



Marilene Lobato Cardoso

**Uma implementação em elementos de contorno para
problemas de mecânica da fratura usando funções
generalizadas de Westergaard**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro

Outubro de 2017



Marilene Lobato Cardoso

**Uma implementação em elementos de contorno para
problemas de mecânica da fratura usando funções
generalizadas de Westergaard**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Estruturas do Departamento de
Engenharia Civil e Ambiental do Centro Técnico Científico
da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora
abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont.

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Dr. Alexandre Antônio de Oliveira Lopes

Petrosoft Desing

Prof. Elvis Yuri Mamani Vargas

Universidad Andina del Cusco - Peru

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de Outubro de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Marilene Lobato Cardoso

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará – UFPA, em 2014. No ano de 2015 ingressou no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, na área de Estruturas, aonde vem desenvolvendo investigações na linha de pesquisa Métodos Variacionais e Computacionais.

Ficha Catalográfica

Cardoso, Marilene Lobato

Uma implementação em elementos de contorno para problemas de mecânica da fratura usando funções generalizadas de Westergaard / Marilene Lobato Cardoso ; orientador: Ney Augusto Dumont. – 2017.

107 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2017.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental – Teses. 2. Elementos de contorno. 3. Mecânica da fratura. 4. Funções generalizadas de Westergaard. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis e me fazer crer a cada dia que nada é impossível quando se tem fé e perseverança.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial aos meus pais, Avelino e Maria Berlita, pelo amor interminável e por me darem condições de poder concluir o mestrado, e à minha irmã e melhor amiga, Marília, pelo apoio diário e orações de incentivo.

Ao Rafael pelo amor, compreensão e estímulo em superar os desafios.

Aos amigos que fiz no Rio de Janeiro pela torcida e momentos divididos juntos.

Aos amigos de Belém e Abaetetuba que mesmo distantes estiveram sempre na torcida por mim.

Ao professor Ney Dumont pelo conhecimento transmitido e auxílio na realização deste trabalho.

À CAPES e à PUC-Rio pelo auxílio concedido.

Resumo

Cardoso, Marilene Lobato; Dumont, Ney Augusto. **Uma implementação em elementos de Contorno para problemas de mecânica da fratura usando funções generalizadas de Westergaard**. Rio de Janeiro, 2017. 107p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

No método dos elementos de contorno tradicional, a modelagem numérica de trincas é usualmente realizada por meio de uma solução fundamental hipersingular. Um procedimento mais natural seria utilizar uma solução fundamental capaz de representar a singularidade $1/\sqrt{r}$ que surge quando se analisa o campo de tensões próximo à ponta da trinca. Esta representação já foi realizada por Dumont e Lopes em 2003, com alguns refinamentos conseguidos por Dumont e Mamani em 2011, numa formulação do Método Híbrido de Elementos de Contorno, onde as soluções fundamentais são desenvolvidas a partir de funções de tensão generalizadas do tipo Westergaard para problemas de trincas com deslocamento prescrito, conforme proposto por Tada et al, em 1993. O presente trabalho, que é uma continuação das pesquisas de Dumont e Mamani, realiza um estudo sobre o uso destas funções generalizadas para a representação de grandezas na ponta da trinca em problemas de elasticidade e potencial. Os resultados obtidos são comparados conceitualmente com os desenvolvimentos clássicos de Westergaard e Williams. Também foram analisados alguns resultados com funções de tensão generalizadas de trinca com abertura semi-elíptica e polinomiais, além do uso de funções que representam a rotação relativa das faces da trinca. Além disso, é apresentada a aplicação da função de tensão de Westergaard generalizada como solução fundamental do método dos Elementos de Contorno Convencional, mais especificamente para a obtenção da matriz G do sistema, uma vez que a matriz H já foi desenvolvida, em trabalhos anteriores, com bons resultados. São apresentados alguns exemplos numéricos de aplicação para contornos externos, furos e trincas.

Palavras-chave

Elementos de contorno; mecânica da fratura; funções generalizadas de Westergaard.

Abstract

Cardoso, Marilene Lobato; Dumont, Ney Augusto (Advisor). **A boundary element implementation for fracture mechanics problems using generalized Westergaard stress functions**. Rio de Janeiro, 2017. 107p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the traditional boundary element methods, the numerical modelling of cracks is usually carried out by means of a hypersingular fundamental solution. A more natural procedure should make use of fundamental solutions capable of representing the $1/\sqrt{r}$ singularity that arises when one analyses the stress field near the crack tip. This representation has already been made by Dumont and Lopes in 2003, with some refinements achieved by Dumont and Mamani in 2011, in a formulation of the Hybrid Boundary Element Method, where the fundamental solutions are developed from Westergaard-type generalized stress functions for displacement-prescribed crack problems, as proposed by Tada et al in 1993. The present work, which is a continuation of research work done by Dumont and Mamani, carries out a detailed study on the use of these generalized functions for the representation of quantities at the crack tip for problems of elasticity and potential. The results obtained are compared conceptually with the classic developments by Westergaard and Williams. Some results were also analyzed with generalized stress functions for a crack with semi-elliptical opening shapes, besides the use of functions to represent the relative rotation of the crack faces. In addition, the application of the generalized Westergaard stress function as a fundamental solution in the Conventional Boundary Element Method is presented, more specifically for obtaining the matrix G of the system, since the matrix H has already been developed in previous works, with good results. Some numerical examples of application are presented for external boundary, holes and cracks.

Keywords

Boundary elements; fracture mechanics; generalized Westergaard stress function.

Sumário

1	Introdução	18
2	Conceitos básicos da Mecânica da Fratura	21
2.1.	Solução de Inglis para tensões em furos elípticos	21
2.2.	Balanço de energia de Griffith	23
2.3.	Função de tensão complexa de Westergaard	24
2.4.	Fator de Intensidade de tensão	26
2.5.	Fator de intensidade de tensão pela série de Williams	30
3	Método dos elementos de Contorno	34
3.1.	Fundamentos da teoria de elasticidade	34
3.2.	Formulação consistente e sua versão inconsistente do Método Convencional dos Elementos de Contorno	36
3.3.	Método Híbrido dos Elementos de Contorno	40
4	Uso da função de tensão de Westergaard generalizada	45
4.1.	Funções de tensão de Westergaard generalizada	45
4.2.	Interpretação física da solução fundamental	51
5	Comparação do comportamento na ponta da trinca utilizando as formulações de Westergaard, generalizada de Westergaard e Williams	53
5.1.	Problemas de Elasticidade	53
5.1.1.	Formulação de Westergaard	54
5.1.1.1.	Modo I	54
5.1.1.2.	Modo II	56
5.1.2.	Formulação de Williams	57
5.1.2.1.	Modo I	58
5.1.2.2.	Modo II	60

5.1.3. Formulação generalizada de Westergaard para trinca elíptica	62
5.1.3.1. Modo I	63
5.1.3.2. Modo II	65
5.1.4. Formulação generalizada de Westergaard para elemento de trinca semi-elíptica	67
5.1.4.1. Modo I	68
5.1.4.2. Modo II	70
5.1.5. Formulação generalizada de Westergaard para elemento de trinca com rotação relativa das faces	71
5.1.5.1. Modo I	72
5.1.5.2. Modo II	73
5.2. Problemas de Potencial	74
5.2.1. Função de tensão de Westergaard	75
5.2.2. Função generalizada de Westergaard para trinca elíptica	76
5.2.3. Função de tensão de Westergaard generalizada para elemento de trinca semi-elíptica	77
5.2.4. Função generalizada de Westergaard para elemento de trinca de rotação relativa das faces	79
5.3. Exemplo de aplicação da formulação de Westergaard generalizada a trincas retas inclinadas	80
5.3.1. Trinca em meio infinito	81
5.3.2. Trinca em meio finito	85
6 Formulação no Método de Elementos de Contorno para problemas de potencial	88
6.1. Construção das matrizes do BEM	88
6.1.1. Matriz H	89
6.1.2. Matriz G	90
6.2. Aplicação numérica	90
6.2.1. Exemplo de análise em pontos internos	92
6.2.2. Estudo da convergência do método em furos e contorno externos	96
6.2.3. Estudo da convergência do método para a simulação de trincas	98

7 Conclusão	102
7.1. Conclusões	102
7.2. Sugestões para trabalhos futuros	104
8 Referências Bibliográficas	105

Lista de Figuras

Figura 2.1- Furo elíptico em uma placa plana.	22
Figura 2.2- Trinca em meio infinito carregada com tensão biaxial.	25
Figura 2.3- Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca.	27
Figura 2.4- Modos fundamentais de trincamento.	29
Figura 2.5- Configuração do canto da placa analisado por Williams (1957).	30
Figura 3.1- Corpo elástico submetido a carregamentos.	35
Figura 3.2- Região da solução fundamental ($\Omega^* \cup \Gamma^*$) contendo o corpo $\Omega \cup \Gamma$	37
Figura 4.1- Representação gráfica da função de tensão de Westergaard modificada.	46
Figura 4.2- Trincas de forma elíptica para simular contornos curvos (Dumont e Lopes, 2003).	47
Figura 4.3- Semitrinca de comprimento a_1 rotacionada por um ângulo θ_1	48
Figura 4.4- Trincas semi-elípticas para representar contornos curvos (Mamani, 2015).	48
Figura 4.5- Elementos usados para discretizar uma trinca curva geral.	49
Figura 4.6- Propriedades das semitricas usadas para representar efeitos de abertura e rotação na face da trinca.	50
Figura 4.7- Representação do parâmetro de forças \mathbf{p}^* na superposição de duas trincas semi-elípticas (Dumont e Mamani, 2011a).	51

Figura 4.8- Interpretação física das tensões numa trinca.....	52
Figura 5.1- Trinca em uma placa infinita e carga biaxial.	81
Figura 5.2- Fatores de intensidade de tensão para cada tipo de carregamento do item 5.3.1.....	82
Figura 5.3- Fatores de intensidade de tensão K para a trinca da Figura 4.6.	83
Figura 5.4- Erro dos fatores de intensidade de tensão K para a trinca da Figura 4.6.	83
Figura 5.5- Fatores de intensidade de tensão para várias razões de distribuição de elementos de trinca.	84
Figura 5.6- Erro dos fatores de intensidade de tensão KI para várias razões de distribuição de elementos de trinca.	84
Figura 5.7- Placa retangular com uma trinca inclinada central.....	85
Figura 5.8- Discretização do contorno finito contendo a trinca utilizada no exemplo da Figura 4.11.....	85
Figura 5.9- Fatores de intensidade de tensão para trinca inclinada em meio finito.	86
Figura 5.10- Erros dos fatores de intensidade de tensão para trinca inclinada em meio infinito.	87
Figura 6.1- Construção de um elemento de descontinuidade a partir de duas semitrincas (Adaptado de Dumont e Mamani, 2015).....	89
Figura 6.2- Exemplo de um corpo discretizado com 12 elementos de contorno lineares (Dumont e Mamani, 2011a).	90
Figura 6.3- Modelagem da trinca interna.....	91
Figura 6.4- Estrutura para a avaliação de potencial e gradientes em pontos internos devido a um campo potencial F1.	93

Figura 6.5- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB sem furo ou trinca.	94
Figura 6.6- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB quando se tem apenas a presença do furo.....	94
Figura 6.7- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB quando se tem apenas a presença da trinca.	95
Figura 6.8- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB quando se tem a presença da trinca e do furo.....	95
Figura 6.9- Avaliação da convergência do BEM convencional usando a função de Westergaard em problemas com furo quando se aumenta a discretização no contorno da placa.	97
Figura 6.10- Trinca reta de comprimento $2a$ submetida a um fluxo remoto unitário.	98
Figura 6.11- Norma de erro $\ \mathbf{Hd} - \mathbf{Gt}\ /\ \mathbf{Hd}\ $ de uma trinca em meio infinito sujeita a um fluxo unitário $q_y=1$	99
Figura 6.12- Forma de abertura da trinca em meio infinito.....	100
Figura 6.13- Erro relativo da trinca.	100
Figura 6.14- Diferença $ \mathbf{Hd} - \mathbf{Gt} $ para trinca com 100 elementos.	101

Lista de tabelas

Tabela 1- Tensões e deslocamentos para os modos I e II de trincamento, onde $\kappa = 3 - 4\nu$ (estado plano de tensão) e G é o módulo de elasticidade transversal.	29
Tabela 2- Série de Williams para os modos I e II de trincamento	33
Tabela 3- Singularidades das funções propostas (Mamani, 2015).....	50
Tabela 4- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard em torno da ponta da trinca para o modo I.	55
Tabela 5- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard em torno da ponta da trinca para o modo II.	57
Tabela 6- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Williams para o modo I.....	60
Tabela 7- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Williams para o modo II.....	61
Tabela 8- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca elíptica para o modo I (multiplicado por $2a$).	65
Tabela 9- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca elíptica para o modo II (multiplicado por $2a$).	66
Tabela 10- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca semi-elíptica para o modo I (multiplicado por $2a$).	69

Tabela 11- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca semi-elíptica para o modo II (multiplicado por $2a$).	70
Tabela 12- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard generalizada na ponta da trinca de rotação relativa das faces para o modo I (multiplicado por $2a$).	72
Tabela 13- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca de rotação relativa das faces para o modo II (multiplicado por $2a$).	73
Tabela 14- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard.....	75
Tabela 15- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard Generalizada em trinca de abertura elíptica (multiplicado por $2a$).	77
Tabela 16- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard Generalizada em trinca semi-elíptica (multiplicado por $2a$). ..	78
Tabela 17- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard Generalizada em trinca de rotação relativa das faces (multiplicada por $2a$).	79
Tabela 18- Campos potenciais com solução analítica usados na análise de convergência das matrizes.....	96

Lista de Símbolos

Caracteres latinos:

a	Metade do comprimento da trinca
a_1 e a_2	Comprimento da semitrinca 1 e 2, respectivamente.
b	Metade da altura da elipse
B	Espessura da trinca estudada por Griffith
b_i , $\{\mathbf{b}\}$	forças de corpo, forças no domínio
C_{ij}	Constantes arbitrárias do campo de deslocamentos referentes a solução fundamental
C_{ijkl}	Tensor da relação constitutiva
$d_n, \{\mathbf{d}\}$	Deslocamentos nodais do sistema de referencia global
$d_k^*, \{\mathbf{d}^*\}$	Parâmetros de deslocamentos da solução fundamental
E	Módulo de Young, módulo de elasticidade.
ε_{ij}	Deformações do corpo elástico
ε_m , $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$	Erro referente à resíduos implícitos na solução fundamental
E	Módulo de Young, módulo de elasticidade.
f	Função de abertura da trinca
f_{ij}	Função adimensional de θ
$F(\theta^*, \lambda)$	Função adimensional de θ^* e λ
F_{kl} , $[\mathbf{F}]$	Matriz de flexibilidade do método Híbrido de elementos de contorno
\mathcal{G}	Taxa de alivio de energia
G	Módulo de elasticidade transversal
G_{lm} , $[\mathbf{G}]$	Matriz do tipo flexibilidade
H_{kl} , $[\mathbf{H}]$	Matriz de incidência cinemática
i	Constante complexa
K	Fator de intensidade de tensão
$K_{I,II,III}$	Fator de intensidade de tensão para os modos I, II e III de trincamento.
$[\mathbf{K}]$	Matriz de rigidez do sistema
k	Constante potencial
n^d	Numero de nós onde são medidos deslocamentos e potencial
n^t	Numero de nós onde são medidos forças de superfície e fluxos
N_g , N_i	Funções de interpolação
p_n , $\{\mathbf{p}\}$	Forças nodais equivalentes

$p_i^*, \{\mathbf{p}^*\}$	Forças singulares
q^*	Fluxo da solução fundamental para problemas de potencial
r	Módulo do vetor posição (raio)
s_i	Constante de Williams no modo I de trincamento
t_i	Constante de Williams no modo II de trincamento
$t_i, \{\mathbf{t}\}$	Forças de superfície
t_{il}	Função de interpolação de forças de superfície
T	Termo complexo
$u_i, \{\mathbf{u}\}$	Deslocamentos, potenciais
u_x, u_y	Deslocamentos nas direções x e y , respectivamente.
$\bar{u}_i, \{\bar{\mathbf{u}}\}$	Deslocamentos prescritos, potenciais prescritos.
$u_i^*, \{\mathbf{u}^*\}$	Deslocamentos ou potencial referentes à solução fundamental
u_{in}	Funções de interpolação de deslocamentos
u_{is}^r	Deslocamentos de corpo rígido
u_{rr} e $u_{\theta\theta}$	Deslocamentos no sistema de coordenadas polares
$U_0^c(\sigma_{ij})$	Densidade de energia interna na forma complementar
$v^{I,II}$	Deslocamentos segundo o eixo y de coordenadas devido aos modos I e II de trincamento
w	Comprimento da placa
W	Energia de deformação
x	Coordenadas cartesianas
x^*	Distancia horizontal do campo de tensões até a ponta da trinca
y	Coordenadas cartesianas
z	Numero complexo
Z	Função de tensão de Westergaard
$Z(z, T)$	Variável de numero complexo que considera rotação
\bar{Z} e $\bar{\bar{Z}}$	Primeira e segunda integração de Z em relação a z

Caracteres gregos

$\phi_{I,II}$	Função de tensão de Westergaard (modificada ou generalizada) para os modos I e II de trincamento
$\phi'_{I,II}$	Derivada da função de tensão de Westergaard (modificada ou generalizada) para os modos I e II de trincamento
$\phi''_{I,II}$	Segunda derivada da função de tensão de Westergaard (modificada ou generalizada) para os modos I e II de trincamento
Φ	Função de tensão de Airy, função de tensão de Williams.
Γ	Contorno do corpo elástico
Γ^*	Contorno referente à solução fundamental

Γ_u	Região do contorno onde se tem deslocamentos ou potenciais prescritos
Γ_σ	Região do contorno onde se tem forças ou gradientes prescritos
Π_0	Energia potencial inicial
Π	Energia potencial total
Π_R	Potencial de Hellinger-Heissner
Ω	Domínio do corpo elástico
Ω^*	Domínio referente à solução fundamental
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε	Norma de erro
ε_{ij}	Deformações
γ_s	Trabalho necessário para formar uma nova superfície de trinca
η_j	Cossenos diretores de um elemento de superfícies
ν	Coeficiente de Poisson
π	Constante
θ	Ângulo do sistema de coordenadas polares
θ_1 e θ_2	Ângulo de rotação da semitrinca de rotação 1 e 2, respectivamente.
ρ	Raio de curvatura
σ	Tensão normal
σ^∞	Tensão normal aplicada no meio infinito
σ_{xx} e σ_{yy}	Tensões normais nas direções x e y
σ_{rr} e $\sigma_{\theta\theta}$	Tensões em coordenadas polares
σ_{ij}	Tensões normais, tensões.
$\sigma_{ij}^{I,II}$	Tensões normais, tensões devido aos modos I e II de trincamento.
σ_{ij}^*	Tensões referentes à solução fundamental
τ_{xy}	Tensão cisalhante
$\tau_{r\theta}$	Tensão em coordenadas polares
τ^∞	Tensão cisalhante aplicada no meio infinito
$\tau_{ij}^{I,II}$	Tensões cisalhantes, tensões cisalhantes devido aos modos I e II de trincamento.
ξ	Coordenada paramétrica
$\Im()$	Parte imaginária de um número complexo
$\Re()$	Parte real de um número complexo

1

Introdução

A eventual formação de trinca é um problema que a sociedade tem enfrentado desde que surgiram as estruturas artificiais. Embora existam diversas estruturas antigas que continuam de pé, as pirâmides do Egito, por exemplo, supõe-se que tenham existido na história mais casos de insucesso que de sucesso, com tempo de vida curto, uma vez que a maioria destas estruturas foi concebida a partir de conhecimentos empíricos dos materiais e do comportamento estrutural. As pesquisas sobre os mecanismos de fratura ganharam impulso a partir da segunda guerra mundial, quando diversos acidentes em estruturas (o caso mais conhecido, por exemplo, os navios Liberty) ocorreram pelo fato de as juntas das soldas conterem falhas semelhantes a trincas e o aço com o qual os navios foram fabricados ter baixa resistência a fratura (tenacidade). Até então a mecânica da fratura era tratada mais como uma curiosidade científica limitada ao meio acadêmico e científico. A partir de então seus conceitos passaram a ser aplicados na indústria em projetos de novos equipamentos e estruturas.

No pós-segunda guerra mundial uma das maiores contribuições no estudo de trincas foi dado por Irwin (1957). Ele desenvolveu o conceito de taxa de alívio de energia derivada da teoria de Griffith (1920), a qual por sua vez prevê que as trincas progridem quando a mudança de energia de deformação resultante de um incremento de crescimento de trinca é suficiente para superar a energia de superfície do material. Irwin utilizou uma função de tensão complexa de Westergaard (1939) para mostrar que tensões e deslocamentos próximos à ponta da trinca podem ser descritos por uma constante singular, que está relacionada à taxa de alívio de energia e denominada por ele como fator de intensidade de tensão (K). Esta é uma propriedade da trinca que, depende da geometria e carregamento da estrutura e por meio do qual é possível resolver os componentes de tensões, deformações e deslocamentos.

Atualmente existem tabelas com os valores de K , para vários tipos de geometrias e carregamentos. Contudo, este número ainda é reduzido e para

configurações mais complexas utilizam-se métodos numéricos. Dentre os métodos existentes, o mais utilizado é o método dos elementos finitos, devido sua simplicidade e capacidade de obter soluções próximas à analítica. Contudo, uma desvantagem é a necessidade de grande refinamento da malha. Outro método que também é utilizado é o método dos elementos de contorno, o qual é uma opção viável, uma vez que a própria natureza da solução fundamental se adapta bem a problemas de altos gradientes e também porque a descontinuidade, ou trinca, é representada somente pela discretização com elementos retos ou curvos, no problema bidimensional, ou superfícies planas ou curvas, em problemas tridimensionais.

Dumont e Lopes (2003) desenvolveram uma formulação que utiliza uma modificação da função de tensão de Westergaard (para uma trinca em meio infinito submetida a carregamento biaxial remoto) como solução fundamental no Método Híbrido de Elementos de Contorno (HBEM). Esta formulação em HBEM permite que os fatores de intensidade de tensão sejam obtidos de forma direta como incógnita primária do problema.

Em 2011, Dumont e Mamani desenvolveram funções de tensão generalizadas do tipo Westergaard para trincas com abertura semi-elíptica. O desenvolvimento foi inspirado a partir dos estudos de Tada, Ernst e Paris (1993, 1994), os quais propuseram um método de avaliar funções de tensão de Westergaard para análise de problemas da mecânica da fratura para trincas com deslocamento e tensões prescritas. Dumont e Mamani (2011) adicionaram um termo, que considera rotação na face da trinca, e implementaram a superposição de duas trincas semi-elípticas opostas como solução fundamental no Método Híbrido de Elementos de Contorno. Esse método se mostrou eficiente para cálculo de tensões na proximidade da trinca e obtenção do fator de intensidade de tensão.

Mais tarde esta formulação foi expandida para trincas com outras funções de abertura, a fim de reduzir singularidades desnecessárias que surgiam na face da trinca.

Esta dissertação é uma sequência dos estudos de Dumont e Mamani e apresenta dois objetivos centrais. O primeiro é realizar um estudo da aplicação das funções de tensão generalizadas no cálculo de grandezas em torno da ponta da trinca, em problemas de potencial e elasticidade, com foco na interpretação física destas soluções. O segundo é avaliar a aplicabilidade destas funções como solução

fundamental no Método Convencional de Elementos de Contorno em problemas de potencial (por simplicidade), e utilizando trincas com função de abertura semi-elíptica.

O capítulo 2 apresenta um breve resumo sobre os fundamentos da mecânica da fratura linear elástica.

O capítulo 3 traz a formulação e os principais conceitos da versão consistente do Método de Elementos de Contorno, bem como sua versão inconsistente, corresponde ao método convencional, e do Método Híbrido de Elementos de Contorno e sua particularização para problemas de condições de contorno de Neumann.

O capítulo 4 faz uma síntese das funções de tensão de Westergaard generalizadas, as quais são combinadas para desenvolver soluções fundamentais em problemas tanto de potencial quanto de elasticidade.

No capítulo 5 é realizado um estudo comparativo entre o uso das funções de tensão generalizada, função de tensão de Westergaard e função de tensão de Williams, na determinação de grandezas na extremidade da trinca, tais como tensões e deslocamentos (problemas de elasticidade) e fluxo e potencial (problemas de potencial), com ênfase na compreensão das expressões geradas pela formulação generalizada.

No capítulo 6 é apresentado o emprego da função de tensão generalizada no Método Convencional de Elementos de Contorno para problemas de potencial, utilizando trincas de abertura semi-elíptica. São avaliados exemplos de aplicação em contorno fechados e trincas.

2

Conceitos básicos da Mecânica da Fratura

A mecânica da fratura nasceu da necessidade de quantificar e compreender o surgimento de fissuras no material estrutural quando sujeito a determinado carregamento, o que pode levar à redução de sua resistência. Até 1960 os conceitos da mecânica da fratura eram aplicáveis somente a materiais que obedecessem à lei de Hooke. A partir deste período novas teorias foram desenvolvidas para vários tipos de materiais com comportamento não linear. Estes estudos são na realidade extensões da mecânica da fratura linearmente elástica (MFLE).

O principal parâmetro definido pela MFLE foi o fator de intensidade de tensão (FIT) desenvolvido por Irwin (1956), o qual possibilita a caracterização e previsão do comportamento de uma trinca. Outra abordagem de extrema relevância que deu alicerce à obtenção do FIT foi a técnica semi-inversa para analisar tensões e deslocamentos em trincas, desenvolvida por Westergaard (1939). Esta última também serviu como base para a formulação estudada no presente trabalho.

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais da Mecânica da Fratura Linearmente Elástica, essenciais ao entendimento deste estudo.

2.1.

Solução de Inglis para tensões em furos elípticos

A primeira evidência quantitativa do efeito de concentração de tensões em trincas foi verificada por Inglis (1913) através de seu estudo do campo de tensões em torno de uma elipse em placas planas. Inglis analisou um furo elíptico de dimensões $2a \times 2b$, Figura 2.1, com tensão perpendicular ao maior eixo da elipse. Supõe-se que as dimensões da placa são muito maiores que a e b , de modo que o furo praticamente não sofre influência do contorno da placa.

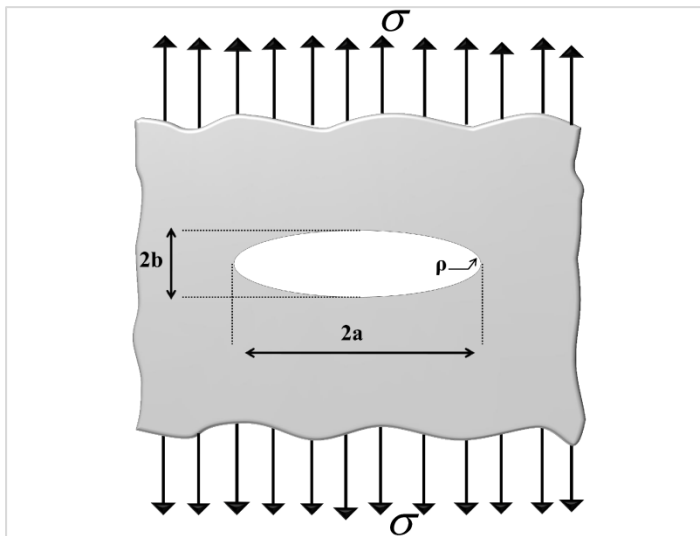


Figura 2.1- Furo elíptico em uma placa plana.

A máxima tensão na ponta da elipse está relacionada ao seu tamanho e forma por

$$\sigma_{máx} = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (2.1)$$

Onde σ é uma tensão uniforme aplicada a uma distância infinitamente grande.

Observa-se pela eq. (2.1) que a tensão máxima tende ao infinito à medida que a elipse aplanar-se para formar uma trinca ($b \rightarrow 0$). Para este caso Inglis utilizou o raio de curvatura, $\rho = b^2/a$, para representar a tensão (2.1) de forma mais conveniente:

$$\sigma_{máx} = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.2)$$

Quando $a \gg b$ a eq. (2.2) conduz a

$$\sigma_{máx} = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.3)$$

A solução de Inglis mostra que à medida que o raio de curvatura na ponta tende a zero (a definição de uma trinca) as tensões avançam para o infinito. Este resultado foi bastante questionado, haja vista que nenhum material pode suportar tensões infinitas. Contudo, não deixa de ser extremamente valioso, uma vez que auxiliou na compreensão do comportamento da trinca quando Griffith o utilizou para desenvolver o seu critério de fratura baseado no balanço de energia.

2.2. Balanço de energia de Griffith

Sete anos após o desenvolvimento de Inglis, Griffith (1920) desenvolveu um novo critério, baseado em energia, para a avaliação de fratura, o qual declara que em materiais idealmente frágeis uma trinca se propagaria de maneira instável se a energia de deformação liberada quando a trinca avançasse de um comprimento infinitesimal fosse igual ou maior que a energia requerida para formar uma nova superfície de trinca.

O problema estudado por Griffith foi o de uma placa contendo uma trinca de comprimento $2a$, muito inferior à largura da placa, sujeita a uma tensão constante σ . Na realidade Griffith estudou o mesmo caso resolvido por Inglis, Figura 2.1, para quando o furo elíptico tem a altura reduzida ($b \rightarrow 0$), formando assim uma trinca.

Quando ocorre o crescimento da trinca, a energia potencial Π sofre um decréscimo, uma vez que aquela região torna-se descarregada. Utilizando as análises de tensão de Inglis, Griffith chegou à seguinte expressão:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2.4)$$

onde Π_0 é a energia potencial da placa anteriormente ao surgimento da trinca e B é a espessura da placa.

Neste mesmo processo, em uma perspectiva molecular, para gerar uma trinca é necessário o rompimento da ligação entre os átomos do material. Para que isto ocorra a quantidade de trabalho realizada no sistema é

$$W = 4aB\gamma_s \quad (2.5)$$

Em que γ_s é a energia de superfície do material, $2aB$ é a área e, uma vez que há duas superfícies livres criadas pela trinca, é necessário o 2 na equação.

Baseado nos conceitos anteriores, o balanço de energia de Griffith para um crescimento dA na área da trinca, sob condições de equilíbrio, pode ser expresso como

$$\frac{dE}{dA} = \frac{dW}{dA} + \frac{d\Pi}{dA} \quad (2.6)$$

$$\frac{dE}{dA} = 2\gamma_s - \frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 0$$

Resolvendo a eq. (2.6) para σ , obtém-se a tensão de fratura, representada pelo subscrito f :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a}} \quad (2.7)$$

2.3.

Função de tensão complexa de Westergaard

Westergaard (1939) desenvolveu uma solução para o campo de tensões em torno da trinca. Ele escolheu uma função de variável complexa, $z = x + iy$, como função de tensão de Airy, Φ , para uma trinca sob tensão

$$\Phi = \Re(\bar{\bar{Z}}) + y\Im(\bar{Z}) \quad (2.8)$$

onde \Re e \Im denotam as partes real e imaginária da função de tensão $Z(z)$, respectivamente, e a barra acima de $Z(z)$ representa integração em relação a z , ou seja,

$$\bar{Z} = \frac{d\bar{\bar{Z}}}{dz} \text{ e } Z = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (2.9)$$

A função da eq. (2.8) proposta por Westergaard satisfaz $\nabla^4 \phi = 0$ independentemente da escolha de $Z(z)$. Isso possibilitou a Westergaard obter variadas funções $Z(z)$, cada uma sendo solução para um problema diferente.

Para o problema de uma trinca reta, de comprimento $2a$, em uma placa sujeita a tensão biaxial remota, Figura 2.2, com origem definida no centro da trinca, a função de tensão de Westergaard é dada por:

$$Z(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.10)$$

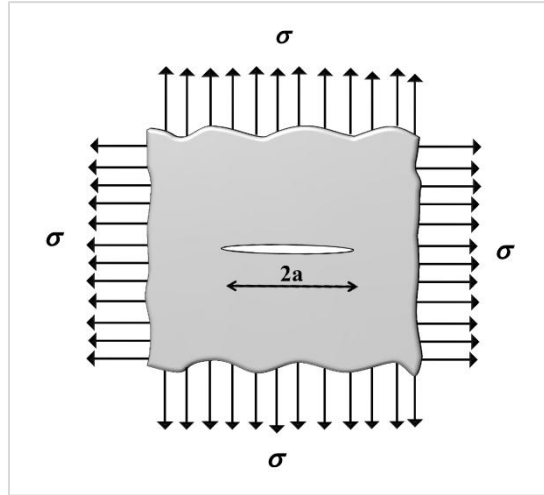


Figura 2.2- Trinca em meio infinito carregada com tensão biaxial.

Considerando que as componentes de tensão para um problema bidimensional estão relacionadas com as funções de tensão de Airy pela relação

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

substituindo (2.8) em (2.11) tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Re(Z) - y\Im(Z') \\ \sigma_{yy} &= \Re(Z) + y\Im(Z') \\ \tau_{xy} &= -y\Re(Z') \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde Z' representa a derivada de Z em relação à variável complexa z .

Observa-se que as partes imaginárias das tensões anulam-se quando $y=0$. Também, as tensões de cisalhamento anulam-se quando $y=0$, implicando que o plano da trinca é o plano principal. Portanto as tensões são simétricas em torno de $\theta=0$ e a eq. (2.12) corresponde ao chamado modo I. Seguindo neste caso, a variável complexa z torna-se $z=x$ e as tensões são simplificadas

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \Re(Z) = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (2.13)$$

onde é fácil identificar que as tensões σ_{xx} e σ_{yy} são nulas na face da trinca ($|x| \ll |a|$, logo $Z(z)$ é imaginário), tendem ao infinito na ponta e depois diminuem retornando para σ à medida que x aumenta.

Adicionalmente, pode-se utilizar a solução de Westergaard, considerando a distância horizontal a partir da ponta da trinca como $x^* = x - a$ e substituindo-a na eq. (2.13):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma \frac{x^* + a}{\sqrt{x^{*2} + 2x^*a}} \quad (2.14)$$

para $x^* \ll a$ obtém-se

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma a}{\sqrt{2x^*a}} = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2x^*}} \quad (2.15)$$

As tensões em (2.15) têm um termo com singularidade da inversa da raiz quadrada $(1/\sqrt{x^*})$, onde x^* é a distância horizontal do campo de tensões até a ponta da trinca. Esta singularidade surge sempre que se estudam as tensões próximas à ponta da trinca, conforme será visto no item a seguir.

Convém destacar que, embora as equações de Westergaard tenham sido originalmente desenvolvidas para um campo de tensões biaxial e posteriormente aplicadas para carregamento uniaxial, elas produzem uma componente σ_x nos lados do contorno ao longo do eixo da trinca, para um carregamento puramente uniaxial. Este comportamento é esperado uma vez que a solução de Westergaard foi desenvolvida para um carregamento biaxial. Para eliminar esta componente transversal, Irwin (1957) sugeriu o uso de uma componente transversal de tensão (Gupta et al., 2015). Da mesma forma Sih (1986), considerando que a formulação de Westergaard está restrita a uma classe de problemas envolvendo uma trinca em meio infinito sujeita a carregamento externo remoto, desenvolveu uma formulação para o cálculo de tensões e deslocamentos que leva em conta um termo constante que depende do carregamento aplicado.

2.4.

Fator de Intensidade de tensão

O Fator de Intensidade de Tensão (K) foi compreendido e definido pela primeira vez por Irwin (1957) ao analisar o campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca, utilizando a função de tensão proposta por Westergaard. Ele constatou que o campo de tensões em torno da ponta de uma trinca se comportava sempre da mesma maneira: as soluções desenvolvidas em forma de série são

sempre singulares na ponta da trinca e o termo que lidera esta singularidade é sempre proporcional a um fator, designado por ele “Fator de Intensidade de Tensão”. Durante este mesmo período Williams, utilizando análises ligeiramente diferentes, obteve resultados equivalentes aos de Irwin.

Um dos problemas resolvidos por Irwin foi o de uma trinca reta em meio infinito sob tensões biaxiais, Figura 2.2. Para retratar a ponta da trinca, ele representou a variável complexa z como

$$z = a + re^{i\theta} \quad (2.16)$$

ou seja, com o campo de tensões, em um sistema polar de coordenadas com origem na ponta da trinca, Figura 2.3.

Substituindo a eq. (2.16) na eq. (2.10) e considerando que na área imediatamente próxima à ponta da trinca os valores de r são muito pequenos, de modo que $a \gg r$, as tensões na eq. (2.12) são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^I &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{yy}^I &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \tau_{xy}^I &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

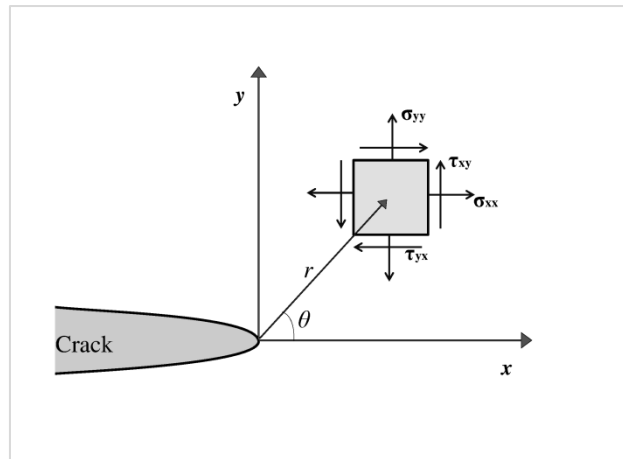


Figura 2.3- Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca.

O fator que acompanha o termo singular $1/\sqrt{2r}$ é o fator de intensidade de tensão K , proposto pela primeira vez por Irwin em função da taxa de alívio de energia, \mathcal{G} , como

$$K = \sqrt{\frac{E\mathcal{G}}{\pi}} \quad (2.18)$$

onde \mathcal{G} para a trinca da Figura 2.2 é dada por

$$\mathcal{G} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.19)$$

Substituindo a eq. (2.19) na eq. (2.18), chega-se ao fator de intensidade de tensão dado na eq. (2.17), com o uso, por conveniência, do termo $\sqrt{\pi}/\sqrt{\pi}$.

Em resumo, observa-se na eq. (2.17) que, quanto mais r se aproxima de zero, mais a primeira parcela da expressão em série domina a resposta. Portanto, as tensões próximas à ponta da trinca variam com $1/\sqrt{r}$ independentemente da configuração do corpo trincado. O campo de tensões em qualquer corpo trincado em um meio linearmente elástico pode ser dado por (Anderson, 1995)

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + \text{termos de ordem superior} \quad (2.20)$$

É importante destacar que o Fator de Intensidade de Tensão usualmente é apresentado com um subscrito que se refere ao modo de trincamento.

Existem três modos fundamentais de trincamento de um corpo, caracterizados pelo movimento relativo entre as duas superfícies da trinca, mostrados na Figura 2.4: modo I, de abertura, quando a trinca está sujeita a tensão de tração; modo II, de deslizamento, quando sujeita a tensão cisalhante; e modo III, de rasgamento. Este último modo refere-se ações tridimensionais e não será considerado no presente trabalho.

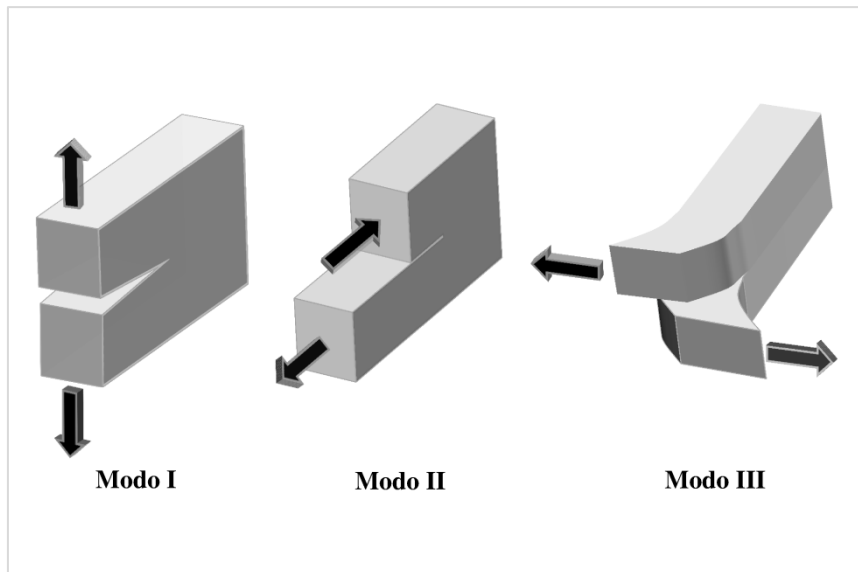


Figura 2.4- Modos fundamentais de trincamento.

Para cada um dos modos de trincamento existe um Fator de Intensidade de Tensão relacionado. A Tabela 1 mostra o primeiro termo da série de Irwin para as tensões e deslocamentos nos modos I e II de trincamento.

Tabela 1- Tensões e deslocamentos para os modos I e II de trincamento, onde $\kappa = 3 - 4\nu$ (estado plano de tensão) e G é o módulo de elasticidade transversal.

	Modo I	Modo II
σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
u_x	$\frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

2.5.

Fator de intensidade de tensão pela série de Williams

Conforme mencionado anteriormente, Williams (1957) também verificou o mesmo comportamento de tensões na proximidade da ponta da trinca que Irwin (1957). Williams estudou tensões no canto de uma placa com várias condições de contorno e ângulos incluídos. Uma trinca é um caso especial em que o ângulo no canto da placa é 2π e ela está livre de forças de superfície. Este problema é apresentado na Figura 2.5.

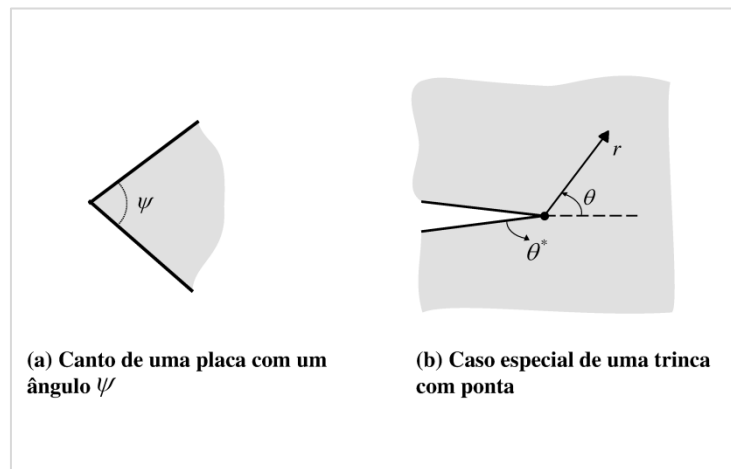


Figura 2.5- Configuração do canto da placa analisado por Williams (1957).

Williams deduziu a função de tensão para a trinca gerada na forma

$$\Phi = r^{\lambda+1} \left[c_1 \sin(\lambda+1)\theta^* + c_2 \cos(\lambda+1)\theta^* + c_3 \sin(\lambda-1)\theta^* + c_4 \cos(\lambda-1)\theta^* \right] \quad (2.21)$$

ou

$$\Phi = r^{\lambda+1} F(\theta^*, \lambda)$$

Onde λ , c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes a determinar e θ^* é o ângulo definido na Figura 2.5. Neste ponto é importante lembrar que as funções de tensão de Airy são tais que

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.22)$$

sendo $\Phi = \Phi(r, \theta)$ e as tensões dadas por

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

As tensões para a função de tensão proposta são obtidas substituindo a equação (2.21) em (2.23):

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= r^{\lambda-1} \left[F''(\theta^*) + (\lambda+1) F'(\theta^*) \right] \\
\sigma_{\theta\theta} &= r^{\lambda-1} \left[\lambda(\lambda+1) F'(\theta^*) \right] \\
\tau_{r\theta} &= r^{\lambda-1} \left[-\lambda F'(\theta^*) \right]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde $F'(\theta^*)$ é a derivada de F em relação a θ^* . Para o caso particular de ausência de forças de superfície nas faces da trinca, $\sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{\theta\theta}(2\pi) = \tau_{r\theta}(\theta) = \tau_{r\theta}(2\pi) = 0$, que implica as seguintes condições de contorno:

$$F(0) = F(2\pi) = F'(0) = F'(2\pi) = 0 \tag{2.25}$$

Para o caso mais geral em que as constantes da equação (2.21) não são nulas, as condições de contorno só são satisfeitas quando $\sin(2\pi\lambda) = 0$. Logo,

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.26}$$

A equação (2.21) contém quatro constantes ainda não especificadas. Aplicando (2.25) é possível eliminar duas destas constantes, resultando em

$$\Phi = r^{\frac{n}{2}+1} \left\{ c_3 \left[\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta^* - \frac{n-2}{n+2} \sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta^* \right] + \right. \\
\left. c_4 \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta^* - \cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta^* \right] \right\} \tag{2.27}$$

Convém observar que esta expressão é um caso particular da expressão geral de uma solução fundamental apresentada por Dumont (1995).

Para problemas de trinca é mais conveniente expressar a função de tensão de (2.27) em termos de θ . Substituindo $\theta = \theta^* - \pi$ em (2.27), obtém-se a expressão

$$\Phi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \left[s_1 \left(-\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + t_1 \left(-\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + s_2 r^2 [1 - \cos(2\theta)]. \quad (2.28)$$

Onde s_i e t_i são constantes a ser definidas. Com isto as tensões de (2.24) ficam na forma

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ s_1 \left[-5\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] + t_1 \left[-5\sin \frac{\theta}{2} + 3\sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} + 4s_2 \cos^2 \theta + .. \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ s_1 \left[-3\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + t_1 \left[-3\sin \frac{\theta}{2} - 3\sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} + 4s_2 \sin^2 \theta + .. \quad (2.29) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ s_1 \left[-\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + t_1 \left[\cos \frac{\theta}{2} - 3\cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} - 2s_2 \sin 2\theta + ... \end{aligned}$$

Nota-se que as constantes s_i são multiplicadas pelos termos em cosseno, enquanto que t_i pelos termos em seno. Logo, a função de tensão contém componentes simétricas e antissimétricas. O carregamento simétrico corresponde ao modo I de trincamento, e quando ele ocorre em $\theta=0$, $t_i=0$. O carregamento antissimétrico corresponde ao modo II e neste caso $s_i=0$.

Geralmente simetria e antissimetria são tratadas separadamente. As constantes s_i e t_i podem ser substituídas pelo fator de intensidade de tensão no modo I e II, respectivamente:

$$s_i = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{e} \quad t_i = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.30)$$

Substituindo as constantes de (2.30) em (2.29), chega-se ao campo de tensões na ponta da trinca nos modos I e II, presentes na Tabela 2, em que os termos de alta ordem são desconsiderados.

Convertendo os termos da Tabela 2 para coordenadas cartesianas chega-se às mesmas expressões dadas na Tabela 1.

Tabela 2- Série de Williams para os modos I e II de trincamento

	Modo I	Modo II
σ_{rr}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{5}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
$\sigma_{\theta\theta}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
$\tau_{r\theta}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$

3

Método dos elementos de Contorno

Neste capítulo será apresentado um resumo do Método Consistente dos Elementos de Contorno (CBEM) (Dumont, 2010), o qual tem uma pequena diferença conceitual em relação ao Método dos Elementos de Contorno Convencional (BEM) (Brebbia et al., 1984). Também é mostrado um resumo do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (Dumont, 1989) bem como sua aplicação a problemas de mecânica da fratura.

Neste trabalho será utilizada a notação indicial para simplificação da apresentação das diversas equações. Nesta notação, a utilização de um determinado índice i , por exemplo, representa os índices subscritos (1,2,3) para consideração das direções cartesianas (x, y, z) . Índices repetidos em um mesmo termo têm o significado de somatório e um subscrito depois de uma $(,)$ denota derivada segundo a direção coordenada representada.

3.1.

Fundamentos da teoria de elasticidade

Seja um corpo elástico sujeito apenas a pequenos deslocamentos. Os deslocamentos de um elemento infinitesimal deste corpo são descritos, na teoria da elasticidade, segundo dois sistemas de coordenadas:

- a) Um sistema global onde se têm deslocamentos absolutos u_i . Sobre estes deslocamentos realizam trabalho forças que podem ser classificadas em dois tipos: forças de corpo b_i definidas por unidade de volume e atuam no domínio Ω , ou seja, no interior do corpo; forças de superfície t_i definidas por unidade de área que atuam na superfície do corpo, isto é, no contorno Γ .

- b) Um sistema local em que se têm deslocamentos relativos (deformações) ε_{ij} , referidos a um elemento infinitesimal $d\Omega$, sobre os quais realizam trabalho as tensões σ_{ij} .

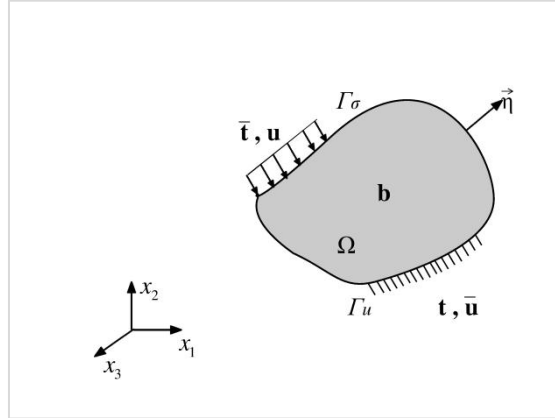


Figura 3.1- Corpo elástico submetido a carregamentos.

O contorno do corpo é conceitualmente dividido em duas partes $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$, onde se têm em Γ_σ forças prescritas e em Γ_u , deslocamentos prescritos, conforme está representado na Figura 3.1. Seja um conjunto de forças externas conhecidas, atuando sobre o corpo elástico, e que são descritas no sistema global por \bar{b}_i atuando em Ω e \bar{t}_i atuando em Γ_σ . A análise deste corpo consiste na determinação dos deslocamentos u_i que ocorrem em Ω e Γ_σ , das reações de apoio que surgem em Γ_u e das tensões σ_{ij} em Ω , causados pelas solicitações externas.

As equações de equilíbrio de forças relacionam forças descritas no sistema externo com as tensões do sistema interno:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{em } \Omega \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ji}\eta_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (3.3)$$

onde η_j são os cossenos diretores, projeções do vetor unitário $\vec{\eta}$, normal externa ao contorno $d\Gamma$.

Há também relações entre os deslocamentos no sistema global e as deformações no sistema local, chamadas relações de transformação cinemática, as quais para pequenos deslocamentos são dadas por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{em } \Omega \quad (3.4)$$

onde ε_{ij} é o tensor de pequenas deformações e u_i é o campo de deslocamentos, de tal modo que

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.5)$$

No sistema local existe a relação entre o tensor de tensões σ_{ij} e o de deformações ε_{ij} em qualquer ponto do corpo elástico, denominada relação constitutiva. Para um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, esta relação é expressa por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{em } \Omega \quad (3.6)$$

ou em termos de deslocamentos, considerando a eq. (3.4),

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad \text{em } \Omega \quad (3.7)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas (Brebbia et al., 1984):

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.8)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson, G é o coeficiente de elasticidade transversal ou de cisalhamento e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

3.2.

Formulação consistente e sua versão inconsistente do Método Convencional dos Elementos de Contorno

Considere o caso de um corpo elástico como o da Figura 3.1, o qual obedece às relações de equilíbrio no domínio, eqs. (3.1) e (3.2), as relações de equilíbrio e compatibilidade no contorno, eqs. (3.3) e (3.5). Deseja-se obter uma adequada aproximação que satisfaça as condições deste caso.

Este problema pode ser formulado em termo de resíduos ponderados por meio da eq. (3.10), utilizando como função de peso um campo de soluções fundamentais de tensões e deslocamentos, que tem a relação

$$\delta \sigma_{ij}^* = C_{ijkl} \delta u_{k,l}^* \quad (3.9)$$

e que satisfaz a parte homogênea $\sigma_{ji,j}^* = 0$ da eq.(3.1), mas não satisfaz as condições de contorno da eq. (3.5):

$$-\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji} \eta_j - t_i) \delta u_i^* = 0 \quad (3.10)$$

onde δ significa variação.

Sobre a solução fundamental, considera-se que está estabelecida em um domínio Ω^* de dimensões infinitas e contorno Γ^* no infinito (domínio aberto), onde está contido o corpo $\Omega \cup \Gamma$ do caso em consideração, Figura 3.2.

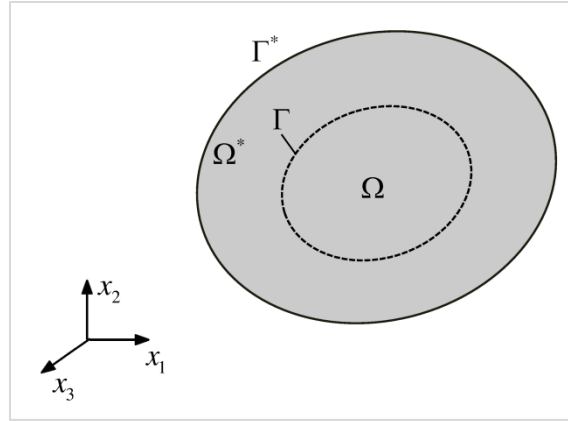


Figura 3.2- Região da solução fundamental $(\Omega^* \cup \Gamma^*)$ contendo o corpo $\Omega \cup \Gamma$.

Integrando por partes duas vezes o primeiro termo da equação acima com sucessivas aplicações do teorema de Green e uso da identidade $\sigma_{ji} \delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l} C_{ijkl} \delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l} \delta \sigma_{kl}^*$ obtém-se

$$\int_{\Gamma} \delta \sigma_{ji}^* \eta_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \sigma_{ji,j}^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \delta u_i^* d\Omega \quad (3.11)$$

As soluções fundamentais $\delta \sigma_{ij}^*$ e δu_{ij}^* podem ser descritas adequadamente em termos de parâmetros arbitrários de forças, δp_m^* , como:

$$\delta \sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ijm}^* \delta p_m^* \quad \text{e} \quad (3.12)$$

$$\delta u_i^* = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) \delta p_m^* \quad (3.13)$$

onde u_{is}^r (para $s=1..n^r$) são os n^r deslocamentos de corpo rígido multiplicados por constantes arbitrárias C_{sm} . Então, σ_{ijm}^* e u_{im}^* são funções de coordenadas e direções de δp_m^* referenciadas por m (ponto fonte), bem como das coordenadas e direções referenciadas por i (ponto campo), onde os efeitos de δp_m^* são medidos.

Por conveniência a função σ_{ijm}^* , eq. (3.12), é normalizada de modo que, para um domínio Ω_0 que contém δp_m^* .

$$\int_{\Omega_0} \sigma_{jim,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma_0} \sigma_{jim}^* \eta_j d\Gamma \equiv -\delta_{im} \quad (3.14)$$

onde δ_{im} é o delta de Kronecker generalizado (igual a 1, quando i e m referem-se ao mesmo grau de liberdade, ou 0 no caso contrário). Utilizando a equação acima, o lado esquerdo da eq. (3.11) pode ser reescrito como

$$\int_{\Omega} \delta \sigma_{ji,j}^* u_i d\Omega = -\delta_{im} u_i \delta p_m^* \equiv -u_m \delta p_m^* \quad (3.15)$$

Substituindo $\delta \sigma_{ij}^*$ e δu_i^* na eq. (3.11), de acordo com suas expressões nas eqs. (3.12) e (3.13), e aplicando a identidade da eq. (3.15), obtém-se a expressão modificada da Identidade de Somigliana:

$$u_m = \int_{\Gamma} t_i u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_i u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \quad (3.16)$$

A diferença em relação à Identidade de Somigliana obtida no Método Convencional dos Elementos de Contorno está nos termos que multiplicam a constante arbitrária C_{sm} , os quais se anulam quando as forças prescritas b_i e t_i estão em equilíbrio, que não é necessariamente verdade se se está se lidando com aproximações. Portanto, os resultados são em princípio influenciados pela constante arbitrária C_{sm} . Esta é uma das diferenças entre o método convencional (BEM) e o método consistente (CBEM).

Os deslocamentos u_i e as forças de superfície t_i são aproximados ao longo do contorno Γ como

$$u_i = u_{in} d_n \quad (3.17)$$

$$t_i = t_{il} t_l \quad (3.18)$$

onde d_n ($n=1...n^d$) é vetor de deslocamentos nodais, u_{in} são as funções de interpolação de d_n com suporte local, t_l ($l=1...n^t$) são atributos de forças de superfície ligados ao vetor normal η_i no contorno. Geralmente, $n^t > n^d$, uma vez que o contorno nem sempre é inteiramente suave, de forma que se tem mais de uma normal no mesmo ponto. As funções de interpolação t_l também são funções com suporte local.

Utilizando as aproximações das eqs. (3.17) e (3.18) na eq. (3.16) e aplicando δp_m^* em sucessivos pontos no contorno chega-se a

$$\left(\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n = \int_{\Gamma} t_{il} u_{im}^* d\Gamma t_l + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega + C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{il} u_{is}^r d\Gamma t_l + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \quad (3.19)$$

A expressão acima é a equação básica do método dos elementos de contorno na sua forma consistente, que considera o termo de erro relacionado com a constante C_{sm} .

A eq. (3.19) pode ser escrita na forma matricial como

$$\mathbf{Hd} = \mathbf{Gt} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.20)$$

onde \mathbf{H} é a matriz de transformação cinemática, \mathbf{G} é a matriz do tipo flexibilidade, \mathbf{b} é o vetor de deslocamentos nodais equivalentes devido às forças de corpo existentes e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o termo de erro que corresponde aos resíduos cuja magnitude depende da magnitude de deslocamentos de corpo rígido que estão sempre implícitos na solução fundamental. A expressão de cada um destes termos é

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{G} \equiv G_{lm} = \int_{\Gamma} t_{il} u_{im}^* d\Gamma \quad (3.22)$$

$$\mathbf{b} \equiv b_m = \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \varepsilon_m = C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{il} u_{is}^r d\Gamma t_l + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \quad (3.24)$$

Geralmente na literatura, o termo de resíduos ε_m não é considerado ou é utilizado como medida de convergência do modelo numérico. Contudo, na formulação consistente este termo é levado em conta, bem como uma simplificação do termo b_m da eq. (3.20).

O vetor de resíduos ε_m na eq.(3.20) pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (3.25)$$

Em que $R_{is} = \int_{\Gamma} t_{il} u_{is}^r d\Gamma$ e o índice p refere-se a forças e deslocamentos no

domínio e o produto $\mathbf{R}^T \mathbf{t}^p$ vem da aproximação

$$\int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega = - \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^p \eta_j u_{is}^r \approx - \int_{\Gamma} t_{il} u_{is}^r d\Gamma t_l^p \quad (3.26)$$

Partindo do mesmo raciocínio, o vetor b_m de deslocamentos nodais equivalentes pode ser escrito na forma

$$b_m \approx -G_{ml} t_l^p + H_{mn} d_n^p \quad (3.27)$$

Fazendo uso das eqs. (3.25) e (3.27) e parâmetros de deslocamentos, d_n^p , e da força de superfície, t_l^p , em termos das funções de interpolação das eqs. (3.17) e (3.18), após algumas manipulações algébricas chega-se à equação consistente do método dos elementos de contorno:

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{G}_a(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (3.28)$$

em que $\mathbf{G}_a \equiv \mathbf{G}\mathbf{P}_R^\perp$ é a parte admissível de \mathbf{G} .

Observa-se que a versão inconsistente da eq. (3.20) é a própria formulação convencional do método dos elementos de contorno, obtida considerando nulo o termo de erro ε , ou seja, o procedimento descrito na eq. (3.25)-eq. (3.28) não é considerado e tem-se

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{G}(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (3.29)$$

Em elementos curvos a versão consistente apresenta outra diferença em relação ao método convencional (Dumont, 2010). A interpolação das forças de superfície da eq. (3.18) é feita como:

$$t_i = \frac{|J|_{(em\ l)}}{J} u_{il} t_l \quad (3.30)$$

Onde u_{il} e t_l seguem as mesmas definições da eq. (3.18), $|J|$ é o jacobiano da transformação de coordenadas $d\Gamma = |J| d\xi$ e $|J|_{(em\ l)}$ é o jacobiano calculado no ponto l de aplicação da força.

3.3.

Método Híbrido dos Elementos de Contorno

O Método Híbrido dos Elementos de Contorno (HBEM) (Dumont, 1987) difere do CBEM e BEM por partir de uma formulação de energia, ao invés de uma formulação de resíduos ponderados, tal como na eq. (3.10).

Tomando o mesmo problema de um corpo elástico descrito no item 3.1 e apresentado na Figura 3.1, o modelo numérico que conduz à solução aproximada

das eqs. (3.1) e (3.3) é estabelecido pelo potencial de Hellinger-Reissner em termos de dois campos, um de deslocamentos u_i^d no contorno Γ , em que o sobrescrito “ d ” significa deslocamento, e um campo de tensões σ_{ij}^s no domínio Ω , em que o sobrescrito “ s ” indica tensão. A forma estacionária do potencial é escrita como

$$-\Pi_R(\sigma_{ij}^s u_i^d) = \int_{\Omega} \left[U_0^C(\sigma_{ij}^s) + (\sigma_{ij,j}^s + b_i) u_i^d \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^s \eta_j u_i^d d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{t}_i u_i^d d\Gamma \quad (3.31)$$

onde U_0^C é a energia de deformação complementar. Os deslocamentos no contorno são aproximados por:

$$u_i^d = u_{in} d_n \quad \text{em } \Gamma \quad (3.32)$$

exatamente como na eq. (3.17).

onde u_{in} são funções polinomiais de interpolação e $\mathbf{d} \equiv [d_n]$ são parâmetros que podem ser fisicamente identificados como deslocamentos de determinados pontos do contorno. O campo de tensões σ_{ij}^s é aproximado pela superposição de dois termos:

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^b = \sigma_{ijm}^* p_m^* + \sigma_{ij}^b \quad (3.33)$$

em que σ_{ij}^b é uma solução particular arbitrária da eq. (3.1) e σ_{ij}^* é a solução homogênea, de modo que

$$\sigma_{ij,j}^b + b_i = 0 \quad \text{no } \Omega \quad (3.34)$$

$$\sigma_{ij,j}^* = \sigma_{ijm,j}^* p_m^* = 0 \quad \text{no } \Omega \quad (3.35)$$

onde p_m^* são parâmetros de força a ser determinados como incógnitas primárias do problema. σ_{ijm}^* são soluções fundamentais com suporte global. Pode-se dizer então que o campo de tensões σ_{ij}^* é aproximado por uma série de soluções fundamentais. Os sobrescritos “*” e “ b ” referem-se respectivamente à *solução fundamental* e a *forças de corpo particulares*.

O campo de deslocamentos u_i^s correspondente ao campo de tensões σ_{ij}^s é expresso como

$$u_i^s = u_i^* + u_i^b + u_i^r = u_{im}^* p_m^* + u_i^b + u_{is}^r c_s \quad \text{em } \Omega \quad (3.36)$$

em que u_i^r está relacionado a deslocamentos de corpo rígido e c_s é um vetor de constantes.

As integrais de contorno da eq. (3.31) podem ser reescritas utilizando-se as aproximações das eqs. (3.32) e (3.35), na forma

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^s \eta_j - t_i) u_i^d d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_{in} d_n d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* p_m^* \eta_j u_{in} d_n d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^b \eta_j u_{in} d_n d\Gamma \quad (3.37)$$

ou

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^s \eta_j - t_i) u_i^d d\Gamma = p_n d_n - H_{mn} p_m^* d_n + p_n^b d_n \quad (3.38)$$

onde

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (3.39)$$

$$\mathbf{p} \equiv p_n = \int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma \quad (3.40)$$

$$\mathbf{p}^b \equiv p_n^b = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^b \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (3.41)$$

A energia de deformação complementar, na eq. (3.31), pode ser reescrita como:

$$U_0^C(\sigma_{ij}^s) \equiv \frac{1}{2} \sigma_{ij}^s C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^s = \frac{1}{2} u_{i,j}^s C_{ijkl} u_{k,l}^s = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^s u_{i,j}^s \quad (3.42)$$

Uma vez que $C_{ijkl} = C_{klij}$, tem-se que:

$$\sigma_{ij}^* u_{i,j}^b = u_{k,l}^* C_{ijkl} u_{i,j}^b = \sigma_{ij}^b u_{i,j}^* \quad (3.43)$$

$$\sigma_{ij}^* u_{i,j}^r = u_{k,l}^* C_{ijkl} u_{i,j}^r = \sigma_{ij}^r u_{i,j}^* = 0 \quad (3.44)$$

Substituindo as expressões de tensões e deslocamentos apresentadas nas eqs. (3.33) e (3.36) na eq. (3.42), chega-se a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_0^C d\Omega &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^b d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^r d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^* d\Omega + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^r d\Omega \right] \quad (3.45) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^b d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^r d\Omega \end{aligned}$$

Aplicando as eqs. (3.43) e (3.44) na eq. (3.45), tem-se:

$$\int_{\Omega} U_0^C d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^b d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega \quad (3.46)$$

Após integrar por partes e uso do teorema de Green, a eq. (3.46) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} U_0^C d\Omega = \frac{1}{2} p_m^* F_{mn} p_n^* + p_n^* b_m + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega \quad (3.47)$$

onde

$$\mathbf{F} \equiv F_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma \quad (3.48)$$

$$\mathbf{b} \equiv b_m = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_i^b d\Gamma \quad (3.49)$$

Reescrevendo o potencial de Hellinger-Reissner da eq. (3.31), utilizando as eqs. (3.38) e (3.47) chega-se a

$$\begin{aligned} -\Pi_R(\sigma_{ij}^s, u_i^d) = & \frac{1}{2} p_m^* F_{mn} p_n^* + p_m^* b_m + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega - p_m^* H_{mn} d_n + \\ & P_n d_n - p_n^b d_n \end{aligned} \quad (3.50)$$

que na forma matricial é

$$-\Pi_R = \mathbf{p}^{*T} \left(\frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{p}^* - \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \right) + \mathbf{d}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (3.51)$$

Impondo que $\delta \Pi_R = 0$ obtém-se, para variações arbitrárias $\delta \mathbf{p}^*$ e $\delta \mathbf{d}$, o sistema de equações matriciais que governam o problema no Método Híbrido de Elementos de Contorno:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (3.52)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (3.53)$$

A matriz \mathbf{H} é a mesma definida para o método consistente de elementos de contorno (CBEM), na eq. (3.21), e a matriz \mathbf{F} é simétrica por construção e é uma matriz de flexibilidade.

Resolvendo para \mathbf{p}^* nas eqs. (3.52) e (3.53), chega-se ao sistema de matrizes

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{*(-1)} \mathbf{H} \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (3.54)$$

onde $\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{*(-1)} \mathbf{H} = \mathbf{K}$ é uma matriz de rigidez. A inversa $\mathbf{F}^{*(-1)}$ tem que ser avaliada em termos de inversas generalizadas, pois \mathbf{F}^* é singular para um

domínio finito Ω . Os resultados em pontos internos são expressos em termos das eqs. (3.35) e (3.36) uma vez que seja obtido \mathbf{p}^* .

Para condições de contorno de Neumann, isto é, quando o vetor de forças nodais equivalentes é conhecido em todo o contorno, caso da maioria dos problemas da mecânica da fratura propostos na literatura, o vetor de parâmetros de força \mathbf{p}^* pode ser obtido diretamente da eq. (3.52), sem a necessidade de avaliação da matriz de flexibilidade definida na eq. (3.17).

4

Uso da função de tensão de Westergaard generalizada

Este capítulo apresenta um breve resumo sobre a utilização de funções de tensão complexa, obtidas pela abordagem de Westergaard, como solução fundamental no Método Híbrido dos Elementos de Contorno. Desenvolve-se a função de tensão de Westergaard generalizada, sua concepção inicial para trincas de abertura semi-elíptica e posterior extensão para trincas com outras funções de abertura.

Também é demonstrada a interpretação física desta solução fundamental em consistência com os conceitos apresentados no Capítulo 3.

4.1.

Funções de tensão de Westergaard generalizada

Conforme exposto no item 2.3, a função de tensão de Westergaard $\phi(z)$ foi desenvolvida em variável complexa e proposta para uma trinca de abertura elíptica presente em uma placa infinita sujeita a um carregamento biaxial remoto:

$$Z(z) = \sigma \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad (4.1)$$

onde σ é a tensão remota e a é metade do comprimento da trinca.

Diversas adaptações das funções de tensão de Westergaard foram desenvolvidas variando as configurações de geometria da trinca e carregamento. Destacam-se aqui dois trabalhos que antecedem diretamente o presente estudo.

O estudo de Dumont e Lopes (2003) foi o primeiro a utilizar uma modificação da função de tensão de Westergaard como solução fundamental no Método Híbrido dos Elementos de Contorno. Eles alteraram a eq. (4.1) adicionando um termo constante para forçar um carregamento na trinca e zerar as solicitações em pontos distantes, sem que isso influencie na natureza do campo de tensões, conforme ilustrado na Figura 4.1, com as funções de tensão modificadas para o modo I e II de trincamento na forma:

$$\begin{aligned} Z_I(z) &= \sigma \left(\frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \\ Z_{II}(z) &= \tau \left(\frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

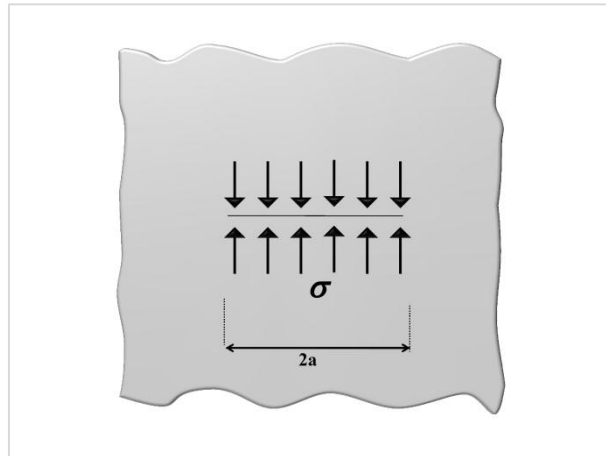


Figura 4.1- Representação gráfica da função de tensão de Westergaard modificada.

Na formulação de Dumont e Lopes (2003) uma trinca, como a trinca curva representada na Figura 4.2-a, com pontos geométricos numerados de 0 a 6, é aproximada por elementos lineares, para representar os pontos campo e cinco parâmetros nodais numerados de 1 a 5 para representar os pontos fonte. Estes parâmetros nodais estão relacionados às forças de superfície dadas pelas funções complexas de Westergaard, indicadas na eq. (4.2), aplicadas como uma sucessão de elementos parcialmente superpostos. Desta forma é possível aproximar qualquer configuração de abertura (modo I) ou deslizamento (modo II) pela superposição de elementos retos de trinca relacionados a funções de Westergaard. A principal desvantagem desta aproximação é que ela não é a mais apropriada quando se deseja representar contornos curvos, quinas e reentrâncias.

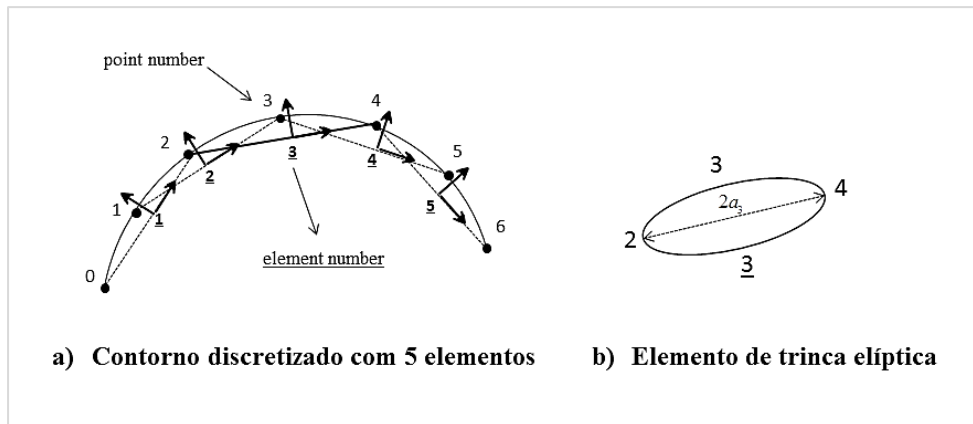


Figura 4.2- Trincas de forma elíptica para simular contornos curvos (Dumont e Lopes, 2003).

Dando continuidade aos estudos de aplicação da função de Westergaard como solução fundamental no HBEM, Dumont e Mamani (2011a, 2011b) propuseram uma formulação mais geral, em que um elemento de trinca, como aqueles mostrados na Figura 4.2, por exemplo, pode ser representado pela superposição de duas trincas semi-elípticas dispostas em sentidos opostos, como ilustrado na Figura 4.4-b. Esta alteração proporciona melhor representação geométrica da trinca, bem como simular furos, quinas e reentrâncias.

A função de tensão que represente uma trinca semi-elíptica foi determinada com base nos estudos de Tada et al (1993), o qual consiste em obter as funções de tensão para trincas com deslocamentos prescritos a partir da abordagem de função de tensão de Westergaard. Sua intervenção foi restrita aos aspectos matemáticos da formulação, para várias formas de abertura de trinca.

A função de tensão $\phi(z)$ para uma trinca com abertura prescrita por uma função $f(x)$, no intervalo $[0, a]$, em função do argumento complexo Z no sistema de coordenadas (x, y) é definida pela expressão

$$\phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{f(x)}{Z-x} dx \quad (4.3)$$

onde a função $f(x)$ para uma trinca semi-elíptica de comprimento a_1 , como

ilustrado na Figura 4.3, é $f = \frac{\sqrt{a_1^2 - x^2}}{a_1}$. Utilizam-se os subíndices 1 e 2 para

indicar cada uma das trincas semi-elípticas que são superpostas.

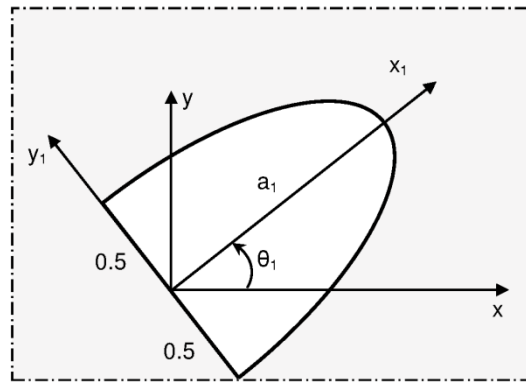


Figura 4.3- Semitrinca de comprimento a_1 rotacionada por um ângulo θ_1 .

A variável complexa Z da eq. 4.3 é dada pela expressão

$$Z = zT \equiv \frac{z}{a_1} e^{-i\theta_1} \equiv \frac{1}{a_1} (x + iy)(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1) \equiv \frac{r}{a_1} e^{i(\theta - \theta_1)} \quad (4.4)$$

onde $T(a_1, \theta_1)$ é um termo complexo de rotação e normalização da trinca semi-elíptica.

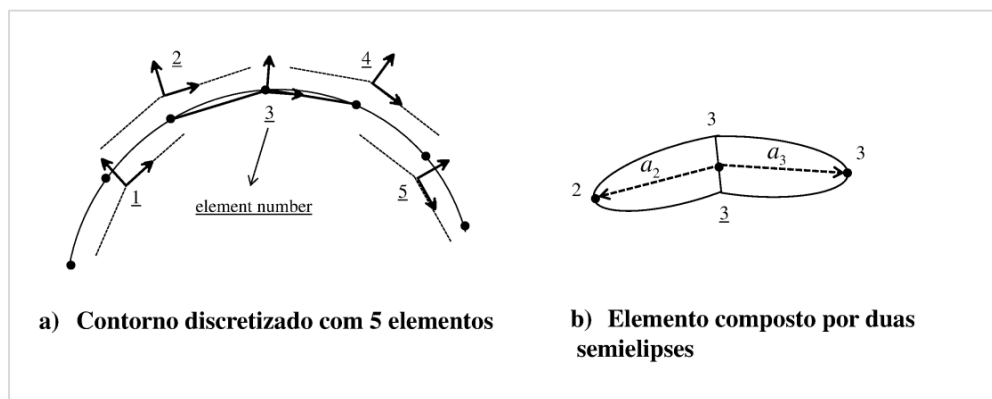


Figura 4.4- Trincas semi-elípticas para representar contornos curvos (Mamani, 2015).

Esta formulação mostrou-se eficiente para a obtenção do campo de tensões na ponta da trinca, assim como para representar contornos externos e furos.

A partir de estudos mais detalhados da representação de contornos (trincas, furos, etc.) por elementos semi-elípticos, Dumont e Mamani (2015) observaram a existência desnecessária de singularidades próxima às faces da trinca, devido ao termo $\sqrt{1/r}$ que aparece na ponta da semi-elipse e que não deveria existir ao longo da face da trinca. A solução proposta por eles foi restringir o uso das trincas de forma semi-elíptica somente aos elementos que retratam a ponta da trinca enquanto

que segmentos internos da trinca passaram a ser representadas por elementos com abertura de forma polinomial. Outra alteração foi a consideração de graus de liberdade que consideram a rotação relativa das faces opostas da trinca, incluídos por meio de elementos de rotação e implementados tanto nas faces quanto nas pontas da trinca.

As novas composições de elementos de trinca propostas por Dumont e Mamani (2015), semelhantes como foi feito na Figura 4.4-b, para semitrincas de comprimento a_1 e a_2 , são ilustradas na Figura 4.5. Reconhece-se que as funções descritas no parágrafo anterior e ilustradas na Figura 4.5 são polinômios hermitianos.

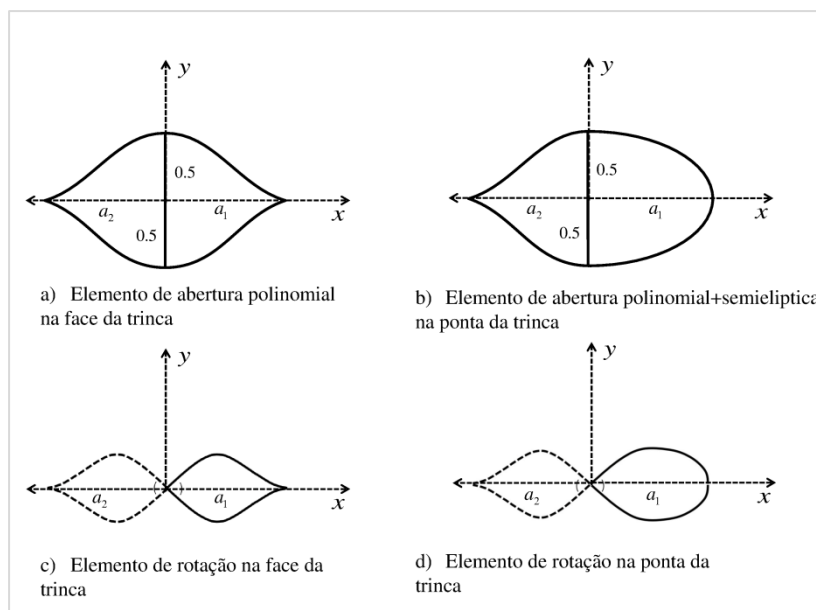


Figura 4.5- Elementos usados para discretizar uma trinca curva geral.

A função de tensão para cada semitrinca que compõe os elementos da Figura 4.5 é obtida utilizando a eq. (4.3) para a função de abertura (f) correspondente e também fazendo uso da transformação de coordenada da eq. (4.4). A Figura 4.6 apresenta as semitrincas estudadas por Dumont e Mamani e suas respectivas funções de tensão e forma de abertura.

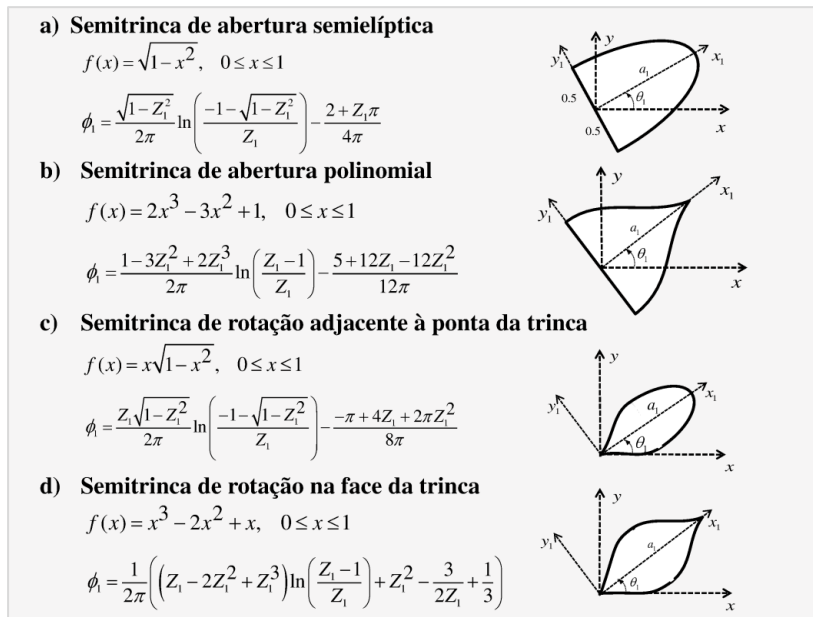


Figura 4.6- Propriedades das semitrincas usadas para representar efeitos de abertura e rotação na face da trinca.

As funções de tensão da Figura 4.6 apresentam singularidades na origem ($Z=0$) e na ponta ($Z=1$) da trinca. Estes casos de singularidade são apresentados e analisados em (Mamani, 2015), onde também foi estudado o comportamento das primeira e segunda derivadas destas funções, visto que são necessárias em problemas de elasticidade. O resumo com cada tipo de singularidade que surge em tais funções é apresentado na Tabela 3.

Tabela 3- Singularidades das funções propostas (Mamani, 2015).

	ORIGEM ($Z=0$)			PONTA ($Z=1$)		
Função	Φ	$\Phi' = \frac{d\Phi}{dZ}$	$\Phi'' = \frac{d\Phi'}{dZ}$	Φ	$\Phi' = \frac{d\Phi}{dZ}$	$\Phi'' = \frac{d\Phi'}{dZ}$
Abertura elíptica	$\ln(r)$	$1/r$	$1/r^2$	\sqrt{r}	$1/\sqrt{r}$	$1/\sqrt{r^3}$
Abertura polinomial	$\ln(r)$	$1/r$	$1/r^2$	—	—	—
Rotação elíptica	—	$\ln(r)$	$1/r$	\sqrt{r}	$1/\sqrt{r}$	$1/\sqrt{r^3}$
Rotação polinomial	—	$\ln(r)$	$\ln(r), 1/r$	—	—	$\ln(r)$

4.2. Interpretação física da solução fundamental

A implementação das funções de tensão ϕ da Figura 4.5 nos métodos de elementos de contorno se dá por meio da inserção destas funções no desenvolvimento das soluções fundamentais, eqs. (3.12) e (3.13) para o BEM e eqs. (3.35) e (3.36) para HBEM, as quais equivalem a tensões e deslocamentos, em problemas de elasticidade, e a fluxo normal e potencial, em problemas de potencial.

O cálculo destas grandezas em função de ϕ é apresentado em (Dumont e Mamani, 2011a) e também a seguir, no capítulo 5. Por ora interessa saber que estas soluções, conforme visto no capítulo 3, podem ser descritas em função do parâmetro de força p_m^* .

Na abordagem que Tada et al. (1993) utilizaram para tratar de trincas com deslocamentos prescritos, quando uma trinca interna em meio infinito é alterada para tomar a forma de abertura elíptica surgem tensões uniformes de compressão entre as faces da trinca, necessárias para manter a forma elíptica. Na formulação de Westergaard generalizada tais tensões são desenvolvidas como parâmetros de forças distribuídas ao longo da trinca, os quais podem ser consistentemente convertidos em uma força p_m^* aplicada na face externa da trinca, de modo a promover a sua abertura, ou em outras palavras, provocar a descontinuidade no meio (Dumont e Mamani, 2011a). A Figura 4.7 esquematiza a interpretação de p_m^* , que pode ser decomposta nas direções x e y .

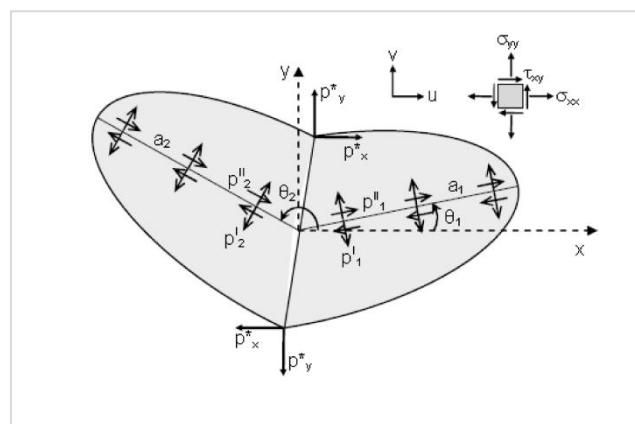


Figura 4.7- Representação do parâmetro de forças p^* na superposição de duas trincas semi-elípticas (Dumont e Mamani, 2011a).

Num problema físico pode-se representar a trinca da Figura 4.7 como na ilustração a seguir, em que a Figura 4.8-a representa a mesma trinca elíptica proposta por Griffith e que pode ser resolvida pela função de tensão de Westergaard. Na Figura 4.8-b tem-se uma tensão remota unitária em um meio infinito. A Figura 4.8-c representa a trinca de deslocamento prescrito da função de tensão generalizada, na qual se tem uma trinca em meio infinito onde atuam tensões de compressão $\sigma_c = 1$ na superfície, estas tensões tendem a zero à medida que se afastam da ponta da trinca. Quando a trinca da Figura 4.8-c é introduzida no meio infinito da Figura 4.8-b, as superfícies tornam-se livres de carregamento, e o resultado é a mesma trinca elíptica da Figura 4.8-a.

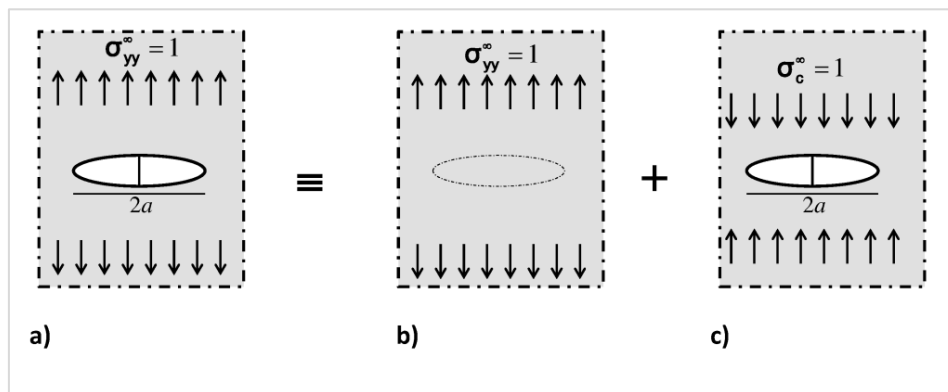


Figura 4.8- Interpretação física das tensões numa trinca.

5

Comparação do comportamento na ponta da trinca utilizando as formulações de Westergaard, generalizada de Westergaard e Williams

Este capítulo apresenta um estudo das grandezas calculadas na ponta de uma trinca utilizando a formulação de Westergaard generalizada e ao mesmo tempo realiza uma comparação com as formulações de Williams e Westergaard. São analisados problemas de elasticidade, nos modos I e II de trincamento, e problemas de potencial. No caso de potencial, embora esteja se usando o termo trinca, na verdade trata-se de obstáculos ao fluxo.

5.1.

Problemas de Elasticidade

Neste item será realizada a análise assintótica dos campos de tensão e de deslocamento em uma trinca em meio infinito, utilizando cinco tipos formulações. A primeira é a abordagem para análise de tensões de Westergaard, a segunda apresenta a solução de Williams, que convertida para coordenadas cartesianas tem os mesmos resultados que o primeiro caso. A seguir vem a formulação que utiliza a função de tensão generalizada do tipo Westergaard, em trincas com abertura elíptica, semi-elíptica e que representam rotação relativa das faces.

As tensões axiais nas direções x e y são representadas, respectivamente, por σ_{xx} e σ_{yy} , e a tensão de cisalhamento por σ_{xy} . Deslocamentos são representados pelas letras u e v , que correspondem às direções x e y , respectivamente.

5.1.1. Formulação de Westergaard

5.1.1.1. Modo I

Conforme foi mostrado no item 2.3, Westergaard (1939) mostrou que o campo de tensões em uma trinca interna de abertura elíptica e comprimento $2a$, sujeita a uma tensão biaxial uniforme σ_∞ no modo I de trincamento, pode ser obtido com uso de uma função de tensão complexa, que neste capítulo será representada pela letra ϕ ,

$$\phi(z) = \sigma \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (5.1)$$

com campo de tensões no modo I dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^I &= \Re(\phi_I) - y\Im(\phi_I') \\ \sigma_{yy}^I &= \Re(\phi_I) + y\Im(\phi_I') \\ \sigma_{xy}^I &= -y\Im(\phi_I') \end{aligned} \quad (5.2)$$

O comportamento da função na eq. (5.1) na extremidade da trinca é obtido substituindo a variável complexa z por sua forma em coordenadas polares centradas na ponta (ver Figura 2.3), de modo que

$$z = a + r(\cos \theta + i \sin \theta) \equiv a + r e^{i\theta} \quad (5.3)$$

e, fazendo $r \rightarrow 0$, tem-se que as expressões da função ϕ_I e sua derivada são:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1 = \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-i\theta/2} = \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1' = -\frac{1}{2r} \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-3i\theta/2} = -\frac{1}{2r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.5)$$

Assim, chega-se às tensões na eq. (5.2), extraindo as partes real e imaginária das eqs. (5.4) e (5.5) e considerando $y = r \sin \theta$.

A expressão do campo de deslocamentos em torno da ponta da trinca no modo I, válido para estado plano de tensão e plano de deformação, é dada por:

$$\begin{aligned} u^I &= \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{2} (\kappa - 1) \Re(\bar{\phi}) - y \Im(\phi) \right) \\ v^I &= \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{2} (\kappa + 1) \Im(\bar{\phi}) - y \Re(\phi) \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que

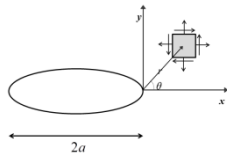
$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{plano de tensão} \\ 3-4\nu & \text{plano de deformação} \end{cases} \quad (5.7)$$

G é o módulo de elasticidade transversal e $\bar{\phi}(z)$ é a integral de ϕ em relação a z . A barra é a notação utilizada por Westergaard (1939) para representar integração. A expressão da função $\bar{\phi}(z)$ na extremidade da trinca é

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\phi}_I = \sqrt{2ar} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.8)$$

Os deslocamentos são obtidos usando as eqs. (5.8) e (5.4) na eq. (5.6), do mesmo modo que se chegou às tensões. Os resultados de deslocamentos e tensões para o modo I de trincamento são apresentados na Tabela 4 abaixo. A fim de facilitar a comparação com a formulação generalizada, está sendo considerado que a tensão σ atuando na trinca é unitária.

Tabela 4- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard em torno da ponta da trinca para o modo I.

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO I	
Função de tensão	$\sigma \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}^I	$\sigma \sqrt{\frac{a\pi}{2r\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$
σ_{yy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{a\pi}{2r\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$
σ_{xy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{a\pi}{2r\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u^I	$\sigma \frac{\sqrt{a\pi r}}{2G\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$
v^I	$\sigma \frac{\sqrt{a\pi r}}{2G\sqrt{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

5.1.1.2. Modo II

A função de tensão para o modo II de trincamento é

$$\phi_{II}(z) = \tau \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (5.9)$$

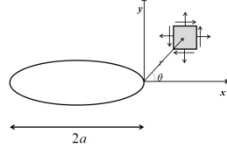
onde τ é a tensão cisalhante. Os campos de tensões e de deslocamentos são definidos por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}'' &= 2\Im(\phi) + y\Re(\phi') \\ \sigma_{yy}'' &= -y\Re(\phi') \\ \tau_{xy}'' &= \Re(\phi) - y\Im(\phi') \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{2}(\kappa + 1)\Im(\bar{\phi}_{II}) + y\Re(\phi_{II}) \right) \\ v'' &= \frac{1}{2G} \left(-\frac{1}{2}(\kappa - 1)\Re(\bar{\phi}_{II}) + y\Im(\phi_{II}) \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Como no procedimento para o modo I, as tensões e deslocamentos para o modo II são apresentados na Tabela 5. Para efeito de comparação nos próximos itens, está se considerando que a tensão cisalhante τ é igual a 1.

Tabela 5- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard em torno da ponta da trinca para o modo II.

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO II	
Função de tensão	$\tau \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}''	$-\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$
σ_{yy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
σ_{xy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(k + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$
v''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(-k + 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

O termo $\sqrt{\pi}/\sqrt{\pi}$ é inserido por conveniência nas expressões de tensão e deslocamentos. Nota-se que o fator de intensidade de tensão, da eq. (2.20) é $K = \sigma \sqrt{\pi a}$.

5.1.2. Formulação de Williams

Williams determinou o campo de tensões e deslocamentos no canto reentrante de uma placa, cujo ângulo tende a 2π , se assemelhando à ponta de uma trinca. A função de tensão de Williams para um ângulo θ (ver Figura 2.5) foi dada na eq. (2.28) e as tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ estão definidas na eq. (2.29).

5.1.2.1. Modo I

Abaixo estão representadas as tensões σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ e $\tau_{r\theta}$ para o modo I de trincamento, ou seja, quando $t_i=0$, desprezando-se os termos de ordem superior, para $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^I &= \frac{1}{4\sqrt{r}} s_1 \left[-5 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta}^I &= \frac{1}{4\sqrt{r}} s_1 \left[-3 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{r\theta}^I &= \frac{1}{4\sqrt{r}} s_1 \left[-\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (5.12)$$

As tensões no sistema de coordenadas polares podem ser convertidas para tensões no sistema cartesiano através da conversão:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \tau_{r\theta} \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \tau_{r\theta} \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tau_{r\theta}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Portanto substituindo as tensões da eq. (5.12) na eq. (5.13), chega-se às tensões de Williams, apresentadas na Tabela 6.

O campo de deslocamentos determinado por Williams é:

$$u_{rr} = \frac{\sqrt{r}}{2G} \left(s_1 \left(\left(-\frac{5}{4} + 4\bar{\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + t_1 \left(\left(-\frac{5}{2} + 4\bar{\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right) + \dots \quad (5.14)$$

$$u_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{r}}{2G} \left(s_1 \left(\left(\frac{7}{2} - 4\bar{\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + t_1 \left(-\left(\frac{7}{2} - 4\bar{\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right) + \dots$$

onde $\bar{\nu}$ é um termo apresentado por Williams (1957) e expresso por

$$\bar{\nu} \equiv \frac{\nu}{1+\nu} \quad (5.15)$$

Os deslocamentos apenas do modo I (para $t_i=0$) e desprezando os termos de ordem superior, são

$$\begin{aligned} u_{rr}^I &= \frac{\sqrt{r}}{2G} s_1 \left(\left(-\frac{5}{4} + 4\bar{\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ u_{\theta\theta}^I &= \frac{\sqrt{r}}{2G} s_1 \left(\left(\frac{7}{2} - 4\bar{\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

A conversão de deslocamentos no sistema polar para o sistema cartesiano é:

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta u_{rr} - \sin \theta u_{\theta\theta} \\ v &= \sin \theta u_{rr} + \cos \theta u_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (5.17)$$

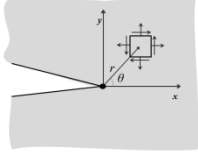
Substituindo $\bar{\nu}$ na eq. (5.16) por sua expressão na eq. (5.15) e em seguida utilizando a conversão da eq. (5.17), temos:

$$\begin{aligned} u^I &= \frac{s_1 \sqrt{r}}{G(1+\nu)} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \nu - 2 \right) \\ v^I &= \frac{s_1 \sqrt{r}}{G(1+\nu)} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \nu - 2 \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

A fim de deixar os deslocamentos em formato semelhante ao da Tabela 4, o coeficiente de Poisson, ν , foi substituído por uma expressão em κ para problemas de estado plano de tensão, $\nu = (\kappa - 3)/(-1 - \kappa)$.

Lembrando que, conforme visto no item 2.5, a constante s_1 pode ser substituída por $-K_I/\sqrt{2\pi}$ e que o fator de intensidade de tensão para uma trinca em meio infinito sob tensão uniforme no modo I de trincamento é $K = \sigma\sqrt{\pi a}$, a constante s_1 será escrita em termos da tensão remota unitária σ .

Tabela 6- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Williams para o modo I.

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO I	
Função de tensão	$\phi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \left[s_1 \left(-\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + t_1 \dots \right] + \dots$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
σ_{yy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
σ_{xy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u^I	$-\sigma \frac{\sqrt{a\pi r}}{2G\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \kappa - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$
v^I	$-\sigma \frac{\sqrt{a\pi r}}{2G\sqrt{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(-1 - \kappa + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$

Observando a Tabela 4 de Westergaard e a Tabela 6, conforme esperado as duas apresentam resultados idênticos.

5.1.2.2. Modo II

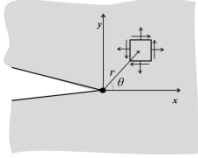
O campo de tensões e deslocamentos de Williams no modo II de trincamento é obtido considerando s_i nulo nas eqs. (2.29) e (5.14). Desprezando-se os termos de ordem mais alta, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{II} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} t_1 \left[-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{\theta\theta}^{II} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} t_1 \left[-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \tau_{r\theta}^{II} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} t_1 \left[\cos \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
 u'' &= \frac{\sqrt{r}}{2G} t_1 \left(\left(-\frac{5}{2} + 4\bar{\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 v'' &= \frac{\sqrt{r}}{2G} t_1 \left(-\left(\frac{7}{2} - 4\bar{\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

Aplicando a eq. (5.19) na eq. (5.13) chega-se ao campo de tensões para o sistema de coordenadas cartesiano. A conversão de deslocamentos é feita pela eq. (5.17). O termo constante t_1 pode ser escrito em termos da tensão de cisalhamento unitária τ , assim como foi realizado com s_1 . A Tabela 7 apresenta os resultados de tensão e deslocamentos, e também coincide com a Tabela 5 de tensões de Westergaard.

Tabela 7- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Williams para o modo II.

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO II	
Função de tensão	$\phi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \left[s_1 \left(-\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + t_1 \dots \right] + \dots$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}''	$-\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
σ_{yy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
σ_{xy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(k + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$
v''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(-k + 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$

5.1.3.

Formulação generalizada de Westergaard para trinca elíptica

Antes de apresentar a avaliação usando as trincas de abertura semi-elíptica e de rotação relativa das faces, propostas por Dumont e Mamani (2011a, 2011b), Figura 4.6, será estudado um caso que se assemelhe mais com a trinca estudada por Westergaard, portanto a trinca de abertura elíptica e comprimento $2a$.

A função de tensão é obtida substituindo na eq. (4.3) a função $f(x)$ de abertura de trinca, que neste caso é $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$, considerando $a=1$. A função gerada e sua primeira e segunda derivada em relação à função complexa Z são (Dumont et al., 2017):

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{\sqrt{Z^2-1}}{2} \frac{\sqrt{Z^2}}{Z} - \frac{Z}{2} \\ \phi_1' &= \frac{\sqrt{Z^2}}{2\sqrt{Z^2-1}} - \frac{1}{2} \\ \phi_1'' &= \frac{\sqrt{Z^2}}{2Z(Z^2-1)^{3/2}}\end{aligned}\quad (5.21)$$

Nas expressões acima se aplicou a identidade $\text{csgn}(Z) \equiv \sqrt{Z^2}/Z$, a qual é mais conveniente para se implementar em um código computacional (Dumont e Lopes, 2003).

A função Z na sua forma polar, eq. (4.4), com centro de coordenadas na ponta da trinca é

$$Z = a_1 + \frac{r}{a_1} e^{i(\theta-\theta_1)} \quad (5.22)$$

Substituindo (5.22), para uma trinca horizontal ($\theta_1=0$), nas funções em (5.21) e levando ao limite quando $r \rightarrow 0$, tem-se o comportamento da função de tensão e suas derivadas na ponta da trinca:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{ar}{2}} e^{\theta i/2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{ar}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \quad (5.23)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-\theta i/2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \quad (5.24)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi'' = \frac{-a}{4r} \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-3\theta i/2} = \frac{-a}{4r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.25)$$

Observa-se que nas expressões (5.23) e (5.24) surge um termo constante quando fazemos $r \rightarrow 0$. Estes termos não fazem parte da expressão original de Westergaard e correspondem às “T stresses”, que são tensões causadas pela contração transversal à trinca, conforme visto no item 2.3.

5.1.3.1. Modo I

O campo de tensões para uma função de tensão de Westergaard generalizada de uma trinca com abertura genérica é expresso por

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^I &= \frac{1}{a_1} \Re(\phi_1') - \frac{y_1}{a_1^2} \Im(\phi_1'') \\ \sigma_{yy}^I &= \frac{1}{a_1} \Re(\phi_1') + \frac{y_1}{a_1^2} \Im(\phi_1'') \\ \tau_{xy}^I &= -\frac{y_1}{a_1^2} \Re(\phi_1'')\end{aligned}\quad (5.26)$$

o campo de tensões acima está definido no sistema de coordenadas local da trinca, (x_1, y_1) da Figura 4.6, o qual coincide com sistema global (x, y) neste capítulo, uma vez que está sendo considerado que a trinca não tem rotação em relação ao eixo horizontal ($\theta_1 = 0$).

As partes real e imaginária da função de tensão e suas derivadas são obtidas a partir das eqs. (5.23)-(5.25) e substituídas nas expressões do campo de tensão da eq. (5.26). Deste modo chega-se ao resultado de tensões que surgem na ponta de uma trinca elíptica sob o modo I de trincamento, apresentadas na Tabela 8.

O campo de deslocamento para a função de tensão de Westergaard generalizada em uma trinca no modo I é expresso por

$$\begin{aligned}u^I &= \frac{1+\nu}{E} \left((1-2\nu) \Re(\phi_1) - \frac{y_1}{a_1} \Im(\phi_1') \right) \\ v^I &= \frac{1+\nu}{E} \left(2(1-\nu) \Im(\phi_1) - \frac{y_1}{a_1} \Re(\phi_1') \right)\end{aligned}\quad (5.27)$$

Após aplicar as eqs. (5.23)-(5.25) à eq. (5.27), chega-se à função de deslocamentos na forma

$$\begin{aligned}
 u' &= (1+\nu) \sqrt{\frac{2r}{a}} \left(\frac{(1-2\nu)}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\sin\theta}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2} \\
 v' &= \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{2r}{a}} \left((1-\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sin\theta}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) - \frac{(1+\nu)}{2E} \frac{r \sin\theta}{a}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

A fim de deixar os deslocamentos em formato semelhante aos de Westergaard, na Tabela 4, o módulo de elasticidade (E) foi substituído por $E = 2G(1+\nu)$, e para o coeficiente ν usou-se uma expressão em κ para problemas de estado plano de deformação, $\nu = (\kappa - 3)/4$. A solução assintótica de tensões e deslocamentos para uma trinca sob tensão remota σ no modo I é apresentada na Tabela 8. Antes disso, é importante destacar que quando se calcula o campo de tensões e deslocamentos, surge na solução o fator $1/2a$ multiplicando as expressões, ele corresponde à tensão atuando na trinca (Figura 4.8-c) a qual é descrita na solução fundamental em termos de parâmetros de força p^* , através da eq. (3.35), para tensões, ou (3.36), para deslocamentos.

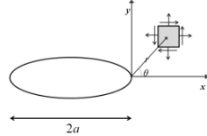
Quando ocorre somente o modo I apenas a componente p_y^* é necessária, e quando só há o modo II de fratura, p_x^* . No caso de uma trinca de comprimento $2a$ sob carregamento unitário no modo I de trincamento (caso da Tabela 8) o parâmetro de força p_y^* é igual à 1.

As expressões nas Tabelas a seguir estão multiplicadas por $2a$ para efeito de comparação com os resultados de Westergaard e Williams, onde está sendo considerada uma tensão $\sigma = 1$.

Observa-se na Tabela 8 que o comportamento do campo de tensões e deslocamentos é similar aos das Tabelas 4 e 6. A diferença entre elas está presente apenas na tensão de compressão unitária, discutida adiante, e que se refere ao efeito “T stress” que surge de forma natural na formulação generalizada.

Tabela 8- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard

Generalizada na ponta da trinca elíptica para o modo I (multiplicado por $2a$).

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO I	
Função de tensão	$\frac{\sqrt{z^2 T^2 - 1}}{2} \frac{\sqrt{z^2 T^2}}{zT} - \frac{zT}{2}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - 1$
σ_{yy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - 1$
σ_{xy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u^I	$\frac{\sigma}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \frac{a}{2G} \frac{(\kappa - 1)}{2}$
v^I	$\frac{\sigma}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

5.1.3.2. Modo II

O campo de tensões e de deslocamentos para uma função de tensão de Westergaard generalizada de uma trinca com abertura genérica é expresso por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{\text{II}} &= \frac{2}{a_1} \Im(\phi_1') + \frac{y_1}{a_1^2} \Re(\phi_1'') \\
 \sigma_{yy}^{\text{II}} &= -\frac{y_1}{a_1^2} \Re(\phi_1'') \\
 \tau_{xy}^{\text{II}} &= \frac{1}{a_1} \Re(\phi_1') - \frac{y_1}{a_1^2} \Im(\phi_1'')
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

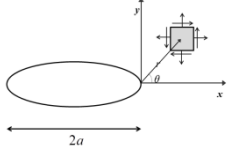
$$\begin{aligned}
 u'' &= \frac{1+\nu}{E} \left(2(1-\nu) \Im(\phi_1) + \frac{y_1}{a_1} \Re(\phi') \right) \\
 v'' &= \frac{1+\nu}{E} \left(-(1-2\nu) \Re(\phi_1) - \frac{y_1}{a_1} \Im(\phi') \right)
 \end{aligned}
 \quad (5.30)$$

Substituindo as partes real e imaginária da função de tensão e suas derivadas, eqs. (5.23) e (5.24), nas eqs. (5.29) e (5.30), têm-se as tensões e deslocamentos no modo II que após simplificações, semelhantes ao processo para o modo I, são expressas na Tabela 9. Considera-se que a tensão cisalhante τ seja unitária e neste caso o parâmetro de força, das eqs. (3.35) e (3.36), é $p_x^* = 1$.

Resultados semelhantes àqueles encontrados no comparativo entre as tabelas do modo I são obtidos entre as tabelas do modo II, Tabelas 9, 5 e 7.

Tabela 9- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard

Generalizada na ponta da trinca elíptica para o modo II (multiplicado por $2a$).

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO II	
Função de tensão	$\frac{\sqrt{z^2 T^2 - 1}}{2} \frac{\sqrt{z^2 T^2}}{zT} - \frac{zT}{2}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}''	$-\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
σ_{yy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
σ_{xy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) - 1$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \kappa + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$
v''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \kappa + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) - \frac{a}{2G} \frac{(\kappa - 1)}{2}$

Avaliando as expressões das Tabelas 8 e 9 observa-se que as expressões obtidas são semelhantes aos resultados de Westergaard (Tabelas 4 e 5). Verifica-se que o campo de tensões é composto por um termo principal proporcional $1/\sqrt{r}$ e por um segundo termo que corresponde à tensão de compressão transversal na trinca, resultado do efeito T stress, o qual não aparece na formulação original de Westergaard, contudo surge naturalmente na formulação generalizada.

À medida que o campo de tensões se aproxima da ponta da trinca ($r \rightarrow 0$), o efeito da tensão de compressão vai diminuindo, uma vez, que o termo singular passa a dominar a solução. Portanto, pode-se dizer que para trinca em meio infinito o fator de intensidade de tensão é o mesmo reconhecido na formulação de Westergaard, Tabelas 4 e 5, porém com tensões obtidas em termos de p^* , conforme a solução fundamental do Método Híbrido de Elementos de Contorno.

Observando apenas os deslocamentos da formulação de Westergaard generalizada, observa-se que apenas o deslocamento u sofre influência do T stress quando está ocorrendo o modo I de trincamento, Tabela 8. Este fenômeno se inverte quando ocorre o modo II (Tabela 9), o qual, na extremidade da trinca somente o deslocamento v apresenta o termo constante.

5.1.4.

Formulação generalizada de Westergaard para elemento de trinca semi-elíptica

A função de tensão de Westergaard generalizada para uma trinca de abertura semi-elíptica com rotação θ_1 e comprimento a_1 é apresentada na Figura 4.6-a e repetida aqui por conveniência, juntamente com suas primeira e segunda derivadas em relação à função complexa Z :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{\sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi} \ln \left(\frac{-1-\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) - \frac{2+Z_1\pi}{4\pi} \\ \phi_1' &= \frac{-1}{2\pi} \left(\frac{Z_1}{\sqrt{1-Z_1^2}} \ln \left(-\frac{1+\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) + \frac{1}{Z_1} + \frac{\pi}{2} \right) \\ \phi_1'' &= \frac{1}{2\pi(1-Z_1^2)} \left(\frac{-1}{\sqrt{1-Z_1^2}} \ln \left(-\frac{1+\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) + \frac{1}{Z_1^2} \right)\end{aligned}\quad (5.31)$$

Substituindo a eq. (5.22), para um trinca horizontal ($\theta_1 = 0$), nas funções da eq. (5.31) e levando ao limite quando $r \rightarrow 0$, identifica-se o comportamento quando se aproxima da extremidade da trinca semielíptica, onde é possível perceber que a diferença em relação à trinca de abertura elíptica (eqs. (5.23)-(5.25)) está no termo constante.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{ar}{2}} e^{\theta i/2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{ar}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \quad (5.32)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi'_1 = \frac{a}{2\sqrt{2r}} e^{-\theta i/2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \quad (5.33)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi''_1 = \frac{a}{4r} \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-3\theta i/2} = -\frac{a}{4r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.34)$$

Na expansão em série das eqs. (5.32)-(5.34), bem como nas expressões seguintes, aparece o termo $\text{csgn} \left(ia \left(1 + \sqrt{1 - (a + r e^{i\theta})^2} \right) / (a + r e^{i\theta}) \right)$. A avaliação desta função $\text{csgn}(\)$ se dá pela análise das partes real e imaginária do termo entre parênteses, no qual

$$\begin{aligned} \text{csgn}(\) &= 1 \text{ se } \Re(\) > 0 \text{ ou } \Re(\) = 0 \text{ e } \Im(\) > 0 \\ \text{csgn}(\) &= -1 \text{ se } \Re(\) < 0 \text{ ou } \Re(\) = 0 \text{ e } \Im(\) < 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Para a função avaliada tem-se

$$\begin{aligned} \Re &= \sqrt{\frac{2r}{a}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \Im &= 1 + \sqrt{\frac{2r}{a}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Avaliando-se as eqs. (5.35) e (5.36), observou-se que para θ variando no intervalo de $[0, \pi/2]$, a função $\text{csgn}(\)$ vale 1.

5.1.4.1. Modo I

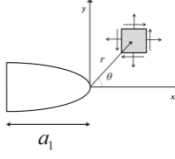
Calcula-se o campo de tensões no modo I, na ponta da trinca de abertura semielíptica, substituindo a parte real e imaginária das eqs. (5.32)-(5.34) na expressão de tensões dada na eq. (5.26). Os resultados das tensões são mostrados na Tabela 10.

De forma semelhante são obtidos os deslocamentos no modo I, ou seja, aplicando eqs. (5.32)-(5.34) no campo descrito na eq. (5.27):

$$\begin{aligned} u^I &= \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{2r}{a}} \left((1-2\nu) \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right) + \frac{1}{4} \sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ v^I &= \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{2r}{a}} \left((1-\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\theta \left(\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

As mesmas substituições, no módulo E e no coeficiente ν , realizadas para a trinca de abertura elíptica são feitas também na eq. (5.37), resultando nas equações da Tabela 10, onde $\sigma = 1$ e, portanto, $p_y^* = 1$. Comparando-se a Tabela 10 com as Tabelas 4, 6 e 8 observa-se que o campo de tensões e deslocamentos é semelhante aos resultados encontrados para trinca elíptica da formulação generalizada, tendo como principal diferença o termo constante decorrente da tensão T stress.

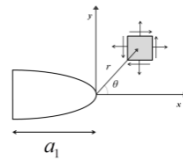
Tabela 10- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca semi-elíptica para o modo I (multiplicado por $2a$).

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO I	
Função de tensão	$\phi_1 = \frac{\sqrt{1-z^2T^2}}{2\pi} \ln \left(\frac{(-1-\sqrt{1-z^2T^2})}{zT} \right) - \frac{1}{2\pi} - \frac{zT}{4}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) - \frac{4+\pi}{2\pi}$
σ_{yy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) - \frac{4+\pi}{2\pi}$
σ_{xy}^I	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u^I	$\frac{\sigma}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \left(\frac{a}{2G} \right) \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) \left(\frac{-\pi-2}{2\pi} \right)$
v^I	$\frac{\sigma}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$

5.1.4.2. Modo II

As tensões e deslocamentos no modo II de trincamento são definidos aplicando as eqs. (5.32)-(5.34) às eqs. (5.29) e (5.30), de forma a gerar os resultados apresentados na Tabela 11, onde $\tau = 1$ e, portanto, $p_x^* = 1$. A Tabela 11 difere das Tabelas 5 e 7 pelas mesma razão que a Tabela 9: o termo constante referente ao T stress.

Tabela 11- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca semielíptica para o modo II (multiplicado por $2a$).

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO II	
Função de tensão	$\phi_1 = \frac{\sqrt{1-z^2T^2}}{2\pi} \ln \left(\frac{(-1-\sqrt{1-z^2T^2})}{zT} \right) - \frac{1}{2\pi} - \frac{zT}{4}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}''	$-\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
σ_{yy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
σ_{xy}''	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) - \frac{4+\pi}{2\pi}$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \kappa + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$
v''	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi a r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \kappa + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \frac{a}{2G} \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) \left(\frac{-\pi-2}{2\pi} \right)$

Avaliando-se os resultados de tensões e deslocamentos apresentados nas Tabelas 10 e 11, verifica-se que a única diferença com referência às expressões de Westergaard (Tabelas 4 e 5) são: o fator $1/2a$, citado no item 5.1.3.1, que está relacionado com a tensão atuante na trinca e é descrito na solução fundamental em

termos de parâmetros de força $p^* = 1$, eqs. (3.35) ou (3.36); e o termo constante, que surge naturalmente na solução, devido à “T stress”.

A diferença em relação à trinca de abertura elíptica está nos termos constantes que divergem devido à mudança na geometria da trinca.

Considerando que a solução fundamental proposta é constituída não por uma trinca semi-elíptica, mas pela superposição de duas trincas dispostas em sentidos opostos, com tensões calculadas, em síntese, pela expressão $\sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2$, constatou-se que o termo constante resultante desta superposição é o mesmo termo -1 que surge na trinca de abertura elíptica nas Tabelas.

As expressões de deslocamentos das Tabelas 10 e 11 também mostram o mesmo comportamento que as da trinca elíptica, onde apenas o deslocamento u^I apresenta influencia do T stress na resposta (Tabela 10) e no modo II (Tabela 11) acontece o fenômeno inverso, isto é, em $(r=0)$ somente o deslocamento v^{II} apresenta o termo constante decorrente do T stress.

5.1.5.

Formulação generalizada de Westergaard para elemento de trinca com rotação relativa das faces

A função de tensão de Westergaard generalizada para um elemento de trinca com rotação relativa das faces (“drilling rotation” na literatura em inglês), mostrada na Figura 4.6-c é, juntamente com suas derivadas:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{Z_1 \sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi} \ln \left(\frac{-1-\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) - \frac{-\pi + 4Z_1 + 2\pi Z_1^2}{8\pi} \\ \phi_1' &= -\frac{2Z_1^2-1}{2\pi \sqrt{1-Z_1^2}} \ln \left(\frac{-1-\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) - \frac{2+\pi Z_1}{2\pi} \\ \phi_1'' &= \frac{Z_1(2Z_1^2-3)}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} \ln \left(\frac{-1-\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) + (1+\pi Z_1-2Z_1^2-\pi Z_1^3) \left((Z_1^2-2)-2\sqrt{1-Z_1^2} \right)\end{aligned}\quad (5.38)$$

Substituindo (5.22) nas funções em (5.38) e levando ao limite quando $r \rightarrow 0$ chega-se às expressões:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi = \sqrt{\frac{r}{2a}} e^{\theta i/2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{r}{2a}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi} \quad (5.39)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi'_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-\theta i/2} - \left(\frac{3+\pi}{2\pi} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \left(\frac{3+\pi}{2\pi} \right) \quad (5.40)$$

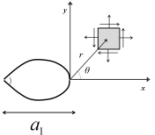
$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi''_1 = -\frac{a}{4r} \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-3\theta i/2} = -\frac{a}{4r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.41)$$

Nas expressões acima também surge o termo em $c \operatorname{sgn}(\)$ que aparece nas trincas semielípticas, o qual, conforme indicado no item anterior, é igual a 1.

5.1.5.1. Modo I

As tensões e deslocamentos no modo I são gerados empregando as eqs. (5.39)-(5.41) nos campos definidos pelas eqs. (5.29) e (5.30), que após as mesmas simplificações descritas para os casos anteriores da formulação generalizada (trinca elíptica e semielíptica) resultam nas expressões presentes na Tabela 12, com tensão σ unitária. As expressões da Tabela 12 são semelhantes aos resultados das Tabelas 8 e 10, com única diferença decorrente da mudança na geometria da trinca.

Tabela 12- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard generalizada na ponta da trinca de rotação relativa das faces para o modo I (multiplicado por 2a).

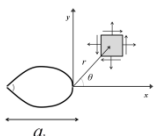
TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO I	
Função de tensão	$\phi_1 = \frac{zT\sqrt{1-z^2T^2}}{2\pi} \ln \left(\frac{-1-\sqrt{1-z^2T^2}}{zT} \right) - \frac{-\pi + 4zT + 2\pi z^2T^2}{8\pi}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ'_{xx}	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right) - \frac{3+\pi}{\pi}$
σ'_{yy}	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right) - \frac{3+\pi}{\pi}$
σ'_{xy}	$\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right)$

Deslocamentos na ponta da trinca	
u^I	$\frac{\sigma}{2G} \sqrt{\frac{\pi ar}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \frac{a}{2G} \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) \left(\frac{-\pi-4}{4\pi} \right)$
v^I	$\frac{\sigma}{2G} \sqrt{\frac{\pi ar}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$

5.1.5.2. Modo II

Os campos de tensões e de deslocamentos no modo II de trincamento são obtidos substituindo as partes real e imaginária das eqs. (5.39)-(5.41) nas eqs. (5.29) e (5.30). A Tabela 13 mostra os resultados, os quais tem o mesmo padrão que os das Tabelas 8 e 11.

Tabela 13- Campo de tensões e deslocamentos usando a formulação de Westergaard Generalizada na ponta da trinca de rotação relativa das faces para o modo II (multiplicado por 2a).

TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO MODO II	
Função de tensão	$\phi_1 = \frac{zT\sqrt{1-z^2T^2}}{2\pi} \ln\left(\frac{-1-\sqrt{1-z^2T^2}}{zT}\right) - \frac{-\pi+4zT+2\pi z^2T^2}{8\pi}$ 
Tensões na ponta da trinca	
σ_{xx}^{II}	$-\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$
σ_{yy}^{II}	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
σ_{xy}^{II}	$\tau \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) - \frac{3+\pi}{\pi}$
Deslocamentos na ponta da trinca	
u^{II}	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi ar}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \kappa + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$
v^{II}	$\frac{\tau}{2G} \sqrt{\frac{\pi ar}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \kappa + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \frac{a}{2G} \left(\frac{1-\kappa}{2} \right) \left(\frac{-\pi-4}{4\pi} \right)$

Novamente a análise das Tabelas 12 e 13 reforça a resposta já verificada nos dois últimos exemplos de utilização da função de tensão generalizada, sendo que a única diferença entre as expressões são os termos constantes, diferentes para cada função de abertura da trinca. Logo, as mesmas observações descritas anteriormente podem ser aplicadas para este modelo de trinca que representa rotação relativa das faces.

5.2. Problemas de Potencial

A solução da equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ para o estado estacionário de transferência de calor em uma placa homogênea, de espessura constante t , com coeficiente de condutividade k , pode ser obtida em função da tensão de Westergaard generalizada ϕ_1 (Dumont e Mamani, 2011a), pela seguinte expressão:

$$u_1 = \frac{1}{k} \Im(\phi_1) \quad (5.42)$$

com fluxos referenciados ao sistema global de coordenadas cartesianas (x, y) :

$$\begin{aligned} q_{x1} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\Im(T_1 \phi_1') \\ q_{y1} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\Re(T_1 \phi_1') \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde ϕ_1' é a derivada da função ϕ_1 em relação à função complexa $z = x + iy$.

O cálculo do potencial e fluxos a partir da função de tensão de Westergaard é realizado seguindo a mesma abordagem das funções de tensão generalizadas:

$$u = \frac{1}{k} \Im(\bar{\phi}) \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial u}{\partial x} = -\Im(\phi) \\ q_y &= -k \frac{\partial u}{\partial y} = -\Re(\phi) \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde $\bar{\phi}$ é a integral da função de tensão em relação a z .

Neste item será avaliada a relação entre as soluções de fluxos e potencial gerado por dois métodos: a abordagem de função de tensão de Westergaard e a de Westergaard generalizada para trincas com abertura elíptica, semielíptica e de rotação das faces.

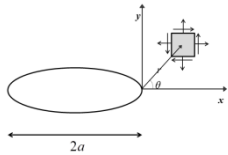
Conforme será observado a seguir, o fluxo q_y tem comportamento semelhante à tensão σ_y quando se trata do modo I de trincamento e o fluxo q_x corresponde à tensão σ_x no modo II.

5.2.1.

Função de tensão de Westergaard

Substituindo as partes real e imaginária das eqs. (5.4) e (5.8) nas expressões de fluxo e potencial das eqs. (5.44) e (5.45), chega-se aos resultados apresentados na Tabela 14, onde está sendo considerado que o fluxo q é unitário.

Tabela 14- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard.

FLUXOS E POTENCIAL		
Função de tensão:	$\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ 	
Potencial e fluxos na ponta da trinca		
q_x	q_y	u
$q\sqrt{\frac{a}{2r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$-q\sqrt{\frac{a}{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$2\frac{q}{k}\sqrt{\frac{ar}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Uma análise interessante entre os resultados de elasticidade e potencial pode ser feita, supondo-se que o fluxo q das expressões na tabela acima tem a mesma magnitude das tensões nos modos I e II de fratura em problemas de elasticidade. Se desconsiderarmos os termos em θ e os parâmetros elásticos (referentes ao campo de tensão), bem como o coeficiente k (propriedades do potencial), verifica-se que o fluxo q_y é igual à tensão $-\sigma_{yy}^I$ (Tabela 4). A mesma relação é verificada entre o fluxo q_x e a tensão $-\sigma_{xx}^{II}$ (Tabela 5).

Além disso, comparando-se a expressão do potencial u com os resultados de deslocamentos, nota-se que o valor do potencial é duas vezes v' (modo I) e u'' (modo II). Convém destacar que as relações na ponta de uma trinca para um problema de elasticidade e as relações para um problema de fluxo em torno de um obstáculo não existem na literatura técnica, exceto pelos trabalhos de Dumont e Lopes (2003) e Dumont e Mamani (2011).

5.2.2.

Função generalizada de Westergaard para trinca elíptica

A função $\phi'_1 (\partial\phi_1/\partial z)$, na eq. (5.43), para função de tensão da trinca de abertura elíptica, eq. (5.21), é

$$\phi'_1 = \frac{\sqrt{Z^2}T}{2\sqrt{Z^2-1}} + \frac{\sqrt{Z^2-1}}{2\sqrt{Z^2}}T - \frac{\sqrt{Z^2-1}\sqrt{Z^2}}{2Zz} - \frac{T}{2} \quad (5.46)$$

Levando em consideração a forma polar de Z na ponta da trinca, eq. (5.22), e fazendo $r \rightarrow 0$, tem-se:

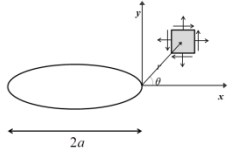
$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi'_1 = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{2r}} e^{-\theta i/2} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2a} \quad (5.47)$$

O potencial e os fluxos são obtidos aplicando as partes real e imaginária das eqs. (5.23) e (5.47) da trinca de abertura elíptica nas expressões das eqs. (5.42) e (5.43).

Assim como foi verificado nos problemas de elasticidade da formulação generalizada, itens 5.1.3-5.1.5, nas expressões do potencial e fluxos surge um fator $1/2a$, devido a análise original da formulação generalizada ter sido feita para a aplicação de uma tensão unitária, isto é, com parâmetro de força $p^* = 1$, e que consequentemente leva à tensão, ou fluxo em problemas de potencial, $1/2a$ (Figura 4.8-c).

A Tabela 15 mostra os resultados obtidos após a multiplicação dos termos por $2a$, a fim de obter um fluxo unitário q e facilitar a comparação com os demais casos.

Tabela 15- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard Generalizada em trinca de abertura elíptica (multiplicado por 2a).

FLUXOS E POTENCIAL		
Função de tensão	$\frac{\sqrt{z^2 T^2 - 1}}{2} \frac{\sqrt{z^2 T^2}}{zT} - \frac{zT}{2}$ 	
Potencial e fluxos na ponta da trinca		
q_x	q_y	u
$q\sqrt{\frac{a}{2r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$-q\sqrt{\frac{a}{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1$	$2\frac{q}{k}\sqrt{\frac{ar}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Comparando-se as soluções de elasticidade e potencial, ambas para trinca elíptica da formulação generalizada, verificam-se as mesmas relações de similaridades entre o fluxo q_y e tensão σ'_{yy} (Tabela 8), fluxo q_x e tensão σ''_{xx} (Tabela 9), e potencial u sendo o dobro de v' e u'' , desconsiderando as propriedades do campo de tensão e potencial.

As expressões de fluxo e potencial geradas pela função de tensão de Westergaard generalizadas para a trinca elíptica correspondem às mesmas soluções obtidas anteriormente pela função de tensão de Westergaard (Tabela 14), porém com o fluxo q sendo calculada em termos de p^* como $p^*/2a$ e levando em conta o fato que o termo constante que surge da abordagem de trinca com deslocamento elíptico prescrito tem efeito reduzido na reposta à medida que se aproxima da ponta da trinca.

Os resultados acima se repetem nas próximas trincas avaliadas de abertura (semielíptica e de rotação das faces), tendo como única diferença os termos constantes, que variam com a função de abertura da trinca.

5.2.3.

Função de tensão de Westergaard generalizada para elemento de trinca semielíptica

Em problemas de potencial a derivada da função ϕ para trinca semielíptica é (Dumont e Mamani, 2011b)

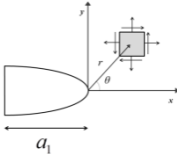
$$\Phi'_1 = \frac{-T}{2\pi} \left(\frac{Z_1}{\sqrt{1-Z_1^2}} \ln \left(-\frac{1+\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) + \frac{1}{Z_1} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.48)$$

Calculando-se o limite da eq. (5.48) quando $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi'_1 = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{-\pi - 4}{4\pi a} \quad (5.49)$$

Aplicando as eqs (5.32) e (5.49) nas eqs. (5.42)-(5.43), chega-se ao resultado apresentado na Tabela 16, com fluxo $q = 1$.

Tabela 16- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard Generalizada em trinca semielíptica (multiplicado por 2a).

FLUXOS E POTENCIAL			
Função de tensão	$\phi_1 = \frac{\sqrt{1-z^2T^2}}{2\pi} \ln \left(\frac{\left(-1-\sqrt{1-z^2T^2}\right)}{zT} \right) - \frac{1}{2\pi} - \frac{zT}{4}$		
Potencial e fluxos na ponta da trinca			
q_x	q_y	u	
$q\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$-q\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{-4-\pi}{\pi}$	$2\frac{q}{k}\sqrt{\frac{ar}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	

Comparando-se as expressões de potencial e fluxo da Tabela 16 com o resultado de Westergaard (Tabela 14), verifica-se novamente que o que difere é o cálculo do fluxo q dado na formulação generalizada em termos de p^* como $p^*/2a$ e o termo constante que surge devido à abordagem de trinca com deslocamento elíptico prescrito e que tem efeito reduzido à medida que $r \rightarrow 0$.

Também a mesma relação entre fluxo e tensão, e potencial e deslocamentos verificados na trinca elíptica podem ser reproduzidos para a trinca semielíptica.

5.2.4.

Função generalizada de Westergaard para elemento de trinca de rotação relativa das faces

A função $\phi_1' (\partial \phi_1 / \partial z)$, na eq. (5.43), para função de tensão da trinca que representa rotação relativa das faces (“drilling rotation”), eq. (5.38), é

$$\Phi_1' = -T \left(\frac{2Z_1^2 - 1}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} \ln \left(\frac{-1 - \sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) - \frac{2 + \pi Z_1}{2\pi} \right) \quad (5.50)$$

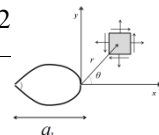
Quando se expande em série aparece o termo $\text{csng} \left(\left(-1 - \sqrt{1 - \frac{(a + re^{\theta i})^2}{a^2}} \right) i \right)$, em que as parte real e imaginária do termo entre parênteses são $\Re = -\sqrt{2r/a} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $\Im = -1 - \sqrt{2r/a} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Para θ variando entre $[0, \pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi]$, $\text{csng}(\)$ vale -1 .

Calculando-se o limite da eq. (5.50) quando $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1' = -\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \left(\frac{3 + \pi}{2\pi a} \right) \quad (5.51)$$

Aplicando as eqs. (5.39) e (5.50) às eqs. (5.42)-(5.43), chega-se ao resultado apresentado na Tabela 17, com $q = 1$.

Tabela 17- Potencial e fluxos obtidos pela função de tensão de Westergaard Generalizada em trinca de rotação relativa das faces (multiplicada por $2a$).

FLUXOS E POTENCIAL		
Função de tensão	$\phi_1 = \frac{zT\sqrt{1-z^2T^2}}{2\pi} \ln \left(\frac{-1-\sqrt{1-z^2T^2}}{zT} \right) - \frac{-\pi+4zT+2\pi z^2T^2}{8\pi}$	
Potencial e fluxos na ponta da trinca		
q_x	q_y	u
$q\sqrt{\frac{a}{2r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$-q\sqrt{\frac{a}{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3+\pi}{\pi}$	$2\frac{q}{k}\sqrt{\frac{ar}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Assim como as outras trincas da formulação generalizada (elíptica e semielíptica), o que diferem os resultados da Tabela 17 com os de Westergaard são as particularidades da formulação generalizada: o cálculo do fluxo dado como solução fundamental em termos de p^* , e o termo constante que surge da formulação de deslocamentos prescritos.

As mesmas relações entre problemas elasticidade (Tabelas 12 e 13) e problemas de potencial com fluxo em torno de um obstáculo (Tabela 17), já verificadas nos casos anteriores foram observadas neste modelo de trinca também.

5.3.

Exemplo de aplicação da formulação de Westergaard generalizada a trincas retas inclinadas

Os exemplos a seguir têm por propósito ilustrar a validade da função de tensão generalizada no estudo de parâmetros na ponta da trinca. Será obtido o fator de intensidade de tensão (K) através da formulação generalizada de Westergaard, com a função de tensão aplicada como solução fundamental nos pontos nodais do contorno externo e da trinca. Exemplos semelhantes de trincas retas e curvas foram resolvidos em trabalhos anteriores, com bons resultados, por Mamani (2011, 2015). Neste item é verificada a aplicação do método a trincas inclinadas e também com carregamento biaxial.

Os exemplos serão resolvidos utilizando-se o Método Híbrido de Elementos de Contorno, o qual para problemas de mecânica da fratura pode ser simplificado, de forma que os valores dos fatores de intensidade de tensão são obtidos diretamente a partir dos elementos do vetor \mathbf{p}^* (dado na eq. (3.52)) correspondentes à ponta da trinca. Os fatores K_I e K_{II} para uma trinca descrita pela função generalizada são

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{\sqrt{\pi a_{(n)}}}{2a_{(n)}} p_{y(n)}^* \\ K_{II} &= \frac{\sqrt{\pi a_{(n)}}}{2a_{(n)}} p_{x(n)}^* \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde n corresponde ao elemento da extremidade da trinca.

Quando ocorre o modo misto os fatores de intensidade de tensão são dados pela expressão

$$\begin{Bmatrix} K_{I(n)} \\ K_{II(n)} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{\pi a}}{2a} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{x(n)}^* \\ p_{y(n)}^* \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

na qual $\begin{Bmatrix} p_{x(n)}^* \\ p_{y(n)}^* \end{Bmatrix}$ são as incógnitas primárias do problema.

5.3.1. Trinca em meio infinito

Utilizando-se apenas elementos de trinca semi-elípticos analisa-se o problema de uma placa infinita com uma trinca de tamanho $2a$ num ângulo θ com o eixo x , sob tensão biaxial, $\sigma_x = s\sigma_y$, Figura 5.1. A solução de referência para este exemplo foi apresentada por Castro e Meggiolaro (2009):

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \sigma \sqrt{\pi a} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + s \sin^2 \theta \\ (1-s) \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

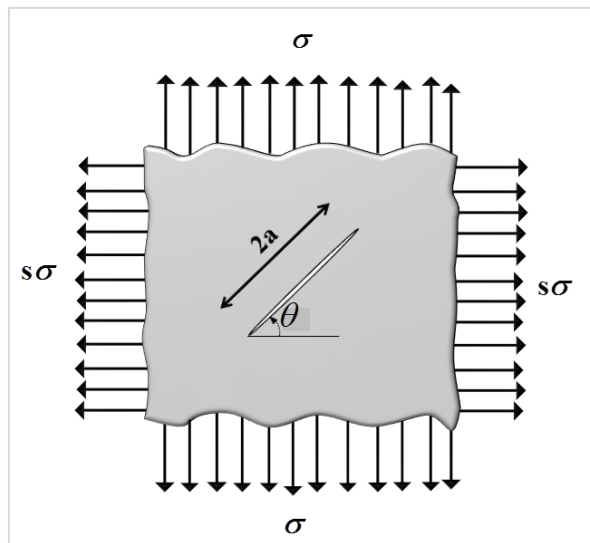


Figura 5.1- Trinca em uma placa infinita e carga biaxial.

Adotou-se $a=1$ e $\sigma_y = \sigma = 1$. O exemplo foi avaliado para três casos diferentes. No primeiro caso $\sigma_x = 2\sigma_y$ e o ângulo de rotação é $\theta = 30^\circ$, no segundo caso usou-se o mesmo carregamento anterior com $\theta = 60^\circ$, e no último mudou-se o carregamento, $\sigma_x = 4\sigma_y$, e manteve-se o mesmo ângulo $\theta = 60^\circ$.

Os valores de K_I e K_{II} numéricos são apresentados na Figura 5.2. Nota-se que resultados obtidos numericamente tendem a manter a mesma resposta independente da quantidade elementos utilizados na discretização, exceto uma pequena variação verificada quando se utiliza 3 elementos.

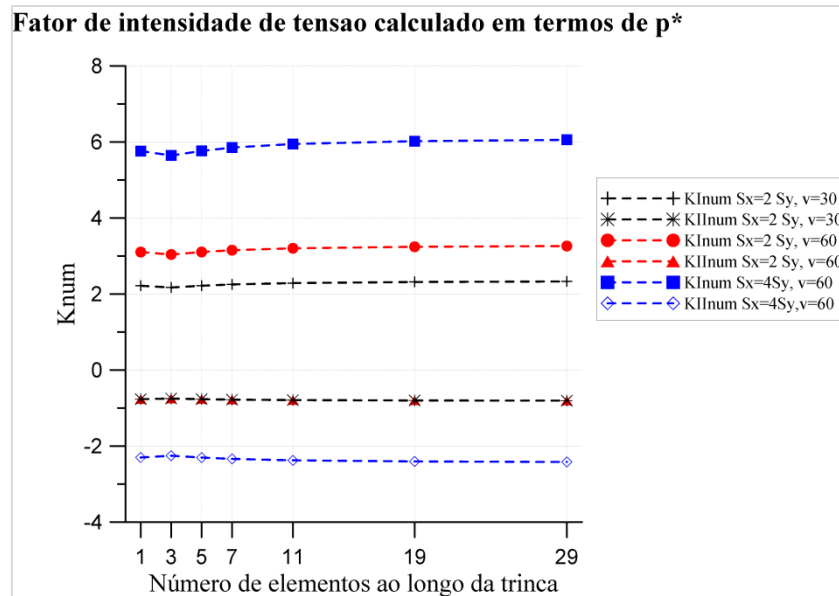


Figura 5.2- Fatores de intensidade de tensão para cada tipo de carregamento do item 5.3.1.

A Figura 5.3 mostra os resultados da relação K_{num}/K_{ana} , avaliando-se os fatores K_I e K_{II} dos três casos. Observa-se que os três exemplos obtiveram resultados idênticos, ocorrendo inclusive a sobreposição dos gráficos. Este fato se evidencia mais quando se calcula a norma de erro da resposta

$$\varepsilon = \frac{|K_{ana} - K_{num}|}{|K_{ana}|} \quad (5.55)$$

cujos resultados estão ilustrados na Figura 5.4.

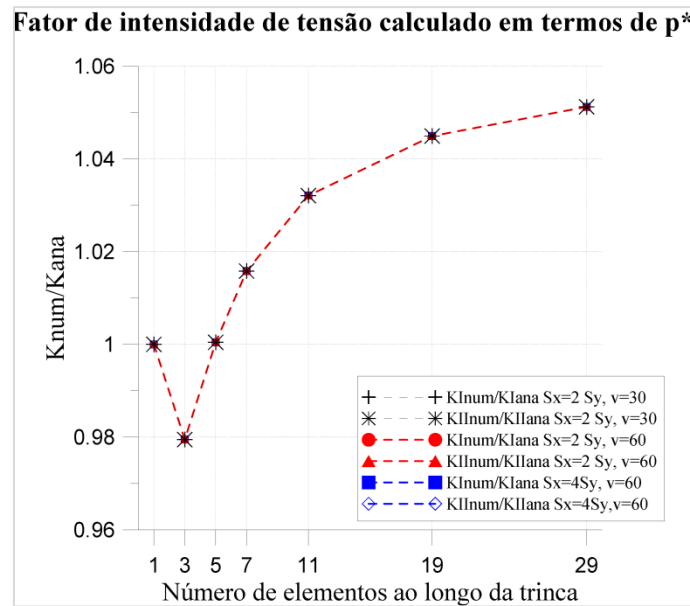


Figura 5.3- Fatores de intensidade de tensão K para a trinca da Figura 4.6.

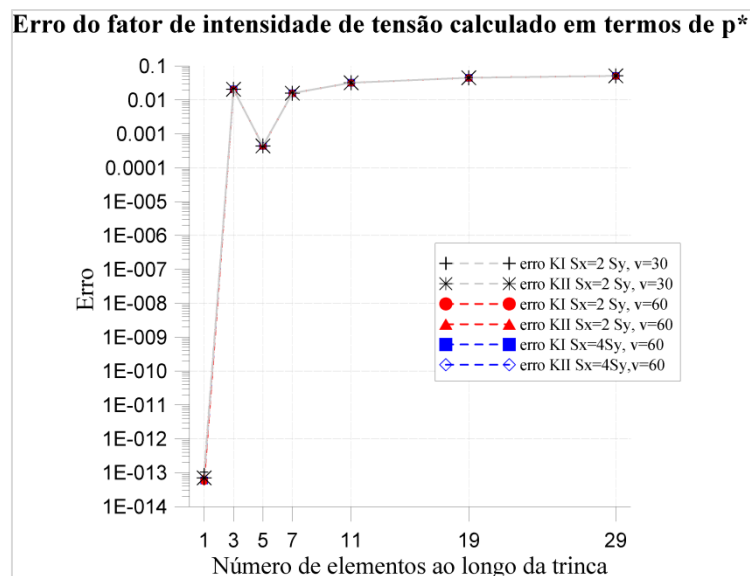


Figura 5.4- Erro dos fatores de intensidade de tensão K para a trinca da Figura 4.6.

Também se avaliou o problema com o caso de carregamento $\sigma_x = \sigma_y$, com apenas o modo I acontecendo. Pretende-se neste exemplo avaliar o comportamento para várias razões de distribuição (progressão geométrica) dos elementos ao longo das faces da trinca, começando nas extremidades da trinca até o centro. As Figuras 5.5 e 5.6 mostram os resultados de K_I , onde é possível observar um padrão na natureza da resposta, que é o mesmo para o exemplo

anterior e que também já havia sido verificado em estudos anteriores, em que a utilização de apenas um elemento de trinca alcança o resultado analítico, com erro de aproximação 10^{-13} , para razão igual a 1. Também se percebe que a razão de distribuição igual a 1 atinge resultados melhores quando se usam até 5 elementos. Para números maiores de elementos a razão de distribuição igual a 1.1 gerou menos erros, porém de modo geral, para todas as razões de distribuição o erro tende a crescer com o aumento de elementos.

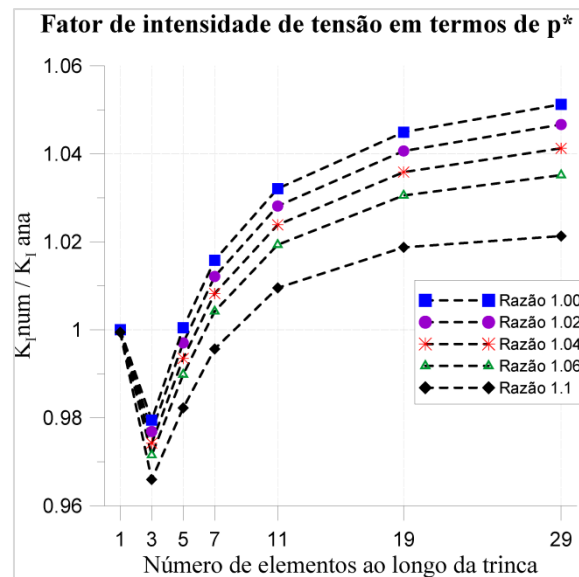


Figura 5.5- Fatores de intensidade de tensão para várias razões de distribuição de elementos de trinca.

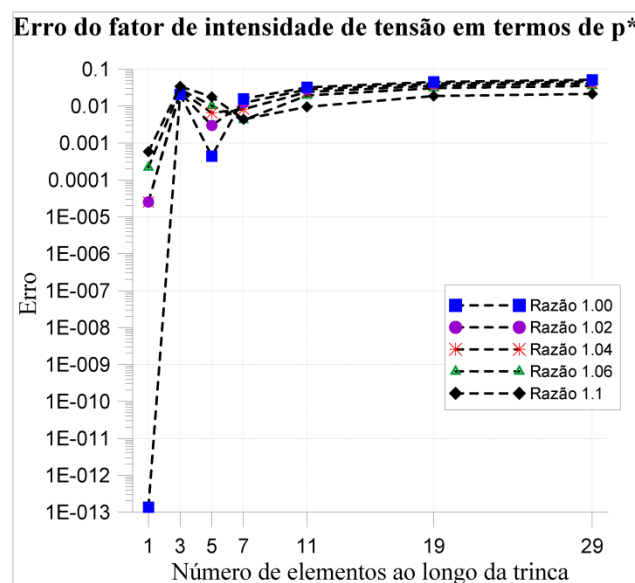


Figura 5.6- Erro dos fatores de intensidade de tensão KI para várias razões de distribuição de elementos de trinca.

5.3.2. Trinca em meio finito

Neste segundo problema tem-se uma placa retangular com trinca central inclinada. A trinca tem comprimento $2a$ e está inclinada a 45° em relação aos lados da placa. A geometria e o carregamento são dados na Figura 5.7. Para a discretização do contorno da placa, utilizaram-se nas arestas onde está aplicado o carregamento 8 elementos de trinca, e nas laterais selecionou-se uma região mais próxima à ponta da trinca, para ser dividida em dois segmentos, cada um com 10 elementos e razão de distribuição de 0.995 para um segmento e 1.005 para o segmento adjacente, de maneira a melhorar a discretização á medida que se aproxima da ponta da trinca. A discretização é detalhada na Figura 5.8 .

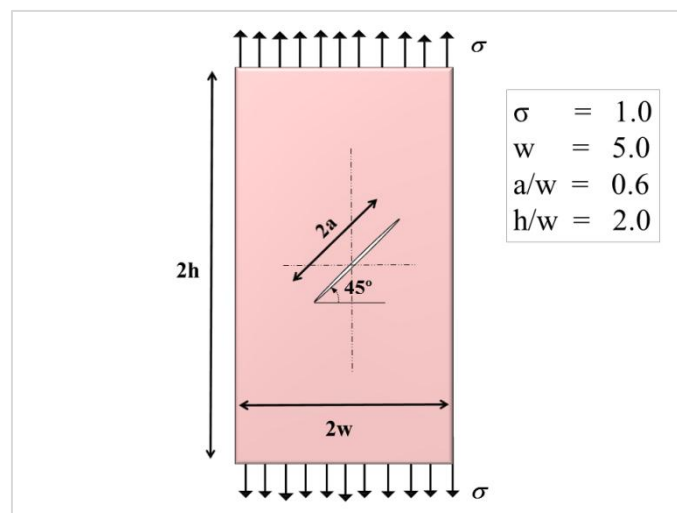


Figura 5.7- Placa retangular com uma trinca inclinada central.

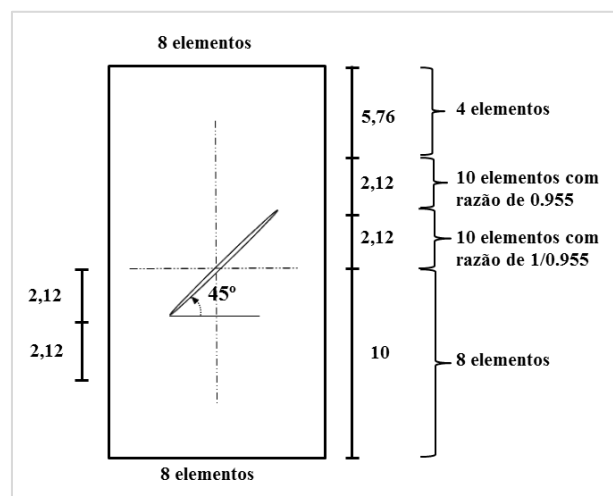


Figura 5.8- Discretização do contorno finito contendo a trinca utilizada no exemplo da Figura 4.11.

Os valores utilizados como referência são os fatores de intensidade de tensão normalizados dados por Murakami (1987, apud Murthy e Mukhopadhyay, 2001).

$$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 0.6611$$

$$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 0.5674 \quad (5.56)$$

As Figuras 5.9 e 5.10 mostram, respectivamente, os resultados da relação K_{num}/K_{ana} e do erro ε da eq. (5.55). Observa-se que a relação K_{num}/K_{ana} para acima de 5 elementos apresenta uma resposta semelhante àquelas apresentadas para meio infinito, Figura 5.5 e Figura 5.6, em que resultados numéricos e de referência vão se distanciando à medida que se aumenta o número de trincas. Este comentário também é facilmente observado nos gráficos de erro.

Para poucos elementos de trinca (1 a 5) não há uma concordância entre os resultados de $K_{I_{num}}$ e $K_{II_{num}}$, diferente do que foi observado no exemplo em meio infinito, no qual ambos os fatores apresentaram melhores resultados quando se utilizou somente um elemento de trinca, no atual caso $K_{I_{num}}$ obteve $\varepsilon = 2.56 \times 10^{-2}$ com três elementos de trinca, enquanto que $K_{II_{num}}$ gerou $\varepsilon = 1.53 \times 10^{-3}$ com 5 elementos de trinca. Esta perda de precisão deve ser decorrente da proximidade da ponta da trinca ao contorno externo.

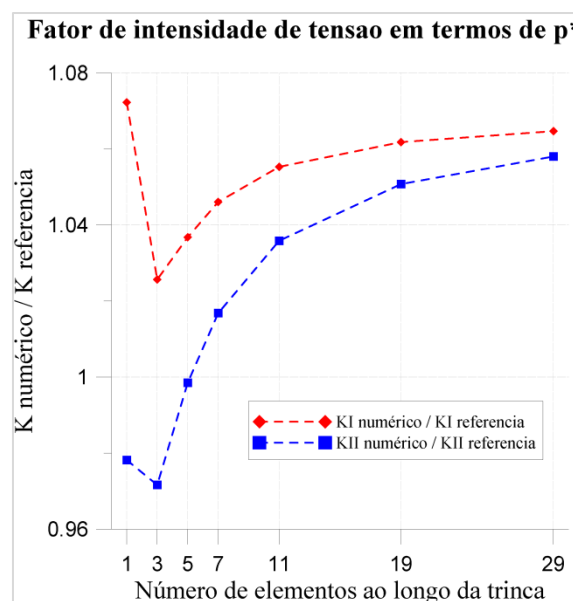


Figura 5.9- Fatores de intensidade de tensão para trinca inclinada em meio finito.

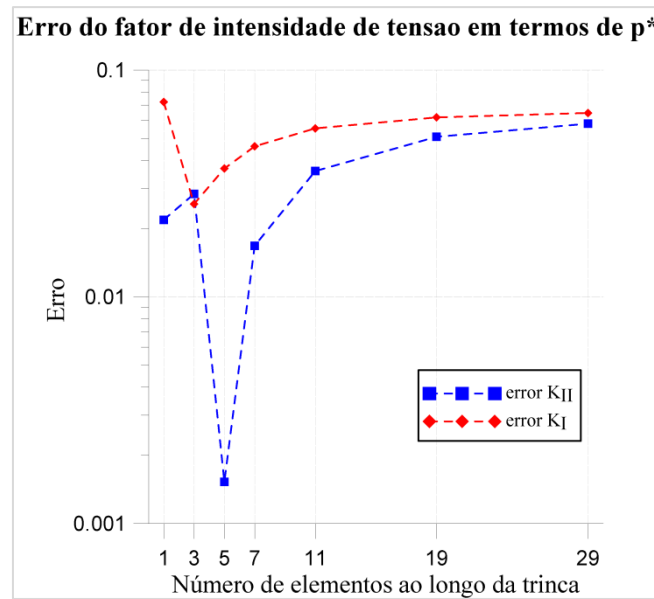


Figura 5.10- Erros dos fatores de intensidade de tensão para trinca inclinada em meio infinito.

Os diversos casos analisados nestes dois últimos itens, exemplos de meio infinito e finito para trinca inclinada, exemplificam a consistência do método para a análise de trincas. Embora os exemplos de meio infinito tenham apresentado resultados mais satisfatórios, erros da ordem de 10^{-13} para um elemento de trinca da Figura 5.6, por exemplo, os casos para meio finito atingiram também valores razoáveis, haja vista que se trata de problema com relação $a/w = 1/1,5$, onde, para essa mesma razão, Mamani (2011) já havia verificado queda nos resultados numéricos de K_{num} decorrente da influência do contorno. Também deve ser necessário investigar como os resultados de referência foram obtidos.

6

Formulação no Método de Elementos de Contorno para problemas de potencial

Neste capítulo é apresentada a aplicação da função de tensão de Westergaard generalizada como solução fundamental no método dos elementos de contorno convencional, mais especificamente na elaboração da matriz \mathbf{G} , que compõe o sistema de equações do BEM. Seu desenvolvimento segue a abordagem utilizada por Dumont e Mamani (2011a), no qual é construída a matriz \mathbf{H} do Método Híbrido dos Elementos de Contorno e que é a mesma matriz do BEM.

O presente desenvolvimento está direcionado a problemas de potencial, e utilizam-se na solução fundamental somente trincas de abertura elíptica, ou seja, superposição de duas trincas semi-elípticas.

A convergência do método é avaliada para a representação de contornos fechados e abertos.

6.1.

Construção das matrizes do BEM

Conforme apresentado no Capítulo 3, a equação básica da formulação convencional do método de elementos de contorno é a eq. (3.29), com a matriz \mathbf{H} expressa na eq. (3.21) e a matriz \mathbf{G} na eq. (3.22). Em problemas de potencial, a solução fundamental se refere ao potencial u^* e ao fluxo q^* . Recordar-se que fala-se genericamente de trincas, como para problemas de elasticidade, porém na verdade trata-se de obstáculos ao fluxo.

Recordar-se que a solução fundamental está sendo representada por uma trinca elíptica, composta pela superposição de duas outras trincas de abertura semi-elíptica, de comprimentos a_1 e a_2 rotacionadas de ângulos θ_1 e θ_2 , de forma a comporem linhas de salto potencial (que correspondem a linhas de descontinuidade de deslocamentos ou trincas no caso de elasticidade) ao longo do contorno Γ de um corpo de domínio Ω , com o segmento 2 antes do segmento 1, como está mostrado na Figura 6.1.

Potencial e fluxo para cada semielipse são calculados a partir da função de tensão generalizada, por meio das eqs. (5.42) e (5.43). O fluxo normal é

$$q_{nl} = -q_{x1}n_x - q_{y1}n_y \text{ ao longo de } \Gamma \quad (6.1)$$

onde n_x e n_y são as projeções do vetor normal unitário externo \vec{n} .

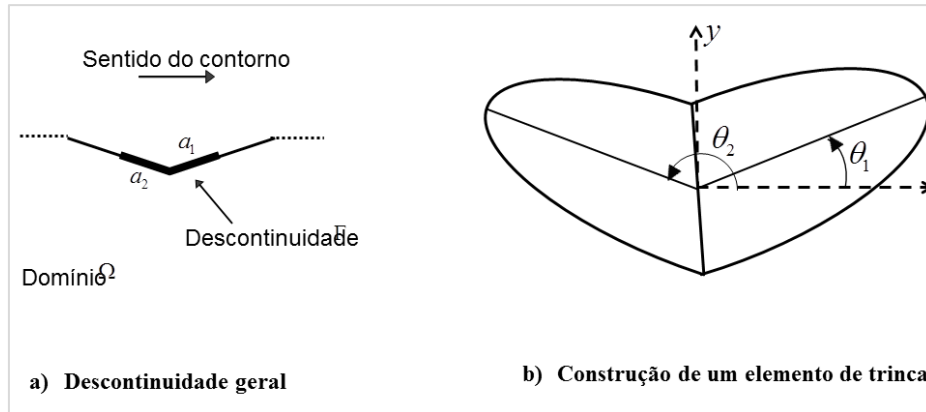


Figura 6.1- Construção de um elemento de descontinuidade a partir de duas semitrincas (Adaptado de Dumont e Mamani, 2015).

O efeito combinado do campo potencial devido à superposição das semitrincas 1 e 2 é dado por

$$u = u_1 - u_2 \quad (6.2)$$

e a superposição de efeitos dos fluxos é

$$q_x = q_{x1} - q_{x2} \text{ e } q_y = q_{y1} - q_{y2} \quad (6.3)$$

6.1.1. Matriz **H**

A elaboração da matriz **H** foi desenvolvida por Dumont e Mamani (2011a, 2011b). Sua expressão geral para problemas de potencial é

$$\mathbf{H} \equiv H_{ki} = - \int_{\Gamma} (q_{xk}^* n_x + q_{yk}^* n_y) N_i |J| d\xi \quad (6.4)$$

no qual o fluxo q^* é definido pelas eqs. (6.1) e (6.3). O índice k representa o ponto fonte ou ponto nodal onde a descontinuidade é aplicada, enquanto que o índice i corresponde ao ponto fonte, ou seja, ponto nodal em que o fluxo é medido.

6.1.2. Matriz **G**

A expressão da matriz **G** para problemas de potencial é

$$G_{kg} = \int_{\Gamma} u_k^* N_g J d\xi \quad (6.5)$$

na qual a solução fundamental u^* está definida pela eq. (6.2), os índices k e g , referem-se, respectivamente, ao ponto fonte e ao ponto campo. N_g e N_i são funções de interpolação do elemento linear com coordenada natural $\xi \in [0,1]$.

6.2. Aplicação numérica

Neste item serão avaliados exemplos de aplicação da solução fundamental baseada na função de tensão de Westergaard generalizada em contornos fechados, externos e internos (furos), e para uma trinca em meio infinito.

Em contornos externos e furos, um contorno genérico é composto por uma sucessão de elementos da solução fundamental. Estes elementos ficam superpostos, conforme ilustrado na Figura 6.2.

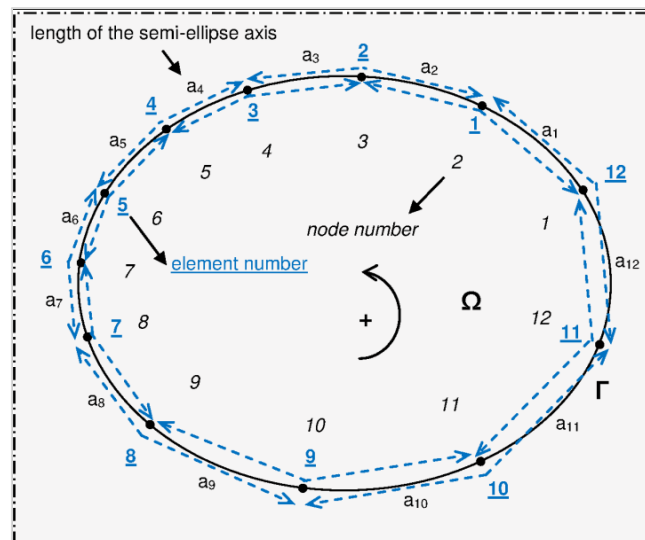


Figura 6.2- Exemplo de um corpo discretizado com 12 elementos de contorno lineares (Dumont e Mamani, 2011a).

O sentido da numeração é anti-horário (positivo) para contorno que encerra um domínio Ω e horário (negativo) para furos ou cavidades.

A simulação de uma trinca interna é obtida de modo semelhante à modelagem de um furo no domínio, ou seja, com numeração no sentido horário. Contudo, para uma trinca com n nós, três nós fictícios são introduzidos, conforme ilustrado na Figura 6.3-a. Em seguida, após as avaliações numéricas de todas as matrizes, os graus de liberdade que não compõem a trinca original são eliminados. Na matriz **H** eliminam-se linhas e colunas (pontos fonte e campo, respectivamente) referentes aos nós 1, $n+2$ e $n+3$, de forma a se obter uma matriz **H** da ordem de $n \times n$. Na matriz **G** eliminam-se as mesmas linhas da matriz **H** (ponto fonte), enquanto que para as colunas (pontos campo), uma vez que correspondem aos fluxos normais no contorno t_i da equação (3.18), consideram-se mais pontos nodais, de modo que são eliminadas as colunas $2 \times (n+2) - 1$, $2 \times (n+2)$, $2 \times (n+3) - 1$ e $2 \times (n+3)$, resultando em uma matriz **G** de ordem $n \times 2n$. A Figura 6.3-b ilustra como é feito esse arranjo nas matrizes.

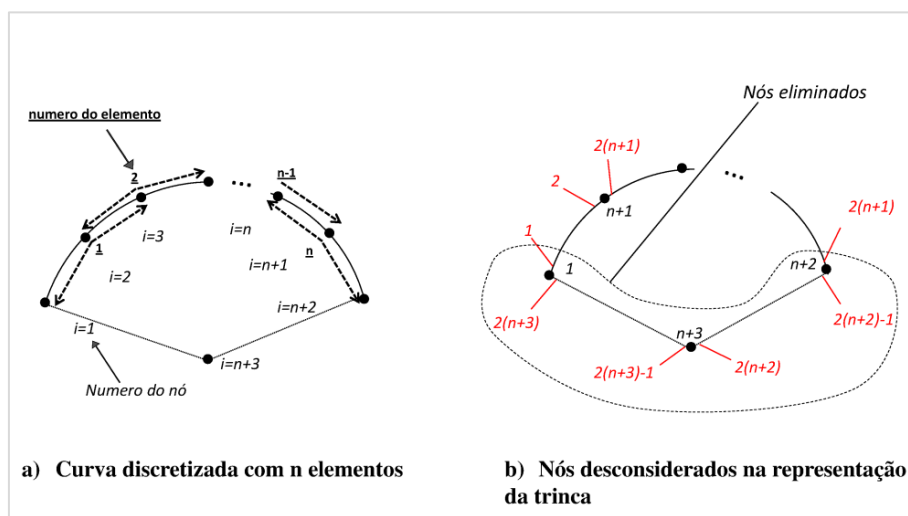


Figura 6.3- Modelagem da trinca interna.

Os vetores também são adaptados para retratar a trinca. Os nós dos pontos campo anulados em **H** e em **G** correspondem aos pontos nodais eliminados em **d** e **t**.

A seguir são apresentados exemplos de aplicação da função de tensão de Westergaard para a verificação do seu uso no desenvolvimento das matrizes que compõem o sistema de equações do método convencional. A matriz **H** é avaliada inicialmente no item 6.2.1 a partir da obtenção de potenciais e fluxos em pontos

internos, como formulado no Método Híbrido de Elementos de Contorno, que utiliza a mesma matriz \mathbf{H} do método convencional. Em seguida as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} são analisadas por meio da norma de erro do sistema de equações do método convencional, para problemas de domínio finito, item 6.2.2, e domínio aberto, item 6.2.3.

6.2.1.

Exemplo de análise em pontos internos

Este exemplo consiste em obter o potencial e gradientes em pontos do domínio do problema. Esta tarefa pode ser realizada utilizando somente a matriz \mathbf{H} do sistema de equações, no contexto da formulação híbrida de elementos de contorno.

O problema é resolvido usando as condições de contorno do tipo Neumann. Para domínio finito, \mathbf{H} é uma matriz singular e os gradientes nodais equivalentes \mathbf{p} são autoequilibrados. Este problema admite uma única solução para \mathbf{p}^* , a ser obtido com a ajuda dos conceitos de matrizes inversas generalizadas.

O exemplo a ser verificado consiste em um meio contínuo Ω^∞ onde é aplicada uma fonte potencial logarítmica $F_1 = 1/4\pi \ln((x+5)^2 + (y-5)^2)$, ilustrado na Figura 6.4. O potencial e os gradientes gerados por esta fonte são aplicados ao longo do contorno mostrado na figura, criando um problema (para a equação de Laplace) com solução analítica conhecida. O contorno da Figura 6.4 também apresenta um furo e uma trinca interna com comprimento $2a = 7,5$. Recordar-se que o sentido da numeração do contorno externo é anti-horário, e do furo e da trinca é horário.

O segmento de reta AB contém 40 pontos internos uniformemente distribuídos, onde serão medidos os potenciais u e os gradientes q_x e q_y . Os resultados numéricos são comparados com a solução analítica.

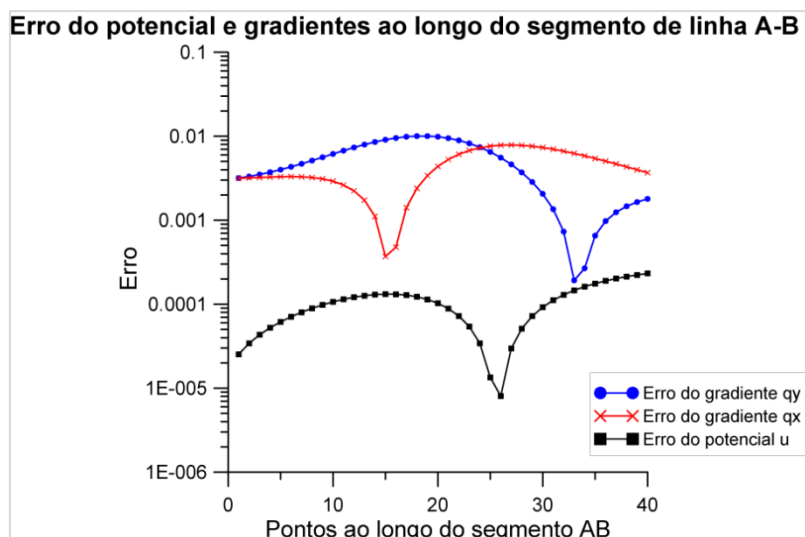


Figura 6.5- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB sem furo ou trinca.

Na Figura 6.6 é visível a influência da presença do furo, sobretudo nos gradientes, conforme pode ser observado comparando-se as Figuras 6.6 e 6.5, nas quais é possível perceber uma perturbação entre os pontos 15 e 25 do segmento de reta AB (trecho mais próximo do furo).

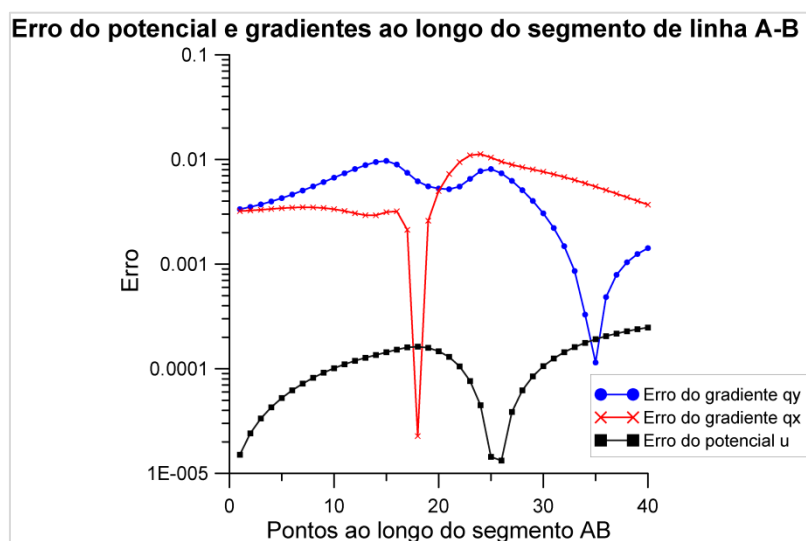


Figura 6.6- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB quando se tem apenas a presença do furo.

Destaca-se, para a interpretação dos resultados da Figura 6.7, que a trinca se estende ao longo de quase todo o comprimento do trecho de medição AB. Isso

provoca a flutuação dos resultados ao longo de todo trecho. Contudo, mesmo assim, o erro nos resultados de gradientes permaneceu inferior a 0,01, e de potencial, a 0,0001.

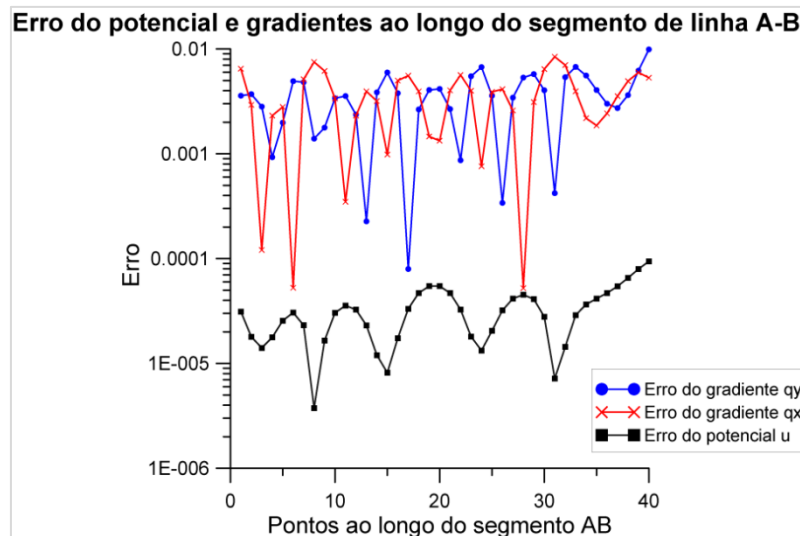


Figura 6.7- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB quando se tem apenas a presença da trinca.

A Figura 6.8 é muito semelhante à do exemplo com apenas a trinca, o que evidencia que, neste exemplo, a presença da trinca tende a provocar mais erros no resultado que o furo.

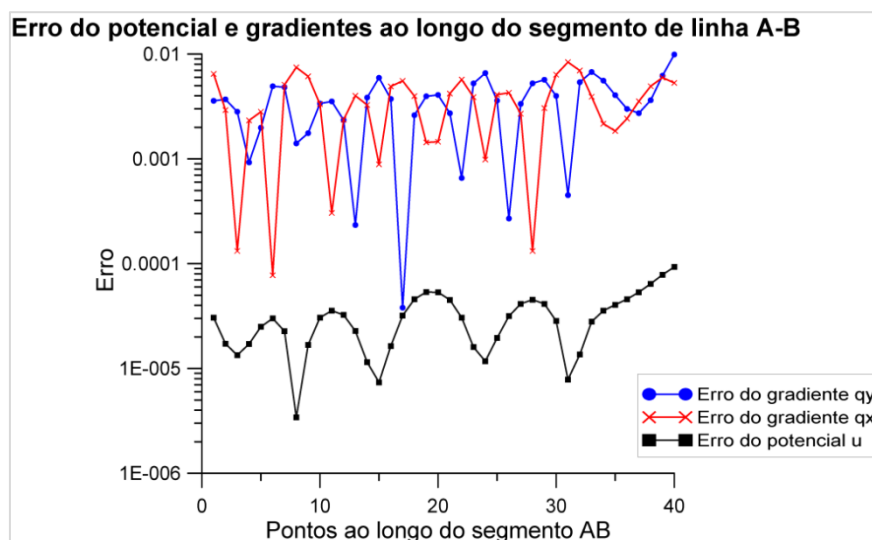


Figura 6.8- Erro de potencial u e gradientes q_x e q_y ao longo da linha tracejada AB quando se tem a presença da trinca e do furo.

Vê-se pelas figuras que os resultados dos potenciais são melhores que dos fluxos, como esperado, já que fluxos são valores obtidos da derivada do potencial. Consideram-se as repostas identificadas acima coerentes com o problema, e acredita-se que a maior discretização do contorno possa reduzir o erro nas respostas.

6.2.2.

Estudo da convergência do método em furos e contorno externos

A fim de estimar a precisão numérica que se possa esperar nos testes, avaliou-se a convergência do método convencional com a solução fundamental proposta.

O exemplo de aplicação consiste no mesmo meio contínuo Ω^∞ da Figura 6.4, onde são aplicados, para cada caso, os campos potenciais da Tabela 18. Potencial e gradientes gerados por esses campos são aplicados, criando uma série de problemas com solução analítica conhecida. As posições dos potenciais logaritmos $S_{\ln 1}$ e $S_{\ln 2}$, da Tabela 18, são respectivamente $(-5,5)$ e $(30,10)$, sendo que $S_{\ln 1}$ é o mesmo campo representado por F_1 no exemplo anterior.

Tabela 18- Campos potenciais com solução analítica usados na análise de convergência das matrizes.

Nome	Fonte potencial
S_{1a}	x
S_{1b}	y
S_{2a}	xy
S_{2b}	$x^2 - y^2$
S_{3a}	$x^3 - 3xy^2$
S_{3b}	$y^3 - 3x^2y$
S_{4a}	$x^4 + y^4 - 6x^2y^2$
S_{4b}	$x^3y - xy^3$
$S_{\ln 1}$	$\frac{\ln\left((x+5)^2 + (y-5)^2\right)}{4\pi}$
$S_{\ln 2}$	$\frac{\ln\left((x-30)^2 + (y-10)^2\right)}{4\pi}$

A convergência da aplicação desta solução fundamental no Método Convencional dos Elementos de Contorno é verificada através da norma de erro proveniente da eq. (3.29)

$$\varepsilon(\mathbf{Hd} - \mathbf{Gt}) = \frac{\|\mathbf{Hd} - \mathbf{Gt}\|}{\|\mathbf{Hd}\|} \quad (6.7)$$

para o conjunto de soluções analíticas de contorno, onde os vetores \mathbf{d} e \mathbf{t} representam potencial e fluxo normal, correspondentes aos campos potenciais da Tabela 18, medidos diretamente nos pontos nodais. Esta avaliação proporciona verificar o funcionamento das matrizes que compõem o sistema.

A convergência foi verificada aumentando-se a quantidade de nós no contorno Γ , partindo de 10 pontos nodais, 2 em cada lado do contorno, até 100. Os resultados da eq. (6.7) estão ilustrados na Figura 6.9, onde é possível observar que os campos lineares, S_{1a} e S_{1b} obtiveram resultados mais satisfatórios que os demais, com normas de erro da ordem $\varepsilon \approx 10^{-6}$, que é próximo ao limite de precisão da integração numérica implementada, $\varepsilon \approx 10^{-7}$. Este resultado acontece porque campos potenciais dados por polinômios lineares são os únicos que podem ser bem representados por elementos lineares.

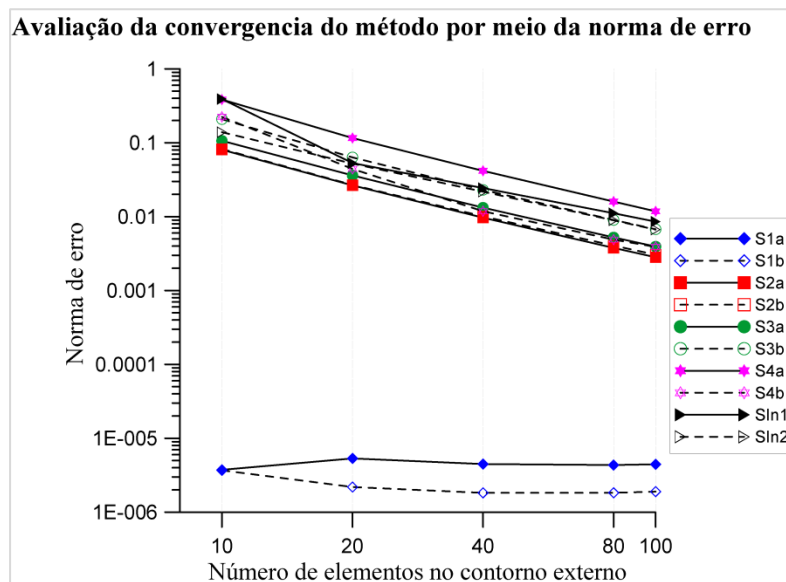


Figura 6.9- Avaliação da convergência do BEM convencional usando a função de Westergaard em problemas com furo quando se aumenta a discretização no contorno da placa.

As simulações que apresentaram menores erros de integração (S_{1a} , S_{1b} e S_{2a}) foram contrastadas com os modelos sem o furo e apresentaram resultados muito semelhantes entre si, de onde se pode concluir que o contorno irregular da figura, com ângulos agudos, tem influência maior no resultados das matrizes que o furo.

6.2.3.

Estudo da convergência do método para a simulação de trincas

Neste item será verificada a aplicabilidade da solução fundamental no método convencional de elementos de contorno para a representação de trincas.

O exemplo estudado trata de um caso apresentado por Mamani (2011), em que se analisa o problema de uma trinca de comprimento $2a$ em um meio infinito. Neste meio atua um campo potencial linear $u(x, y) = y$ e derivada normal $q = q_y = 1$. O problema é ilustrado na Figura 6.10.

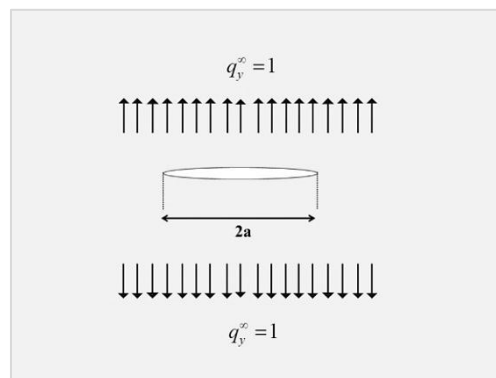


Figura 6.10- Trinca reta de comprimento $2a$ submetida a um fluxo remoto unitário.

A convergência do modelo será verificada pela eq. (6.7).

Este exemplo é equivalente ao da trinca interna sujeita a uma tensão constante no modo I de trincamento, adaptada de Westergaard (1939). Logo, por associação com a solução de abertura da trinca, η_o , e considerando $2(1-\nu^2)/E=1$, os valores em **d** são obtidos calculando $\eta_o = q_y \sqrt{(a^2 - x^2)}$ em cada ponto nodal, o qual, em elasticidade, equivale a se obter uma abertura unitária da solução analítica no centro da trinca. Os valores de **t** correspondem ao próprio q_y nos pontos nodais.

A Figura 6.11 mostra o resultado da convergência para 5, 10, 20, 30 e 100 elementos de trinca elíptica com comprimento $2a=2$, contida no intervalo

$[-1,1]$. Nota-se que o erro atingiu valores elevados em comparação com os resultados para contorno fechados (caso do item anterior), onde o campo potencial linear $S_{1b}(q_y = 1)$ obteve resultados inferiores a $\varepsilon \approx 10^{-5}$.

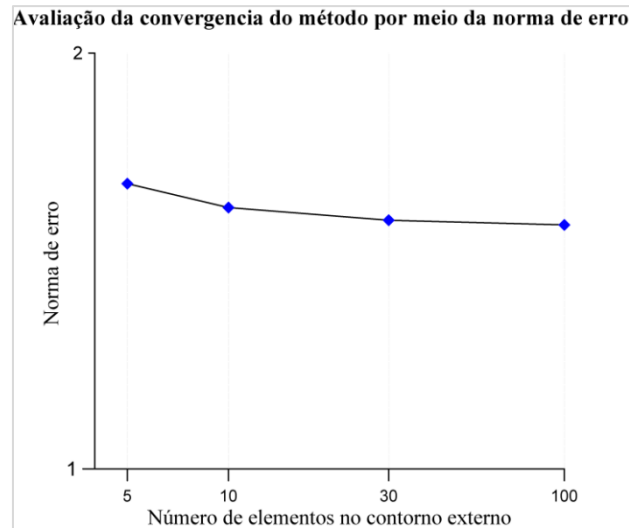


Figura 6.11- Norma de erro $\|\mathbf{H}\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{t}\|/\|\mathbf{H}\mathbf{d}\|$ de uma trinca em meio infinito sujeita a um fluxo unitário $q_y=1$.

Devido aos altos valores da norma de erro, realizou-se uma segunda verificação, de abertura de trinca, onde foi possível compreender o motivo de se terem obtidos altos valores de erro. Esta verificação consiste na análise comparativa entre o vetor \mathbf{d} , obtido analiticamente, pela expressão de η_0 , e numericamente, por meio da expressão:

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{t} \quad (6.8)$$

Na Figura 6.12 apresenta-se o resultado da eq. (6.8) variando-se a quantidade de elementos de trinca. Os valores de \mathbf{d} exatamente nas extremidades da trinca, $x = -1$ e $x = 1$ são nulos.

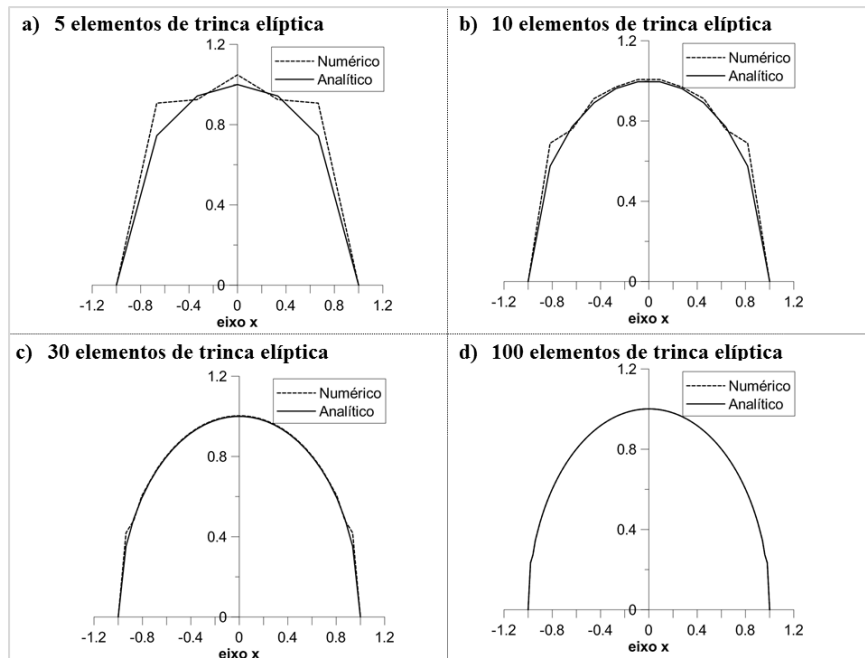


Figura 6.12- Forma de abertura da trinca em meio infinito.

Visualmente nota-se que o resultado numérico converge para o analítico quando se aumenta a quantidade de elementos na trinca. Contudo, para uma análise mais precisa calculou-se a norma de erro $\varepsilon = \frac{|d_{ana} - d_{num}|}{|d_{ana}|}$ ao longo dos pontos nodais da trinca, com exceção dos nós da ponta, uma vez que nesse ponto a abertura é nula. Observar-se na Figura 6.13 que o erro entre os resultados numéricos e analíticos são reduzidos à medida que se aumenta a discretização, com exceção dos pontos próximos à extremidade da trinca. Nesta região nota-se uma alta discrepância dos resultados, que é pouco afetada pela discretização.

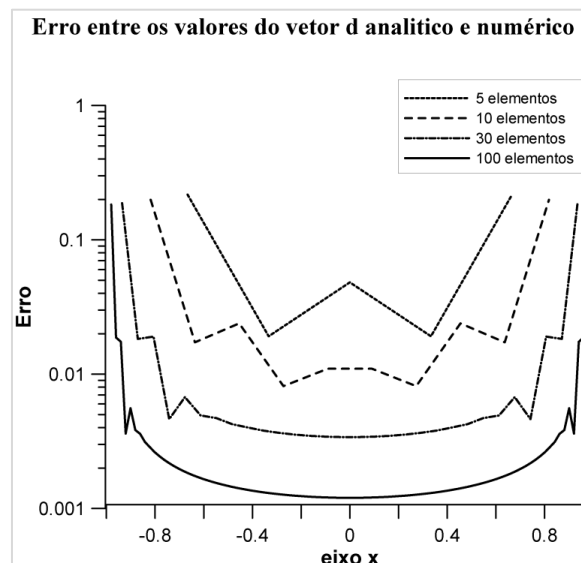


Figura 6.13- Erro relativo da trinca.

Pensando no resultado da convergência da Figura 6.11, calculou-se a diferença absoluta entre os elementos dos vetores $\{\mathbf{Hd}\}$ e $\{\mathbf{Gt}\}$ da eq. (6.7), através da expressão $|\mathbf{Hd} - \mathbf{Gt}|_1$, para uma trinca discretizada com 100 elementos, onde é possível perceber que o erro ao longo do corpo da trinca é baixo e aumenta à medida que se aproxima da ponta. Recorda-se, para melhor avaliação dos resultados, que o vetor \mathbf{d} está sendo obtido através da solução analítica de Westergaard ($\eta_o = q_y \sqrt{(a^2 - x^2)}$). Por consequência supõe-se que os altos erros verificados na Figura 6.11 possam estar ocorrendo devido a alguma divergência entre a solução analítica de Westergaard e a solução fundamental para potencial, contida na matriz \mathbf{G} , divergência esta que aumenta à medida que se aproxima da extremidade da trinca. Este erro elevado quando se calcula a abertura nas proximidades da ponta da trinca também foi verificado por Mamani (2015).

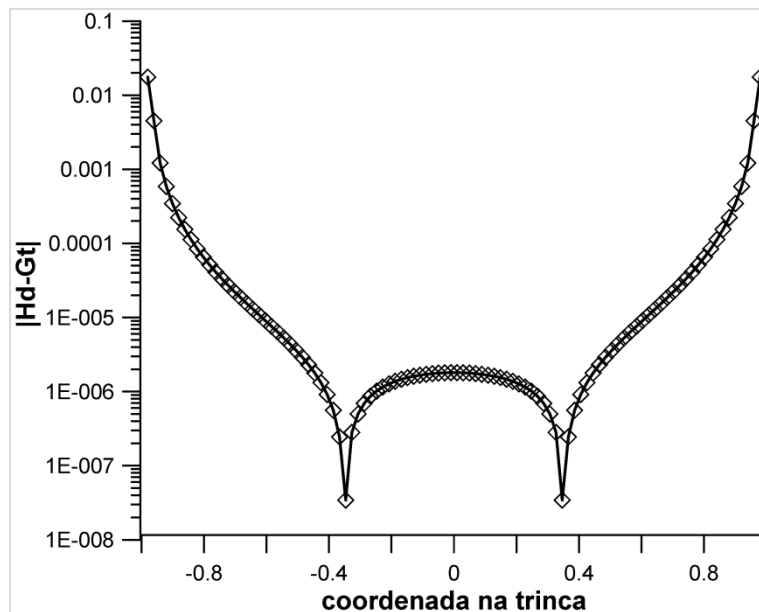


Figura 6.14- Diferença $|\mathbf{Hd} - \mathbf{Gt}|$ para trinca com 100 elementos.

7 Conclusão

7.1. Conclusões

Um dos objetivos deste trabalho foi estudar as soluções obtidas pela função generalizada quando se analisam as grandezas na ponta da trinca, com foco na interpretação física destas soluções, para ao mesmo tempo confrontá-las com as soluções obtidas pelas formulações de Westergaard e Williams.

Nesse contexto verificou-se que as expressões geradas pela formulação generalizada apresentam naturalmente um termo constante conhecido na literatura como “T stress”, o qual não tem efeito quando se analisa o fator de intensidade de tensão (K), conforme é amplamente observado na literatura e também no exemplo do item 5.3.1, no qual o fator de intensidade de tensão chegou a atingir erro com a resposta analítica da ordem de $\varepsilon = 10^{-13}$, para a trinca com apenas um elemento de trinca. Em exemplo semelhante para trinca num domínio finito obtiveram-se erros mais expressivos, $\varepsilon = 2.56 \times 10^{-2}$ em K_{lnum} e $\varepsilon = 1.53 \times 10^{-3}$ em K_{lnum} . Porém estes valores são coerentes quando consideramos que a proximidade da trinca ao contorno leva a diferenças maiores entre os resultados de K numérico e de referência, conforme já apresentado por Mamani (2011). Além disso, os valores usados como referência não são analíticos e podem eles próprios estar afetados por algum erro.

Esta primeira parte do estudo também evidenciou a relação de correspondência entre os resultados de tensões e fluxos e potencial e deslocamento, verificada em ambas as formulações, de Westergaard e Westergaard generalizada. Contudo, deve-se destacar que a relação entre tensões num meio contendo uma trinca e fluxo em torno de um obstáculo, é intuitivamente compreensível, enquanto que a relação de potencial e deslocamento, em que o potencial é o dobro do deslocamento, necessita ser melhor estudada.

O segundo objetivo do trabalho foi apresentar o emprego da função de tensão de Westergaard generalizada como solução fundamental no método dos elementos de contorno em problemas de potencial e utilizando somente trincas com abertura semi-elíptica.

Para avaliação do método na representação de contornos fechados, utilizou-se um exemplo de meio finito com um furo no centro, com aplicação de vários campos potenciais. A convergência do método, avaliada pela norma de erro das matrizes, atingiu erros aceitáveis, em torno de $\varepsilon \cong 10^{-6}$, para aplicação de campos lineares, S_{1a} e S_{1b} , enquanto que para campos potenciais de ordem superior e logarítmicos este erro foi maior, porém com uma tendência de queda à medida que a discretização aumenta.

Tendo obtido bons resultados na análise de contornos fechados, passou-se para a aplicação a trincas, também por meio do cálculo da norma de erro. Verificou-se o caso de uma trinca reta em meio infinito. Esta análise constatou erros elevados, superiores a $\varepsilon = 0.1$. Em vista disso, fez-se um segundo estudo calculando a abertura da trinca, por meio da eq. (6.8), onde foi possível observar a convergência entre resultados numéricos e analíticos, com exceção dos segmentos próximos à ponta da trinca. Nesta região verificou-se uma alta divergência entre valores numéricos e analíticos, a qual consegue esconder na norma de erro a boa convergência ao longo do corpo da trinca. Portanto esta questão ainda deve ser mais bem investigada.

Em suma, pode-se concluir que a análise das funções de Westergaard generalizada, para a determinação de grandezas na ponta da trinca, mostrou através de uma abordagem complementar à de Dumont e Mamani, a consistência desta formulação e a justificativa física de sua adequabilidade para a determinação de parâmetros importantes da mecânica da fratura, como o fator de intensidade de tensão. O uso destas funções no método convencional de elementos de contorno fornece bons resultados para contornos fechados. Contudo, para representação de trincas, uma melhor investigação das expressões de deslocamento e potencial e a introdução destas nas matrizes envolvidas deve ser realizada.

Espera-se que algumas questões identificadas neste estudo sejam esclarecidas até sua versão final, são elas:

- Compreender a relação onde o potencial é o dobro do deslocamento ou abertura da trinca.
- Identificar a razão pela qual as respostas deslocamento e potencial divergem da solução analítica de Westergaard à medida que se aproximam da ponta da trinca.

7.2.

Sugestões para trabalhos futuros

O presente trabalho abre caminho para futuros desenvolvimentos dentre os quais se destacam:

- Analisar pelo método convencional problemas de mecânica da fratura mais complexos, similares aos problemas apresentados por Lopes (2002) e Mamani (2011).
- Realizar a análise de potenciais e fluxos na ponta da trinca utilizando a função de tensão de Williams.
- Realizar o estudo de grandezas na ponta da trinca utilizando trincas de abertura polinomial que representam a face da trinca.
- Aplicar as funções de abertura polinomial e de rotação no método convencional de elementos de contorno.

ANDERSON, T. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 3^o ed. New York: CRC Press, 1995.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques**. New York: Springer Berlin Heidelberg, 1984.

CASTRO, J. T. . DE; MEGGIOLARO, M. A. **Fadiga:Técnicas e praticas de dimensionamento estrutural sobre cargas reais de serviço**. Volumes I e II. 2009.

DUMONT, N. The Hybrid Boundary Element Method: an alliance between mechanical consistency and simplicity. **Applied Mechanics Reviews**, v. 42, n. 11, p. S54-S63, 1989.

DUMONT, N. . **Soluções Fundamentais de Elasticidade**. Notas de aula da disciplina Método Híbrido de Elementos de Contorno, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1995.

DUMONT, N.; LOPES, A. A. . On the explicit evaluation of stress intensity factors in the hybrid boundary element method. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, p. 151–165, 2003.

DUMONT, N.; MAMANI, E. Y. Generalized Westergaard Stress Functions as Fundamental Solutions. **Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)**, v. 78, n. 2, p. 109–150, 2011a.

DUMONT, N.; MAMANI, E. Y. A variational boundary element method based on generalized Westergaard stress functions, in Solids Mechanics in Brazil, **Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, p143-157, 2011b.

DUMONT, N.; MAMANI, E. Y. Use of improved Westergaard stress functions for the adequate simulation of the stress field around crack tips including plastic zones. In: **International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences (ICCES, 2015)**, Reno, Nevada, United States, 2015.

DUMONT, N. .; MAMANI, E. Y.; CARDOSO, M. L. A Boundary Element Implementation for Fracture Mechanics Problems using Generalized Westergaard

Stress Functions. In: **International Conference on Boundary Element Techniques (BETEQ, 2017)**. Bucharest, Romenia, 2017.

DUMONT, N. A. The boundary element method revisited, In: **Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXII.**, 2010, Inglaterra. WIT Transactions on Modelling in Simulation. Southampton, Inglaterra: WIT Press. v.50. pp. 227-238.

GRIFFITH, A. A. The Phenomena of Rupture and flow in Solids. **The Royal Society**, v. 221, n. 582–593, p. 163–197, 1920.

GUPTA, M.; ALDERLIESTEN, R. C.; BENEDICTUS, R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. **Engineering Fracture Mechanics**, 2015.

INGLIS, C. E. Stresses in a plate due to the presnce of cracks and sharp corners. **Trans. Inst. Naval Arch.**, 1913.

IRWIN, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. **Journal of Applied Mechanics**, 1957.

LOPES, A. A. **Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão com o Método Híbrido dos Elementos de Contorno. 2002.** Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

MAMANI, E. Y. **O Método Híbrido dos Elementos de Contorno com Base em Funções de Tensão de Westergaard Generalizadas. 2011.** Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2011.

MAMANI, E. Y. **Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de Westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno. 2015.** Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2015.

MURTHY, K. R. S. K.; MUKHOPADHYAY, M. Adaptive finite element analysis of mixed-mode fracture problems containing multiple crack-tips with an automatic mesh generator. **International Journal of Fracture**, n. 108, p. 251-274, 2001.

SIH, G. C. On the westergaard method of crack analysis. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 2, n. 4, p. 628–631, 1966.

TADA, H.; ERNST, H.; PARIS, P. Westergaard stress functions for displacement-prescribed crack problems – **I. International Journal of Fracture**, v.61, p.39-53, 1993.

WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Cracks. **Journal of Applied**

Mechanics, v. 6, p. 49–53, 1939.

WILLIAMS, M. L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack.

Journal of Applied Mechanics, v. 24. 1957.