $P_2$  são as probabilidades neutras a risco tais que  $S_T > K$ .

Note que se  $K = 0$  e  $S = 1$ , o preço da *call* será dado por  $P_1$ . Por outro lado, se  $S = 0$ ,  $K = 1$  e  $r = 0$ , o preço da *call* será dado por  $-P_2$ . Desta maneira, substituindo as devidas derivadas parciais na equação diferencial acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j}{\partial t} + \rho \sigma_v v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} \\ + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

para  $j = 1, 2$  e onde  $u_1 = \frac{1}{2}$ ,  $u_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a = k\theta$ ,  $b_1 = k + \lambda - \rho \sigma_v$  e  $b_2 = k + \lambda$ .

Importa notar que a equação diferencial acima não possui uma solução analítica fechada. No entanto, Heston (1993) e Bakshi e Madan (2000) mostram que, quando as funções características são conhecidas, cada função densidade de probabilidade pode ser identificada a partir do teorema da inversa de Fourier (Gil-Pelaez, 1951), onde:

$$P_j = Pr(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re \left[ \frac{e^{-iz \ln K} f_j(z; x, v)}{iz} \right] d\phi \quad (\text{B.19})$$

sendo  $Re$  a parte real do número imaginário correspondente,  $i = \sqrt{-1}$  é o número imaginário,  $x = \ln S$  e  $v$  a variância do preço do ativo subjacente.

Heston (1993) define as funções características para o logaritmo do valor terminal do preço do ativo no modelo proposto da seguinte forma:

$$f_j(z; x_t, v_t) = e^{[A_j(\tau, z) + B_j(\tau, z)v_t + izx_t]} \quad (\text{B.20})$$

onde  $\tau = T - t$ .

O Teorema de Feynman-Kac garante que a função característica segue a mesma equação diferencial parcial acima. Portanto, a equação diferencial parcial da função característica é:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \rho \sigma_v v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} \\ + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

A substituição das derivadas da equação B.20 na equação B.21 acima resulta em duas equações diferenciais dadas por:

$$\frac{\partial B_j}{\partial \tau} = \rho \sigma_v i z D_j - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} \sigma_v^2 D_j^2 + u_j i z - b_j D_j \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial \tau} = r i z + a D_j \quad (\text{B.23})$$

Segundo Rouah (2013), a primeira equação é uma equação de Riccati, enquanto a segunda é uma equação comum que pode ser resolvida por uma integração uma vez que  $D_j$  seja obtida. Resolvendo as equações acima e arrumando a solução da maneira sugerida por Albrecher *et al.* (2007), tem-se para as funções características de Heston:

$$\begin{aligned} f_{Heston} &= E[e^{i z x_\tau}] = e^{[A_j(\tau, z) + B_j(\tau, z) v_t + i z x_t]} \\ A_j(\tau, z) &= (r - q) i z \tau + \frac{k \theta}{\sigma_v^2} \left[ (b_j - \rho \sigma_v i z - d_j) \tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{-d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \right] \\ B_j(\tau, z) &= \frac{b_j - \rho \sigma_v i z - d_j}{\sigma_v^2} \left( \frac{1 - e^{-d_j \tau}}{1 - g_j e^{-d_j \tau}} \right) \\ g_j &= \frac{b_j - \rho \sigma_v i z - d_j}{b_j - \rho \sigma_v i z + d_j} \\ d_j &= \sqrt{(\rho \sigma_v i z - b_j)^2 - \sigma_v^2 (2 u_j i z - z^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$