

2

Modelos de Sistemas Rotativos com Impacto

Para estudar devidamente um sistema mecânico é necessário recorrer a um bom modelo matemático que represente de forma consistente o comportamento possível do mesmo. A análise dinâmica do sistema mecânico particular, compreendido de um eixo elástico sobre mancais, rotor e estator, parte das equações de movimento que governam a dinâmica do sistema.

Muitas vezes usam-se as leis de Newton-Euler para descrever a dinâmica de uma partícula ou um sistema de partículas, empregando-se um sistema de coordenadas e forças físicas que podem ser representadas vetorialmente. Por este motivo, as equações de movimento encontradas, usando as leis de Newton-Euler, são referidas como equações vetoriais (mecânica vetorial). Uma das principais desvantagens de usar estas leis é a necessidade de considerar separadamente os componentes individuais do sistema e de calcular as forças que interagem entre eles. Muitas vezes, o cálculo destas forças é complicado quando o sistema em estudo é complexo, e em muitos casos, algumas destas forças não são de interesse.

Muitas vezes, visando obter somente as equações de movimento dos sistemas mecânicos sem calcular as reações dinâmicas, faz-se uso do princípio da potência virtual, ou princípio de Jourdain. O resultado final das equações de Newton-Euler-Jourdain são apenas as equações de movimento, já que as forças e momentos de reação não realizam trabalho nem geram energia, Santos [8].

Outro método diferente para descrever o movimento de uma partícula ou de um sistema de partículas, parte do princípio variacional. Neste método considera-se o sistema como um todo, sem a necessidade de analisar cada componente separadamente, o que elimina o cálculo das forças de interação. Este método é atribuído a Leibnitz e Lagrange, comumente conhecido como o método de Lagrange, e a formulação do problema é função de duas grandezas escalares: energia e trabalho. Este método formula o problema através de coordenadas e forças generalizadas que não necessariamente representam as coordenadas ou forças físicas, mas em certos casos podem ser os mesmos.

Neste trabalho, as equações de movimento do rotor são obtidas utilizando o método de Lagrange, formulada a partir das grandezas escalares Energia Cinética T , Energia Potencial U , Trabalho W e das forças não conservativas.

2.1. Modelos de Impacto

Muitos modelos na teoria de impacto já se encontram desenvolvidos e apresentados na literatura: os modelos mais simples consideram unicamente coeficientes de restituição. Neste modelo, o coeficiente de restituição representa a perda de energia no processo de impacto. Um modelo clássico de impacto utilizado em sistemas rotativos é o modelo de Brach [9]: este modelo está baseado no uso de coeficientes generalizados de impacto e equações em termos de impulso e quantidade de movimento linear para corpos rígidos.

Outros modelos mais completos levam em consideração a magnitude da força de impacto e a energia dissipada no impacto, Liebich [10]. A energia pode ser dissipada por atrito, calor, som, vibração, deformação dos corpos, etc.

Uma abordagem ainda mais complicada para o estudo de impacto é realizada por Cohen & Sithigh [11], onde os corpos em colisão são considerados como pseudo rígidos. Quando se consideram corpos pseudo rígidos em colisão, as tensões são assumidas uniformes, ou seja, é função do tempo, mas não da posição, Chatterjee & Ruina [12].

2.1.1. Modelo de Impacto a Partir de um Sistema com um Grau de Liberdade

Em dinâmica, o conceito de força de elevada magnitude atuando durante um curto intervalo de tempo é usado para caracterizar o estudo do movimento impulsivo de dois corpos em colisão. Se a duração do impacto é conhecida, a magnitude média da força de impacto pode ser estimada a partir da mudança de quantidade de movimento das massas em colisão.

Quando uma colisão é perfeitamente elástica, diz-se que não existe perda de energia. Este tipo de colisão pode ser representado perfeitamente através de

uma mola atuando entre os corpos em colisão no instante do impacto. Entretanto, desde que exista uma quantidade de energia dissipada, a colisão será inelástica.

Para representar uma colisão inelástica é mais adequado o uso de um modelo visco-elástico. Por exemplo, a configuração de Kelvin-Vôigt pode ser conveniente no estudo do impacto com perda de energia.

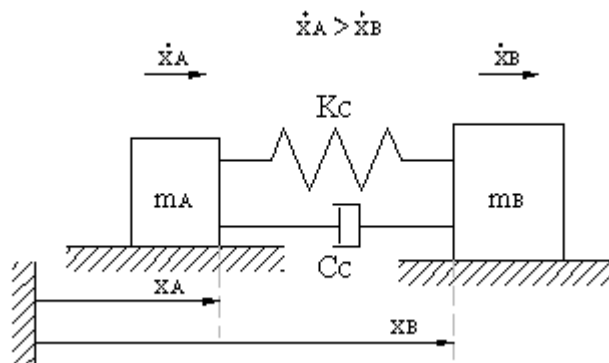


Figura 10 – Modelo de impacto visco-elástico (Kelvin-Vôigt)

Na Fig. 10 mostra-se o modelo adotado para o estudo do impacto inelástico entre duas massas m_A e m_B , estas massas estão sobre uma superfície sem atrito ($\mu = 0$). Este modelo representa um modelo visco-elástico linear, onde a mola têm rigidez K_C (rigidez de contato) e o amortecedor têm coeficiente de amortecimento viscoso C_C (amortecimento de contato).

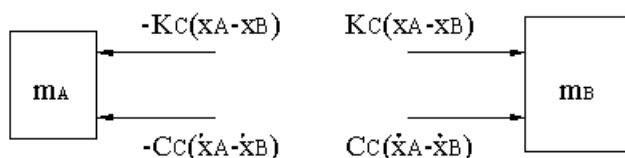


Figura 11 – Diagrama de corpo livre dos corpos em colisão

Assumindo que a velocidade de m_A é maior que a velocidade de m_B , as forças que agem sobre cada uma das massas são a elástica e a de amortecimento, como indica a Fig. 11. Para este sistema simples de duas massas, aplicando a segunda lei de Newton, a equação dinâmica para cada um delas é:

Para a massa m_A :

$$-K_C(x_A - x_B) - C_C(\dot{x}_A - \dot{x}_B) = m_A \ddot{x}_A \quad (2.1)$$

Para a massa m_B :

$$+K_C(x_A - x_B) + C_C(\dot{x}_A - \dot{x}_B) = m_B \ddot{x}_B \quad (2.2)$$

Somando as Eqs. (2.1) e (2.2), obtém-se a equação que vincula o movimento dos corpos que se chocam:

$$m_A \ddot{x}_A + m_B \ddot{x}_B = 0$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} z = x_A - x_B \\ \dot{z} = \dot{x}_A - \dot{x}_B \\ \ddot{z} = \ddot{x}_A - \ddot{x}_B \end{cases} \quad (2.3)$$

onde z , \dot{z} e \ddot{z} são o deslocamento, a velocidade e a aceleração relativa entre m_A e m_B , respectivamente. Combinam-se as Eqs. (2.1), (2.2) e (2.3) para chegar à equação do movimento relativo entre as duas massas durante o impacto:

$$\left(\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \right) \ddot{z} + C_C \dot{z} + K_C z = 0 \quad (2.4a)$$

Introduzindo nesta equação diferencial os parâmetros de frequência natural e fator de amortecimento do sistema, têm-se:

$$\ddot{z} + 2\zeta w_0 \dot{z} + w_0^2 z = 0 \quad (2.4b)$$

Onde:

$m = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ é a massa equivalente do sistema no movimento relativo,

$w_0 = \sqrt{\frac{K_C}{m}}$ é a frequência natural e $\zeta = \frac{C_C}{2m w_0}$ é o fator de amortecimento

viscoso.

Para as condições iniciais:

$z(0) = 0$ e $\dot{z}(0) = v_0$, e, considerando fator de amortecimento $\zeta < 1$ a solução da equação diferencial, Eq. (2.4b) é:

$$z(t) = \frac{v_0 e^{-\zeta w_0 t} \operatorname{sen}(w_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t)}{w_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.5a)$$

Derivando a Eq. (2.5a) em relação ao tempo, as expressões para a velocidade $\dot{z}(t)$ e a aceleração $\ddot{z}(t)$ são:

$$\dot{z}(t) = v_0 e^{(-\zeta w_0 t)} \left[-\frac{\zeta \operatorname{sen}(w_a t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \cos(w_a t) \right] \quad (2.5b)$$

$$\ddot{z}(t) = v_0 \left[-\frac{\zeta^2 w_0 e^{(-\zeta w_0 t)} \operatorname{sen}(w_a t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} - 2\zeta w_0 e^{(-\zeta w_0 t)} \cos(w_a t) - w_a e^{(-\zeta w_0 t)} \operatorname{sen}(w_a t) \right] \quad (2.5c)$$

Onde:

$$w_a = w_0 \sqrt{1-\zeta^2} \text{ é a frequência natural amortecida.}$$

No processo de impacto é possível distinguir duas etapas: a etapa de compressão e a etapa de separação. A etapa de compressão têm uma duração t_c , a etapa de separação têm uma duração de t_s e o tempo total do impacto é $t_i = t_c + t_s$.

O tempo de compressão é obtido resolvendo a Eq. (2.5b) até $\dot{z}(t=t_c) = 0$, quando a tendência do movimento relativo se inverte.

$$t_c = \frac{1}{w_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{atan} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

e o tempo total do impacto é obtido resolvendo a Eq. (2.5c), quando a força de contato entre as massas desaparece, ou seja: $\ddot{z}(t=t_i) = 0$.

$$t_i = \frac{1}{w_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{atan} \left(2 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Dos resultados anteriores mostra-se que o tempo de compressão é igual ao tempo de separação.

Outra grandeza importante no estudo de colisões é a magnitude da força de impacto. Segundo o modelo de Kelvin-Vôigt, esta força é dada por:

$$F(t) = C_C (\dot{x}_A - \dot{x}_B) + K_C (x_A - x_B) \text{ ou } F(t) = C_C \dot{z} + K_C z$$

substituindo os respectivos valores de $z = z(t)$ e $\dot{z} = \dot{z}(t)$, a variação da força ao longo do impacto é:

$$F(t) = \frac{m w_0 e^{-\zeta w_a t} v_0 \left[-2\zeta^2 \sin(w_a t) + 2\zeta \sqrt{1-\zeta^2} \cos(w_a t) + \sin(w_a t) \right]}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.6)$$

A partir variação da força de impacto é possível encontrar o coeficiente de restituição. O coeficiente de restituição e define-se como a relação do impulso na

etapa de separação e o impulso na etapa de compressão:
$$e = \frac{\int_{t_c}^{t_i} F(t) dt}{\int_0^{t_c} F(t) dt}$$

Da definição de coeficiente de restituição deduz-se que para cada valor do fator de amortecimento ζ o valor do coeficiente de restituição é diferente.

Exemplo 1.1: Sejam os seguintes dados numéricos a serem substituídos na Eq. (2.4a): $K_C = 1 \times 10^6$ N/m, $C_C = 1 \times 10^{-1}$ N-s/m e as massas $m_A = 2.46$ kg e $m_B = 0.38$ kg. Se a velocidade relativa inicial é $v_0 = 0.1$ m/s, a variação da força de impacto, Eq. (2.6), resulta como se mostra na Fig. 12, com uma magnitude máxima de 58N.

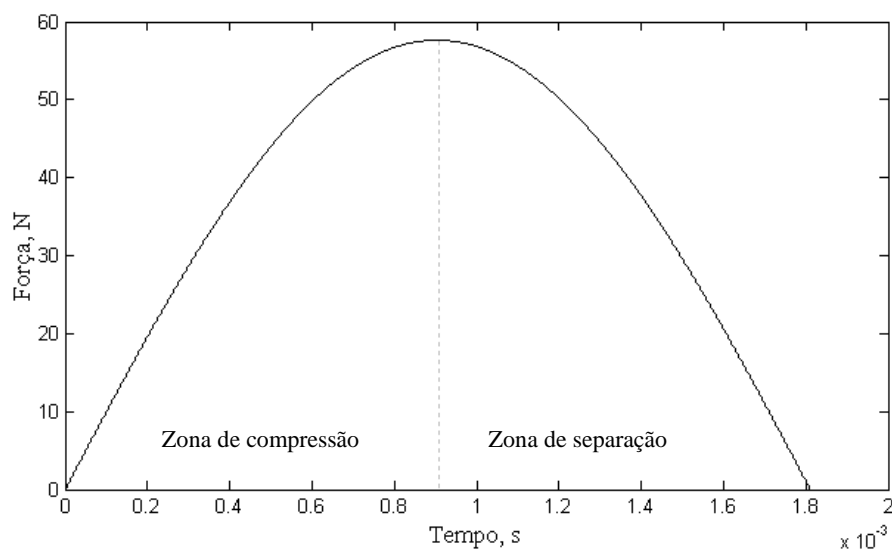


Figura 12 – Variação da força de impacto com o tempo

- **Tempo Adimensional – Mudança da Escala do Tempo**

Muitas vezes é vantajoso trabalhar com um tempo adimensional para saber qual é o comportamento de um sistema quando se mudam alguns parâmetros de interesse. Outro objetivo de trabalhar com tempo adimensional é para uniformizar os coeficientes da equação diferencial em estudo, ou pelo menos que os coeficientes tenham ordem de grandeza de mesma magnitude.

Para adimensionalizar o tempo na Eq. (2.4b), faz-se a seguinte mudança na variável tempo: $\tau = w_0 t$, onde τ é o tempo adimensional.

Aplicando convenientemente a regra da cadeia para a primeira e a segunda derivada tem-se:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = w_0 z'; \quad \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = w_0^2 z'' \quad \text{onde: } z' = \frac{dz}{d\tau} \text{ e } z'' = \frac{d^2 z}{d\tau^2}.$$

Substituindo estas novas expressões na Eq. (2.4), a equação diferencial do movimento relativo das duas massas durante o impacto fica da seguinte forma:

$$z'' + 2\zeta z' + z = 0 \quad (2.7)$$

A solução da Eq. (2.7) tem a mesma forma que a Eq. (2.5a), exceto que neste caso o variável tempo é adimensional:

$$z(\tau) = \frac{v_0 e^{-\zeta\tau} \operatorname{sen}(\sqrt{1-\zeta^2}\tau)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

e os tempos adimensionais de compressão e impacto total estão dados por:

$$\tau_c = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \text{ e } \tau_i = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{atan}\left(2\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \text{ respectivamente.}$$

No exemplo 1.2, grafica-se a variação do tempo de impacto adimensional τ com o fator de amortecimento ζ .

Exemplo 1.2: Em continuação do exemplo 1.1, na Fig. 13, mostra-se a variação do tempo do impacto.

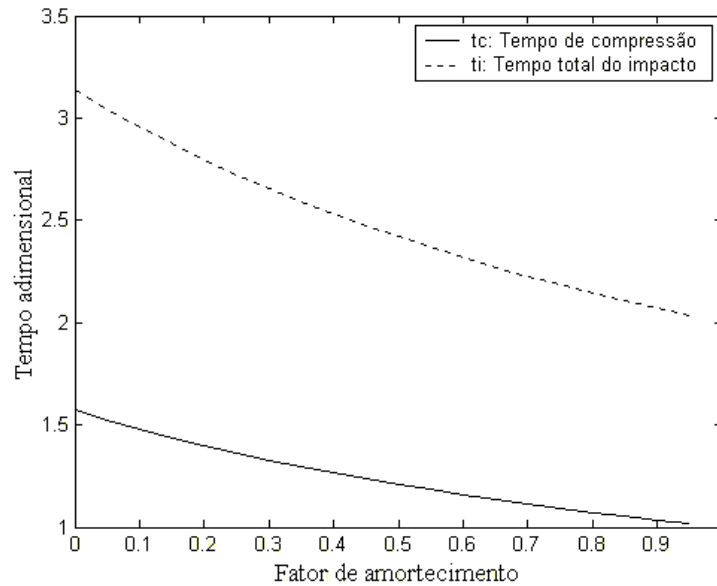


Figura 13 – Tempo de impacto adimensional com o fator de amortecimento ζ

Um estudo mais detalhado sobre o processo de impacto encontra-se no trabalho de Rajalingham & Rakheja [13]. Eles mostram que as forças de impacto variam consideravelmente com o coeficiente de restituição, Fig. 14. Também chegam à conclusão que coeficientes de restituição menores a 0.3 são perigosos nas aplicações de engenharia quando se quer reduzir a magnitude da força de impacto.

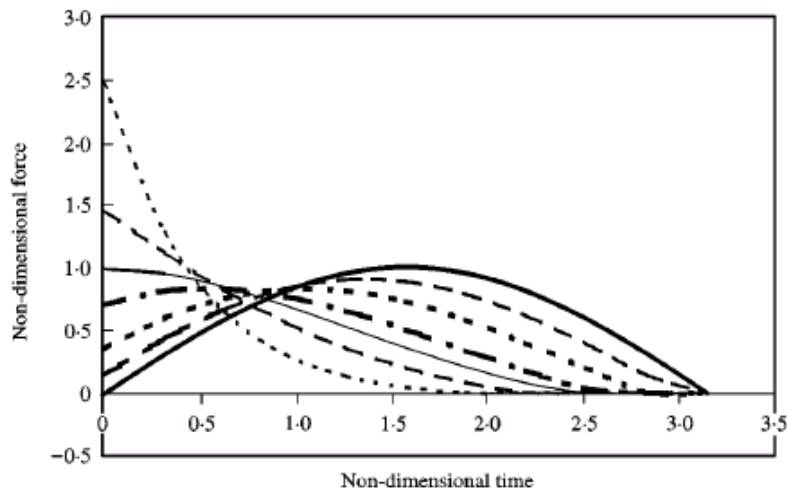


Figure 6. Dependence of impact force variation on coefficient of restitution: ---, $\epsilon = 0.1$; ---, $\epsilon = 0.2$; —, $\epsilon = 0.3$; -.-, 0.4; -.-.-, 0.6; ———, 0.8; ———, 1.0.

Figura 14 – Variação da força de impacto (resultados de Rajalingham & Rakheja [13])

A solução encontrada para a força de impacto, Eq. (2.6), sempre vai dar um resultado do tipo parabólico (Fig. 12), e os modelos com $e \approx 1$ ($\zeta < 1$), são bem representados por este modelo.

2.1.2. Resultados Experimentais de Forças de Impacto

Para verificar a variação parabólica e a duração da força de impacto, em continuação mostram-se resultados experimentais para diferentes materiais impactantes. Eles foram obtidos utilizando o martelo de impacto e o sistema de aquisição de dados (frequência de aquisição: 12.8kHz). Os experimentos 1 e 2 foram obtidos batendo o martelo sobre fundações sólidas. Os experimentos 3 e 4 foram obtidos batendo o martelo sobre a própria bancada experimental.

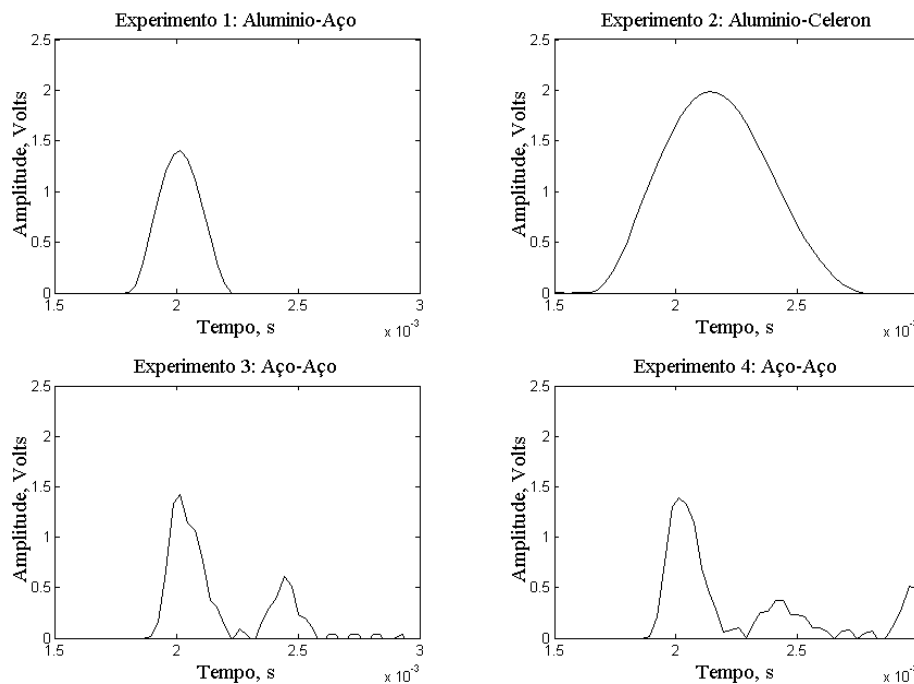


Figura 15 – Variação da força de impacto para diferentes materiais

A Fig. 15 mostra que a variação da força de impacto é parabólica para os 4 experimentos, mas, o tempo total do impacto depende dos materiais em colisão. Os tempos são: $\approx 0.4 \times 10^{-3}$ s, $\approx 1.2 \times 10^{-3}$ s, $\approx 0.35 \times 10^{-3}$ s, e $\approx 0.35 \times 10^{-3}$ s para os experimentos 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Cabe assinalar que o tempo de duração do impacto é função da rigidez no contato, Zapomel [14]. Observe-se que nos experimentos 3 e 4, apenas a primeira variação tem a ver com a força de impacto, enquanto as seguintes correspondem à medição feita no sensor do martelo da onda que se propaga ao longo da cabeça e é muito pouco amortecida.

Celeron: Produto fabricado a partir de tecido de algodão impregnado com resina fenólica. Usa-se para a fabricação de elementos de máquinas nas indústrias.

2.1.3. Modelo Baseado na Determinação Direta das Forças de Impacto

Este modelo é baseado na determinação direta da força de impacto, correspondente à força de impacto normal F_n , que atua entre os corpos em colisão. A partir deste item, introduz-se uma configuração geométrica do tipo rotor-estator para a análise das forças de impacto.

Para encontrar a força de impacto normal, é necessário modelar a deformação radial no ponto de contato. No instante de impacto é considerada a configuração de Kelvin-Vôigt cuja mola tem uma rigidez de contato K_C e o amortecedor tem coeficiente de amortecimento viscoso de contato C_C . A Fig. 16 mostra as forças que surgem durante o impacto sobre o rotor que se move.

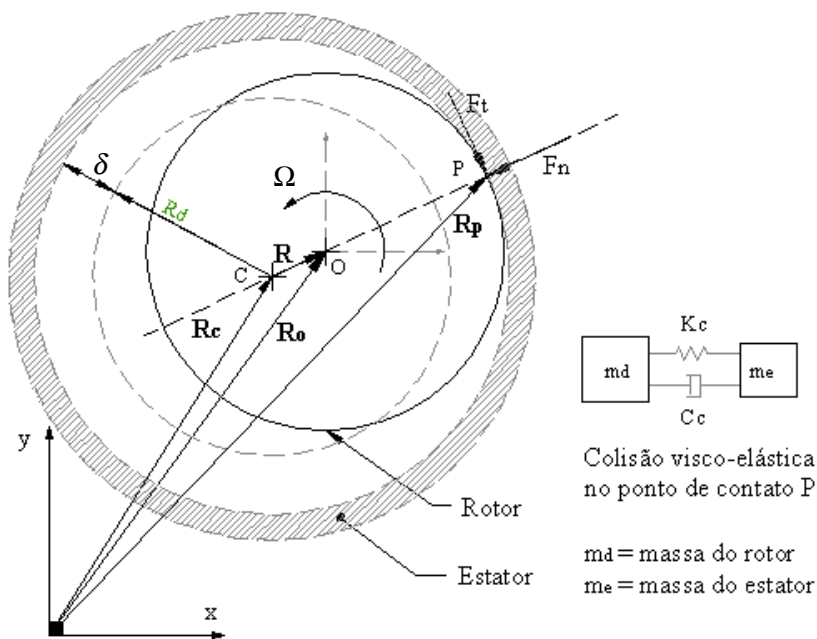


Figura 16 – Forças de impacto sobre o rotor

Cada vez que o rotor entra em contato com o estator, além de existir a força normal F_n , surge uma outra força tangencial F_t . A força tangencial surge pelo fato do rotor estar girando (Ω) e pela existência de um coeficiente de atrito (μ) entre o rotor e o estator. A força tangencial pode ter o mesmo caráter impulsivo da componente normal, já que ela é somente limitada pela força de adesão entre as superfícies em contato.

A força tangencial atua sobre o rotor tangencialmente, na direção oposta ao sentido de giro do rotor. Para calcular esta força, é assumida a lei de atrito de Coulomb, onde a força tangencial é o produto da força normal com o coeficiente de atrito, $F_t = \mu F_n$. Para calcular a magnitude da força de impacto normal F_n , é necessário medir o valor do deslocamento relativo do centro do rotor (R), ter como dados o valor da folga radial (δ) entre o estator e rotor, e, as constantes K_C e C_C no ponto de contato. Uma vez obtidas estes dados, a força de impacto normal, no sistema de referencia inercial (x, y) , calcula-se como:

$$F_n = \left\{ K_C (R - \delta) + C_C \frac{d}{dt} (R - \delta) \right\} H_{(R-\delta)} \quad (2.8)$$

Onde $H_{(\bullet)}$ é a função *Heavyside*: $H_{(R-\delta)} = \begin{cases} 1 & \text{se } R - \delta > 0 \\ 0 & \text{se } R - \delta < 0 \end{cases}$

\mathbf{R}_0 representa o deslocamento do centro do rotor, \mathbf{R}_C é o deslocamento do centro do estator e \mathbf{R}_P representa as coordenadas do ponto de impacto. O deslocamento relativo do centro do rotor é: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_C$, ver Fig. 16.

2.2. Frequências Naturais do Sistema Livre

Uma forma de caracterizar o comportamento dinâmico de uma estrutura é através de suas frequências naturais e seus modos de vibração. Os sistemas rotativos também experimentam uma situação de risco quando operam em certas velocidades de rotação chamadas de *Velocidade Críticas*. Uma velocidade é crítica quando a velocidade de rotação coincide com alguma das frequências naturais do sistema (que por sua vez dependem da velocidade de rotação).

O modelo em estudo, que se mostra na Fig. 17, também experimenta vibração quando opera em velocidades consideradas como críticas. Este modelo é constituído de um eixo elástico de diâmetro d e um disco de massa m_d , momento de inércia polar de massa J , momento de inércia diametral de massa J_d e raio R_d , sendo que o disco está unido solidariamente ao eixo na parte inferior. Para encontrar as frequências naturais deste sistema, usam-se, por exemplo, as equações de movimento desenvolvidas por Dimarogonas [15].

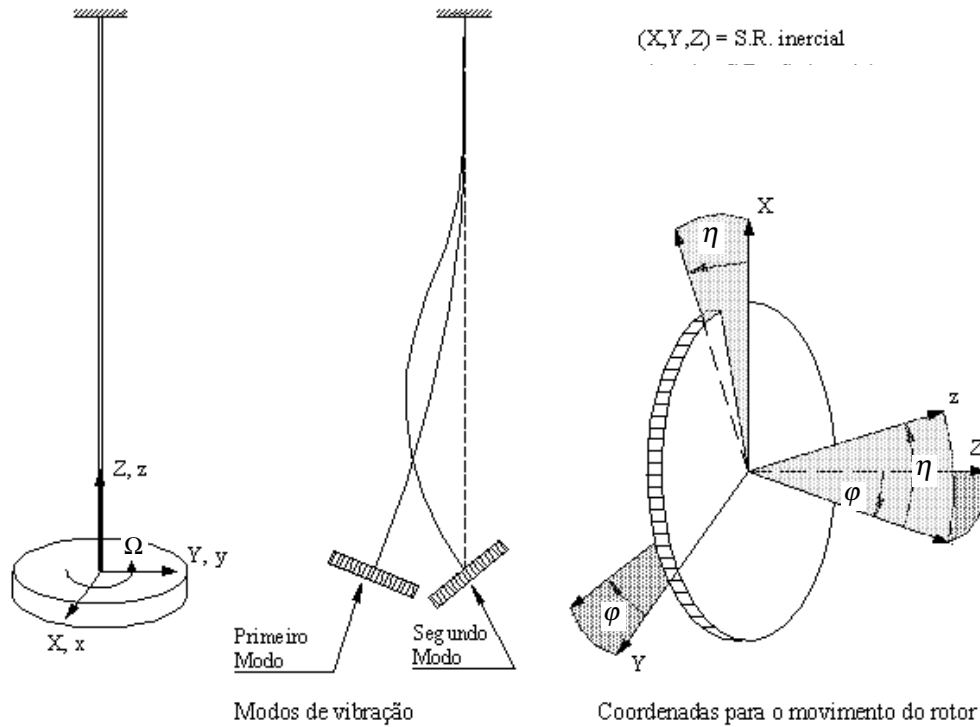


Figura 17 – Modos de vibração e definição do sistema de coordenadas

Considerando um movimento giratório em torno do eixo z com velocidade angular constante Ω , as equações de movimento, para um sistema perfeitamente balanceado e não amortecido, se escrevem como:

$$\begin{aligned}
 m_d \ddot{x} + k_{xx}x + k_{x\eta}\eta &= 0 \\
 m_d \ddot{y} + k_{yy}y + k_{y\varphi}\varphi &= 0 \\
 J_d \ddot{\eta} + J\Omega \dot{\varphi} + k_{\eta\eta}\eta + k_{\eta x}x &= 0 \\
 J_d \ddot{\varphi} - J\Omega \dot{\eta} + k_{\varphi\varphi}\varphi + k_{\varphi y}y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Onde x e y são os deslocamentos do centro do rotor, e, os ângulos φ e η do rotor são definidos por rotações em torno dos eixos x e y respectivamente, como se indica na Fig. 17. As constantes k_{ij} ($i, j = x, y, \eta, \varphi$) são os coeficientes de influencia de rigidez, cujos valores são:

$$\begin{aligned}
 k_{xx} = k_{yy} &= \frac{12EI}{L^3} \\
 k_{\eta\eta} = k_{\varphi\varphi} &= \frac{4EI}{L} \\
 k_{xy} = k_{yx} = k_{\varphi\eta} = k_{\eta\varphi} &= 0 \\
 k_{x\eta} = k_{\eta x} = k_{\varphi y} = k_{y\varphi} &= \frac{6EI}{L^2}
 \end{aligned}$$

Escrevendo a Eq. (2.9) em termos da constante $\beta = \frac{2EI}{L^3}$, resulta:

$$\begin{aligned} m_d \ddot{x} + 6\beta x + 3\beta L\eta &= 0 \\ m_d \ddot{y} + 6\beta y + 3\beta L\varphi &= 0 \\ J_d \ddot{\eta} + J\Omega\dot{\varphi} + 2\beta L^2\eta + 3\beta Lx &= 0 \\ J_d \ddot{\varphi} - J\Omega\dot{\eta} + 2\beta L^2\varphi + 3\beta Ly &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

As soluções da equação homogênea, Eq. (2.10), são da forma:

$$x = x_0 e^{\omega_n t}; y = y_0 e^{\omega_n t}; \eta = \eta_0 e^{\omega_n t}; \varphi = \varphi_0 e^{\omega_n t}$$

e a equação característica é:

$$\begin{vmatrix} m_d \omega_n^2 + 6\beta & 0 & 3\beta L & 0 \\ 0 & m_d \omega_n^2 + 6\beta & 0 & 3\beta L \\ 3\beta L & 0 & J_d \omega_n^2 + 2\beta L^2 & J\Omega \omega_n \\ 0 & 3\beta L & -J\Omega \omega_n & J_d \omega_n^2 + 2\beta L^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

A Eq. (2.11) leva à determinação de duas grandezas físicas importantes de um sistema mecânico: os autovalores e os autovetores. Os autovalores são em geral números complexos, onde a parte imaginária indica a frequência do movimento de vibração e a parte real relaciona-se com o fator de amortecimento ou decaimento deste movimento. Já os autovetores contêm as informações sobre os modos próprios de vibrar.

Em sistemas mecânicos que apresentam efeitos giroscópicos, tanto os autovalores quanto os autovetores dependem da velocidade de rotação Ω . A dependência das frequências naturais em relação à velocidade de rotação Ω é representada nos *Diagramas de Campbell*. Já a variação dos modos naturais de vibração em função da velocidade de rotação Ω é representada fundamentalmente no espaço tridimensional. Soluções analíticas para determinar os autovalores e autovetores de um rotor em balanço encontram-se no trabalho de Atalla [16].

As soluções da Eq. (2.11), raízes da equação característica para ω_n , são as frequências naturais do sistema para uma velocidade de rotação do rotor Ω conhecida.

Como sistemas rotativos sempre carregam um desbalanceamento residual, sempre haverá uma perturbação síncrona (na velocidade de rotação), assim se a velocidade de rotação do rotor Ω coincide com alguma das frequências naturais do sistema, ela é uma *Velocidade Crítica*. Para encontrar as velocidades críticas, traçam-se as frequências naturais obtidas da Eq. (2.11) com a velocidade de rotação do disco Ω , e, neste mesmo gráfico, traça-se a linha $\omega_n = \Omega$; os pontos onde esta linha intersecta a curva de frequências são as velocidades críticas. Este diagrama é conhecido como *Diagrama de Campbell*, que se mostra na Figs. 18 e 19 para os dados da tabela 1. Os dados da tabela foram tomados da bancada experimental do laboratório de vibrações.

| Disco | | | |
|---------------------------------------|--------|-----------------------|-------------------|
| Massa | m_d | 2.46 | kg |
| Raio | R_d | 0.05 | m |
| Espessura | h | 0.04 | m |
| Momento de inércia diametral de massa | J_d | 1.87×10^{-3} | kg-m ² |
| Momento de inércia polar de massa | J | 3.08×10^{-3} | kg-m ² |
| Eixo | | | |
| Diâmetro | d | 8.0×10^{-3} | m |
| Comprimento | L | 0.62 | m |
| Momento de Inércia de área | I | 0.2×10^{-9} | m ⁴ |
| Modulo de Young | E | 2.1×10^{11} | N/m ² |
| Densidade | ρ | 7850 | kg/m ³ |

Tabela 1 – Parâmetros físicos e geométricos do sistema eixo-rotor

Para um sistema não rotativo ($\Omega = 0$) os dois primeiros modos de vibração são uma de flexão e outra de rotação (Fig. 17). Quando o sistema gira, estes dois modos continuam a existir, mas cada um deles é “dividido” em outros dois: um direto e o outro retrogrado. Isto não indica a criação de novos modos, já que o movimento de precessão direta e retrograda do primeiro modo são geometricamente semelhantes, e, no segundo modo ocorre o mesmo.

Na Fig. 18 mostra-se a variação das 4 frequências naturais ω_{n1} , ω_{n2} , ω_{n3} e ω_{n4} com a velocidade de rotação do sistema rotativo, assim como os pontos das

velocidades críticas. As velocidades críticas ω_{c1} , ω_{c2} correspondem ao movimento de precessão retrograda e direta, respectivamente, no primeiro modo de vibração, e, as velocidades críticas ω_{c3} e ω_{c4} correspondem ao movimento de precessão retrograda e direta, respectivamente, no segundo modo de vibração, ver tabela 2.

| Símbolo | Velocidade crítica, Hz. | Tipo de movimento | Modo de vibração |
|---------------|-------------------------|----------------------|------------------|
| ω_{c1} | 2.27 | Precessão retrograda | Primeiro modo |
| ω_{c2} | 2.29 | Precessão direta | Primeiro modo |
| ω_{c3} | 36.7 | Precessão retrograda | Segundo modo |
| ω_{c4} | \emptyset | Precessão direta | Segundo modo |

Tabela 2 – Velocidades críticas e modos de vibração

No diagrama de Campbell observa-se que ω_{c4} não existe, além disso: ω_{c1} e ω_{c3} na realidade são “falsas velocidades críticas”, isto pode ser demonstrado analiticamente resolvendo a solução particular para um sistema de equações diferenciais não homogêneas, Atalla [16]. Portanto, somente existirá a velocidade crítica $\omega_{c2} = 2.29$ Hz do primeiro modo direto, que será chamada simplesmente velocidade crítica $\omega_c = 2.29$ Hz.

As Figs. 18 e 19 mostram que as frequências naturais ω_{n1} e ω_{n2} estão sobre retas quase horizontais, ou seja, elas variam muito pouco com a velocidade de rotação. Isto significa que o efeito giroscópico concentra-se principalmente no segundo modo de vibração, enquanto que o primeiro modo pode ser praticamente analisado por um modelo simplificado que não inclui as deflexões do disco.

Destes gráficos, também é possível encontrar o valor da frequência natural estática do sistema rotativo para o primeiro modo (ω_0), isto é com rotação zero ($\Omega = 0$), cujo valor é $\omega_0 = 2.28$ Hz. Já para o segundo modo, a frequência natural estática é 60 Hz, ver Fig. 18.

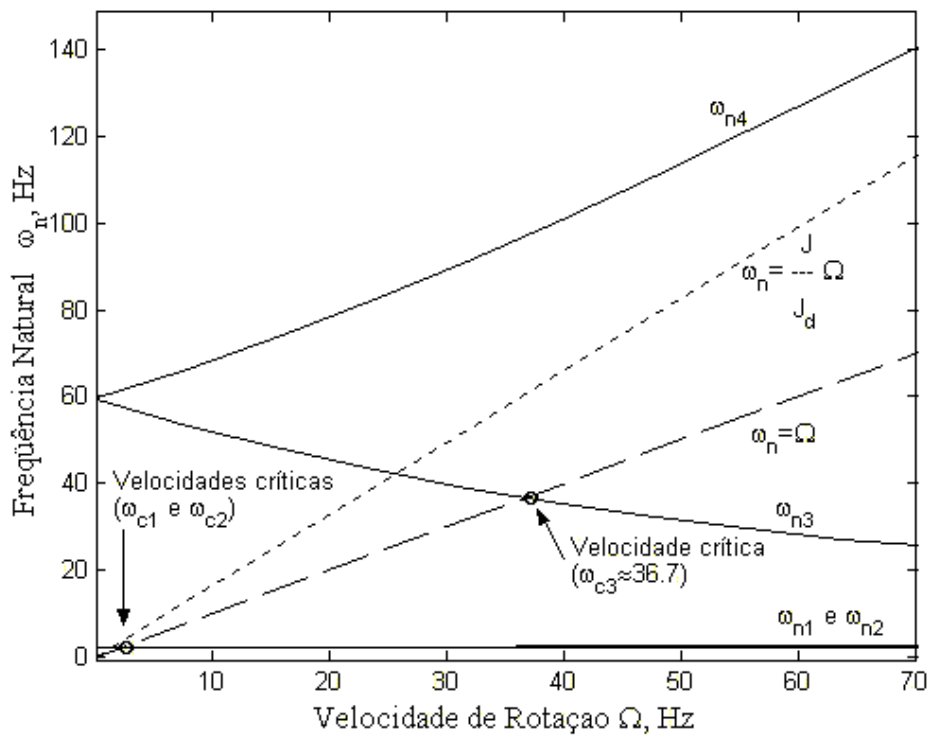


Figura 18 – Diagrama de Campbell - Velocidade crítica $\omega_{c3} \approx 36.7$ Hz

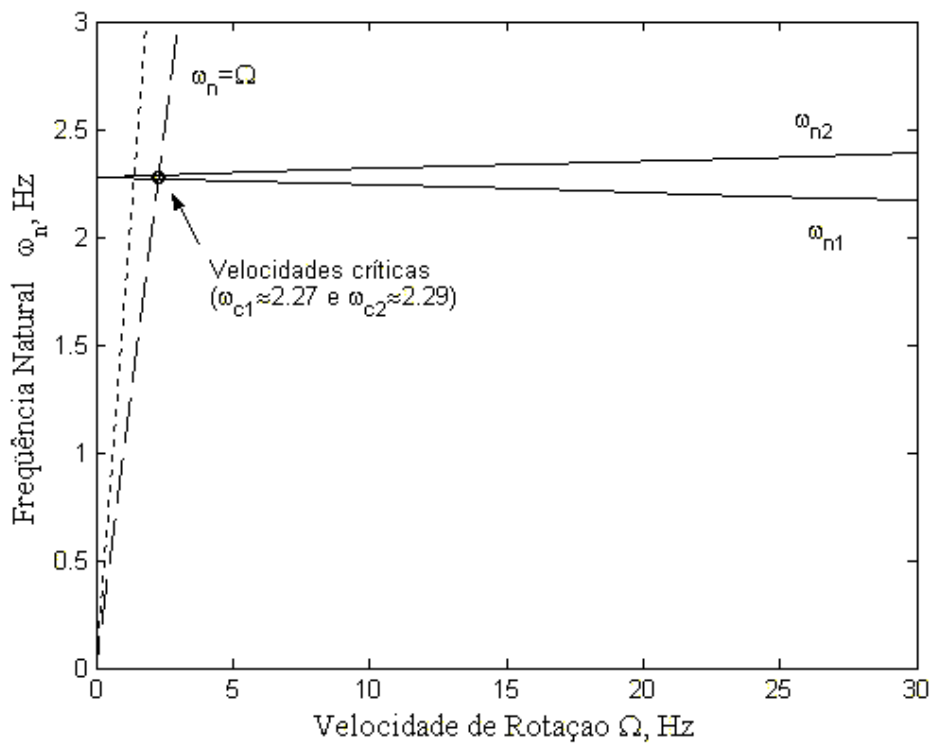


Figura 19 – Diagrama de Campbell - Velocidades Críticas $\omega_{c1} \approx 2.27$ Hz e $\omega_{c2} \approx 2.29$ Hz

2.3. Descrição do Modelo e Suposições

O modelo consiste do conjunto: eixo elástico, rotor e estator, montado em forma vertical, como se mostra na Fig. 20. O eixo é acionado através de um torque (T_m) gerado num motor elétrico.

O eixo leva pendurado um disco rígido na parte inferior e o movimento lateral do disco está limitado por um anel. Uma estrutura de base suporta o anel, esta estrutura é considerada elástica, e, é representada através de uma mola e um amortecedor, ambas de comportamento linear, e dispostos simétrica e diametralmente na periferia do anel.

As hipóteses para desenvolver as equações de movimento são as seguintes:

- Considera-se que o eixo está engastado na parte superior e toda a massa do disco está concentrada no extremo inferior livre.
- O disco gira em torno ao eixo vertical z e realiza um movimento plano.
- Considera-se que o sistema rotativo vibra só no primeiro modo, como se mostra na Fig. 17.
- Não se considera o efeito giroscópico, já que este efeito concentra-se principalmente no segundo modo de vibração.
- No ponto de contato assume-se um comportamento visco-elástico linear da força de impacto normal.
- A força tangencial, no impacto, obedece à lei de atrito de Coulomb.
- Considera-se um eixo elástico esbelto que possui rigidez a flexão e a torção.
- O estator está suportado numa base visco-elástica linear e é isotrópico nos eixos x e y .

2.4. Equações do Movimento Plano

No item 2.2 mostrou-se um sistema de equações para a análise dinâmica de um rotor em balanço sem desbalanceamento e livre de forças externas. Aquelas equações foram deduzidas para um sistema rotativo com velocidade de rotação constante e sem amortecimento, e, para um eixo com uma rigidez a torção infinita.

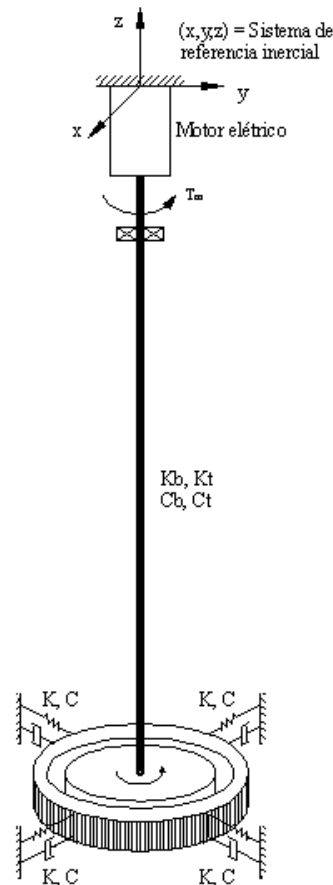


Figura 20 – Sistema dinâmico eixo-rotor-estator

Para o sistema em estudo (Fig. 20) considera-se que o eixo elástico possui uma rigidez a torção e que podem ocorrer forças externas devido ao impacto. Para a análise deste sistema é necessário deduzir novas equações de movimento para cada um dos subsistemas: eixo-rotor e estator, que descreva a dinâmica de cada um deles. No caso do subsistema eixo-rotor, considera-se que ele possa ter uma aceleração angular ou possa operar a velocidade de rotação constante.

Estas novas equações devem levar em consideração as forças externas devido ao impacto do rotor com um elemento estático (estator), o amortecimento e também a rigidez a torção do eixo elástico.

Mantendo as hipóteses anteriores, na continuação desenvolve-se as equações de movimento do conjunto eixo-rotor-estator. Para o subsistema eixo-rotor, são desenvolvidos dois sistemas de equações: uma quando ele acelera em forma contínua e outra quando gira a uma velocidade de rotação constante.

2.4.1. Subsistema Eixo-Rotor com Aceleração

Para o estudo aqui desenvolvido parte-se de um modelo matemático mais completo, considerando 4 graus de liberdade: o giro do rotor (θ), o deslocamento angular de torção do eixo (ϕ) e dois deslocamentos laterais ortogonais do centro do disco no plano horizontal do rotor (x, y).

A Fig. 21 mostra um esquema dos sistemas de coordenadas empregado. O sistema de referência (x, y) é inercial; (x_m, y_m) e (x_d, y_d) são sistemas de referência móveis que giram solidários à posição do eixo do motor e com o disco, respectivamente. A massa m_ϵ representa o desbalanceamento do disco, que pode ser produzido por uma má centragem na montagem ou por uma desuniformidade geométrica do rotor. Esta massa m_ϵ está localizada na posição $\epsilon = [\epsilon_x \ \epsilon_y]^T$ em relação ao sistema de coordenadas (x_d, y_d).

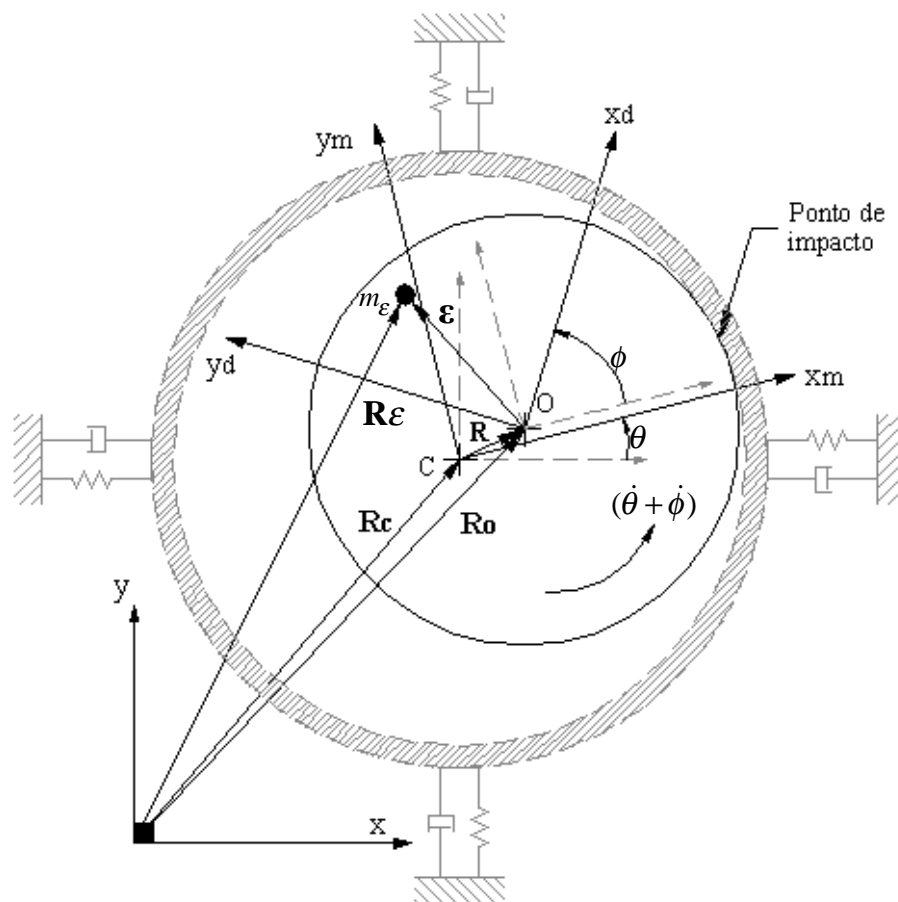


Figura 21 – Graus de liberdade do modelo no estado deformado

As posições do centro do rotor e estator estão definidas pelos vetores de posição $\mathbf{R}_0 = [x \ y]^T$ e $\mathbf{R}_c = [X \ Y]^T$, respectivamente.

Para encontrar as equações de movimento usam-se as **Equações de Lagrange**. A equação de Lagrange para um sistema não conservativo, considerando a função de dissipação de Rayleigh, Meirovitch [17], escreve-se como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=1}^n c_{is} \dot{q}_s$$

Na equação de Lagrange, T e U são a energia cinética e potencial do sistema, respectivamente, \mathfrak{R} é a função de dissipação de energia de Rayleigh das forças não conservativas (forças de amortecimento viscoso) e as quantidades Q_i são as forças externas generalizadas associadas com as coordenadas generalizadas q_i .

No modelo em estudo, as variáveis $q_i = [x \ y \ \theta \ \phi]$ e $\dot{q}_i = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]$ representam os deslocamentos e velocidades generalizadas, respectivamente.

A expressão da Energia Cinética T para o subsistema eixo-rotor é:

$$T = \frac{1}{2} m_d (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} J_m (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_\varepsilon (\dot{\mathbf{R}}_\varepsilon^T \dot{\mathbf{R}}_\varepsilon) \quad (2.13)$$

O primeiro termo vem a ser a energia cinética devido à translação do centro do disco nos eixos x e y , o segundo termo é a energia cinética devido à rotação do rotor, o terceiro é a energia cinética do rotor do motor e o último termo corresponde à energia cinética da massa excêntrica. A localização da excentricidade m_ε , no sistema de coordenadas (x, y) , é dada pelo vetor de

posição: $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R}_0 + \mathbf{A}_{(\theta+\phi)} \boldsymbol{\varepsilon}$ onde $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y]^T$

A matriz $\mathbf{A}(\theta + \phi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{bmatrix}$ é responsável pela transformação

de coordenadas $(x, y) \xrightarrow{\theta} (x_m, y_m) \xrightarrow{\phi} (x_d, y_d)$.

Finalmente, o vetor \mathbf{R}_ε define-se como:

$$\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R}_0 + \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\text{sen}(\theta + \phi) \\ \text{sen}(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}$$

A derivada em relação ao tempo de \mathbf{R}_ε é:

$$\dot{\mathbf{R}}_\varepsilon = \dot{\mathbf{R}}_0 + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) \\ \cos(\theta + \phi) & -\text{sen}(\theta + \phi) \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Logo, substituindo na Eq. (2.13), a equação da energia cinética resulta:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_d (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} J_m (\dot{\theta})^2 + \\ & \frac{1}{2} m_\varepsilon \left[(\dot{\theta} + \dot{\phi}) (-\varepsilon_x \text{sen}(\theta + \phi) - \varepsilon_y \cos(\theta + \phi)) + \dot{x} \right]^2 + \\ & \frac{1}{2} m_\varepsilon \left[(\dot{\theta} + \dot{\phi}) (-\varepsilon_y \text{sen}(\theta + \phi) + \varepsilon_x \cos(\theta + \phi)) + \dot{y} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

A expressão da Energia Potencial U do subsistema eixo-rotor é:

$$U = \frac{1}{2} k_b x^2 + \frac{1}{2} k_b y^2 + \frac{1}{2} k_t \phi^2 \quad (2.15)$$

O primeiro e segundo termo são a energia potencial devido à flexão do eixo, e o terceiro termo é devido à torção. Nesta equação, k_b e k_t são a rigidez de flexão e torção do eixo, respectivamente (para o primeiro modo), calculados via coeficiente de influencia.

A expressão da Função de Dissipação Energia de Rayleigh \mathfrak{R} do subsistema eixo-rotor para cada um das variáveis generalizadas é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{x}} &= c_{xx} \dot{x} + c_{xy} \dot{y} + c_{x\theta} \dot{\theta} + c_{x\phi} \dot{\phi} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{y}} &= c_{yx} \dot{x} + c_{yy} \dot{y} + c_{y\theta} \dot{\theta} + c_{y\phi} \dot{\phi} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{\theta}} &= c_{\theta x} \dot{x} + c_{\theta y} \dot{y} + c_{\theta\theta} \dot{\theta} + c_{\theta\phi} \dot{\phi} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{\phi}} &= c_{\phi x} \dot{x} + c_{\phi y} \dot{y} + c_{\phi\theta} \dot{\theta} + c_{\phi\phi} \dot{\phi} \end{aligned}$$

Considerando um amortecimento viscoso do tipo proporcional e desacoplados entre si, a expressão anterior reduz-se a:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{x}} = c_{xx} \dot{x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{y}} = c_{yy} \dot{y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{\phi}} = c_{\phi\phi} \dot{\phi} \quad (2.16)$$

Onde $c_{xx} = c_{yy} = c_b$ e $c_{\phi\phi} = c_t$ são os coeficientes de amortecimento à flexão e à torção respectivamente.

Representando as forças externas generalizadas nos graus de liberdade (x, y, θ, ϕ) pelo vetor $\mathbf{Q} = [Q_x \quad Q_y \quad Q_\theta \quad Q_\phi]^T$ e aplicando a Eq. (2.12) para cada uma das variáveis generalizadas, resultam as seguintes equações:

Para a variável x :

$$(m_d + m_\varepsilon) \ddot{x} + m_\varepsilon (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) [-\varepsilon_x \sin(\theta + \phi) - \varepsilon_y \cos(\theta + \phi)] + m_\varepsilon (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 [-\varepsilon_x \cos(\theta + \phi) + \varepsilon_y \sin(\theta + \phi)] + c_b \dot{x} + k_b x = Q_x \quad (2.17)$$

Para a variável y :

$$(m_d + m_\varepsilon) \ddot{y} + m_\varepsilon (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) [\varepsilon_x \cos(\theta + \phi) - \varepsilon_y \sin(\theta + \phi)] + m_\varepsilon (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 [-\varepsilon_x \sin(\theta + \phi) + \varepsilon_y \cos(\theta + \phi)] + c_b \dot{y} + k_b y = Q_y \quad (2.18)$$

Para a variável θ :

$$m_\varepsilon [-\varepsilon_x \sin(\theta + \phi) - \varepsilon_y \cos(\theta + \phi)] \ddot{x} + m_\varepsilon [+ \varepsilon_x \cos(\theta + \phi) - \varepsilon_y \sin(\theta + \phi)] \ddot{y} + [J_m + J + m_\varepsilon \varepsilon^2] \ddot{\theta} + [J + m_\varepsilon \varepsilon^2] \ddot{\phi} = Q_\theta \quad (2.19)$$

Para a variável ϕ :

$$m_\varepsilon [-\varepsilon_x \sin(\theta + \phi) - \varepsilon_y \cos(\theta + \phi)] \ddot{x} + m_\varepsilon [+ \varepsilon_x \cos(\theta + \phi) - \varepsilon_y \sin(\theta + \phi)] \ddot{y} + [J + m_\varepsilon \varepsilon^2] \ddot{\theta} + [J + m_\varepsilon \varepsilon^2] \ddot{\phi} + c_t \dot{\phi} + k_t \phi = Q_\phi \quad (2.20)$$

Ordenando convenientemente as Eqs. (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20), na forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \boldsymbol{\zeta}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Z} + \mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

Onde

\mathbf{M} é a matriz de massa,

ζ é a matriz de amortecimento,

\mathbf{K} é a matriz de rigidez,

\mathbf{Z} é o vetor das variáveis de deslocamento,

\mathbf{P} é o vetor das forças não lineares e

\mathbf{Q} é o vetor das forças generalizadas.

Finalmente a equação de movimento do subsistema dinâmico eixo-rotor resulta:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2 & m_2 \\ 0 & m_1 & m_3 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ m_2 & m_3 & m_5 & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_\theta \\ Q_\phi \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Onde as componentes da matriz de massa são:

$$m_1 = m_d + m_\varepsilon$$

$$m_2 = -m_\varepsilon \left[\varepsilon_x \sin(\theta + \phi) + \varepsilon_y \cos(\theta + \phi) \right]$$

$$m_3 = +m_\varepsilon \left[\varepsilon_x \cos(\theta + \phi) - \varepsilon_y \sin(\theta + \phi) \right]$$

$$m_4 = m_\varepsilon \varepsilon^2 + J + J_m$$

$$m_5 = m_\varepsilon \varepsilon^2 + J$$

As componentes das forças não lineares são:

$$P_x = -m_\varepsilon (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \left[\varepsilon_x \cos(\theta + \phi) - \varepsilon_y \sin(\theta + \phi) \right]$$

$$P_y = -m_\varepsilon (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \left[\varepsilon_x \sin(\theta + \phi) + \varepsilon_y \cos(\theta + \phi) \right]$$

As forças, P_x e P_y , correspondem às forças centrífugas geradas pela massa desbalanceada m_ε quando o subsistema está girando.

O determinante da matriz de massa $|\mathbf{M}| = J_m(m_d + m_\varepsilon)(m_d J + m_d m_\varepsilon \varepsilon^2 + m_\varepsilon J)$ é diferente de zero, o que assegura que não teremos problemas de singularidade ao resolver o sistema de equações diferenciais da Eq. (2.21).

2.4.2. Subsistema Eixo-Rotor com Velocidade de Rotação Constante

A Eq. (2.21) foi deduzida considerando um subsistema com quatro graus de liberdade, isto é quando o rotor encontra-se acelerando ou desacelerando em forma contínua.

Muitos sistemas rotativos aceleram unicamente no arranque ou desaceleram na parada e, passada a etapa de arranque, o sistema opera em velocidade constante. Para estudar a dinâmica do subsistema quando ele gira com velocidade de rotação constante, adapta-se a Eq. (2.21).

Considerando a velocidade de rotação do motor constante $\dot{\theta} = \Omega$, então $\ddot{\theta} = 0$. Para obter a equação de movimento para um subsistema de 3 graus de liberdade, elimina-se a linha e coluna correspondente à variável θ na Eq. (2.21).

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2 \\ 0 & m_1 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b & 0 & 0 \\ 0 & c_b & 0 \\ 0 & 0 & c_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & 0 & 0 \\ 0 & k_b & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_\phi \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

As componentes da matriz de massa são:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_d + m_\varepsilon \\ m_2 &= -m_\varepsilon \left[\varepsilon_x \sin(\Omega t + \phi) + \varepsilon_y \cos(\Omega t + \phi) \right] \\ m_3 &= +m_\varepsilon \left[\varepsilon_x \cos(\Omega t + \phi) - \varepsilon_y \sin(\Omega t + \phi) \right] \\ m_5 &= m_\varepsilon \varepsilon^2 + J \end{aligned}$$

As componentes das forças não lineares são:

$$\begin{aligned} P_x &= -m_\varepsilon (\Omega + \dot{\phi})^2 \left[\varepsilon_x \cos(\Omega t + \phi) - \varepsilon_y \sin(\Omega t + \phi) \right] \\ P_y &= -m_\varepsilon (\Omega + \dot{\phi})^2 \left[\varepsilon_x \sin(\Omega t + \phi) + \varepsilon_y \cos(\Omega t + \phi) \right] \end{aligned}$$

Novamente, pode-se mostrar que o determinante da matriz de massa,

$$|\mathbf{M}| = (m_d + m_\varepsilon)(m_d J + m_d m_\varepsilon \varepsilon^2 + m_\varepsilon J), \text{ resulta diferente de zero.}$$

2.5. Movimento do Rotor Com Impacto

Segundo o modelo da Fig. 16, quando o deslocamento radial do centro do rotor é maior que a folga radial δ ocorre impacto. Durante o contato gera-se uma força de impacto normal que é calculada pela Eq. (2.8) em relação ao sistema de referencia inercial (x, y) . No entanto, se o deslocamento radial do centro do rotor é menor que a folga radial, a força de impacto é zero.

$$F_n = \left\{ K_C (R - \delta) + C_C \frac{d}{dt} (R - \delta) \right\} H_{(R - \delta)}$$

Onde: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_C$; $\mathbf{R}_0 = [x \ y]^T$ e $\mathbf{R}_C = [X \ Y]^T$ são as coordenadas do centro do rotor e estator, respectivamente, em relação ao sistema de referencia inercial (x, y) e $R = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}$ é o deslocamento radial do centro do rotor.

A força de atrito, aplicando a lei de atrito de Coulomb é: $F_t = \mu F_n$. Esta força de atrito F_t (no ponto de contato) pode ser substituída por uma força paralela de igual magnitude que passa pelo centro do rotor e um conjugado $T_t = -F_t R_d$, onde R_d é o radio do rotor. Na Fig. 22 estão representadas as forças que atuam sobre o rotor.

As componentes da resultante das forças F_t e F_n nos eixos x e y são F_x e F_y , respectivamente, e, a resistência oferecida pelo meio fluido circundante ao rotor é representado através do torque T_c . O torque T_c obedece a um comportamento quadrático por estar, o rotor, imerso num meio fluido, nesta situação, a força de atrito é essencialmente proporcional à velocidade para baixas velocidades de rotação e chega a ser proporcional ao quadrado da velocidade para altas velocidades de rotação, Ogata [18].

As expressões das forças externas que atuam sobre o rotor, segundo a Fig. 22, são:

$$F_x = +F_t \sin(\alpha) - F_n \cos(\alpha)$$

$$F_y = -F_t \cos(\alpha) - F_n \sin(\alpha)$$

onde

$$\sin(\alpha) = \frac{y - Y}{R} = \frac{y - Y}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{x - X}{R} = \frac{x - X}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}}$$

Ordenando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ R \end{pmatrix} \begin{bmatrix} +(y-Y) & -(x-X) \\ -(x-X) & -(y-Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Os torques gerado pela força de atrito no impacto e pelo meio fluido, que atuam sobre o rotor, são T_t e T_c respectivamente, que se expressam como:

$$\begin{aligned} T_t &= -F_t R_d \\ T_c &= -c\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

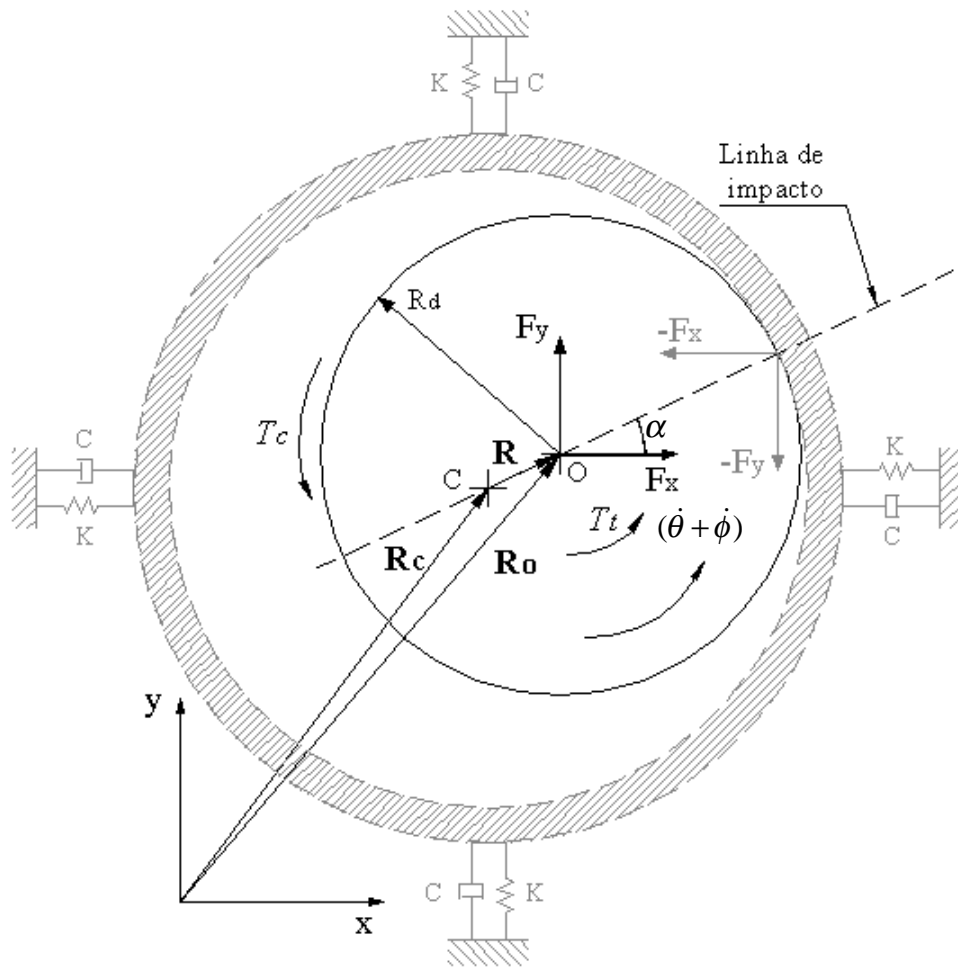


Figura 22 – Forças que agem sobre o rotor e o estator elástico

Para o subsistema eixo-rotor, as forças generalizadas \mathbf{Q} correspondem às forças externas dadas pelas Eqs. (2.23) e (2.24). Escrevendo estas forças na forma vetorial, obtém-se o seguinte carregamento que age sobre o rotor:

$$\mathbf{Q} = [Q_x \quad Q_y \quad Q_\theta \quad Q_\phi]^T = [F_x \quad F_y \quad T_m + T_c \quad T_t]^T$$

2.6. Equação de Movimento do Estator

O modelo eixo-rotor-estator em estudo considera que o estator é suportado numa base visco-elástica linear, com coeficiente de rigidez K e coeficiente de amortecimento viscoso C . Sob esta hipótese, o estator tem sua própria dinâmica. As únicas forças que atuam sobre o estator são a força de impacto normal e a força de atrito tangencial, cujas resultantes são as forças $(-F_x, -F_y)$ nos eixos x e y respectivamente, no sistema de referencia inercial (x, y) , estas forças são mostradas na Fig. 22.

Por ser um subsistema simples de 2 graus de liberdade, translação no plano (x, y) , é possível aplicar a segunda lei de Newton para encontrar as equações de movimento:

$$\begin{aligned} m_e \ddot{X} + 2C\dot{X} + 2KX &= -F_x \\ m_e \ddot{Y} + 2C\dot{Y} + 2KY &= -F_y \end{aligned}$$

Logo, estas equações podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} m_e & 0 \\ 0 & m_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2C & 0 \\ 0 & 2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Onde m_e representa a massa do estator, (X, Y) é o deslocamento do centro do estator e as forças F_x e F_y são as resultantes das forças de impacto deduzidas na Eq. (2.23).

A Eq. (2.25) representa a dinâmica do estator, esta equação é utilizada, somente, quando o rotor bate com o estator; em caso contrario, o deslocamento do estator é nulo.

2.7. Contato Permanente do Rotor com o Estator

No caso de um rotor desbalanceado, quando ele entra em contato permanente com a parede do estator, a força centrífuga devido à massa excêntrica m_e , pode ser maior ou menor que a força restauradora do eixo. Se a força centrífuga for maior que a restauradora, a força de atrito tangencial tende a acelerar o rotor na direção oposta à sua direção de rotação. Supondo que o motor elétrico gera energia em forma ilimitada, a aceleração pode não parar até que a velocidade relativa entre rotor e estator seja nula. Quando a velocidade relativa é nula, o rotor rola sob a superfície interna do estator (*Rolling*).

Um rotor sem desbalanceamento também pode entrar em contato permanente com a parede do estator e realizar precessão, uma das maneiras de conseguir isto, é introduzindo uma perturbação ao sistema (por exemplo, uma pancada). Segundo a característica da perturbação o rotor pode rolar ou escorregar sobre a parede do estator.

2.7.1. Precessão Direta e Retrógrada

Para reconhecer em que momento o rotor realiza movimento de precessão direta ou retrógrada (*Forward or Backward Whirl*), necessita-se uma expressão matemática que possa representar este fenômeno.

Definindo como ψ o ângulo formado pelo eixo x e a linha de contato que passa pelos centros O e C , como se mostra na Fig. 23, pode-se escrever a seguinte relação trigonométrica:

$$\tan(\psi) = \frac{y}{x} \rightarrow \psi = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Logo, derivando ψ em relação ao tempo, a velocidade de precessão $\dot{\psi}$ resulta:

$$\dot{\psi} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 + y^2} \quad (2.26)$$

Na Fig. 23, $\dot{\psi}$ e Ω , tem o mesmo sentido de giro, então: se $\dot{\psi}$ resulta positivo, o disco realiza precessão direta em caso contrario realiza precessão retrógrada.

2.7.2. Rolamento e Escorregamento

Quando o rotor entra em contato permanente com a parede do estator (*Full Annular Rubbing*), este pode rolar ou escorregar (*Rolling or Sliding*).

Rolamento: Sejam A e D dois corpos rígidos (Anel e Disco) que se movem de tal modo que, a cada instante, há um ponto P_a da superfície do anel A em contato com um ponto P_d da superfície do disco D . Diz-se que há rolamento entre A e D se, para alguma referencia S , se cumpre: ${}_S\mathbf{V}_{P_a} = {}_S\mathbf{V}_{P_d}$ ou, o que é equivalente, ${}_S\mathbf{V}_{P_a/P_d} = \mathbf{0}$, ou seja, quando a velocidade relativa dos pontos em contato é nula.

Da Fig. 23, considerando um sistema de referencia S fixo no anel (x, y) , a velocidade do ponto P_d em relação ao sistema S escreve-se como:

$${}_S\mathbf{V}_{P_d} = {}_S\mathbf{V}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OP_d} \rightarrow {}_S\mathbf{V}_{P_d} = \dot{\psi} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{CO} + \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{OP_d}$$

Também:

$${}_S\mathbf{V}_{P_a} = \mathbf{0} \rightarrow {}_S\mathbf{V}_{P_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_{CO} = \delta \cos \psi \hat{\mathbf{i}} + \delta \sin \psi \hat{\mathbf{j}}; \quad \mathbf{r}_{OP_d} = R_d \cos \psi \hat{\mathbf{i}} + R_d \sin \psi \hat{\mathbf{j}}$$

Finalmente:

$${}_S\mathbf{V}_{P_d} = (-\delta \dot{\psi} \sin \psi - R_d \Omega \sin \psi) \hat{\mathbf{i}} - (\delta \dot{\psi} \cos \psi + R_d \Omega \cos \psi) \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$$

Na condição de rolamento do rotor, adotamos a seguinte notação para a velocidade de precessão: $\Omega_{wh} = \dot{\psi}$.

Portanto, a condição cinemática para o rolamento é:

$$\Omega_{wh} = -\frac{R_d}{\delta} \Omega \tag{2.27}$$

Se a condição da Eq. (2.27) não é satisfeita, o rotor encontra-se escorregando.

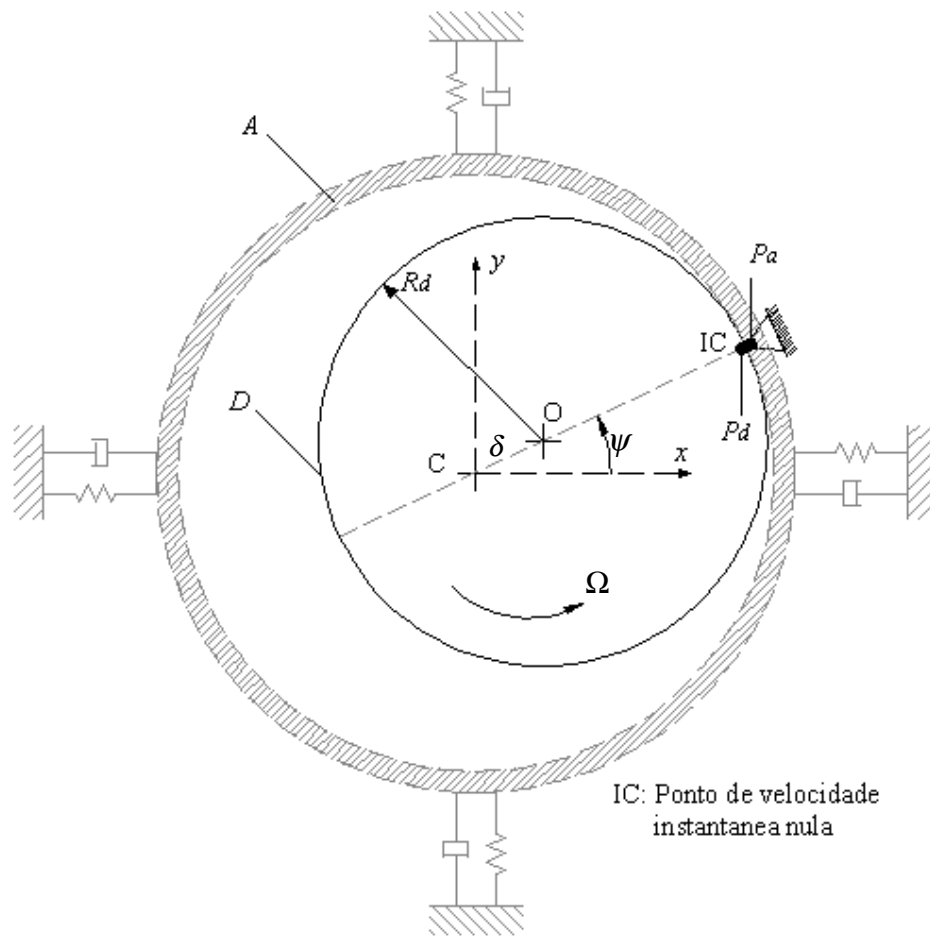


Figura 23 – Contato permanente do rotor com a parede do estator

Quando o rotor rola, o ponto de contato entre o rotor e o estator tem velocidade nula, assim este ponto representa o *Centro Instantâneo de Velocidade Nula* para o rotor, ponto *IC*, Hibbeler [19].

Como a folga radial δ é pequena em relação ao raio R_d do rotor, a velocidade de precessão resulta $\Omega_{wh} \gg \Omega$, estabelecendo-se potencialmente uma situação de risco nos sistemas rotativos.