



Simone de Freitas de Souza

**A construção de Delzant para variedades
tóricas simpléticas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientadora: Prof. Alessia Mandini

Rio de Janeiro
Setembro de 2018



Simone de Freitas de Souza

**A construção de Delzant para variedades
tóricas simpléticas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Alessia Mandini

Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. David Martínez Torres

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Marcos Craizer

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Marta Batoréo

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de Setembro de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Simone de Freitas de Souza

Especialista Lato Sensu pelo curso de Pós-Graduação da Universidade Federal Fluminense em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, em 2016. Terminou sua graduação em Matemática na Universidade Federal Fluminense no ano de 2011. Atualmente, exerce o cargo Professor I no Colégio Estadual Paulo Assis Ribeiro. Possui experiência na área de licenciatura em Matemática.

Ficha Catalográfica

De Souza, Simone de Freitas

A construção de Delzant para variedades tóricas simpléticas / Simone de Freitas de Souza; orientador: Alessia Mandini. – 2018.

v., 80 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Variedades Tóricas Simpléticas;. 2. Construção de Delzant;. 3. Aplicação Momento;. 4. Polítopo de Delzant;. 5. Teorema de Convexidade..

I. Mandini, Alessia. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

Dedico, *In Memoriam*, ao meu amado pai Cláudio José de Souza.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade que me concedeu, por providenciar todo o necessário, por sempre me capacitar e colocar pessoas especiais no meu caminho, citadas neste momento, que colaboraram para tornar a minha caminhada mais fácil.

A minha mãe Nilsea, minha irmã Cláudia e ao meu namorado Tadeu, que souberam compreender esse período em que não pude estar sempre presente, por serem meu sustento, meu porto seguro em todos os momentos e por acreditarem em mim.

Aos meus amigos da PUC-Rio, sempre dispostos a ajudar, seja na compreensão de alguns conteúdos, seja como ombro amigo ou alegrando em diversos encontros. Destaco aqui o Edison, Thiago e João. Também o Rodrigo, por ter antecipado meus planos de mestrado por enxergar em mim um potencial que eu mesma não via.

A minha orientadora Alessia Mandini pela sugestão do tema, o qual me cativou desde o início, pelo direcionamento primordial na preparação, pela disposição e paciência.

Ao Raimundo Neto Nunes Leão pelas explicações, auxílios e principalmente pelos conselhos essenciais dados a mim.

Aos professores e toda equipe do departamento de matemática da PUC-Rio, por tamanha dedicação em seu trabalho, em particular a Creuza Nascimento.

Ao professor Francisco Fontenele Neto, que intensificou meu interesse e admiração pela geometria no período em que estudei na UFF.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

De Souza, Simone de Freitas; Mandini, Alessia. **A construção de Delzant para variedades tóricas simpléticas**. Rio de Janeiro, 2018. 80p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em 1988, Delzant classificou as variedades compactas tóricas simpléticas por meio da imagem associada da aplicação momento. Como estabelecido pelo Teorema de Convexidade [Atiyah, Guillemin-Sternberg, 1983], a imagem pela aplicação momento de uma variedade compacta tórica simplética é um polítopo convexo. A construção de Delzant proporciona uma receita para formar, dado um polítopo de Delzant, uma variedade compacta tórica simplética. Nesta dissertação revisamos essa construção e estudamos alguns exemplos.

Palavras-chave

Variedades Tóricas Simpléticas; Construção de Delzant; Aplicação Momento; Polítopo de Delzant; Teorema de Convexidade.

Abstract

De Souza, Simone de Freitas; Mandini, Alessia (Advisor).
Delzant's construction for toric symplectic manifolds. Rio de Janeiro, 2018. 80p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In 1988, Delzant proved a classification Theorem of compact toric symplectic manifolds by means of their moment image. By the convexity Theorem [Atiyah, Guillemin-Sternberg, 1983] the moment image of a compact toric symplectic manifold is a convex polytope. Delzant's construction gives a recipe to construct, given a Delzant polytope, the corresponding compact toric symplectic manifold. This thesis describes this construction and studies in detail some examples.

Keywords

Toric Symplectic Manifolds; Delzant's Construction; Moment Map; Delzant Polytope; Convexity Theorem.

Sumário

1	Introdução	10
2	Variedades Simpléticas	12
2.1	Conceitos Iniciais	12
2.2	Campo Vetorial Hamiltoniano	15
3	Sistemas Integráveis	22
4	Ações de Grupos Sobre Variedades	29
4.1	Ações de grupos	29
4.2	Ações Hamiltonianas	30
4.3	Ações Tóricas Hamiltonianas	33
5	Teorema de Delzant	44
6	Redução Simplética	49
6.1	Espaço das Órbitas	49
6.2	O Teorema de Marsden-Weinstein-Meyer	51
7	Construção de Delzant	57
8	Exemplos da Construção de Delzant	63
8.1	Segmento de Comprimento L	63
8.2	Triângulo Retângulo de Catetos L	65
8.3	Quadrado de Lado L	68
8.4	Trapézio	71
8.5	Tetraedro	75
8.6	Cubo de Lado L	77
	Referências bibliográficas	79

Lista de figuras

5.1	1-polítopo de Delzant	45
5.2	1-polítopo não Delzant	45
5.3	2-polítopo de Delzant	45
5.4	2-polítopo não Delzant	46
5.5	3-polítopo de Delzant	46
5.6	3-polítopo não Delzant	46
5.7	Vetores normais primitivos	48

1 Introdução

Esse trabalho se baseia no estudo das variedades tóricas simpléticas $2n$ -dimensionais, mais especificamente, a associação de cada uma delas a um objeto no \mathbb{R}^n , chamado polítopo, através de uma correspondência dada pela imagem da aplicação momento. Tal fato é afirmado no Teorema de Delzant, que estabelece que essa correspondência é biunívoca, provado no artigo original [1].

A ferramenta crucial para a construção da variedade, dado o seu polítopo de Delzant, é o quociente simplético por meio do Teorema de redução simplética de Marsden-Weinstein-Meyer ([2], [3]). Para isso, estudaremos variedades simpléticas munidas da ação de um grupo de Lie que preserva a estrutura simplética, mais especificamente, ações simpléticas que possuem uma aplicação momento, conhecidas como ações hamiltonianas.

Começamos, no capítulo 2, introduzindo conceitos iniciais tais como variedade simplética e campos vetoriais hamiltonianos, além de enunciar o Teorema de Darboux, que mostra que toda variedade simplética possui um atlas simplético, cujas mudanças de cartas preservam a forma simplética.

No terceiro capítulo iremos lembrar a noção de álgebra de Lie, fundamental nas ações hamiltonianas e sistemas integráveis. Será enunciado o Teorema de Arnold-Liouville.

No capítulo 4 estudamos as ações de grupos sobre variedades, mais precisamente as ações hamiltonianas: de um grupo de Lie sobre uma variedade simplética e, em particular, de um toro n -dimensional sobre uma variedade simplética $2n$ -dimensional (ações tóricas). Será definida a variedade tórica simplética e enunciado o teorema de Convexidade.

O capítulo 5 definimos o polítopo de Delzant, será enunciado o teorema central deste trabalho, o Teorema de Delzant, que associa biunivocamente a um polítopo de Delzant (a menos de equivalência pela ação do grupo afim $\text{Aff}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$) uma variedade tórica simplética (a menos de simplectomorfismos) através da imagem da aplicação momento.

No capítulo 6 vamos descrever a redução simplética, técnica que diminui o total de simetrias por meio da ação hamiltoniana de um grupo e sua aplicação momento. Como elemento final, teremos uma variedade simplética dada pelo

par quociente simplético e forma reduzida.

Nos dois últimos capítulos encerramos com a construção de Delzant, parte da teoria descrita em seu artigo que, mais informalmente, se traduz em uma receita para a construção da variedade tórica simplética associada a um polítopo de Delzant conhecido. A conclusão se dará com alguns exemplos dessa construção.

2

Variedades Simpléticas

Neste capítulo iremos definir o conceito de variedade simplética e enunciar o Teorema de Darboux.

2.1

Conceitos Iniciais

Definição 2.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma 2-forma^a $\omega \in \Omega^2(M)$ é dita **simplética** se ω é:*

- i) *fechada: i.e. $d\omega = 0$,*
- ii) *não degenerada: i.e. $\forall p \in M$ a forma bilinear $\omega_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ em p é não degenerada:*

$$\omega_p(X, Y) = 0, \forall Y \in T_pM \Rightarrow X = 0.$$

Definição 2.2 *O par (M, ω) , de uma variedade suave e uma 2-forma simplética, é chamado de **variedade simplética**.*

Algumas consequências:

- i) *anti-simetria: como toda 2-forma é anti-simétrica, vale*

$$\omega_p(X, Y) = -\omega_p(Y, X), \forall p \in M,$$

- ii) *a variedade M possui dimensão par: se A_p é a matriz $n \times n$ associada a ω_p , então A_p é não singular. Logo*

$$A_p = -A_p^T.$$

^aPara consultar assuntos tais como variedades diferenciáveis, formas diferenciais e operações entre elas recomendamos [4], [5], [6].

Assim,

$$\det(A_p) = \det(-A_p^T) = (-1)^n \det(A_p).$$

Portanto, n é par.

Definição 2.3 *Seja U subconjunto aberto de uma variedade M . Uma k -forma diferencial $\omega \in \Omega^k(U)$ é **exata** se existe uma $(k - 1)$ -forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ satisfazendo $d\alpha = \omega$. Neste caso, α é chamado de **potencial para ω** .*

Proposição 2.4 *Localmente toda forma fechada é exata.*

Prova. Considere M variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^k(M)$, $k \geq 1$. Para cada $p \in M$, existe U_p vizinhança de p tal que

$$d\omega = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \Omega^{k-1}(U_p) \text{ tal que } \omega = d\alpha.$$

□

Exemplos

1. Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ e considere a 2-forma

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k.$$

Verifiquemos que a forma ω_0 é simplética:

i) a forma ω_0 é fechada: porque é exata.

Por exemplo, $\omega_0 = -d\alpha$ para $\alpha = \sum_i y_i dx_i$.

ii) a forma ω_0 é não degenerada: seja $v \in T_p M$, $\omega_0 \in \Omega^2(M)$ tal que

$$\omega_0(u, v) = 0, \forall u \in T_p M,$$

queremos mostrar que $v = 0$. Seja $u = \sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$, então

$$\begin{aligned} \omega_0(u, v) &= \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \left(\sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right), v \right) \\ &= \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, v \right) + \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \left(b_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, v \right) + \dots + \\ &+ \dots + \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \left(a_n \frac{\partial}{\partial x_n}, v \right) + \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \left(b_n \frac{\partial}{\partial y_n}, v \right) \\ &= a_1 dy_1(v) - b_1 dx_1(v) + \dots + a_n dy_n(v) - b_n dx_n(v) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j dy_j(v) - b_j dx_j(v)) = 0. \end{aligned}$$

Da igualdade acima, segue que $v = 0$ ou $v = u$. Como v é fixo, descartamos a segunda opção. Portanto, $v = 0$. Assim, o par $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k)$ é uma variedade simplética.

2. Seja $M = \mathbb{S}^2$ a esfera unitária em \mathbb{R}^3 e $T_p\mathbb{S}^2$ o espaço vetorial tangente em p a \mathbb{S}^2 . A forma simplética canônica em \mathbb{S}^2 é a forma induzida pelo produto misto

$$\omega_p(u, v) := \langle p, u \times v \rangle, \quad \forall p \in \mathbb{S}^2, u, v \in T_p\mathbb{S}^2$$

- i) a forma ω é fechada porque é de grau máximo (forma volume);
- ii) a forma ω é não degenerada: de fato, $\forall p \in \mathbb{S}^2, u \in T_p\mathbb{S}^2, u \neq 0$, existe $v \in T_p\mathbb{S}^2$ tal que $\langle p, u \times v \rangle \neq 0$. Por exemplo, considere $v = u \times p$. Logo, (\mathbb{S}^2, ω) é uma variedade simplética.
3. O cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ com coordenadas (θ, h) é uma variedade simplética com a forma canônica $\omega = d\theta \wedge dh$.

- i) a forma ω é fechada porque é exata. Por exemplo, $\omega = d\alpha$ com $\alpha = h d\theta$;
- ii) a forma ω é não degenerada: de fato, $\forall p = (\theta, h) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, os vetores tangentes $u, v \in T_p(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ são da forma

$$u = a_u \frac{\partial}{\partial \theta} + b_u \frac{\partial}{\partial h}, \quad v = a_v \frac{\partial}{\partial \theta} + b_v \frac{\partial}{\partial h},$$

com $a_u, b_u, a_v, b_v \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\omega_p(u, v) = d\theta \wedge dh(u, v) = a_u b_v - a_v b_u.$$

Logo, para cada vetor u não nulo existe pelo menos um vetor v tal que $\omega_p(u, v) \neq 0$ e, conseqüentemente, ω_p é não degenerada. Assim, como o argumento é verdadeiro para qualquer $p \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, temos que ω é não degenerada.^b

Definição 2.5 *Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas $2n$ -dimensionais. Um **simplectomorfismo**^c entre as duas variedades é um difeomorfismo $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Isto é, se φ preserva as formas*

^bObserve que, dada a projeção $\pi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, o quociente herda uma estrutura simplética da original, através das cópias por difeomorfismos. Ou seja, existe uma única estrutura simplética em \mathbb{S}^1 que torna a projeção π uma aplicação de recobrimento.

^cRecomendamos a leitura de [7].

simpléticas. Neste caso, dizemos que (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) são **simplectomorfas**.

Teorema 2.6 (Darboux) *Seja (M^{2n}, ω) uma variedade simplética e $p \in M$. Então, existe uma carta coordenada $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ centrada em p tal que*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

tal carta é chamada **Carta de Darboux**.

Aqui o Teorema de Darboux não será demonstrado, mas faremos alguns comentários. Ele afirma que uma variedade simplética (M^{2n}, ω) é localmente simplectomorfa a um aberto de \mathbb{R}^{2n} , com estrutura simplética $\omega_0 := \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$. Ou seja, todo $p \in M^{2n}$ possui vizinhança simplectomorfa a uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ munida da forma simplética canônica. Como consequência, toda variedade simplética possui um atlas simplético (aquele cujas mudanças de cartas preservam a forma simplética). O Teorema de Darboux mostra que formas simpléticas são localmente rígidas, além de fornecer uma classificação local de variedades simpléticas em termos de um único invariante: a dimensão. Para a demonstração, consulte [8].

2.2

Campo Vetorial Hamiltoniano

Seja (M, ω) uma variedade simplética.

Definição 2.7 *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma k -forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, a **contração** ou o **produto interior de ω por X** é a $(k-1)$ -forma $i_X \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ definida por*

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

Dados dois campos vetoriais $X, Y : M \rightarrow TM$, podemos construir uma aplicação $XY : M \rightarrow TM$ através da igualdade $XYf = X(Yf), \forall f \in C^\infty(M)$. Em geral, XY não é um campo vetorial em M , mas é possível obter um novo campo vetorial a partir de X e Y denotado por $[X, Y]$ através da expressão

$$[X, Y] = XY - YX \tag{2.1}$$

chamada de **colchete de Lie** nos campos X e Y .

Observação: O colchete de Lie entre os dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mede a comutatividade entre X e Y . Assim, se X e Y comutam, temos $[X, Y] = 0$.

Nesse caso, $XY : M \rightarrow TM$ determina um campo vetorial em M .

Definição 2.8 Para quaisquer campos vetoriais suaves V e W em M , a **derivada de Lie do campo vetorial W na direção do campo V** na variedade M é dada pela expressão

$$\mathcal{L}_V W = [V, W].$$

Proposição 2.9^d Sejam $f \in C^\infty(M)$, df a 1-forma correspondente e X um campo vetorial em M , então

$$\mathcal{L}_X f = df(X) = X(f).$$

Definição 2.10 Um campo vetorial X em M é **simplético** se a contração $i_X \omega$ é fechada ($d i_X \omega = 0$).

Pela Fórmula de Cartan

$$\mathcal{L}_X \omega = d i_X \omega + i_X d\omega = 0$$

o fluxo de um campo vetorial simplético preserva a forma ($\mathcal{L}_X \omega = 0$).

Definição 2.11 Um campo vetorial X_H em M é **hamiltoniano** se a contração $i_{X_H} \omega$ é exata.

Disto, segue que os campos hamiltonianos são simpléticos. Resumindo,

$$\begin{array}{ccc} X_H \text{ campo simplético} & \Leftrightarrow & i_{X_H} \omega \in \Omega^1(M) \text{ é fechada} \\ & \uparrow & \\ X_H \text{ campo hamiltoniano} & \Leftrightarrow & i_{X_H} \omega \in \Omega^1(M) \text{ é exata.} \end{array}$$

Definição 2.12 Um campo vetorial X_H em M é **localmente hamiltoniano** se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U_p tal que X_H é hamiltoniano em U_p .

Definição 2.13 Uma função suave $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **função hamiltoniana para o campo vetorial X** em (M, ω) se $i_X \omega = dH$.

^dA demonstração se encontra em [9].

Proposição 2.14 Se M é variedade simplética, dada a função hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, $H \in C^\infty(M)$ e seu campo vetorial $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo a equação de Hamilton $i_{X_H}\omega = dH$, o campo $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ é único (neste caso, chamado de campo hamiltoniano ou gradiente simplético da hamiltoniana H).

Prova. Suponha que existam $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo $i_{X_j}\omega = dH$, para $j = 1, 2$. Então,

$$\begin{aligned} \forall Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \omega(X_1 - X_2, Y) &= \omega(X_1, Y) - \omega(X_2, Y) \\ &= dH(Y) - dH(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como ω é não degenerada e obtemos esse resultado para um Y qualquer, temos $X_1 = X_2$. □

Lema 2.15 $X \in \mathfrak{X}(M)$ é simplético se, e somente se, for localmente hamiltoniano.

Prova. Suponha X simplético. Pela Proposição 2.4, para cada $p \in M$, existe U_p , vizinhança de p , tal que $i_X\omega \in \Omega^1(U_p)$ é exata. Então, existe $H : U_p \rightarrow \mathbb{R}$, para $H \in C^\infty(U_p)$ tal que

$$i_X\omega = dH \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\omega \text{ é não degenerada}} \quad X = X_H \text{ em } U_p$$

ou seja,

$$i_X\omega = dH = i_{X_H}\omega$$

assim, X é hamiltoniano em U_p . Suponha X localmente hamiltoniano. Então, para cada $p \in M$ existe U_p vizinhança de p e $H : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $dH = i_X\omega|_{U_p}$. Assim,

$$i_X\omega = i_{X_H}\omega = dH.$$

Logo, $i_X\omega$ é exata e, portanto, fechada. Portanto, X é simplético. □

Proposição 2.16 O fluxo de X_H preserva a função hamiltoniana H .

Prova. Para isto, devemos verificar que $\mathcal{L}_{X_H}H = 0$. Temos que

$$\mathcal{L}_{X_H}H = i_{X_H}dH = i_{X_H}i_{X_H}\omega = 0.$$

□

Exemplos

1. O cilindro $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, d\theta \wedge dh)$ com coordenadas (θ, h) e $X(\theta, h) = \frac{\partial}{\partial h}$. O campo vetorial X é simplético, mas não é hamiltoniano.

i) O campo vetorial X é simplético. De fato,

$$\begin{aligned} i_X \omega &= i_{\frac{\partial}{\partial h}}(d\theta \wedge dh) \\ &= \left(i_{\frac{\partial}{\partial h}} d\theta \right) dh - d\theta i_{\frac{\partial}{\partial h}}(dh) \\ &= \underbrace{d\theta \left(\frac{\partial}{\partial h} \right)}_0 dh - dh \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial h} \right)}_1 d\theta = -d\theta. \end{aligned}$$

Portanto, $d(i_X \omega) = -d(d\theta) = 0$, logo, X é simplético.

- ii) O campo vetorial X não é hamiltoniano. Significa que $i_X \omega = -d\theta$ não é exata. Considere o caminho fechado em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dado por γ tal que $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$, com $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ e $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ a função ângulo, V aberto de \mathbb{S}^1 .

Vamos supor, por absurdo, que $i_X \omega = -d\theta$ seja exata. Desta forma, queremos mostrar: $\int_{\gamma} d\theta \neq 0$, encontrando assim uma contradição com a hipótese. De fato,

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Temos que, pelo Teorema de Stokes, a integral em torno do caminho fechado é nula, portanto, a igualdade acima contraria o Teorema.

2. O conjunto $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, dx \wedge dy)$ com coordenadas (x, y) e campo vetorial $X(x, y) = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ para a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ fixada.

- i) O campo vetorial X é simplético em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ se, e somente se, $\frac{\partial a}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial b}{\partial y}(x, y)$. Temos

$$\begin{aligned} i_X \omega_0 &= i_X(dx \wedge dy) \\ &= (i_X dx) \wedge dy - dx \wedge (i_X dy). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{cases} i_X dx = dx(X) = dx \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) = a \\ i_X dy = dy(X) = dy \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) = b \end{cases}$$

então $i_X\omega_0 = ady - bdx$. Além disso, a 1-forma $i_X\omega_0$ é fechada se $d(i_X\omega_0) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} d(a(x, y)dy - b(x, y)dx) &= \frac{\partial a}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial b}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy \wedge dy - \frac{\partial b}{\partial y}dy \wedge dx \\ &= \frac{\partial a}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial y}dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

porque $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$. Portanto,

$$d(i_X\omega_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial y}.$$

Logo, X é simplético se, e somente se, $\frac{\partial a}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial b}{\partial y}(x, y)$.

Tomemos, por exemplo, $a(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ e $b(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$. Então

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Logo $\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial y}$. Desta forma, $i_X\omega_0$ é fechada para as funções $a(x, y)$ e $b(x, y)$ escolhidas.

ii) O campo vetorial $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ não é hamiltoniano para as mesmas funções $a(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ e $b(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ do item anterior.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ um aberto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ que contém uma circunferência γ de raio $r > 0$, centrada na origem.

Pergunta: Será que existe uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $i_X\omega = df$?

Vamos supor, por absurdo, que a contração da forma ω pelo campo X seja exata. Como $i_X\omega_0 = a(x, y)dy - b(x, y)dx$ e $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, temos

$$\begin{aligned} a(x, y)dy - b(x, y)dx &= \frac{x}{x^2 + y^2}dy - \frac{y}{x^2 + y^2}dx \\ &= \frac{r \cos t}{r^2}(\sin t dr + r \cos t dt) - \frac{r \sin t}{r^2}(\cos t dr - r \sin t dt) \\ &= dt \end{aligned}$$

e $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$. Como no exemplo (ii), pelo Teorema de Stokes temos uma contradição. Logo, X não é hamiltoniano para as funções $a(x, y)$ e $b(x, y)$ escolhidas.

3. Sejam a 2-esfera $(\mathbb{S}^2, d\theta \wedge dh)$ e $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

i) O campo vetorial X é simplético.

Temos

$$i_X \omega = i_{\frac{\partial}{\partial \theta}}(d\theta \wedge dh) = (d\theta \wedge dh) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = dh,$$

portanto, $d(i_X \omega) = d(dh) = 0$. Assim, $i_X \omega$ é fechada, logo X é simplético.

ii) O campo X é hamiltoniano.

Temos que $i_X \omega = dh$ e $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é suave.

Observação: O movimento gerado por este campo vetorial é a rotação ao redor do eixo vertical, o que naturalmente preserva a área e a altura.

4. Sejam o 2-toro $(\mathbb{T}^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2)$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial \theta_1}$ e $X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta_2}$.

i) Os campos vetoriais X_1 e X_2 são simpléticos.

De fato, temos

$$i_{X_1} \omega = i_{\frac{\partial}{\partial \theta_1}}(d\theta_1 \wedge d\theta_2) = \overbrace{\left(i_{\frac{\partial}{\partial \theta_1}} d\theta_1 \right)}^1 \wedge d\theta_2 - d\theta_1 \wedge \overbrace{i_{\frac{\partial}{\partial \theta_1}}(d\theta_2)}^0 = d\theta_2.$$

Portanto, $d(i_{X_1} \omega) = d(d\theta_2) = 0 \Rightarrow i_{X_1} \omega$ é fechada e assim X_1 é simplético.

E também

$$i_{X_2} \omega = i_{\frac{\partial}{\partial \theta_2}}(d\theta_1 \wedge d\theta_2) = \overbrace{\left(i_{\frac{\partial}{\partial \theta_2}} d\theta_1 \right)}^0 \wedge d\theta_2 - d\theta_1 \wedge \overbrace{i_{\frac{\partial}{\partial \theta_2}}(d\theta_2)}^1 = -d\theta_1.$$

Portanto $d(i_{X_2} \omega) = -d(d\theta_1) = 0 \Rightarrow i_{X_2} \omega$ é fechada e assim X_2 é simplético.

ii) Os campos vetoriais X_1 e X_2 não são hamiltonianos.

Como as contrações são fechadas, X_1 e X_2 são simpléticos e, pelo lema 2.15, são localmente hamiltonianos. Porém, todo o campo de vetores localmente hamiltoniano que não se anula sobre uma variedade

simplética compacta não pode ser hamiltoniano. De fato, se $X_1 = X_H$ para alguma função H em \mathbb{T}^2 , temos que X_1 tem um zero porque H tem pontos críticos sobre a variedade compacta \mathbb{T}^2 . Assim, X_1 não pode ser hamiltoniano. Analogamente, temos o mesmo resultado para o campo de vetores X_2 .

3

Sistemas Integráveis

Neste capítulo recordamos um importante conceito da teoria dos grupos de Lie que será usado até o final deste trabalho, a álgebra de Lie. Também trataremos do sistema hamiltoniano, cuja teoria leva ao enunciado do importante Teorema de Arnold-Liouville, que caracteriza o espaço de fases de um sistema integrável.

Lembremos que uma **álgebra de Lie**^a é um espaço vetorial \mathfrak{g} com uma operação $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz:

(i) a anti-simetria:

$$[x, y] = -[y, x], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},$$

(ii) a bilinearidade:

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}; a, b \in \mathbb{R},$$

(iii) a Identidade de Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Seja (M, ω) variedade simplética. O espaço $\mathfrak{X}(M)$ com o colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ definido em (2.1) é um exemplo de álgebra de Lie.

Agora, considere o campo vetorial hamiltoniano X_H na variedade simplética (M, ω) com a função hamiltoniana $H \in C^\infty(M)$.

Definição 3.1 *Seja (M, ω) uma variedade simplética. O **colchete de Poisson** de duas funções $f, g \in C^\infty(M)$ é a operação $\{., .\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que associa cada par (f, g) à $\{f, g\}$ definida da seguinte forma:*

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) = X_g(f),$$

em coordenadas de Darboux $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, escrevemos

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} \right).$$

^aPara aprofundar, consulte [10].

Definição 3.2 Uma **álgebra de Poisson** é uma álgebra de Lie com um produto associativo para o qual a Regra de Leibniz é válida, isto é, satisfaz a propriedade:

$$\{f, gh\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}, \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M).$$

Definição 3.3 M é dita **variedade de Poisson** se $(C^\infty(M), \{.,.\})$ é uma álgebra de Poisson. Neste caso, dizemos que $\{.,.\}$ é uma **estrutura de Poisson** em M .

Proposição 3.4 Toda variedade simplética é uma variedade de Poisson.

Prova. Sejam (M, ω) variedade simplética e $f, g, h \in C^\infty(M)$. Esta proposição significa que o colchete de Poisson é um colchete de Lie que satisfaz a Regra de Leibniz. De fato temos, pela definição 3.1 e pela proposição 2.9, que

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) = X_g(f) = \mathcal{L}_{X_g}(f).$$

Verifiquemos as três condições para que seja um colchete de Lie, seguida da Regra de Leibniz:

i) *anti-simetria:*

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -\{g, f\},$$

ii) *bilinearidade:*

$$\begin{aligned} \{af + bg, h\} &= X_h(af + bg) \\ &= X_h(af) + X_h(bg) \\ &= aX_h(f) + bX_h(g) \\ &= a\{f, h\} + b\{g, h\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

iii) *identidade de Jacobi:*

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} &= -X_f(\{g, h\}) - X_g(\{h, f\}) \\ &= -X_f(X_h(g)) - X_g(X_f(h)) \\ &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &= X_h(X_g(f)) \\ &= X_h(\{f, g\}) \\ &= -\{h, \{f, g\}\}, \end{aligned}$$

iv) Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
 \{f, gh\} &= \omega(X_f, X_{gh}) \\
 &= X_{gh}(f) = -X_f(gh) \\
 &= -(X_f(g) \cdot h + g \cdot X_f(h)) \\
 &= -(\omega(X_g, X_f) \cdot h + g \cdot \omega(X_h, X_f)) \\
 &= \omega(X_f, X_g) \cdot h + g \cdot \omega(X_f, X_h) \\
 &= \{f, g\}h + g\{f, h\}.
 \end{aligned}$$

□

Lema 3.5 *Sejam X_f, X_g campos hamiltonianos associados às funções hamiltonianas f e g , respectivamente ^b. Então $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$, sendo $[\cdot, \cdot]$ o colchete de Lie.*

Prova. Para quaisquer $f, g, h \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned}
 [X_f, X_g]h &= X_f(X_g h) - X_g(X_f h) \\
 &= X_f(\{h, g\}) - X_g(\{h, f\}) \\
 &= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} \\
 &= \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} \\
 &= -\{h, \{f, g\}\} \\
 &= -X_{\{f,g\}}h.
 \end{aligned}$$

□

Proposição 3.6 *As álgebras de Lie $C^\infty(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$ são anti-homomorfas.*

Prova. Seja $L : (C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\}) \rightarrow (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$, que associa cada função hamiltoniana H a um campo vetorial hamiltoniano X_H .

L é linear: Devemos mostrar que para $F, H \in C^\infty(M)$ e $a \in \mathbb{R}$, temos $L(F + aH) = L(F) + aL(H)$.

De fato, seja $K \in C^\infty(M)$

^bIsto é, X_f e X_g são campos tais que $i_{X_f}\omega = df$ e $i_{X_g}\omega = dg$.

$$\begin{aligned}
L(F + aH)(K) &= X_{F+aH}(K) \\
&= \{K, F + aH\} \\
&= \{K, F\} + a\{K, H\} \\
&= X_F(K) + aX_H(K) \\
&= L(F)(K) + aL(H)(K).
\end{aligned}$$

• L é anti-homomorfismo: Ou seja, $L(\{F, H\}) = -[L(F), L(H)]$, para $F, H \in C^\infty(M)$.

Equivalentemente, seja $K \in C^\infty(M)$, vale

$$\begin{aligned}
[L(F), L(H)](K) &= [X_F, X_H](K) \\
&= X_F X_H(K) - X_H X_F(K) \\
&= X_F(\{K, H\}) - X_H(\{K, F\}) \\
&= \{\{K, H\}, F\} - \{\{K, F\}, H\} \\
&= \{\{K, H\}, F\} + \{\{F, K\}, H\} \\
&= -\{K, \{F, H\}\} \\
&= -X_{\{F, H\}}(K) \\
&= -L(\{F, H\})(K).
\end{aligned}$$

□

Definição 3.7 Um **sistema hamiltoniano** é uma tripla (M, ω, H) , onde (M, ω) é uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$ é uma função hamiltoniana.

Seja X campo vetorial na variedade suave M . Se $\gamma : J \rightarrow M$ é uma curva suave para cada $t \in J$, chamamos **curva integral ou caminho**^c de X a curva diferenciável γ tal que $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$, $\forall t \in J$.

Definição 3.8 Uma **integral primeira ou constante de movimento** de um campo X é uma função H tal que $X(H) = 0$, ou seja, H é constante em relação ao campo X ou curva integral de X .

Teorema 3.9 São equivalentes as afirmações:

(i) $\{f, H\} = 0$.

^cTambém chamamos de curva integral ou caminho de uma equação diferencial $F(x, y, y') = 0$ ao gráfico de solução $y = \phi(h)$ dessa equação diferencial.

(ii) f é uma integral primeira de um campo hamiltoniano X_H .

(iii) H é constante ao longo das curvas integrais do campo X_f .

Prova. (i) \Rightarrow (ii):

Sejam $H \in C^\infty(M)$ e ϕ_H o fluxo do campo hamiltoniano associado a X_H .

Então

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_H)(t, p) = \{f, H\}(\phi_H(t, p)), \quad \forall (t, p).$$

Se $\{f, H\} = 0$, então $\frac{d}{dt}(f \circ \phi_H)(t, p) = 0$. Logo, f é constante ao longo das curvas integrais de X_H .

(ii) \Rightarrow (i):

Assumimos f constante ao longo das curvas integrais de X_H .

$$\Rightarrow \{f, H\} = f\{1, H\}.$$

Pela Regra de Leibniz,

$$\{1, H\} = \{1.1, H\} = 1\{1, H\} + 1\{1, H\} = 2\{1, H\}$$

$$\Rightarrow \{1, H\} = 0.$$

$$\text{Logo, } \{f, H\} = 0.$$

(ii) \Leftrightarrow (iii) :

Pela antissimetria de $\{f, H\}$. □

Nota: Como consequência do teorema anterior, toda função H é uma integral primeira de seu próprio campo hamiltoniano, já que, pela antissimetria, temos $X_H H = \{H, H\} = 0$.

Teorema 3.10 (Poisson) *Sejam $f, g, h \in C^\infty(M)$, M uma variedade de Poisson. Se $\{g, f\} = 0$ e $\{h, f\} = 0$, então $\{\{g, h\}, f\} = 0$.*

Prova. Segue da identidade de Jacobi. □

Definição 3.11 *Sejam (M, ω) variedade simplética, $H \in C^\infty(M)$ função hamiltoniana e $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$ constantes de movimento. O conjunto $\{f_1, \dots, f_n\}$ é dito **em involução** se $\{f_i, f_j\} = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.*

Definição 3.12 *As funções $\{f_1, \dots, f_n\}$ em M são ditas **independentes** se suas diferenciais $(df_1)_p, \dots, (df_n)_p$ são linearmente independentes para todo p em algum subconjunto denso aberto de M .*

Definição 3.13 Um sistema hamiltoniano (M^{2n}, ω, H) é dito **completamente integrável** se possui n constantes de movimento independentes e em involução, ou seja, se possuir tantas integrais primeiras quanto possível.

Definição 3.14 Seja (V, ω) um espaço vetorial. O **anulador** de um subconjunto $Y \subset V$ é o subespaço

$$Y^0 := \{f \in V^* \mid f(y) = 0, \forall y \in Y\}.$$

Definição 3.15 Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. O **ortogonal (ou complemento) simplético** de um subespaço linear $Y \subset V$ é definido como o subespaço

$$Y^\omega := \{v \in V \mid \omega(v, u) = 0, \forall u \in Y\}.$$

Proposição 3.16 Em um espaço vetorial simplético (V, ω) , dado o subespaço $Y \subset V$, temos

$$\dim Y + \dim Y^\omega = \dim V.$$

Prova. Seja $\phi : V \rightarrow V^*$ a função linear definida por $\phi(x)(y) = \omega(x, y)$. Como ω é uma forma simplética, é portanto não degenerada e ϕ é um isomorfismo. Além disso temos que $\phi(Y^\omega) = Y^0$ é o anulador de Y . Assim

$$\dim Y^\omega = \dim Y^0 = \dim V - \dim Y.$$

□

Lema 3.17 Seja $Y \subset V$, (V, ω) espaço vetorial simplético, então $(Y^\omega)^\omega = Y$.

Prova. Segue, da definição que $Y \subset (Y^\omega)^\omega$. Da proposição anterior, temos

$$\dim V = \dim Y + \dim Y^\omega = \dim Y^\omega + \dim (Y^\omega)^\omega.$$

Logo, $\dim Y = \dim (Y^\omega)^\omega$ e, portanto, $Y = (Y^\omega)^\omega$.

□

Definição 3.18 Um subespaço $Y \subset V$ de um espaço vetorial simplético (V, ω) é chamado **lagrangiano ou de isotrópico**^d se $Y = Y^\omega$ ou $Y \subset Y^\omega$, respectivamente.

^dVeja exemplos em [11].

Definição 3.19 Seja (M, ω) uma variedade simplética. $N \subset M$ é dita **subvariedade lagrangiana (ou subvariedade isotrópica)** se, para todo $y \in N$, o subespaço $T_y N \subset (T_y M, \omega_y)$ é lagrangiano (ou isotrópico).

Nota: A subvariedade N da variedade simplética (M^{2n}, ω) é lagrangiana se N é n -dimensional e se $i^* \omega = 0$, onde $i : N \hookrightarrow M$ é a inclusão e $\dim M = 2 \dim N$.

Teorema 3.20 (Arnold-Liouville, [12]) Seja (M^{2n}, ω, H) um sistema integrável com n integrais primeiras $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$. Seja $f = (f_1, \dots, f_n)$ própria com fibras conexas e considere $c \in \mathbb{R}^n$ um valor regular de f . Então $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade lagrangiana de M^{2n} . Temos:

- (i) o conjunto de nível $f^{-1}(c)$ é invariante para toda função f_1, \dots, f_n , isto é, toda a curva integral de X_{f_i} que começa em $p \in f^{-1}(c)$ permanece em $f^{-1}(c)$. Além disso, $f^{-1}(c)$ é difeomorfo a \mathbb{T}^n com coordenadas $\theta_1, \dots, \theta_n$ (chamadas de coordenadas ângulo),
- (ii) existem ψ_1, \dots, ψ_n (chamadas de coordenadas ação), de forma que $(\theta_1, \dots, \theta_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ é uma carta de Darboux em M e

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge d\psi_i.$$

Nota: Temos que a subvariedade é lagrangiana por possui dimensão n e seu fibrado tangente é isotrópico (o fibrado está contido em seu complemento simplético).

4

Ações de Grupos Sobre Variedades

Muitos problemas matemáticos apresentam mais informações que o necessário, isto é, simetrias. No estudo da geometria, as simetrias são codificadas por ações de grupos. O objetivo será poder tornar algumas informações numa linguagem mais simples através das ações, tendo como ferramenta a forma simplética.

4.1

Ações de grupos

Definição 4.1 *Seja (G, \cdot) um grupo e S um conjunto. Dizemos que G atua sobre S ou $G \curvearrowright S$ (à esquerda) se existe uma aplicação $\alpha : G \times S \rightarrow S$, com $\alpha(g, s) = g \cdot s$ tal que*

$$(i) \quad \alpha(e, s) = e \cdot s = s, \forall s \in S,$$

$$(ii) \quad \alpha(g, \alpha(h, s)) = \alpha(gh, s), \text{ ou seja, } g \cdot (h \cdot s) = (gh) \cdot s, \forall g, h \in G, s \in S.$$

Chamamos a aplicação α de **ação do grupo G sobre o conjunto S** .

Definição 4.2 *Seja G um grupo de Lie. A ação de G em uma variedade M é um homomorfismo de grupo dado por*

$$\psi : G \rightarrow \text{Diff}(M) \text{ tal que } \psi(g) = \psi_g$$

que associa cada elemento do grupo de Lie a um elemento do grupo de difeomorfismos da variedade M . Dizemos que a ação é suave se a aplicação $ev_\psi : M \times G \rightarrow G$ definida por $ev_\psi(p, g) = \psi_g(p)$ é suave. Nota: Sempre assumiremos que a ação é suave.

Definição 4.3 *Sejam (M, ω) variedade simplética, G grupo de Lie e considere a ação*

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

o **estabilizador ou grupo de isotropia de p** é definido por

$$G_p := \{g \in G \mid g \cdot p = p\} \subseteq G.$$

A **órbita de G em p** é definida por

$$G \cdot p := \{g \cdot p \mid g \in G\} \subseteq M.$$

Denotamos o **conjunto de todas as órbitas** por $M/G := \{G \cdot p \mid p \in M\}$.

Definição 4.4 Uma ação $\psi : G \times M \rightarrow M$ é dita

- i) **transitiva**: se houver apenas uma órbita, isto é, se existir $p \in M$ tal que $G \cdot p = M$,
- ii) **livre**: se $G_p = \{e\}, \forall p \in M$ e **localmente livre** se todos os estabilizadores são discretos.

Um **campo vetorial completo** é um campo cujas curvas integrais existem para todo o tempo.

Definição 4.5 Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Suponha $G \curvearrowright M$ pela ação $\psi : G \times M \rightarrow M$. Para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, o **campo fundamental associado em M** é definido por

$$X^\xi(p) := \left. \frac{d}{dt} \psi(\exp(t\xi), p) \right|_{t=0}$$

com $p \in M$, onde a função $\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto X^\xi$ é chamada **ação infinitesimal** associada a ψ .

4.2

Ações Hamiltonianas

Definição 4.6 Dado G um grupo de Lie e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie, considere a ação $\psi_g : G \rightarrow G$ com $\psi_g(a) = gag^{-1}$. Chamamos de **ação adjunta ou representação adjunta** (Ad_g) à derivada da aplicação ψ_g na identidade, isto é

$$\begin{aligned} Ad_g &:= d_e \psi_g : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ (g, \xi) &\mapsto Ad_g(\xi) = \left. \frac{d}{dt} (g \exp(t\xi) g^{-1}) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Como definimos uma ação do grupo de Lie em sua álgebra de Lie, também podemos definir uma ação do grupo no dual da sua álgebra de Lie:

Definição 4.7 Chamamos de **ação coadjunta** do grupo de Lie G à aplicação $Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definida por

$$Ad^*(g, \eta) = Ad_g^*(\eta) := \eta \circ Ad(g^{-1}).$$

Definição 4.8 Sejam (M, ω) e G variedade simplética e grupo de Lie, respectivamente e considere a ação $\psi : G \rightarrow Diff(M)$. A aplicação ψ é uma **ação simplética** se atua por simplectomorfismos, ou seja, se

$$\psi : G \rightarrow Symp(M, \omega) \subset Diff(M),$$

sendo $Symp(M, \omega)$ o grupo de simplectomorfismos da variedade (M, ω) .

Exemplos

- (i) Na 2-esfera simplética $(\mathbb{S}^2, d\theta \wedge dh)$, em coordenadas cilíndricas, o grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos^a dado pela rotação em torno do eixo vertical, $\psi_t(\theta, h) = (\theta + t, h), t \in \mathbb{R}$ é a ação simplética do grupo $\mathbb{S}^1 \simeq \frac{\mathbb{R}}{\langle 2\pi \rangle}$, uma vez que preserva a forma de área $(d\theta \wedge dh)$. De fato, considerando a ação

$$\begin{aligned} \psi_{\theta+t} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (t, (\theta, h)) &\mapsto t \cdot (\theta, h) = (\theta + t, h) \end{aligned}$$

e a forma simplética $\omega = d\theta \wedge dh$, temos

$$\begin{aligned} \psi_{\theta+t}^* \omega &= d(\theta + t) \wedge d(h) \\ &= (d\theta + dt) \wedge dh \\ &= d\theta \wedge dh = \omega. \end{aligned}$$

- (ii) No 2-toro simplético $(\mathbb{T}^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2)$, os grupos a 1-parâmetro de difeomorfismos dados pela rotação em torno de cada círculo $\psi_{1,t}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + t, \theta_2)$

^aTemos que a família $\{\rho_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ é chamada **grupo 1-parâmetro** de difeomorfismos da variedade M e denotado por

$$\rho_t = \exp(tX), \quad X \in T_e M.$$

e $\psi_{2,t}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2 + t), t \in \mathbb{R}$, são ações simpléticas de \mathbb{S}^1 . De fato, temos para $\omega = d\theta_1 \wedge d\theta_2$

$$\begin{aligned}\psi_{1,t}^* \omega &= d(\theta_1 + t) \wedge d\theta_2 \\ &= (d\theta_1 + dt) \wedge d\theta_2 \\ &= d\theta_1 \wedge d\theta_2 = \omega.\end{aligned}$$

Analogamente, $\psi_{2,t}^* \omega = \omega$.

Definição 4.9 *Sejam M, N variedades e G um grupo de Lie. Considere as ações ϕ e ψ de G sobre M e N , respectivamente, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é **equivariante** com respeito a essas ações se, para todo $g \in G$, temos*

$$f \circ \phi_g = \psi_g \circ f$$

isto é, se f preserva a ação de grupo.

Definição 4.10 *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, G um grupo de Lie com a ação $\psi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ e $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, sendo \mathfrak{g}^* o seu espaço vetorial dual. A ação ψ é chamada de **ação hamiltoniana** se houver uma aplicação $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ satisfazendo:*

- (i) *para cada $X \in \mathfrak{g}$, seja $\mu^X : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu^X(p) := \langle \mu(p), X \rangle$ a componente de μ ao longo de X e seja X^\sharp o campo vetorial em M gerado pelo subgrupo a 1-parâmetro $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq G$. Então*

$$d\mu^X = i_{X^\sharp} \omega$$

ou seja, a função μ^X é a função hamiltoniana para o campo vetorial X^\sharp ,

- (ii) *a aplicação μ é equivariante em relação à ação ψ de G em M dada e a ação coadjunta Ad^* de G em \mathfrak{g}^* , ou seja,*

$$\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu, \forall g \in G.$$

Chamamos a (M, ω, G, μ) de **G -espaço hamiltoniano** e μ de **aplicação momento**.

Nota: Além disso, sendo μ a aplicação momento, qualquer uma de suas translações $\mu + C, C \in \mathfrak{g}^*$, é também uma aplicação momento para essa ação, fato esse vindo pela integração (onde é inserida a constante C).

Proposição 4.11 *Seja (M, ω) variedade simplética. Os campos vetoriais simpléticos completos em M estão em correspondência biunívoca com ações simpléticas de \mathbb{R} em M . Similarmente, existe uma bijeção entre os campos vetoriais hamiltonianos completos em M com as ações hamiltonianas de \mathbb{R} em M .*

Prova.

(i) $\{\text{Campos vetoriais simpléticos completos}\} \leftrightarrow \{\text{Ações simpléticas de } \mathbb{R} \text{ em } M\}$.

Seja X um campo vetorial simplético completo em M . Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos uma correspondência biunívoca com a aplicação exponencial calculada por $\exp(tX) \in \mathbb{R}$. Assim, existe $\psi_{\exp(tX)}$ ação de \mathbb{R} em M tal que

$$\begin{array}{ccc} \psi_{\exp(tX)} : M & \longrightarrow & M \\ Xp & \longmapsto & \psi_{\exp(tX)}(p) \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ (\exp(tX), p) & \longmapsto & \exp(tX) \cdot p \end{array}$$

além disso, dada a ação simplética $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Symp}(M, \omega)$, cada campo vetorial completo é determinado por $X_p = \frac{d}{dt}\psi_t(p)$.

(ii) $\{\text{Campos vetoriais hamiltonianos completos}\} \leftrightarrow \{\text{Ações hamiltonianas}\}$.

A escolha de $X \in T_e M$ define biunivocamente cada $\mu^X : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu^X(p) = \langle \mu(p), X \rangle$ e, conseqüentemente, a aplicação momento μ , que é equivariante por ser uma ação de \mathbb{R} em uma variedade.

Como a ação ψ é hamiltoniana, então existe a função $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $dH = i_X \omega$, onde X é campo vetorial hamiltoniano em M gerado por ψ . Logo, X é completo, pois o domínio de X_t é M , para todo $t \in \mathbb{R}$.

□

4.3 Ações Tóricas Hamiltonianas

Uma ação tórica hamiltoniana sobre uma variedade simplética (M, ω) é uma ação hamiltoniana de um toro \mathbb{T}^n para $\dim M = 2n$. Ações do toro podem ser vistas como uma coleção de ações do círculo, que comutam entre elas. Nesta seção veremos o caso em que um toro n -dimensional atua de forma hamiltoniana sobre uma variedade simplética $2n$ -dimensional e quando podemos classificar esta como uma variedade tórica simplética.

Definição 4.12 Sejam (M^{2n}, ω) uma variedade simplética e $G = \mathbb{T}^n$ o n -toro com a ação $\psi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$. Dizemos que ψ é **ação tórica hamiltoniana** se houver a aplicação $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

(i) para cada base de vetores X_i de \mathbb{R}^n , a função μ^{X_i} é a função hamiltoniana para X_i^\sharp . Isto é,

$$d\mu^{X_i} = i_{X_i^\sharp}\omega,$$

(ii) a aplicação μ é invariante pela ação do toro.

Nota: μ é invariante pela ação de $\mathbb{T}^n \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(\psi_g(x)), \forall x \in M, g \in \mathbb{T}^n$.

Consequência da invariância: $\mathcal{L}_{X^\sharp}\mu = i_{X^\sharp}d\mu = 0$.

Exemplos

I) Seja $(\mathbb{C}, \omega_0 = \frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z})$ e considere a ação do círculo $\mathbb{S}^1 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| = 1\}$ por rotações:

$$\begin{aligned} \psi_\xi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\xi, z) &\longmapsto \xi^k z \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{Z}$ fixo. Vamos calcular a aplicação momento pelos passos seguintes:

. Passo 1: Cálculo do campo fundamental e do campo vetorial X^\sharp

Considerando a ação dada como $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ e a forma $\omega = dx \wedge dy$, temos $\text{Lie}(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ e $\exp(X) = e^{2\pi i X} \in \mathbb{S}^1, \forall X \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1)$. Portanto,

$$\left. \frac{d}{dt} \psi(\exp(tX), z) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \psi(e^{2\pi i t X}, z) \right|_{t=0}$$

como a ação é 2π -periódica, então $\psi(e^{2\pi i t X}, z) = \psi(e^{itX}, z)$. Logo, identificando $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ como habitual $z = x + iy$, temos ^b

$$\left. \frac{d}{dt} \psi(e^{itX}, z) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{itXk} \cdot z \right|_{t=0} = [ze^{itXk} \cdot iXk]_{t=0} = iXk(x+iy) = k(ix-y).$$

Assim, temos o campo vetorial X^\sharp gerado pelo subgrupo a 1-parâmetro como

$$X^\sharp = -ky \frac{\partial}{\partial x} + kx \frac{\partial}{\partial y}.$$

. Passo 2: Cálculo da função hamiltoniana μ^X para o campo vetorial X^\sharp

^bObserve que $X \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1)$ e que X é base de \mathbb{R} , portanto, podemos escolher $X = 1$.

Como $d\mu^X = i_{X^\#}\omega$, então

$$\begin{aligned} i_{X^\#}\omega &= \left(i_{kx \frac{\partial}{\partial y} - ky \frac{\partial}{\partial x}} dx \right) \wedge dy - dx \wedge \left(i_{kx \frac{\partial}{\partial y} - ky \frac{\partial}{\partial x}} dy \right) \\ &= dx \left(kx \frac{\partial}{\partial y} \right) \wedge dy - dx \left(ky \frac{\partial}{\partial x} \right) \wedge dy - dx \wedge dy \left(kx \frac{\partial}{\partial y} \right) - dx \wedge dy \left(-ky \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= -ky dy - kx dx \end{aligned}$$

desta forma, temos $d\mu^X = -ky dy - kx dx$. Então

$$\mu^X = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \text{constante} = -\frac{k}{2}|z|^2 + C.$$

. Passo 3: Cálculo da aplicação momento

Como $\mu^X(z) = \langle \mu(z), X \rangle$ e $X = 1$, então $\mu^X(z) = \mu(z)$.

Portanto, a aplicação momento é

$$\mu(z) = -\frac{k}{2}|z|^2 + C.$$

II) Seja $\mathbb{T}^n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n \mid |\xi_j| = 1, \forall j\}$ o n -toro que atua em \mathbb{C}^n pela ação

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\xi, z) &\longmapsto (\xi_1^{k_1} z_1, \dots, \xi_n^{k_n} z_n). \end{aligned}$$

A ação $\mathbb{T}^n \curvearrowright \mathbb{C}^n$ equivale à ação $\overbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}^n \curvearrowright \mathbb{R}^{2n}$. Considerando a 2-forma simplética como $\omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$, $z_j = x_j + iy_j$ e $k_j \in \mathbb{Z}$ fixos, sigamos, novamente, os passos anteriores para determinar a sua aplicação momento:

. Passo 1: Cálculo do campo fundamental e do campo vetorial $X^\#$

Temos $\exp(X) = (e^{2\pi i X_1}, \dots, e^{2\pi i X_n})$, para $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{t} = \mathbb{R}^n$.

Logo,^c

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \psi(\exp(tX), z) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \psi((e^{itX_1}, \dots, e^{itX_n}), (z_1, \dots, z_n)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (e^{itX_1 k_1} z_1, \dots, e^{itX_n k_n} z_n) \right|_{t=0} \\ &= i(X_1 k_1 z_1, \dots, X_n k_n z_n) \\ &= (X_1 k_1 (ix_1 - y_1), \dots, X_n k_n (ix_n - y_n)) \\ &= (k_1 (ix_1 - y_1), \dots, k_j (ix_j - y_j), \dots, k_n (ix_n - y_n)). \end{aligned}$$

Assim, os campos definidos pela ação infinitesimal associada a ψ são

$$X_j^\# = k_j \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad j = i, \dots, n.$$

. Passo 2: Cálculo da função hamiltoniana μ^X para o campo vetorial $X^\#$

$$d\mu^{X_j} = i_{X_j^\#} \omega = i_{k_j \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)} \sum_{j=i}^n dx_j \wedge dy_j = -k_j (x_j dx_j + y_j dy_j)$$

portanto,

$$\mu^{X_j}(z) = -\frac{k_j}{2} (x_j^2 + y_j^2) + C_j = -\frac{k_j}{2} |z_j|^2 + C_j.$$

. Passo 3: Cálculo da aplicação momento

Como $\mu^{X_j}(z) = \langle \mu(z), X_j \rangle$ e $X = (X_1, \dots, X_n)$, observemos que a aplicação momento é definida por

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ z &\longmapsto (\mu^{X_1}(z), \dots, \mu^{X_n}(z)) \end{aligned}$$

então

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = \left(-\frac{1}{2} k_1 |z_1|^2, \dots, -\frac{1}{2} k_n |z_n|^2 \right) + C. \quad (4.1)$$

III) Seja \mathbb{S}^1 atuando sobre \mathbb{C}^n pela ação

$$\begin{aligned} \psi_\xi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\xi, z) &\longmapsto (\xi^k z_1, \dots, \xi^k z_n) \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$ fixo. Semelhante aos itens anteriores, temos:

^cAqui usaremos o fato de que X é base de \mathbb{R}^n , portanto, $X_j = e_j, \forall j = 1, \dots, n$.

. Passo 1: Cálculo do campo fundamental e do campo vetorial X^\sharp

$$\left. \frac{d}{dt} \psi(\exp(tX), z) \right|_{t=0} = k(ix_1 - y_1, \dots, ix_n - y_n) = k(ix - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow X^\sharp = k \sum_{j=1}^n \left(-y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

. Passo 2: Cálculo da função hamiltoniana μ^X para o campo vetorial X^\sharp

$$d\mu^X = i_{X^\sharp} \omega = i_{k \sum_{j=1}^n \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)} \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j = -k \sum_{j=1}^n (x_j dx_j + y_j dy_j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu^X(z) &= -\frac{k}{2} \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) + C = -\frac{k}{2} \sum_{j=1}^n |z_j|^2 + C = -\frac{k}{2} (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) + C \\ &= -\frac{k}{2} |z|^2 + C. \end{aligned}$$

. Passo 3: Cálculo da aplicação momento

$$\mu^X(z) = \langle \mu(z), X \rangle \text{ e } X = 1 \Rightarrow \mu(z_1, \dots, z_n) = \mu^X(z) = -\frac{k}{2} |z|^2 + C.$$

Nota: Observe que o exemplo acima não é o de uma ação tórica, pois a dimensão do grupo de Lie \mathbb{S}^1 não é a metade da dimensão da variedade \mathbb{C}^n .

IV) Seja $(\mathbb{S}^2, \omega = d\theta \wedge dh)$ e considere a ação do círculo \mathbb{S}^1 :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 &\longmapsto \mathbb{S}^2 \\ (e^{it}, (\theta, h)) &\longmapsto (\theta + t, h) \end{aligned}$$

. Passo 1: Cálculo do campo fundamental e do campo vetorial X^\sharp

Como $\text{Lie}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$, então $\exp(X) = e^{2\pi i X} \in \mathbb{S}^1$, X base de \mathbb{R} . Assim:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \psi(e^{itX}, (\theta, h)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} (\theta + tX, h) \right|_{t=0} \\ &= (X, 0) = (1, 0) \\ \Rightarrow X^\sharp &= 1 \frac{\partial}{\partial \theta} + 0 \frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

. Passo 2: Cálculo da função hamiltoniana μ^X para o campo vetorial X^\sharp

$$d\mu^X = i_{X^\sharp}\omega = i_{\frac{d}{dt}}(d\theta \wedge dh) = dh \Rightarrow \mu^X(\theta, h) = h.$$

. Passo 3: Cálculo da aplicação momento

$$\mu^X(\theta, h) = \langle \mu(\theta, h), X \rangle. \text{ Como } X = 1, \text{ então } \mu(\theta, h) = h.$$

Seja $f : A \rightarrow B$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais e seja $f^* : B^* \rightarrow A^*$ a sua aplicação dual (ou adjunta), i.e, a aplicação

$$\langle f^*(b), a \rangle = \langle b, f(a) \rangle, \quad a \in A, b \in B^*. \quad (4.2)$$

Consideremos o espaço \mathbb{C}^d equipado com a ação do toro \mathbb{T}^d :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ ((e^{it_1}, \dots, e^{it_d}), (z_1, \dots, z_d)) &\longmapsto (e^{it_1}z_1, \dots, e^{it_d}z_d) \end{aligned}$$

tal ação é hamiltoniana com aplicação momento

$$\mu(z_1, \dots, z_d) = -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

e o subtoro $N = \mathbb{T}^{n-d}$ atua por restrição sobre \mathbb{C}^d com aplicação momento

$$\mu_N : i^* \circ \mu : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathfrak{n}^*$$

para $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$.

Lema 4.13 *Seja (M, ω) uma variedade simplética e N um subgrupo do grupo de Lie compacto G , com suas respectivas álgebras de Lie \mathfrak{n} e \mathfrak{g} . Seja $i : \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ a inclusão e $i^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$ sua aplicação dual.*

Suponha que G atue em M de forma hamiltoniana com a aplicação momento $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^$. Então, a restrição da ação de N em M é também hamiltoniana com aplicação momento dada pela composição $i^* \circ \mu : M \rightarrow \mathfrak{n}^*$.*

Prova. Seja $X \in \mathfrak{n}$. Então

$$d((i^* \circ \mu)^X) = d(\mu^{i(X)}) = \iota_{i(X)}\omega = \iota_X\omega,$$

sendo $\iota_{i(X)}\omega$ a contração da forma ω pelo campo $i(X) \in \mathfrak{g}$.

A equivariância de $i^* \circ \mu$ vem do fato de μ ser equivariante e da igualdade $i = d_e f$, sendo $f : N \rightarrow G$. Portanto, N atua de forma hamiltoniana em M com aplicação momento $i^* \circ \mu$. \square

Exemplo

Consideremos $\mathbb{C}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$ munido com a forma simplética canônica

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^d dx_j \wedge dy_j.$$

Seja ψ a ação tórica hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ ((e^{it_1}, \dots, e^{it_d}), (z_1, \dots, z_d)) &\longmapsto (e^{it_1} z_1, \dots, e^{it_d} z_d). \end{aligned}$$

Vimos, em 4.1, que a aplicação momento para esta ação é

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (z_1, \dots, z_d) &\longmapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \end{aligned}$$

consideremos $N = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{T}^d$, que atua por restrição em \mathbb{C}^d da forma

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ (e^{i\theta}, (z_1, \dots, z_d)) &\longmapsto (z_1, \dots, e^{i\theta} z_j, \dots, z_d) \end{aligned}$$

para algum $j = 1, \dots, d$, i.e., a rotação em torno do eixo z_j . Nesse caso, a ação de N é hamiltoniana com aplicação momento

$$\begin{aligned} \mu_N := i^* \circ \mu : \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathfrak{n}^* \simeq \mathbb{R} \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto -\frac{1}{2}|z_j|^2 + \lambda_j. \end{aligned}$$

Teorema 4.14 (Convexidade- Atiyah, [13]; Guillemin-Sternberg, [14]) *Seja (M, ω) uma variedade simplética compacta e conexa e seja $\psi : \mathbb{T}^n \times M \rightarrow M$ uma ação tórica hamiltoniana com aplicação momento $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então:*

- (i) $\mu^{-1}(c)$ é um conjunto conexo, para todo $c \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) A imagem de $\mu(M)$ é o casco convexo ^d em \mathbb{R}^n , gerado pelas imagens dos pontos fixos da ação tórica.

^dO casco convexo de um conjunto de pontos no plano é o menor polígono convexo que os envolve, isto é, todos os pontos do conjunto devem estar dentro do polígono ou sobre a sua borda.

Nota: A imagem é chamada de **polígono momento**.

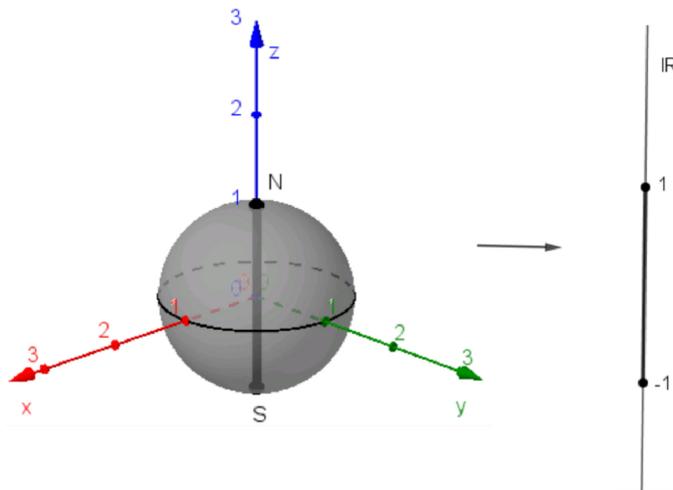
Veamos mais alguns exemplos:

V) Vimos, no exemplo IV, que a ação de \mathbb{S}^1 na esfera \mathbb{S}^2 possui aplicação momento $\mu(\theta, h) = h$. Neste caso, os pontos fixos são da forma

$$(\mathbb{S}^2)^{\mathbb{S}^1} = \{p \in \mathbb{S}^2 \mid t \cdot p = p\} = \{N\} \cup \{S\}, \forall t \in \mathbb{S}^1,$$

onde $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$. Portanto

$$\Delta = \mu((\mathbb{S}^2)^{\mathbb{S}^1}) = [-1, 1].$$



PUC-Rio - Certificação Digital N° 1613096/CA

VI) Como último exemplo, citaremos a ação de \mathbb{T}^3 em $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ definida como

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^3 &\longmapsto \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \\ ((e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}), [z_0 : z_1 : z_2 : z_3]) &\longmapsto [z_0 : e^{it_1} z_1 : e^{it_2} z_2 : e^{it_3} z_3] \end{aligned}$$

com a respectiva aplicação momento

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}\mathbb{P}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] &\longmapsto -\frac{1}{2} \frac{(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}. \end{aligned}$$

Os pontos fixos são mapeados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [1 : 0 : 0 : 0] &\longmapsto (0, 0, 0) \\ [0 : 1 : 0 : 0] &\longmapsto \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ [0 : 0 : 1 : 0] &\longmapsto \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ [0 : 0 : 0 : 1] &\longmapsto \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

portanto, o polítopo é um simplexo em \mathbb{R}^3 cujos vértices são os pontos acima. Nesta dimensão, o simplexo é um tetraedro.

Definição 4.15 *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. Dizemos que a ação $G \times M \rightarrow M$ é **efetiva** se cada elemento do grupo $g \neq e$ move ao menos um ponto de $p \in M$, i.e., $\bigcap_{p \in M} G_p = \{e\}$, onde $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$ é o estabilizador de p .*

Proposição 4.16 *Seja $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ um \mathbb{T}^n -espaço hamiltoniano compacto e conexo. Então, para algum $p \in M$, a órbita $\mathbb{T}^n \cdot p$ é uma subvariedade isotrópica de M .*

Prova. Como a aplicação momento μ é \mathbb{T}^n -invariante, então μ leva $\xi \in \mathfrak{t}^*$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(\mathbb{T}^n)$, na órbita $\mathbb{T}^n \cdot p$. Segue que o diferencial $d\mu_p : T_p M \rightarrow T_\xi \mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}^*$ leva o subespaço $T_p(\mathbb{T}^n \cdot p)$ em 0, ou seja,

$$T_p(\mathbb{T}^n \cdot p) \subset \ker(d\mu_p) = (T_p(\mathbb{T}^n \cdot p))^{\omega_p}.$$

Portanto, $\mathbb{T}^n \cdot p$ é uma subvariedade isotrópica de M . □

Proposição 4.17 *Seja $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ um \mathbb{T}^n -espaço hamiltoniano compacto e conexo. Se a \mathbb{T}^n -ação é efetiva, então $\dim M \geq 2n$.*

Prova. Escolha qualquer $p \in M$ de modo que a \mathbb{T}^n -ação seja livre, isto é, $(\mathbb{T}^n)_p = \{e\}$. Assim, a órbita $\mathbb{T}^n \cdot p$ é difeomórfica a $\frac{\mathbb{T}^n}{(\mathbb{T}^n)_p} = \mathbb{T}^n$ e, portanto, tem dimensão n . Porém, como $\mathbb{T}^n \cdot p$ é uma subvariedade isotrópica de M , então

$$n = \dim(\mathbb{T}^n \cdot p) \leq \frac{1}{2} \dim M.$$

□

Definição 4.18 *Uma **variedade tórica simplética** é uma variedade simplética (M, ω) compacta e conexa de dimensão $2n$, equipada com uma ação hamiltoniana efetiva de um toro de dimensão n , com a escolha de uma aplicação momento $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ correspondente.*

Definição 4.19 Duas variedades tóricas simpléticas $(M_1, \omega_1, \mathbb{T}_1, \mu_1)$ e $(M_2, \omega_2, \mathbb{T}_2, \mu_2)$ são **equivalentes** se, e somente se, existe um isomorfismo $\lambda : \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ e um symplectomorfismo λ -equivariante $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que

$$\mu_1 = \mu_2 \circ \varphi.$$

Exemplo

Sejam \mathbb{S}_1^2 com a estrutura simplética $\omega_1 = d\theta \wedge dh$, \mathbb{S}_r^2 com a estrutura simplética $\omega_2 = \frac{1}{r}d\theta \wedge dh$ e considere as ações $\psi_1 : \mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}_1^2$ e $\psi_r : \mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}_r^2$ por rotação ao redor do eixo z. Vamos calcular o isomorfismo $\lambda : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ que torna as variedades tóricas simpléticas $(\mathbb{S}_1^2, \omega_1, \mathbb{T}^1, \mu_1)$ e $(\mathbb{S}_r^2, \omega_2, \mathbb{T}^1, \mu_2)$ equivalentes: primeiramente, temos que para a ação

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}_1^2 &\longmapsto \mathbb{S}_1^2 \\ (e^{it}, (\theta, h)) &\longmapsto (\theta + t, h) \end{aligned}$$

$\mu_1(\theta, h) = h$ é uma aplicação momento, como calculada no exemplo IV. Agora, calculemos a aplicação momento μ_2 referente à ação

$$\begin{aligned} \psi_2 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}_r^2 &\longmapsto \mathbb{S}_r^2 \\ (e^{it}, (\theta, rh)) &\longmapsto (\theta + t, rh). \end{aligned}$$

Assim, seja $X_2 = 1 \in \text{Lie}(\mathbb{S}^1)$, temos

$$\square \frac{d}{dt} \psi_2(\exp tX_2, (\theta, rh)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\theta + tX_2, rh) \Big|_{t=0} = (X_2, 0) = (1, 0).$$

Analogamente, $X_2^\sharp = \frac{\partial}{\partial \theta}$

$$\square i_{X_2^\sharp} \omega_2 = i_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left(\frac{1}{r} d\theta \wedge dh \right) = \frac{1}{r} dh \Rightarrow \mu_2^{X_2}(\theta, rh) = \frac{h}{r} + C$$

$$\square \mu_2^{X_2}(\theta, rh) = \langle \mu_2(\theta, rh), X_2 \rangle \Rightarrow \mu_2(\theta, rh) = \frac{h}{r} + C.$$

Portanto, $(\mathbb{S}_1^2, \omega_1, \mathbb{S}^1, \mu_1)$ é equivalente a $(\mathbb{S}_r^2, \frac{1}{r} \omega_1, \mathbb{S}^1, \frac{1}{r} \mu_1)$ se, e somente se, existe isomorfismo $\lambda : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que o symplectomorfismo $\varphi : \mathbb{S}_1^2 \longrightarrow \mathbb{S}_r^2$, que associa $p = (\theta, h)$ a $\varphi(p) = (\theta, rh)$, é λ -equivariante. Isto é,

φ é λ -equivariante $\Leftrightarrow \varphi(t \diamond m_1) = \lambda(t) \star \varphi(m_1), \forall m_1 \in M_1$ e $t \in \mathbb{T}_1$, sendo $\diamond :=$ ação de \mathbb{T}_1 sobre M_1 e \star : ação de \mathbb{T}_2 sobre M_2 .

- se φ é um simplectomorfismo: de fato, temos

$$\begin{aligned}(\varphi^* \omega_2)_p(X_1, X_2) &= (\omega_2)_{\varphi(p)}(d_p \varphi(X_1), d_p \varphi(X_2)) \\ &= \frac{1}{r} d\theta \wedge d(rh) \\ &= d\theta \wedge dh = \omega_1,\end{aligned}$$

- se φ é λ -equivariante:

$$\begin{aligned}\varphi(t \cdot (\theta, h)) = \lambda(t) \cdot \varphi(\theta, h) &\Leftrightarrow \varphi(\theta + t, h) = (\theta + \lambda(t), rh) \\ &\Leftrightarrow (\theta + t, rh) = (\theta + \lambda(t), rh) \\ &\Leftrightarrow \lambda(t) = t.\end{aligned}$$

Logo, as variedades simpléticas são equivalentes para o isomorfismo calculado por

$$\begin{aligned}\lambda : \mathbb{S}^1 &\longmapsto \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto t.\end{aligned}$$

5

Teorema de Delzant

Neste capítulo veremos o conceito de polítopo necessário para enunciar um importante teorema, o Teorema de Delzant, que classifica as variedades tóricas simpléticas.

Definição 5.1 Um **poliedro convexo** é um subconjunto de \mathbb{R}^n formado pela interseção de um número finito de semi-espacos afins.

Definição 5.2 Um **polítopo** em \mathbb{R}^n é o casco convexo de um número finito de pontos em \mathbb{R}^n , isto é, um poliedro convexo delimitado.

Temos que $H \subseteq \mathbb{R}^n$ é um hiperplano se $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = a\}$, sendo $v \in \mathbb{R}^n$ vetor não nulo e $a \in \mathbb{R}$. H é um hiperplano suporte de $X \in \mathbb{R}^n$ se $d(X, H) = \inf\{\|x - h\| \mid x \in X, h \in H\} = 0$.

Definição 5.3 Seja $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ um polítopo. Dizemos que o subconjunto $F = \Delta \cap H$ de Δ , sendo H o hiperplano suporte de F , é:

- **vértice de Δ** : Se $\dim(F) = 0$,
- **aresta de Δ** : Se $\dim(F) = 1$,
- **faceta de Δ** : Se $\dim(F) = d - 1$ quando $\dim(\Delta) = d$.

Definição 5.4 Um **polítopo de Delzant** Δ é um polítopo em $(\mathbb{R}^n)^*$ que satisfaz:

- simplicidade**: em cada vértice se encontram exatamente n arestas,
- racionalidade**: as arestas que se encontram em cada vértice p devem estar contidas entre pontos reticulares ^a, isto é, devem ser da forma $p + tu_i$, onde $u_i \in \mathbb{Z}^n$ para $t \geq 0$,
- suavidade**: em cada p , o correspondente u_1, \dots, u_n forma uma \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}^n .

^aPontos reticulares são aqueles que pertencem a uma rede diagonal em \mathbb{R}^n , que por sua vez é um subgrupo de \mathbb{R}^n isomorfo a \mathbb{Z}^n e que gera o espaço vetorial real \mathbb{R}^n .

Exemplos de polítopos de Delzant:

- Em \mathbb{R}^0 : 0-polítopo equivale a um ponto (vértice).
- Em \mathbb{R} : 1-polítopo equivale a um segmento (aresta).

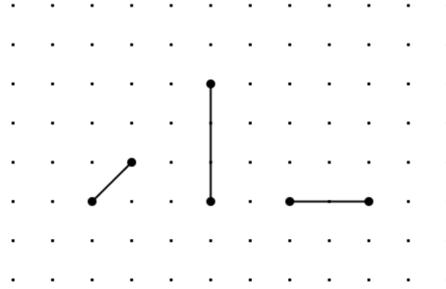


Figura 5.1: 1-polítopo de Delzant

A **Figura 5.2** não representa um polítopo de Delzant porque o primeiro elemento fere a suavidade e o segundo elemento a racionalidade.

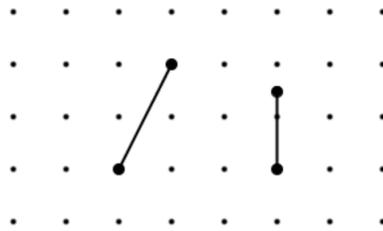


Figura 5.2: 1-polítopo não Delzant

- Em \mathbb{R}^2 : 2-polítopo

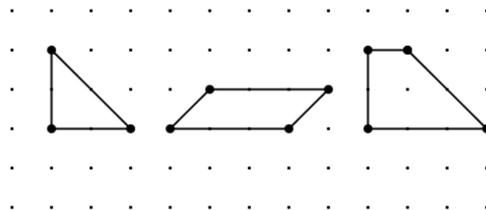


Figura 5.3: 2-polítopo de Delzant

Na **Figura 5.4**, os dois elementos falham na condição de suavidade.

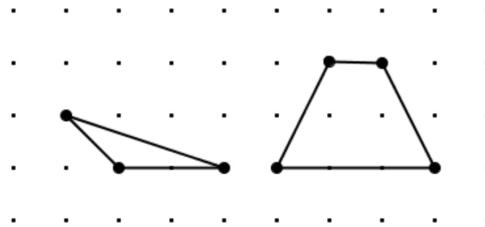


Figura 5.4: 2-polítopo não Delzant

- Em \mathbb{R}^3 : 3-polítopo

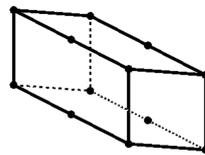


Figura 5.5: 3-polítopo de Delzant

Na **Figura 5.6**, o polítopo não é de Delzant porque não é simples, nem suave e nem racional.

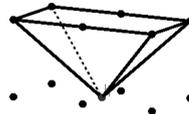


Figura 5.6: 3-polítopo não Delzant

Seja $\text{Aff}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$ o grupo afim que atua num ponto $x \in \mathbb{R}^n$ por $Ax + \lambda$, com $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Note que se Δ é um polítopo de Delzant, também a sua imagem $g(\Delta)$ por $g \in \text{Aff}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$ é um polítopo de Delzant.

Teorema 5.5 (Delzant, [1]) *Existe uma correspondência biunívoca entre variedades tóricas simpléticas equivalentes e polítopos de Delzant módulo a ação $\text{Aff}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$.*

Essa correspondência se dá através da imagem da aplicação momento, ou seja, se $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ é uma variedade tórica simplética compacta, então $\mu(M)$

é seu polítopo de Delzant associado e vice-versa. Isto é, dado um polítopo de Delzant Δ , é possível construir uma variedade tórica simplética $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ tal que $\mu(M) = \Delta$. Essa construção será detalhada no **Capítulo 7**.

Podemos descrever um polítopo em $(\mathbb{R}^n)^*$ como a interseção de semi-espacos:

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \dots, d\}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Nesta dissertação, acompanhando [15], escolheremos os vetores v_i apontando para fora.

Um vetor $v \in \mathbb{Z}^n$ é primitivo se não pode ser escrito da forma $v = ku$, $u \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ e $|k| > 1$.

Proposição 5.6 *Seja Δ um polítopo de Delzant. Então os vetores v_i são todos primitivos.*

Prova. Suponha, por absurdo, que exista $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que v_i não seja primitivo. Portanto, existe $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > 1$ tal que $v_i = kv$, para $v \in \mathbb{Z}^n$.

Como o conjunto v_1, \dots, v_n forma uma base de \mathbb{Z}^n sobre \mathbb{Z} , então v pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores, isto é existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Multipliquemos ambos os lados por k , assim

$$v_i = \alpha_1 k v_1 + \dots + \alpha_i k v_i + \dots + \alpha_n k v_n$$

portanto, $\alpha_i k = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$. O que é uma contradição, já que $|k| > 1$. \square

Exemplo

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^* / x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \leq k\}, k \in \mathbb{Z} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{\langle (x_1, x_2), (-1, 0) \rangle}_{v_1} \leq 0, \underbrace{\langle (x_1, x_2), (0, 1) \rangle}_{v_2} \leq 0, \underbrace{\langle (x_1, x_2), (1, 1) \rangle}_{v_3} \leq k\}. \end{aligned}$$

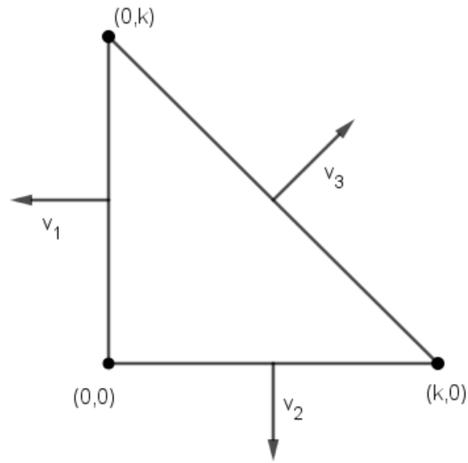


Figura 5.7: Vetores normais primitivos

6

Redução Simplética

A redução simplética é uma importante ferramenta utilizada para reduzir o total de simetrias de um sistema mecânico. A técnica consiste em considerar o quociente simplético, para tal, iremos utilizar o Teorema de Marsden-Weinstein-Meyer, que mostra que variedades simpléticas podem ser reduzidas por uma ação de um grupo de Lie, sob certas condições de regularidade e que tal quociente herda uma estrutura simplética.

6.1

Espaço das Órbitas

Vimos, no **Capítulo 4**, definições tais como órbita, grupo de isotropia de uma ação e sua classificação perante esses elementos (ação transitiva, livre e localmente livre). Neste breve capítulo iremos aprofundar sobre o espaço das órbitas, importante para construção da variedade tórica a partir de um polítopo de Delzant.

Seja a ação $\psi : G \times M \longrightarrow M$ entre um grupo de Lie G e uma variedade M . Indicamos com \sim a relação de equivalência de pertencer a uma mesma órbita, i.e., $p \sim q \Leftrightarrow p$ e q estão na mesma órbita. Chamaremos de **espaço das órbitas** o quociente $\frac{M}{G} := \frac{M}{\sim}$ e de **projeção ponto-órbita** a aplicação $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{G}$. Além disso, temos que π é chamada de **quociente topológico** quando temos ^a

$$\pi^{-1}(U) \text{ aberto em } M \Leftrightarrow U \text{ aberto em } \frac{M}{G}, U \subseteq \frac{M}{G}.$$

É importante notar que se o conjunto original é um espaço topológico, sempre será possível conferir ao quociente uma topologia para o qual a aplicação projeção seja contínua. Porém, no caso do espaço original ser uma variedade, o espaço quociente muitas vezes não é.

^aA projeção $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{G}$ é automaticamente contínua, pois a imagem inversa de aberto no conjunto $\frac{M}{G}$ é, por definição, aberta em M .

Exemplos

- 1) Seja $G = \mathbb{C}^*$ atuando em $M = \mathbb{C}^n$ pela ação

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, (z_1, \dots, z_n)) &\longmapsto (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) \end{aligned}$$

dado $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, temos:

órbita: $G \cdot z = \mathbb{C}^* z$, isto é, são linhas complexas menos a origem,

espaço das órbitas: $\frac{M}{G} = \frac{\mathbb{C}^n}{\mathbb{C}^*} = \mathbb{P}^{n-1} \sqcup \{*\}$.

Temos uma topologia quociente restrita ao espaço projetivo complexo (subvariedade do espaço das órbitas), logo, recuperamos a topologia usual de \mathbb{P}^{n-1} . Assim, a topologia em $\frac{M}{G}$ não é Hausdorff mas, ao remover o zero de \mathbb{C}^n , temos que \mathbb{P}^{n-1} é um espaço das órbitas Hausdorff.

Nota: Além da identificação acima, também temos o espaço projetivo complexo associado pela ação do círculo como

$$\mathbb{P}^{n-1} = \frac{(\mathbb{C}^n)^*}{\mathbb{C}^*} = \frac{\mathbb{S}^{2n-1}}{\mathbb{S}^1}.$$

- 2) Análogo ao exemplo anterior, para $G = \mathbb{R}^*$ e $M = \mathbb{R}^n$, a ação

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, (x_1, \dots, x_n)) &\longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

possui, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

órbita: $G \cdot x = \mathbb{R}^* x$, ou seja, retas que passam pela origem (menos a origem) se $x \neq 0$ e um ponto quando $x = 0$,

espaço das órbitas: $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \cup \{*\}$.

Caso fosse considerada a mesma ação de G , mas em $(\mathbb{R}^n)^*$, o espaço das órbitas seria apenas o espaço projetivo real.

- 3) $G = \mathbb{R}$ atuando em $M = \mathbb{R}$ pela ação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, a) &\longmapsto e^t a \end{aligned}$$

temos:

órbitas: $G.a = \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ e $\{0\}$, quando $a > 0, a < 0$ e $a = 0$, respectivamente e

espaço das órbitas: $\frac{M}{G} = \frac{\mathbb{R}}{\sim}$, sendo a relação de equivalência definida por $a \sim b \Leftrightarrow a$ e b pertencem à mesma órbita, isto é, se têm o mesmo sinal. Desta forma, o espaço das órbitas consiste em três pontos, cada um correspondente às órbitas semirreta positiva, semirreta negativa e origem. Portanto, a topologia quociente não é Hausdorff, já que não é possível termos vizinhanças disjuntas desses pontos.

6.2

O Teorema de Marsden-Weinstein-Meyer

Começamos lembrando, pela definição 3.14, que o anulador de \mathfrak{g}_p é

$$\mathfrak{g}_p^0 = \{\xi \in \mathfrak{g}^* \mid \langle \xi, k \rangle = 0, \forall k \in \mathfrak{g}_p\}.$$

Lema 6.1 *Sejam G um grupo de Lie e (M, ω) uma variedade simplética.*

Seja $\psi : G \times M \rightarrow M$ uma ação hamiltoniana e seja $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^$ a aplicação momento, com $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Considere $\mathfrak{g}_p = \text{Lie}(G_p)$. Então, para $d\mu_p : T_p M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, temos*

$$i) \ker(d\mu_p) = (T_p(G \cdot p))^{\omega_p}$$

$$ii) \text{im}(d\mu_p) = \mathfrak{g}_p^0$$

Prova. Para algum $v \in T_p M$ e $\xi \in \mathfrak{g}$, temos $\omega_p((X^\xi)_p, v) = \langle d\mu_p(v), \xi \rangle$, sendo X^ξ o campo fundamental de ξ .

Como $(T_p(G \cdot p))^{\omega_p} = \{v \in T_p M \mid \omega_p(v, w) = 0, \forall w \in T_p(G \cdot p)\}$, disto segue que $\ker(d\mu_p) = (T_p(G \cdot p))^{\omega_p}$.

A prova do segundo item resulta do Teorema do Núcleo e da Imagem e da proposição 3.16. Como

$$\dim \mathfrak{g}_p^0 = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_p,$$

$$\dim (T_p(G \cdot p))^{\omega_p} = \dim T_p M - (\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_p).$$

De fato,

$$\dim \mathfrak{g}_p^0 + \dim (T_p(G \cdot p))^{\omega_p} = \dim T_p M = \dim (\ker(d\mu_p)) + \dim (\text{im}(d\mu_p)).$$

Devemos mostrar que $\text{im}(d\mu_p) \subset \mathfrak{g}_p^0$ e que $\ker(d\mu_p) \subset T_p(G \cdot p)^{\omega_p}$. Como, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, $v \in T_p M$, temos $\omega_p((X^\xi)_p, v) = \langle d\mu_p(v), \xi \rangle$, então

$$v \in \ker(d\mu_p) \Rightarrow \omega_p((X^\xi)_p, v) = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

Assim, $\ker(d\mu_p) \subset T_p(G \cdot p)^{\omega_p}$. Também,

$$X^\xi(p) = \left. \frac{d}{dt} \psi(\exp(t\xi), p) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} p \right|_{t=0} = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}_p$$

logo, $\langle d\mu_p(v), \xi \rangle = 0, \forall v \in T_p M \Rightarrow \text{im}(d\mu_p) \subset \mathfrak{g}_p^0$. □

Lema 6.2 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e $Y \subset V$ um subespaço isotrópico de V , então ω induz uma forma simplética ω_{red} em $\frac{Y^\omega}{Y}$.*

Prova. Considere $u, v \in Y^\omega$, então $[u], [v] \in \frac{Y^\omega}{Y}$ define

$$\omega_{red}([u], [v]) = \omega(u, v).$$

Assim, ω_{red} é fechada porque ω é fechada. Devemos mostrar que ω_{red} está bem definida e que é não degenerada. Para isso,

$$u_1 \in [u], v_1 \in [v] \Rightarrow u_1 = u + x, v_1 = v + y, \forall x, y \in Y$$

como $Y \subset Y^\omega$ porque Y é isotrópico, temos

$$\begin{aligned} \omega(u_1, v_1) &= \omega(u + x, v + y) \\ &= \omega(u, v) + \omega(u, y) + \omega(x, v) + \omega(x, y) \\ &= \omega(u, v) \end{aligned}$$

observe que $\omega(u, y) = \omega(x, v) = 0$, pois $u, v \in Y^\omega$ e $\omega(x, y) = 0$ porque $x, y \in Y$ e $x, y \in [0]$. Assim,

$$\omega_{red} \text{ não degenerada} \Leftrightarrow \omega_{red}([u], [v]) = 0 \Rightarrow [v] = [0].$$

Dado $u \in Y^\omega$. Temos

$$\omega_{red}([u], [v]) = \omega(u, v) = 0, \forall u \in Y^\omega$$

portanto, $[v] = 0$. □

Proposição 6.3 *Uma G -ação é localmente livre em cada $p \in \mu^{-1}(0)$ se, e somente se, $d\mu_p$ é sobrejetivo, ou seja, se p é ponto regular de $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$.*

Prova. Temos que a ação é localmente livre em p se, e somente se, $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ e se, e somente se temos $\text{im}(d\mu_p) = \mathfrak{g}^*$, ou seja, $d\mu_p$ é sobrejetivo. \square

Corolário 6.4 *Se uma G -ação em $\mu^{-1}(0)$ é livre, então 0 é um valor regular de μ e, portanto, $\mu^{-1}(0)$ é uma subvariedade de M de codimensão igual à dimensão de G .*

Prova. Como G age livremente sobre $\mu^{-1}(0)$, temos que $G_p = \{e\}$ para todo $p \in \mu^{-1}(0)$. Logo, $\mathfrak{g}_p = 0$. Assim, a proposição 6.3 garante que $d\mu_p$ é sobrejetivo. Portanto, 0 é valor regular de μ e $\mu^{-1}(0)$ é subvariedade de M com codimensão igual à dimensão de G . \square

Lema 6.5 *Suponha que G atua livremente em $\mu^{-1}(0)$ e que $0 \in \mathfrak{g}^*$ é um valor regular de μ . Seja $p \in \mu^{-1}(0)$. Então $T_p\mu^{-1}(0) = T_p(G \cdot p)^\omega$, onde $G \cdot p \subset M$ é a órbita que passa por p . Em particular, $T_p\mu^{-1}(0)$ é um subespaço isotrópico de T_pM .*

Prova. Temos que

$$0 \text{ valor regular} \Rightarrow T_p\mu^{-1}(0) = \ker(d\mu_p), \text{ para cada } p \in \mu^{-1}(0).$$

Isto significa que $T_p\mu^{-1}(0) = T_p(G \cdot p)^\omega$. Logo

$$G \curvearrowright \mu^{-1}(0) \Rightarrow G \cdot p \in \mu^{-1}(0), \forall p \in \mu^{-1}(0).$$

Portanto, $T_p(G \cdot p) \subset T_p\mu^{-1}(0)$. \square

Teorema 6.6 *Se G é um grupo de Lie compacto e age livremente sobre M , então o espaço das órbitas $\frac{M}{G}$ é uma variedade e a aplicação $\pi : M \rightarrow \frac{M}{G}$ é um G -fibrado principal.*

Prova.^b Considere a ação

$$\begin{aligned} ev : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

se a ação é suave, ev é suave. Dado $p \in M$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} ev_p : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

^bA demonstração foi baseada em [15], p. 143.

a imagem de ev_p é uma G -órbita através de p e ev_p é injetivo porque a ação de G em M é livre. Portanto, temos que para um subconjunto $A \subset M$ compacto e, portanto fechado, a sua imagem inversa $(ev_p)^{-1}(A)$ é também compacta (subconjunto fechado do grupo de Lie G compacto).

Mostremos que ev_p é uma imersão. Para $X \in \mathfrak{g} \simeq T_e G$, temos

$$d(ev_p)_e(X) = 0 \Leftrightarrow X_p^\# = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Logo, como a ação é livre, então $d(ev_p)_e$ é injetivo. Além disso, para $g \in G$, $X \in T_g G$, temos

$$d(ev_p)_g(X) = 0 \Leftrightarrow d(ev_p \circ R_g)_e \circ (dR_{g^{-1}})_g(X) = 0,$$

sendo $R_g : G \rightarrow G$ a multiplicação pela direita por g . Assim, por $ev_p \circ R_g = ev_{g \cdot p}$ possuir um diferencial injetivo em e e $(dR_{g^{-1}})_g$ ser um isomorfismo, então $d(ev_p)_g$ é sempre injetivo. \square

Teorema 6.7 (Marsden-Weinstein [2], Meyer [3]) Seja (M, ω, G, μ) um G -espaço hamiltoniano para um grupo de Lie G compacto. Suponha que G age livremente em $\mu^{-1}(0)$, então, se $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ é a inclusão, temos que:

- i) o espaço das órbitas $M_{red} = \frac{\mu^{-1}(0)}{G}$ é uma variedade,
- ii) a aplicação $\pi : \mu^{-1}(0) \rightarrow M_{red}$ é um G -fibrado principal,
- iii) existe uma forma simplética ω_{red} em M_{red} tal que $i^* \omega = \pi^* \omega_{red}$.

Prova.

Temos, pelo corolário 6.4, que como G atua livremente em $\mu^{-1}(0)$, então $0 \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular de μ e, portanto, $\mu^{-1}(0)$ é uma subvariedade de M .

Além disso, pelo teorema 6.6, $M_{red} = \frac{\mu^{-1}(0)}{G}$ é uma variedade e a aplicação $\pi : \mu^{-1}(0) \rightarrow M_{red}$ é um G -fibrado principal. Com isso, finalizamos a prova dos dois primeiros itens.

Para provar o terceiro item, temos pelo lema 6.5

$$p \in \mu^{-1}(0) \Rightarrow T_p(G \cdot p)^{\omega_p} = \ker(d\mu_p) = T_p \mu^{-1}(0).$$

Assim, $T_p(G \cdot p)$ é isotrópico. O lema 6.2 garante que existe uma estrutura linear simplética em $T_{[p]} M_{red}$ induzida por ω_p .

Queremos mostrar que $(\omega_{red})_{[p]}$ não depende da escolha do representante em $[p]$. Por isso, seja $q = g \cdot p$ com $g \in G$,

$$d(ev_g)(T_p\mu^{-1}(0)) = T_q\mu^{-1}(0)$$

$$d(ev_g)(T_p(G \cdot p)_p) = T_q(G \cdot p)_q$$

$$\Rightarrow [u] = [d(ev_g)(u)] \in T_{[p]}M_{red}, \forall u \in T_p\mu^{-1}(0).$$

Logo, considerando a escolha de p para a forma induzida ω_{red} e do ponto q para a forma $(\omega_{red})_q$, temos

$$\begin{aligned} (\omega_{red})_{[p]}([v], [u]) &= \omega_p(u, v) \\ &= \omega_{[p]}(d(ev_g)(u), d(ev_g)(v)) \\ &= (\omega_{red})_{[q]}([d(ev_g)(u)], [d(ev_g)(v)]). \end{aligned}$$

Assim, se ω_{red} for fechada, então será uma forma simplética em M . De fato,

$$\begin{aligned} \pi^* d\omega_{red} &= d\pi^* \omega_{red} \\ &= di^* \omega \\ &= i^* d\omega = 0 \end{aligned}$$

pela injetividade de π^* , segue que $d\omega_{red} = 0$ ou seja, ω_{red} é fechada. Pelo lema 6.2, ω_{red} é não degenerada e portanto, simplética. \square

A variedade simplética (M_{red}, ω_{red}) é chamada de **quociente simplético** ou de **quociente de Marsden-Weinstein-Meyer** da variedade (M, ω) com respeito à ação do grupo de Lie G .

Exemplos:

- 1) Recordemos a ação tórica do Grupo de Lie $G = \mathbb{S}^1$ sobre \mathbb{C} do exemplo (I) da **seção 4.3**.

A aplicação momento é dada por $\mu(z) = -\frac{k}{2}|z|^2 + C$, $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$ fixo, onde C é uma constante que podemos escolher arbitrariamente. Escolhamos $C = \frac{k}{2}$. Assim, supondo que G age livremente no conjunto de nível zero, temos

$$\mu(z) = 0 \Rightarrow |z|^2 = 1.$$

Portanto, $\mu^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\} = \mathbb{S}^1$. A variedade reduzida, isto é, o espaço das órbitas da aplicação momento no nível zero é calculada por

$$M_{red} = \frac{\mu^{-1}(0)}{G} = \frac{\mathbb{S}^1}{\mathbb{S}^1} = \{*\}$$

com a estrutura simplética trivial.

- 2) Dada a ação do Grupo de Lie $G = \mathbb{S}^1$ sobre \mathbb{C}^n do exemplo (III) da **seção 4.3**:

A aplicação momento é igual a $\mu(z) = -\frac{k}{2}|z|^2 + C$, $z \in \mathbb{C}^n$ e $k \in \mathbb{Z}$ fixo, façamos novamente a escolha de $C = \frac{k}{2}$. Desta vez temos, para \mathbb{S}^1 agindo no conjunto de nível zero,

$$\mu(z) = 0 \Rightarrow |z|^2 = 1, z = (z_1, \dots, z_n).$$

Portanto, $\mu^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|^2 = 1\} = \mathbb{S}^{2n-1}$. A variedade reduzida é calculada por

$$M_{red} = \frac{\mu^{-1}(0)}{G} = \frac{\mathbb{S}^{2n-1}}{\mathbb{S}^1} = \mathbb{P}^{n-1}$$

conhecido como o espaço projetivo complexo, equipado com a forma simplética $\omega_{red} = \omega_{FS}$ chamada de **forma Fubini-Study**.^c

^cTemos que, para $M_{red} = \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$, $\omega_{FS} = \frac{1}{4}d\theta \wedge dh$. Para melhor aprofundar, consulte [16].

7

Construção de Delzant

Em seu artigo [1], Thomas Delzant descreve como construir, dado um polítopo de Delzant $\Delta \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$, uma variedade tórica simplética $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ tal que $\mu(M) = \Delta$. Neste capítulo descrevemos essa construção.

Dado um polítopo de Delzant, os passos seguintes levam à construção da variedade tórica simplética associada a ele:

Passo 1: Identificar os dados do polítopo: dimensão, facetas, vetores normais primitivos e descrever o polítopo por meio de inequações.

Passo 2: Temos que a construção descreve uma sequência exata^a entre grupos de Lie e suas respectivas álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^n & \longrightarrow & e \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Este passo consiste em determinar N e, posteriormente, a aplicação i .

Passo 3: Determinada i , chegamos à aplicação momento $\mu_N : i^* \circ \mu$ que, por sua vez, nos indica o conjunto de nível zero $Z = \mu_N^{-1}(0)$ e, finalmente, temos a variedade tórica simplética M_Δ associada ao polítopo de Delzant pelo quociente de Marsden-Weinstein-Meyer Z/N .

A construção faz uso da redução simplética, que prova a existência (ou sobrejetividade) do Teorema de Delzant

$$[\{(M, \omega, \mathbb{T}^d, \mu)\}] \twoheadrightarrow [\{\text{polítopos de Delzant}\}].$$

Seja Δ um polítopo de Delzant com d facetas. Podemos descrever Δ analiticamente, associando a cada semi-espaco que contém Δ um vetor não nulo $v_i \in \mathbb{Z}^n$, ortogonal (apontando para fora) à cada faceta e um número real λ_i como

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \dots, d\}, d > n$$

^aUma sequência de aplicações é exata se o núcleo de cada aplicação é igual à imagem da aplicação anterior.

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^n .

Seja $\{e_1, \dots, e_d\}$ a base canônica de \mathbb{R}^d . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ e_i &\longmapsto v_i \end{aligned}$$

Lema 7.1 A aplicação π é sobrejetora e mapeia \mathbb{Z}^d em \mathbb{Z}^n , isto é, $\pi(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^n$.

Prova. O conjunto $\{e_1, \dots, e_d\}$ é base de \mathbb{Z}^d sobre \mathbb{Z} . Iremos mostrar que o \mathbb{Z} -espaço gerado por $\{v_1, \dots, v_d\}$ é \mathbb{Z}^n .

Pela simplicidade, em um vértice do polítopo, os vetores $u_1, \dots, u_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ formam uma base para $(\mathbb{Z}^n)^*$. Assumamos o conjunto desses vetores como base canônica, sem perda de generalidade. Disto, pela racionalidade, cada vetor normal primitivo v_i que aponta para fora das facetas que se encontram no vértice é simétrico em relação ao vetor u_i correspondente. Logo, pela suavidade, o conjunto deles forma uma base de \mathbb{Z}^n . \square

Como consequência do lema anterior, existe um homomorfismo sobrejetivo de grupos de Lie $\pi : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^n$ de forma que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^n \longrightarrow e \end{array}$$

onde $\mathbb{T}^d = \frac{\mathbb{R}^d}{\mathbb{Z}^d}$ e $\mathbb{T}^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$. O núcleo da sobrejeção π

$$N := \ker \pi = \{g \in \mathbb{T}^d \mid \pi(g) = e\}$$

é um toro $(d - n)$ -dimensional contido em \mathbb{T}^d , onde $i : N \hookrightarrow \mathbb{T}^d$ é a inclusão. Por i ser injetiva, temos uma sequência exata de toros, que induz também uma sequência exata de suas respectivas álgebras de Lie.

$$\begin{array}{ccccccc} e & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^n \longrightarrow e \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

Desta forma, o dual da sequência das álgebras de Lie é a sequência exata

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

Seja $Z := \mu_N^{-1}(0) = (i^* \circ \mu)^{-1}(0)$ o conjunto de nível zero.

Lema 7.2 *Seja $\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \dots, d\}$ um polítopo de Delzant com d facetas, $d > n$ e seja Δ' sua imagem por π^* . Seja μ a aplicação momento da ação hamiltoniana do toro \mathbb{T}^d na variedade \mathbb{C}^d tal que $\mu : \mathbb{C}^d \rightarrow (\mathfrak{t}^d)^* \simeq \mathbb{R}^d$, então*

$$\mu(Z) = \pi^*(\Delta) = \Delta'$$

Prova. Queremos provar que, dado $y \in (\mathbb{R}^d)^*$, então

$$y \in \Delta' \Leftrightarrow y \in \mu(Z).$$

Isso equivale a mostrar que $y \in \text{im}(\mu)$ e $i^*y = 0$. Pela sequência exata 7.1, essas condições equivalem às $\langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, \dots, d$ e $y = \pi^*(x)$, para algum $x \in (\mathbb{R}^n)^*$.

A condição $y = \pi^*(x)$ implica que, para algum $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$\langle y, e_i \rangle = \langle \pi^*(x), e_i \rangle = \langle x, \pi(e_i) \rangle = \langle x, v_i \rangle.$$

Logo,

$$\langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i \Leftrightarrow \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i \Leftrightarrow x \in \Delta$$

e, portanto, $y \in \mu(Z) \Leftrightarrow y \in \pi^*(\Delta) = \Delta'$, ou seja, $\mu(Z) = \pi^*(\Delta) = \Delta'$. □

Lema 7.3 *O conjunto Z é compacto e N atua livremente sobre Z .*

Prova. Temos, pelo lema 7.2, que $Z \subseteq \mu^{-1}(\pi^*(\Delta'))$. Afirmamos que Z é um subconjunto fechado de um conjunto compacto. De fato, $\mu^{-1}(\pi^*(\Delta'))$ é a imagem inversa do compacto $\pi^*(\Delta')$ pela aplicação momento μ , que é própria^b. Portanto, Z é compacto.

Resta mostrar que N age livremente sobre Z , isto é, que o estabilizador $N_x = \{e\}$ para $x \in Z$ arbitrário. Novamente pelo lema 7.2, existe $p \in \Delta$ tal que $\mu(x) = \pi^*(\langle p, \cdot \rangle)$. Disto, temos três casos:

(i) p é vértice de Δ .

^bUma aplicação $M_1 \rightarrow M_2$ é própria se para todo compacto $K \in M_2$, sua imagem inversa em M_1 é também compacta em M_1 .

Pela simplicidade de Δ , existe $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ conjunto de índices tais que p é caracterizado por equações $\langle p, v_i \rangle = \lambda_i, i \in I$. Isso equivale a

$$\langle p, v_i \rangle = \langle p, \pi(e_i) \rangle = \langle \pi^*(p), e_i \rangle = \langle \mu(x), e_i \rangle = \lambda_i$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}|x_i|^2 + \lambda_i = \lambda_i$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $I = \{1, \dots, n\}$.

Assim, $x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_d)$; $x_{n+1} \neq 0, \dots, x_d \neq 0$. Portanto

$$(\mathbb{T}^d)_x = \{(t_1, \dots, t_n, 1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^d\}.$$

Como a restrição $\pi : (\mathbb{R}^d)_x \rightarrow \mathbb{R}^n$, que é uma \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}^n pela suavidade, mapeia e_1, \dots, e_n em v_1, \dots, v_n , segue que $\pi : (\mathbb{T}^d)_x \rightarrow \mathbb{T}^n$ é bijetiva e $\ker(\pi|_{(\mathbb{T}^d)_x}) = \{e\}$. Logo

$$N \cap (\mathbb{T}^d)_x = \{e\}.$$

E, como $N_x \subseteq (\mathbb{T}^d)_x$, donde $N_x \subseteq N \cap (\mathbb{T}^d)_x = \{e\}$, então $N_x = \{e\}$.

(ii) p é ponto interior de Δ .

Neste caso, p satisfaz as desigualdades

$$\langle p, v_i \rangle < \lambda_i, \forall i = 1, \dots, d.$$

Análogo ao caso anterior, concluímos que $x_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, d$, levando ao mesmo resultado $N_x = \{e\}$, então $N_x \subseteq (\mathbb{T}^d)_x = \{e\}$.

(iii) $p \in F, F = \text{face (diferente dos vértices e de } \Delta)$.

Também análogo aos casos anteriores.

Portanto, N atua livremente sobre Z .

□

Lema 7.4 O conjunto de nível $Z = (i^* \circ \mu)^{-1}(0)$ é uma subvariedade de \mathbb{C}^d com dimensão $d + n$.

Prova. Vimos, pelo lema 7.3, que Z é compacto. Além disso, temos que a ação do toro \mathbb{T}^d em \mathbb{C}^d é livre, então sua aplicação momento $\mu : \mathbb{C}^d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^*$ é uma submersão. A aplicação inclusão $i : \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ é injetiva, logo, $i^* : (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$ é sobrejetiva.

Das afirmações acima, concluímos que $Z = (i^* \circ \mu)^{-1}(0)$ é uma subvariedade de \mathbb{C}^d com dimensão real igual a

$$\dim(\mathbb{C}^d) - \dim(\mathfrak{n}^*) = 2d - (d - n) = d + n.$$

□

Portanto, dado um polígono de Delzant Δ , é possível a construção da variedade tórica simplética reduzida $(M_\Delta, \omega_\Delta)$, donde

$$M_\Delta = \frac{Z}{N}$$

é uma variedade $2n$ -dimensional^c e ω_Δ é a forma simplética reduzida determinada, segundo o teorema 6.7 da Redução Simplética de Marsden-Weinstein-Meyer, por

$$i^*\omega = \pi^*\omega_\Delta$$

onde $i : Z \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ é a aplicação inclusão e $\pi : Z \rightarrow M_\Delta$ é a aplicação quociente.

Lema 7.5 *Seja $\sigma : \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{T}^d)_x$ a aplicação inversa^d de $\pi : (\mathbb{T}^d)_x \rightarrow \mathbb{T}^n$, para $x \in Z$. A ação residual*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{T}^n \times M_\Delta &\rightarrow M_\Delta \\ (g, p(x)) &\mapsto p(\sigma(g) \cdot x) \end{aligned}$$

é hamiltoniana com aplicação momento μ_Δ , cuja imagem $\mu_\Delta(M_\Delta) = \Delta$.

Prova. Seja $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^d$, a aplicação momento da ação hamiltoniana do toro \mathbb{T}^d na variedade M então, pela \mathbb{T}^d -equivariância de μ , temos $\mu(x) = \mu(\sigma(g) \cdot x)$ e, como $Z = (i^* \circ \mu)^{-1}(0)$, temos

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(\sigma(g) \cdot x) = (i^* \circ \mu)^{-1}(x) = 0.$$

Logo, Z é invariante pela ação de $\sigma(\mathbb{T}^n)$.

Observe que $\sigma : \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{T}^d)_x \subseteq \mathbb{T}^d$. Temos sua aplicação dual das álgebras de Lie como $\sigma^* : (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$. Disto, segue pela invariância de μ que o

^c $\dim_{\mathbb{R}} M_\Delta = \dim Z - \dim N = d + n - (d - n) = 2n$.

^dPelo lema 7.3, $\pi|_{(\mathbb{T}^d)_x}$ é uma bijeção.

diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\mu} & (\mathbb{R}^d)^* & \xrightarrow{\sigma^*} & (\mathbb{R}^n)^* \\
 \downarrow p & & & & & \nearrow \mu_\Delta & \\
 M_\Delta & & & & & &
 \end{array}$$

Portanto, a composta $\sigma^* \circ \mu \circ i$ é N -invariante. Logo, existe a aplicação momento $\mu_\Delta : M_\Delta \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ pela ação do toro \mathbb{T}^n sobre M_Δ . Logo, ψ é uma ação tórica hamiltoniana com aplicação momento μ_Δ .

Agora, concluímos a demonstração afirmando que $\mu_\Delta(M_\Delta) = \Delta$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \mu_\Delta(M_\Delta) &= \mu_\Delta(p(Z)) \\
 &= (\sigma^* \circ \mu \circ i)(Z) \\
 &= \sigma^*(\pi^*(\Delta)) \text{ pelo lema 7.2} \\
 &= (\sigma^* \circ \pi^*)(\Delta) \\
 &= (\pi \circ \sigma)^*(\Delta) \\
 &= (Id)^*(\Delta) = (Id)(\Delta) \\
 &= \Delta.
 \end{aligned}$$

□

8 Exemplos da Construção de Delzant

Neste capítulo construiremos explicitamente alguns exemplos. Para isso, seguiremos os passos citados no início do capítulo anterior.

8.1 Segmento de Comprimento L



Passo 1 Descrição do polítopo

- Dimensão: $n = 1$.
- Facetas: $d = 2$ (aquelas que possuem dimensão igual à $n - 1$, isto é, são os pontos 0 e L).
- $v = 1$ (base vetorial canônica em \mathbb{R}).

$$\begin{aligned}\Delta &= \{x \in \mathbb{R}^* \mid 0 \leq x \leq L\}, L \in \mathbb{Z} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* \mid \langle x, -v \rangle \leq 0, \langle x, v \rangle \leq L\} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = L.\end{aligned}$$

Passo 2 Determinar o núcleo N e a aplicação inclusão i

- Projeção π :

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e_1 &\longmapsto -v \\ e_2 &\longmapsto v\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\pi(1, 0) &= -1 \\ \pi(0, 1) &= 1\end{aligned} \Rightarrow \pi_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Toro N :

$$\begin{aligned} N = \ker \pi &\Rightarrow (a, b) \in N \Leftrightarrow [-1 \quad 1][a \quad b]^T = 0 \\ &\Leftrightarrow -a + b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a, b) = (a, a) = a(1, 1). \end{aligned}$$

Disto, segue que $\dim(N) = 1 \Rightarrow N = \mathbb{S}^1$. Temos, portanto, a sequência exata de toros e de suas respectivas álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

▪ Aplicação inclusão:

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\longmapsto (a, a) = a(1, 1) \quad \Rightarrow i_{2 \times 1} = [1 \quad 1]^T \end{aligned}$$

▪ Dual da aplicação inclusão: Temos abaixo a sequência exata do dual das álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{i^*} \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Como $i^* = [i]^T = [1 \quad 1]$, então

$$\begin{aligned} i^* : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

Passo 3 Determinar a aplicação momento μ , o conjunto de nível Z e a variedade reduzida M_Δ .

▪ Aplicação momento: Consideremos \mathbb{C}^2 com sua estrutura simplética canônica $\omega_{std} = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^2 dz_i \wedge d\bar{z}_i$ e com a ação diagonal de \mathbb{T}^2 . Como calculado em 4.1, a aplicação momento pela ação diagonal de \mathbb{T}^2 em \mathbb{C}^2 é

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2) + (\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(z_1, z_2) = \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2} + L \right).$$

Além disso, temos $\mu_N = i^* \circ \mu : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_N(z_1, z_2) &= i^* \circ \mu(z_1, z_2) \\ &= i^* \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2} + L \right) \\ &= -\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2) + L. \end{aligned}$$

• Conjunto de nível zero:

$Z = \mu_N^{-1}(0)$, então

$$-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2) + L = 0 \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2) \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$$

logo, $Z = \mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}}$ (observe aqui que $\dim_{\mathbb{R}} Z = d + n = 3$).

• Variedade reduzida:

$$M_{\Delta} = \frac{Z}{N} = \frac{\mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}}}{\mathbb{S}^1} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

Pelo **Teorema 6.7**, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ herda de $(\mathbb{C}^2, \omega_{std})$ uma estrutura simplética definida pela equação

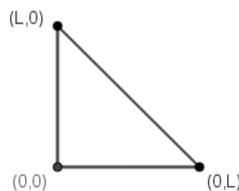
$$i^* \omega_{std} = \pi^* \omega_{red},$$

onde $i : Z \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ é a inclusão e $\pi : Z \rightarrow Z/N = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ a projeção. Quando $L = \frac{1}{2}$, a forma simplética ω_{red} em $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ é a forma Fubini-Study

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

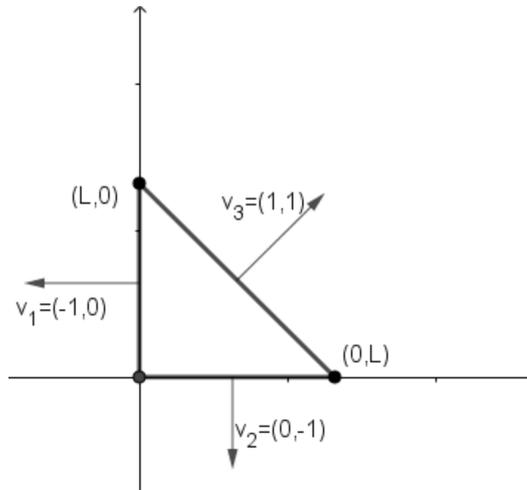
8.2

Triângulo Retângulo de Catetos L



Passo 1 Descrição do polítopo

- Dimensão: $n = 2$.
- Facetas: $d = 3$ (aquelas que possuem dimensão igual à $n - 1$, isto é, são os lados do triângulo).



- Vetores normais primitivos: $v_1 = (-1, 0)$, $v_2 = (0, -1)$, $v_3 = (1, 1)$

$$\begin{aligned} \Delta &= \{x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^* \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq L\} \\ &= \{x \in (\mathbb{R}^2)^* \mid \langle x, (-1, 0) \rangle \leq 0, \langle x, (0, -1) \rangle \leq 0, \langle x, (1, 1) \rangle \leq L\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = L.$$

Passo 2 Determinar o núcleo N e a aplicação inclusão i

- Projeção π :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ e_1 &\longmapsto v_1 \\ e_2 &\longmapsto v_2 \\ e_3 &\longmapsto v_3 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \pi(1, 0, 0) &= (-1, 0) \\ \pi(0, 1, 0) &= (0, -1) \\ \pi(0, 0, 1) &= (1, 1) \end{aligned} \Rightarrow \pi_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Toro N :

$$\begin{aligned}
 N = \ker \pi \Rightarrow (a, b, c) \in N &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow -a + c = 0, -b + c = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c) = (a, a, a) = a(1, 1, 1).
 \end{aligned}$$

Disto, segue que $\dim(N) = 1 \Rightarrow N = \mathbb{S}^1$ e, em particular, N é o \mathbb{S}^1 diagonal em \mathbb{T}^3 . Temos, portanto, a sequência exata de toros e de suas respectivas álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^2 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

- Aplicação inclusão:

$$\begin{aligned}
 i : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 a &\longmapsto (a, a, a) = a(1, 1, 1) \Rightarrow i_{3 \times 1} = [1 \quad 1 \quad 1]^T
 \end{aligned}$$

- Dual da aplicação inclusão: Temos abaixo a sequência exata do dual das álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{i^*} \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Como $i^* = [i]^T = [1 \quad 1 \quad 1]$, então

$$\begin{aligned}
 i^* : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (a, b, c) &\longmapsto a + b + c
 \end{aligned}$$

Passo 3 Determinar a aplicação momento μ , o conjunto de nível Z e a variedade reduzida M_Δ .

- Aplicação momento: Consideremos a ação diagonal de \mathbb{T}^3 sobre a variedade $(\mathbb{C}^3, \omega_{std} = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^3 dz_i \wedge d\bar{z}_i)$ com aplicação momento

$$\begin{aligned}
 \mu : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(z_1, z_2, z_3) = \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, L - \frac{|z_3|^2}{2} \right).$$

Além disso, temos $\mu_N = i^* \circ \mu : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_N(z_1, z_2, z_3) &= i^* \circ \mu(z_1, z_2, z_3) \\ &= i^* \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, L - \frac{|z_3|^2}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + L. \end{aligned}$$

• Conjunto de nível zero:

$Z = \mu_N^{-1}(0)$, então

$$-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + L = 0 \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) \subset \mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{R}^6.$$

Logo, $Z = \mathbb{S}_{\sqrt{2L}}^5$ (observe aqui que $\dim_{\mathbb{R}} Z = d + n = 5$).

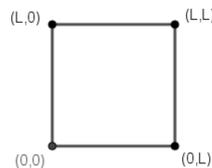
• Variedade reduzida:

$$M_{\Delta} = \frac{Z}{N} = \frac{\mathbb{S}_{\sqrt{2L}}^5}{\mathbb{S}^1} \simeq \mathbb{C}P^2.$$

Pelo **Teorema 6.7**, existe uma estrutura simplética sobre $\mathbb{C}P^2$. Como no caso da linha projetiva, a 2-forma sobre $\mathbb{C}P^2$ obtida pela redução simplética se chama de forma Fubini-Study.

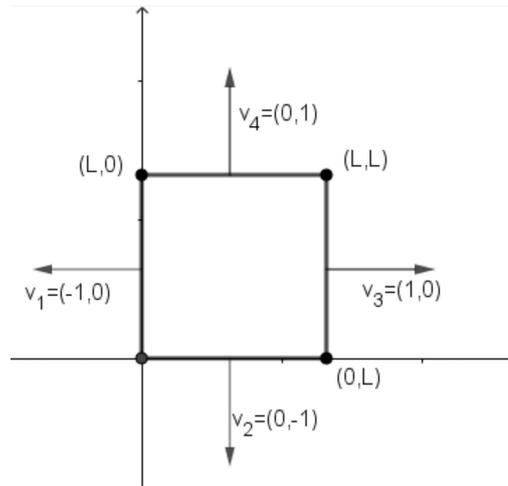
8.3

Quadrado de Lado L



Passo 1 Descrição do polítopo

- Dimensão: $n = 2$.
- Facetas: $d = 4$.



- Vetores normais primitivos: $v_1 = (-1, 0), v_2 = (0, -1), v_3 = (1, 0)$ e $v_4 = (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \Delta &= \{x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^* \mid 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq L\} \\ &= \{x \in (\mathbb{R}^2)^* \mid \langle x, (-1, 0) \rangle \leq 0, \langle x, (0, -1) \rangle \leq 0, \langle x, (1, 0) \rangle \leq L, \langle x, (0, 1) \rangle \leq L\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = L.$$

Passo 2 Determinar o núcleo N e a aplicação inclusão i

- Projeção π :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ e_1 &\longmapsto v_1 \\ e_2 &\longmapsto v_2 \\ e_3 &\longmapsto v_3 \\ e_4 &\longmapsto v_4 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \pi(1, 0, 0, 0) &= (-1, 0) \\ \pi(0, 1, 0, 0) &= (0, -1) \\ \pi(0, 0, 1, 0) &= (1, 0) \\ \pi(0, 0, 0, 1) &= (0, 1) \end{aligned} \Rightarrow \pi_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Toro N :

$$\begin{aligned}
 N = \ker \pi \Rightarrow (a, b, c, d) \in N &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow -a + c = 0, -b + d = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) = (a, b, a, b).
 \end{aligned}$$

Disto, segue que $\dim(N) = 2 \Rightarrow N = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Temos, portanto, a seqüência exata de toros e de suas respectivas álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^2 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

- Aplicação inclusão:

$$\begin{aligned}
 i : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
 (a, b) &\longmapsto (a, b, a, b) = a(1, 0, 1, 0) + b(0, 1, 0, 1) \Rightarrow i_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Dual da aplicação inclusão: Temos abaixo a seqüência exata do dual das álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^4)^* = \mathbb{R}^4 \xrightarrow{i^*} (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0$$

Como $i^* = [i]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned}
 i^* : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (a, b, c, d) &\longmapsto (a + c, b + d).
 \end{aligned}$$

Passo 3 Determinar a aplicação momento μ , o conjunto de nível Z e a variedade reduzida M_Δ .

- Aplicação momento da ação do grupo sobre a variedade:

$$\begin{aligned}
 \mu : \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
 (z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2, |z_4|^2) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, L - \frac{|z_3|^2}{2}, L - \frac{|z_4|^2}{2} \right).$$

Além disso, temos $\mu_N = i^* \circ \mu : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_N(z_1, z_2, z_3, z_4) &= i^* \circ \mu(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &= i^* \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, L - \frac{|z_3|^2}{2}, L - \frac{|z_4|^2}{2} \right) \\ &= \left(L - \frac{|z_1|^2 + |z_3|^2}{2}, L - \frac{|z_2|^2 + |z_4|^2}{2} \right) \end{aligned}$$

• Conjunto de nível zero:

$$Z = \mu_N^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid |z_1|^2 + |z_3|^2 = 2L, |z_2|^2 + |z_4|^2 = 2L\}$$

Logo, $Z = \mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}} \times \mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}}$ (observe aqui que $\dim_{\mathbb{R}} Z = d + n = 6$).

• Variedade reduzida:

$$M_{\Delta} = \frac{Z}{N} = \frac{\mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}} \times \mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}}}{\mathbb{T}^2} = \frac{\mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}} \times \mathbb{S}^3_{\sqrt{2L}}}{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

Como calculada anteriormente, a ação de N em um ponto $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in Z$ é $(a, b, a, b) \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) = (az_1, bz_2, az_3, bz_4)$ e a estrutura simplética obtida por redução sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ é $\omega_{red} = \sum_{i=1}^2 \pi_i^*(\omega_{FS})$ onde temos $\pi_i : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ é a projeção sobre o i -ésimo fator.

8.4

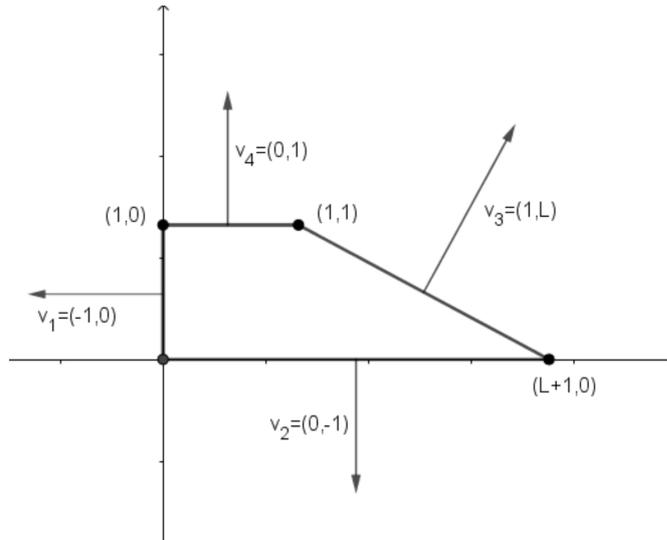
Trapézio

Passo 1 Descrição do polítopo

- Dimensão: $n = 2$.
- Facetas: $d = 4$.
- Vetores normais primitivos: $v_1 = (-1, 0), v_2 = (0, -1), v_3 = (1, L)$ e $v_4 = (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \Delta &= \{x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^* \mid 0 \leq x_1 \leq L + 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_1 + Lx_2 \leq L + 1\} \\ &= \{x \in (\mathbb{R}^2)^* \mid \langle x, (-1, 0) \rangle \leq 0, \langle x, (0, -1) \rangle \leq 0, \langle x, (1, L) \rangle \leq L + 1, \langle x, (0, 1) \rangle \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = L + 1, \lambda_4 = 1$$



Passo 2: Determinar o núcleo N e a aplicação inclusão i

• **Projeção π :**

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ e_1 &\longmapsto v_1 \\ e_2 &\longmapsto v_2 \\ e_3 &\longmapsto v_3 \\ e_4 &\longmapsto v_4 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \pi(1, 0, 0, 0) &= (-1, 0) \\ \pi(0, 1, 0, 0) &= (0, -1) \\ \pi(0, 0, 1, 0) &= (1, L) \\ \pi(0, 0, 0, 1) &= (0, 1) \end{aligned} \Rightarrow \pi_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & L & 1 \end{bmatrix}$$

• **Toro N :**

$$\begin{aligned} N = \ker \pi \Rightarrow (a, b, c, d) \in N &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ -b + Lc + d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ d = b - La \end{cases} \end{aligned}$$

Disto, segue que $\dim(N) = 2 \Rightarrow N = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Temos, portanto, a sequência exata de toros e de suas respectivas álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^2 & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

▪ Aplicação inclusão:

$$i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(a, b) \longmapsto (a, b, a, b - La) = a(1, 0, 1, -L) + b(0, 1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow i_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -L & 1 \end{bmatrix}$$

▪ Dual da aplicação inclusão: Temos abaixo a sequência exata do dual das álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^4)^* = \mathbb{R}^4 \xrightarrow{i^*} (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0$$

Como $i^* = [i]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$i^* : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(a, b, c, d) \longmapsto (a + c - Ld, b + d).$$

Passo 3 Determinar a aplicação momento μ , o conjunto de nível Z e a variedade reduzida M_Δ .

▪ Aplicação momento: Consideremos a ação diagonal de \mathbb{T}^4 sobre a variedade $(\mathbb{C}^4, \omega_{std} = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^4 dz_i \wedge d\bar{z}_i)$ com aplicação momento

$$\mu : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2, |z_4|^2) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

$$\Rightarrow \mu(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, L + 1 - \frac{|z_3|^2}{2}, 1 - \frac{|z_4|^2}{2} \right).$$

Além disso, temos $\mu_N = i^* \circ \mu : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_N(z_1, z_2, z_3, z_4) &= i^* \circ \mu(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &= i^* \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, L + 1 - \frac{|z_3|^2}{2}, 1 - \frac{|z_4|^2}{2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{|z_1|^2 + |z_3|^2 - L|z_4|^2}{2}, 1 - \frac{|z_2|^2 + |z_4|^2}{2} \right) \end{aligned}$$

• Conjunto de nível zero:

$$Z = \mu_N^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid |z_1|^2 + |z_3|^2 - L|z_4|^2 = 2, |z_2|^2 + |z_4|^2 = 2\}.$$

Sabemos que a segunda equação se trata da esfera $\mathbb{S}_{\sqrt{2}}^3$ e que a dimensão real de Z é calculada por $\dim_{\mathbb{R}} Z = d + n = 6$, mas resta estudar com cuidado a primeira equação.

• Variedade reduzida:

Lembremos que a ação do toro N sobre um ponto $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in Z$ é

$$(a, b, a, b - La) \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) = (az_1, bz_2, az_3, (b - La)z_4).$$

O associado espaço das órbitas, i.e, a variedade reduzida é

$$M_{\Delta} = \frac{Z}{N} = \mathbb{S}_{\sqrt{2}}^3 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{C}\mathbb{P}^1,$$

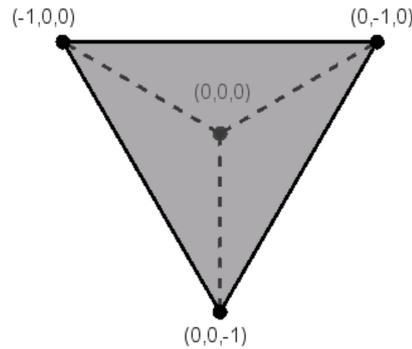
onde, usando em coordenadas $((z_1, z_3), [z_2 : z_4])$ em $\mathbb{S}_{\sqrt{2}}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ com a relação $|z_1|^2 + |z_3|^2 - L|z_4|^2 = 2$, temos que a ação de \mathbb{S}^1 é

$$\begin{aligned} a \cdot ((z_1, z_3), [z_2 : z_4]) &= ((az_1, az_3), [z_2 : -Laz_4]) \\ &\parallel \\ &((az_1, az_3), [-(La)^{-1}z_2 : z_4]). \end{aligned}$$

Segue que a variedade simplética reduzida M_{Δ} é uma fibração sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ com fibra $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, chamada **Superfície de Hirzebruch**. Para aprofundar, consulte [17] e [16].

8.5

Tetraedro



Passo 1 Descrição do polítopo

- Dimensão: $n = 3$.
- Facetas: $d = 4$.
- Vetores normais primitivos:

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1), v_4 = (-1, -1, -1)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^3)^* \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0, x_1 + x_2 + x_3 \geq 1\} \\ &= \{x \in (\mathbb{R}^3)^* \mid \langle x, (1, 0, 0) \rangle \leq 0, \langle x, (0, 1, 0) \rangle \leq 0, \\ &\quad \langle x, (0, 0, 1) \rangle \leq 0, \langle x, (-1, -1, -1) \rangle \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1.$$

Passo 2 Determinar o núcleo N e a aplicação inclusão i

- Projeção π :

temos

$$\begin{aligned} \pi(1, 0, 0, 0) &= (1, 0, 0) \\ \pi(0, 1, 0, 0) &= (0, 1, 0) \\ \pi(0, 0, 1, 0) &= (0, 0, 1) \\ \pi(0, 0, 0, 1) &= (-1, -1, -1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \pi_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

• Toro N :

$$\begin{aligned}
 N = \ker \pi \Rightarrow (a, b, c, d) \in N &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - d = 0 \\ b - d = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow a = b = c = d.
 \end{aligned}$$

Disto, segue que $\dim(N) = 1 \Rightarrow N = \mathbb{S}^1$. Temos, portanto, a sequência exata de toros e de suas respectivas álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^3 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^3 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

• Aplicação inclusão:

$$\begin{aligned}
 i : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
 a &\longmapsto (a, a, a, a) = a(1, 1, 1, 1) \Rightarrow i_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

• Dual da aplicação inclusão: Temos abaixo a sequência exata do dual das álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^4)^* = \mathbb{R}^4 \xrightarrow{i^*} \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Como $i^* = [i]^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$, então

$$\begin{aligned}
 i^* : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (a, b, c, d) &\longmapsto a + b + c + d.
 \end{aligned}$$

Passo 3 Determinar a aplicação momento μ , o conjunto de nível Z e a variedade reduzida M_Δ .

- Aplicação momento da ação do grupo sobre a variedade:

$$\begin{aligned} \mu : \quad \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2, |z_4|^2) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, -\frac{|z_3|^2}{2}, 1 - \frac{|z_4|^2}{2} \right).$$

Além disso, temos $\mu_N = i^* \circ \mu : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_N(z_1, z_2, z_3, z_4) &= i^* \circ \mu(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &= i^* \left(-\frac{|z_1|^2}{2}, -\frac{|z_2|^2}{2}, -\frac{|z_3|^2}{2}, 1 - \frac{|z_4|^2}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2}{2} \end{aligned}$$

- Conjunto de nível zero:

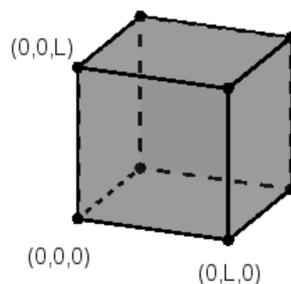
$$Z = \mu_N^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 2\} = \mathbb{S}_{\sqrt{2}}^7$$

- Variedade reduzida:

$$M_{\Delta} = \frac{Z}{N} = \frac{\mathbb{S}_{\sqrt{2}}^7}{\mathbb{S}^1} = \mathbb{C}\mathbb{P}^3.$$

Análogo às seções 8.1 e 8.2, pelo **Teorema 6.7**, existe uma estrutura simplética sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ chamada de forma Fubini-Study.

8.6 Cubo de Lado L



Este exemplo está diretamente ligado aos exemplos 8.1 e 8.3. De fato, temos que, dadas duas variedades tóricas simpléticas $2n$ -dimensionais $(M, \omega_M, \mathbb{T}^n, \mu_M)$ e $(N, \omega_N, \mathbb{T}^n, \mu_N)$, a variedade tórica simplética produto é descrita por

$$(M \times N, \omega = \pi_1^* \omega_M + \pi_2^* \omega_N, \mathbb{T}^n, \mu = \mu_M + \mu_N),$$

com o grupo \mathbb{T}^n atuando diagonalmente sobre M e N e π_i como a projeção de $M \times N$ sobre o primeiro e segundo fatores, respectivamente, para $i = \{1, 2\}$. Então

$$(\mu_M + \mu_N)(M \times N) = \mu_M(M) \times \mu_N(N).$$

Prova. Suponha $(p_1, p_2) \in (\mu_M + \mu_N)(M \times N)$. Assim, existe $(m, n) \in M \times N$ tal que

$$(\mu_M + \mu_N)(m, n) = (p_1, p_2) \Leftrightarrow (\mu_M(m), \mu_N(n)) = (p_1, p_2).$$

□

Disto, temos a variedade reduzida com dimensão real igual a 6, isto é, igual ao dobro da dimensão do polígono cubo de lado L . Portanto,

$$M_\Delta = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$$

com estrutura simplética $\omega_{red} = \sum_{i=1}^3 \pi_i^*(\omega_{FS})$, para $\pi_i : \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ sendo a projeção sobre o i -ésimo fator.

Referências bibliográficas

- [1] DELZANT, T. **Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment.** Bull. Soc. Math. France, 116(3):315-339, 1988.
- [2] MARSDEN, J., WEINSTEIN, A., **Reduction of symplectic manifolds with symmetry,** Rep. Mathematical Phys. 5 (1974), 121-130.
- [3] MEYER, K., **Symmetries and integrals in mechanics,** Dynamical Systems Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971, 259-272. Academic Press, New York, 1973.
- [4] DO CARMO , M. **Differential Forms and Applications,** Springer, Berlin, 1994.
- [5] FERNANDES, R. L. **Lições de Geometria Diferencial,** notas de aula. Departamento de Matemática, IST. Lisboa, 2003.
- [6] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds,** Graduate Texts in Mathematics, Vol. 218, Springer, New York, 2003.
- [7] MCDUFF, D., SALAMON, D. **What is Symplectic Geometry?** Talk given at the European Women in Mathematics conference of Sept 2007 in Cambridge, UK, 2009.
- [8] BERNDT, R. **An introduction to symplectic geometry,** AMS Graduate Studies in mathematics 26, 2001.
- [9] TU, L. W. **An Introduction to Manifolds,** Springer, 2008.
- [10] LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis.** Publicações Matemáticas. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [11] BURSZTYN, H.; MACARINI, L. **Introdução a Geometria Simplética.** Rio de Janeiro: IMPA, XIV Escola de Geometria Diferencial, 2006.
- [12] ARNOLD, V., **Mathematical Methods of Classical Mechanics,** Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [13] ATIYAH, M., **Convexity and commuting Hamiltonians,** Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 1-15.

- [14] GUILLEMIN, V., STERNBERG, S., **Convexity properties of the moment mapping**, *Invent. Math.* 67 (1982), 491-513.
- [15] CANNAS, A. **Lectures on Symplectic Geometry**, *Lectures Notes in Math.* 1764, Springer-Verlag, 2001.
- [16] MCDUFF, D., SALAMON, D. **Introduction to Symplectic Topology**, second edition, *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford University Press, 1998.
- [17] AUDIN, M. **Torus Actions on Symplectic Manifolds**, second edition, *Progress in Mathematics* 93, Birkhauser Verlag, Basel, 2004.