

3 Métodos Numéricos

A dinâmica de sistemas mecânicos normalmente é modelada como um sistema de equações diferenciais. Estas equações diferenciais devem ser resolvidas a fim de relacionar as variáveis entre si quando o sistema interage com suas perturbações ou para identificar os parâmetros do sistema utilizando perturbações conhecidas.

Quando uma equação diferencial não é fácil de ser resolvida analiticamente, usam-se métodos numéricos adequados para representar o comportamento dinâmico.

No capítulo 2 desenvolveram-se sistemas de equações diferenciais. Para a solução destas equações emprega-se o método de Runge-Kutta Fehlberg de 5ª ordem (RKF5) com controle de passo variável.

3.1. Análise das Equações de Movimento

As equações diferenciais podem ser divididas em dois grandes grupos: equações lineares e não lineares. As equações lineares em geral são simples de serem resolvidas, porque suas soluções têm propriedades gerais que facilitam o trabalho e existem métodos padronizados para resolver a maioria delas. No entanto, as equações não lineares são difíceis de serem resolvidas analiticamente; o que implica o uso de métodos aproximados, métodos numéricos, para encontrar a sua solução.

Analisando as equações de movimento desenvolvidas para os subsistemas eixo-rotor e estator, Eqs. (2.21) e (2.25), respectivamente, chega-se à conclusão que são equações diferenciais não lineares. A não linearidade é devido à força de impacto; a força de impacto só aparece quando o rotor entra em contato com o estator, caso contrário, esta força é nula. Outra característica que mostra a equação de movimento do subsistema eixo-rotor, Eq. (2.21), é que a matriz de massa depende do tempo. Uma análise do determinante desta matriz mostrará se ela é

singular para algum domínio do tempo. Mas, o cálculo do determinante, $|\mathbf{M}| = J_m(m_d + m)(m_d J + m_d m \varepsilon^2 + mJ)$, mostra que ele não depende do tempo, chegando-se à conclusão de que a matriz de massa não tem singularidade em todo o domínio temporal, o que implica que sua inversa sempre existe.

3.2. Resposta Dinâmica do Sistema

Existem vários métodos para a determinação da resposta temporal de sistemas rotativos do tipo eixo-rotor quando estão submetidos a cargas externas.

Um dos métodos mais usados na determinação da resposta do sistema é o da integração direta. Neste método, as equações de movimento são resolvidas através de algoritmos adequados de integração numérica, com incrementos temporais em um certo intervalo de tempo, esta é uma solução passo a passo.

A técnica de integração direta consiste em obter a solução do problema em intervalos discretos de tempo Δt (os intervalos Δt podem ser fixos ou variáveis). Durante o processo de integração temporal, são consideradas as condições iniciais de deslocamento e velocidade, e o período de observação é dividido em intervalos de tempo de tal forma que a solução num instante $t + \Delta t$ seja calculada a partir de resultados obtidos no instante anterior t .

3.3. Métodos de Integração

Na literatura sobre métodos de integração numérica, existem muitas técnicas para resolver problemas de valor inicial (PVI) de primeira ordem, Maron & López [20].

Os PVI são da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (3.1)$$

sujeitas à condição inicial $y(t=t_0) = y_0$, onde $f(t, y)$ é contínua para (t, y) em torno de (t_0, y_0) e $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ é a derivada em relação ao tempo.

Os métodos auto-iniciantes aproximam o valor de $y_{(t_j+h)}$ como $y_{j+1} = y_j + h * \sum C_1 f(\tilde{t}_i, \tilde{y}_i)$, onde $h = \Delta t$, C_1 é uma constante e as $f(\tilde{t}_i, \tilde{y}_i)$ são as derivadas mostradas que se calculam depois de obter o valor de y_j .

Um dos métodos tradicionais usados na integração numérica é o de *Runge-Kutta* de 4ª ordem (RK4), e, embora este seja o mais usado, no presente trabalho utiliza-se o método de *Runge-Kutta Fehlberg* de 5ª ordem (RKF5) dadas às limitações do RK4.

Uma das limitações RK4 é a necessidade de quatro cálculos de $f(t, y)$ por passo, o que pode ser grave quando a função derivada é complicada. Uma segunda limitação de RK4 é a falta de uma estimação do erro para y_{j+1} por passo.

3.3.1. Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem (RK4)

Este método consiste na estimativa do valor da função $f(t, y)$ em vários pontos intermediários. O ponto final (escolhido) será a média ponderada entre esses pontos intermediários. Este método é baseado na série de Taylor e sua ordem será definida pela ordem desta série. O RK4 implementado é de quarta ordem global.

$$k_1 = hf(t_j, y_j)$$

$$k_2 = hf(t_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(t_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(t_j + h, y_j + k_3)$$

A partir das k 's é possível encontrar o valor de y_{j+1} através de:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Os fatores 1,2,2 e 1 definem o peso para os termos k_1 , k_2 , k_3 e k_4 , respectivamente. Com este método consegue-se atingir uma precisão bem melhor

se comparado com outros métodos, por exemplo, o método de *Euler*, mas consequentemente o método utiliza uma maior capacidade computacional, e sendo assim é mais lento para chegar ao ponto final. Mas isso pode ser contornado com o uso de computadores de bom desempenho.

3.3.2. Método de Runge-Kutta Fehlberg de 5ª Ordem (RK5)

Entre os métodos de tamanho de passo variável, o mais confiável é o método de Runge-Kutta Fehlberg de 5ª ordem (RK5), este método usa 6 equações de $f(t, y)$ para obter os valores de k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6 .

Runge-Kutta Fehlberg utiliza a idéia geral do Runge-Kutta acima, duas estimativas do Runge-Kutta são calculadas, uma de 4ª (\hat{y}) e outra de 5ª ordem (y), mas ambas utilizando os mesmos k 's para os cálculos, com isso a função será calculada apenas 6 vezes. Este método também pode ser facilmente estendido para variações de passo, pois com os mesmos k 's calcula-se um erro ($ErrEst$) que pode servir como função de ajuste do passo. Os valores dos k 's são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_j, y_j) \\
 k_2 &= hf\left(t_j + \frac{1}{4}h, y_j + \frac{1}{4}k_1\right) \\
 k_3 &= hf\left(t_j + \frac{3}{8}h, y_j + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
 k_4 &= hf\left(t_j + \frac{12}{13}h, y_j + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\
 k_5 &= hf\left(t_j + h, y_j + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\
 k_6 &= hf\left(t_j + \frac{1}{2}h, y_j - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 + \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

e a seguir usam-se k_1, \dots, k_6 para obter duas aproximações de $y(t_j + h)$, que são:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{j+1} &= y_j + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5, \text{ ordem } O(h^4) \\
 y_{j+1} &= y_j + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6, \text{ ordem } O(h^5)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uma estimação do erro pode ser obtida como:

$$ErrEst = y_{j+1} - \hat{y}_{j+1} = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (3.4)$$

A maioria dos algoritmos para resolver equações diferenciais, especialmente aplicando o método de RKF5, podem ser encontrados em Maron & López [20] e Kreyszig [21].

3.4.

Solução das Equações de Movimento: Equação de 1ª Ordem

A equação de movimento do subsistema, eixo-rotor, esta definida pela Eq. (2.21), obtida no item 2.4: esta é uma equação de segunda ordem da forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \zeta\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Z} + \mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

Esta equação também pode ser escrita como:

$$\ddot{\mathbf{Z}} = -\mathbf{M}^{-1}\zeta\dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{Z} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \quad (3.5)$$

Para passar a uma equação de primeira ordem, introduz-se a variável nova:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_1 \quad (3.6)$$

Logo, a Eq. (3.5) transforma-se para:

$$\dot{\mathbf{Z}}_1 = -\mathbf{M}^{-1}\zeta\mathbf{Z}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{Z} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \quad (3.7)$$

Ordenando adequadamente as Eqs. (3.6) e (3.7) na forma compacta:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \dot{\mathbf{Z}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{F} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q})$.

Constatou-se, no item 2.4, que o determinante da matriz de massa é diferente de zero ($|\mathbf{M}| \neq 0$). Isto indica que ao resolver a Eq. (3.8) não teremos problemas de singularidade.

Das Eqs. (2.21) e (2.25), equações de movimento para os subsistemas eixo-rotor e estator, respectivamente, podemos isolar a variável aceleração para cada um das equações, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= f_x(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) \\
\ddot{y} &= f_y(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) \\
\ddot{\theta} &= f_\theta(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) \\
\ddot{\phi} &= f_\phi(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) \\
\ddot{X} &= f_X(t, X, \dot{X}, Y, \dot{Y}) \\
\ddot{Y} &= f_Y(t, X, \dot{X}, Y, \dot{Y})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Seja a seguinte definição de novas variáveis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \\ X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix}$$

Logo, a Eq. (3.9) fica como um sistema de doze equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x_1 \\
\dot{y} &= y_1 \\
\dot{\theta} &= \theta_1 \\
\dot{\phi} &= \phi_1 \\
\dot{X} &= X_1 \\
\dot{Y} &= Y_1 \\
\dot{x}_1 &= f_x(t, x, x_1, y, y_1, \theta, \theta_1, \phi, \phi_1) \\
\dot{y}_1 &= f_y(t, x, x_1, y, y_1, \theta, \theta_1, \phi, \phi_1) \\
\dot{\theta}_1 &= f_\theta(t, x, x_1, y, y_1, \theta, \theta_1, \phi, \phi_1) \\
\dot{\phi}_1 &= f_\phi(t, x, x_1, y, y_1, \theta, \theta_1, \phi, \phi_1) \\
\dot{X}_1 &= f_X(t, X, \dot{X}, Y, \dot{Y}) \\
\dot{Y}_1 &= f_Y(t, X, \dot{X}, Y, \dot{Y})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Este novo sistema de equações diferenciais de primeira ordem, Eq. (3.10), é resolvido para os deslocamentos e velocidades de cada um das variáveis,

$[x \ y \ \theta \ \phi \ X \ Y \ x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ \phi_1 \ X_1 \ Y_1]^T$, aplicando as equações de integração numérica desenvolvida no item 3.3.2.

3.5. Rigidez das Equações de Movimento

Qualquer método auto iniciante, traçará a solução $y(t)$ quando se toma um tamanho de passo h o suficientemente pequeno. Infelizmente, esta afirmação não é certa se o PVI é rígido.

Os PVI que se apresentam no controle de processos químicos, na teoria de circuitos elétricos e em vibrações mecânicas, são com frequência rígidos porque suas soluções possuem termos exponenciais da forma $c_i e^{-\lambda_i t}$ onde $0 \leq (\lambda_i)_{\min} \ll (\lambda_i)_{\max}$.

As equações diferenciais em estudo, Eqs. (2.21) e (2.25), são rígidas basicamente devido ao valor elevado do coeficiente de rigidez de contato (K_C) comparado com as outras constantes de rigidez, amortecimento ou massa que aparecem no sistema.

Na literatura relacionada ao impacto, existem vários autores que citam diferentes valores para K_C , por exemplo:

- Zapomel [14] usa $K_C = 1.0 \times 10^9$ N/m, para dois materiais iguais (aço-aço) baseado na teoria de contato de Hertz.
- Bartha [5] experimentalmente encontra o valor de K_C para diferentes pares de materiais (segundo nomeação DIN): $K_C = 2.45 \times 10^8$ N/m (St52-Ck45) e $K_C = 7.2 \times 10^6$ N/m (St52-X6CrMo17.1).
- Chu and Zhang [22] usam o valor de $K_C = 6.0 \times 10^7$ N/m para as simulações numéricas.

Na teoria de contato de Hertz, o valor de K_C é função das propriedades dos materiais e da geometria das superfícies em contato.

No presente trabalho adota-se: $K_C = 1.0 \times 10^6$ N/m para as simulações numéricas, já que no instante do impacto, vai primar a deformação elástica do anel (suportado com 4 parafusos) antes que a deformação plástica no ponto de contato.

Para poder resolver as equações de movimento é necessário homogeneizar os coeficientes da equação diferencial. Algumas vezes, uma escolha adequada de um sistema de unidades para as grandezas pode resolver o problema da rigidez.

Outra forma de homogeneizar os coeficientes, que foi adotado neste trabalho, é mudando a escala do tempo, $\tau = w_0 t$, como se mostra no item 2.1.1. Neste caso o valor de w_0 deve ser escolhido convenientemente (por exemplo $w_0 = 1.0 \times 10^3$) para que os coeficientes das equações de movimento tenham a mesma ordem de magnitude. Depois de homogeneizar os coeficientes, mediante uma mudança conveniente na escala do tempo, o sistema de equações pode ser integrado numericamente sem problemas de rigidez.