PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Wellington Galdino Alves de Oliveira

Estudo e Aplicações dos Números Complexos: O uso dos Números Complexos na Análise de Circuitos Elétricos

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientadora: Profª. Christine Sertã Costa
Coorientador: Prof. Wilson Reis de Souza Neto

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Wellington Galdino Alves de Oliveira

Estudo e Aplicações dos Números Complexos: O uso dos Números Complexos na Análise de Circuitos Elétricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática (opção profissional). Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profª. Christine Sertã Costa
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Wilson Reis de Souza Neto
Coorientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinesio Pesco
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Miguel Adriano Koiller Schnoor
Universidade Federal Fluminense – UFF

Profª. Emília Carolina Santana Teixeira Alves
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de Fevereiro de 2018.

Wellington Galdino Alves de Oliveira

Graduado em Ciências Navais, com habilitação em Administração de Sistemas, pela Escola Naval, em 2007. Pós-Graduado nos Cursos de: Gestão pela Qualidade Total pela UFF, em 2012, Curso de Aperfeiçoamento de Intendência para Oficiais pelo Centro de Instrução Almirante Wandenkolk, em 2013, e no Curso de Gestão Pública pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, em 2013. Atualmente, desempenha as funções de Encarregado da Seção de Aquisição de Munição e Sobressalentes no Centro de Obtenção da Marinha. Entusiasta de Matemática, gosta de estudá - la a fim de satisfazer uma realização pessoal de aprofundar seus conhecimentos nessa disciplina.

Ficha Catalográfica

Oliveira, Wellington Galdino Alves de

Estudo e Aplicações dos Números Complexos: O uso dos Números Complexos na Análise de Circuitos Elétricos / Wellington Galdino Alves de Oliveira ; Orientadora: Christine Sertã Costa ; Coorientador Wilson Reis de Souza Neto. - 2018.

66f. : il. color.; 30cm

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2018.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Números Complexos. 3. Aplicação. 4. Ensino Médio. I. Costa, Christine Sertã. II. Souza Neto, Wilson Reis de. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Para os meus pais
João Batista Alves de Oliveira (*in memoriam)*
e Maria da Glória Galdino de Oliveira,
Por todos os ensinamentos que me foram transmitidos.
Ao meu filho João Pedro Mendes Galdino
por me motivar a ser uma pessoa
cada vez melhor e tornar me
um bom exemplo a seguir.

Agradecimentos

Aos meus Professores Orientador e Coorientador Christine Sertã e Wilson Reis, pela paciência e pelas orientações seguras que me conduziram a concluir este trabalho com êxito.

Ao PROFMAT pela oportunidade ofertada para realização deste curso, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao professor Sinesio Pesco e toda Comissão do PROFMAT PUC-Rio que acreditaram e me ajudaram a concluir essa conquista.

A todos os professores que durante o curso do PROFMAT transmitiram seus conhecimentos com dedicação e paciência.

Aos meus pais João Batista e Maria da Glória, pelo amor, carinho, dedicação e apoio que sempre me ofertaram.

Ao meu filho João Pedro pelos sorrisos doces e pelo carinho que deixaram os meus dias mais leves para o cumprimento de minha jornada.

À minha Namorada Emilyn, pela paciência, apoio e carinho que muito me ajudaram a manter o foco na conquista desse objetivo.

A Deus por ter me proporcionado saúde, persistência e capacidade para concluir com êxito esse sonho de aprender um pouco mais dessa disciplina maravilhosa que é a Matemática. Sem a Sua ação em minha vida, nada disso seria possível, o meu sincero agradecimento por mais essa vitória alcançada.

Resumo

Oliveira, Wellington Galdino Alves de; Costa, Christine Sertã (Orientadora). **Estudo e Aplicações dos Números Complexos: O uso dos Números Complexos na Análise de Circuitos Elétricos.** Rio de Janeiro, 2018. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O ensino da Teoria dos Números Complexos durante o Ensino Médio é apresentado, por vezes, de uma maneira pouco representativa para os alunos levando em consideração a sua importância. Uma das lacunas que pode ser observada é a falta de exemplos de aplicações no cotidiano dos alunos o que, por fim, acaba não gerando significado no aprendizado para eles. No entanto, a aplicação dos números complexos é bem mais abrangente do que se possa imaginar, principalmente no campo das Ciências Exatas, tomando como exemplo a Engenharia. Este trabalho destina-se a ampliar a visão dos alunos do Ensino Médio apresentando aplicações e a maneira de como os Números Complexos são utilizados em outros contextos, assim como no estudo dos Circuitos Elétricos.

Palavras-chave

Números Complexos; Aplicação; Ensino Médio; Circuitos Elétricos.

Abstract

Oliveira, Wellington Galdino Alves de; Costa, Christine Sertã (Advisor). **Study and Applications of Complex Numbers: The Use of Complex Numbers in the Analysis of Electrical Circuits.** Rio de Janeiro, 2018. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The teaching of Complex Numbers Theory during High School is sometimes presented in a way that is not representative for students considering its importance. One of the gaps that can be observed is the lack of examples of applications in the students' daily life, which, in the end, does not generate meaning in the learning for them. However, the application of the complex numbers is much more comprehensive than can be imagined, mainly, in the field of Exact Sciences taking as an example Engineering. This work is intended to broaden the view of high school students presenting applications and how Complex Numbers are used in other contexts, as well as in the study of Electrical Circuits.

Keywords

Complex numbers; Application; High school; Electric circuits.

Sumário

Lista de Figuras

1
Introdução

O estudo dos Números Complexos na educação básica, geralmente, inicia-se no terceiro ano do ensino médio e não é raro verificar esse conteúdo sendo apresentado de forma isolada e sem conexão com outras áreas do conhecimento ou sem qualquer tipo de aplicação senão a de resolução de equações com raiz quadrada de números negativos. Mas, o conhecimento matemático restrito à informação, apenas com definições, exemplos ou exercícios de fixação não garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias tratadas muitas vezes de formas isoladas e desconectadas umas das outras.

É importante salientar que a Matemática não pode mais ser considerada como um conjunto de conhecimentos universais e teoricamente bem definidos, passando a ser considerada como saber dinâmico, prático e relativo. Outrossim, a aprendizagem da Matemática significa uma forma de criar estratégias e métodos que permitam ao aluno atribuir sentido e significado às ideias matemáticas de maneira que o torne capaz de analisar, argumentar, estabelecer relações e também poder criar. Assim sendo, o estudo dessa disciplina vai muito além do ensino baseado apenas em desenvolver raciocínios lógicos, tais como calcular e resolver problemas ou simplesmente a fixação de conceitos por meio de memorização ou resolução de exercícios.

Para que o estudante se aproprie do conhecimento de maneira que consiga entender os conceitos e axiomas matemáticos envolvidos, é primordial que ele tenha capacidade de criar raciocínios e comunicar ideias, identificando aplicações do conteúdo estudado.

Embora destacada acima a importância de se criar associações com o ensino da Matemática e outras áreas do conhecimento, visando dar sentido e significado à aprendizagem do conteúdo, observa-se que muitos livros didáticos, material de apoio e referência para os professores e alunos tratam dos Números Complexos de maneira estanque, como sendo um conteúdo isolado e sem relação com outras áreas do conhecimento e, da mesma maneira, sem citar possíveis aplicações.

As teorias científicas são ferramentas que possibilitam explicações de fenômenos utilizando-se de modelos matemáticos, e que, sem a utilização desses modelos, não seria possível obter explicações para esses acontecimentos. Tal fato demonstra a importância de se estudar os conteúdos matemáticos evidenciando as suas aplicações e gerando significado para os alunos. Assim sendo, considerando que a teoria dos Números Complexos pode ser associada a outros conteúdos e também possuir vasta aplicabilidade em outras áreas do conhecimento, torna-se importante explorar essas possibilidades para tornar o ensino mais significativo no Ensino Médio.

Este trabalho pretende demonstrar para os alunos e professores do Ensino Médio, mesmo que de forma introdutória, a importância de se estudar os Números Complexos. Para isso, será realizada a apresentação do conteúdo relacionando-o com outras áreas do conhecimento, explorando principalmente a aplicação dos números complexos na teoria de análise de circuitos elétricos, tratando esse assunto de forma que seja compreensível aos alunos do Ensino Médio.

A abordagem será feita a partir de um breve histórico dos Números Complexos, apresentando posteriormente seus principais conceitos. Será exposto também o conteúdo relacionado aos circuitos elétricos, já que esse assunto é estudado também no Ensino Médio, principalmente em escolas técnicas. Finalmente, será realizada a integração dos mesmos a fim de demonstrar, por meio da resolução de exercícios, algumas aplicações da teoria dos Números Complexos com ênfase na análise de Circuitos Elétricos.

2
Números Complexos

Neste capítulo, será apresentado um breve histórico sobre o surgimento dos Números Complexos assim como os principais conceitos relacionados a esse conteúdo.

2.1
Breve Histórico dos Números Complexos

A partir de um estudo sobre a história dos Números Complexos pode-se observar que muitos matemáticos negaram a existência desses números justamente por terem tido resistência a conceber esse novo conceito matemático. Isso demonstra que uma nova teoria pode demorar a ser compreendida e aceita.

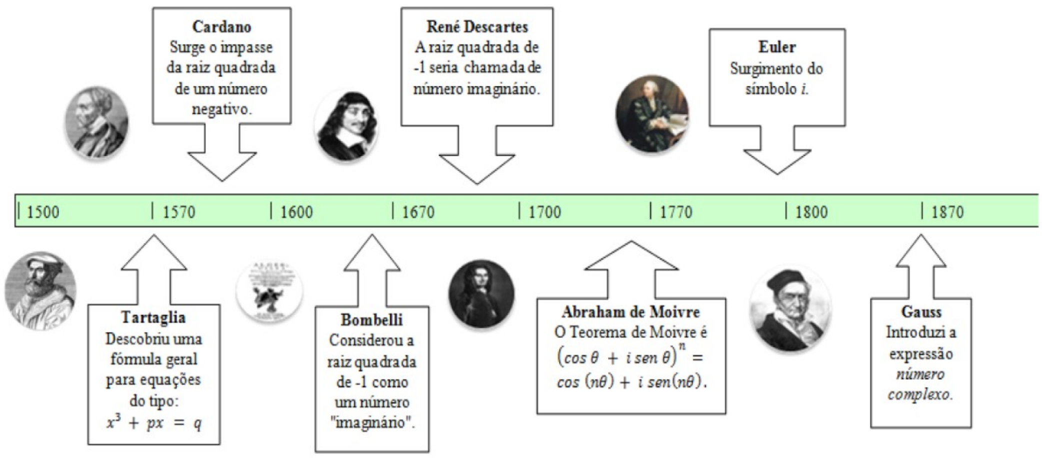


Figura 1: Trecho da linha do Tempo dos Matemáticos
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/505177283171121818/

De acordo com Dante (2010), o surgimento dos Números Complexos, ao contrário daquilo que muitos alunos acreditam, está associado à resolução de equações do 3° grau e não da ideia que geralmente é difundida sobre ter surgido para resolver equações do 2° grau com raízes quadradas de números negativos.

Até meados do século XV, os matemáticos, ao se depararem com números da forma $8 + \sqrt{-1}$, $6 - \sqrt{-1}$, ... , na resolução de problemas, consideravam esse tipo de solução sem significado e simplesmente diziam que a equação não podia ser resolvida.

Conforme citado em Iezzi (1998), o primeiro matemático a operar com números complexos em vez de rejeitá-los, simplesmente, como acontecia até então, foi Girolamo Cardano (1501-1576). Ele ao resolver o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, provou multiplicando os números $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$, raízes da equação $x^2+40=10x$, que estes valores eram os números que solucionavam essa questão. Caraça (1995) menciona que para os matemáticos embora fosse embaraçoso encontrar um número negativo no discriminante Delta, o caso era resolvido admitindo que a equação não tivesse raízes e, nesse caso, estariam sossegados, pois essa interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades da prática. Assim, foi em meio à disputa pela resolução de equações do terceiro grau, no início do século XVI, que se percebeu que os números reais não eram suficientes e surgiram as ideias iniciais da criação do conjunto dos Números Complexos.

De acordo com Lages (1987), por volta de 1515, o matemático italiano Scipione Del Ferro (1465-1526) encontrou uma forma de resolver as equações de terceiro grau expressas da forma $x^3+px+q=0$. Scipione, no entanto, faleceu antes de publicar sua descoberta. Tendo conhecimento do método de resolução, o discípulo de Dell Ferro, Antonio Maria Fiore, na expectativa de ganhar notoriedade, desafiou outro matemático italiano, Nicolo Fontana Tartaglia (1499-1557), a uma disputa matemática na qual cada um dos participantes deveria propor ao outro trinta problemas. Enquanto Tartaglia propôs questões variadas, todas as questões propostas por Fiore envolviam equações do tipo $x^3+px+q=0$. Tartaglia descobriu o método de resolução das equações deste tipo e se tornou vencedor do desafio proposto, pois, ao contrário de seu oponente, conseguiu resolver todas as questões propostas.

A informação da conquista de Tartaglia se propagou e chegou ao conhecimento de Cardano que, em 1539, o convenceu a revelar seu método de resolução de equações cúbicas jurando que não o publicaria antes que Tartaglia o fizesse. A regra foi apresentada em versos, mas sem a respectiva demonstração e consta na obra intitulada *Quesiti et inventioni diverse*, publicação comemorativa do IV centenário de morte de Tartaglia, tradução para o português apresentada por Milies (1994).

Cardano, ao descobrir que Tartaglia não havia sido o único a criar um método de resolver as equações cúbicas quando tomou conhecimento do trabalho de Scipione Del Ferro, em 1544, entendeu que estava desobrigado de manter seu juramento. Dessa forma, publicou a obra *Ars Magna*, em 1545, na qual se encontram os métodos de resolução de equações cúbicas, além de todo o trabalho produzido após o conhecimento da fórmula de Tartaglia. Apesar de conter referências de agradecimento a Tartaglia, tal publicação gerou uma polêmica infrutífera de mais de um ano entre eles. O fato é que a longa e retórica solução de $x^3 + mx = n$, que consta no *Ars magna* conforme citado em Iezzi (1998), é traduzida pela seguinte notação:

$$X = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{m^3}{27}) + (\frac{n^2}{4})} + (\frac{n}{2})} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{m^3}{27}) + (\frac{n^2}{4})} - (\frac{n}{2})}$$

Posteriormente, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1573), aluno de Cardano, aprofundou o trabalho de seu professor, especialmente em relação ao estudo das equações cúbicas irredutíveis, que levavam a raízes de números negativos. Assim sendo, entendeu que a forma como estava exposta à obra Ars Magna não era muita clara e, posteriormente, Bombelli publicou o livro *l'Algebra*, em 1572, descrevendo as ideias de Cardano de maneira didática, de modo que fosse possível estudá-las sem necessidade de outras referências.

Foi no livro *l'Algebra* que apareceu, inicialmente de forma explícita, a necessidade de introduzir a teoria dos Números Complexos e assim uma primeira apresentação desse conteúdo.

Estudando a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, Bombelli, aplicando a fórmula de resolução de equações de 3°grau, deparou-se com os valores $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$, e pode observar que tais números diferiam-se apenas por um sinal. Assim, ele optou por trabalhar com as raízes quadradas dos números negativos como sendo uma espécie de "novos números", achando essa ideia um tanto quanto louca. Conforme apresentado em Milies (1993), ele considerou que a raiz cúbica de $2+\sqrt{-121}$ poderia ser representada por uma expressão equivalente, ou seja, existe $a+\sqrt{-b}$, tal que $(a+\sqrt{-b})^3 = 2+\sqrt{-121}$. Dessa forma, ele considera que a raiz cúbica de $2-\sqrt{-121}$ é da forma $a-\sqrt{-b}$. Sabendo previamente que 4 era raiz da equação, necessariamente, $a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b} = 4$. Assim, considerando que se aplicam a esses números as propriedades usuais conhecidas até então, obtém-se: $a+a=4$, ou seja, $a=2$. Considerando novamente que $(a+\sqrt{-b})^3 = 2+\sqrt{-121}$, obtém-se que b = 1.

Historicamente, Bombelli foi o primeiro matemático a estruturar razoavelmente uma teoria para os números complexos, inclusive com uma notação específica, assim como a dar importância para esses números conforme os conhecemos hoje.

Considerando o trabalho desenvolvido por Bombelli, tornou-se clara a insuficiência dos Números Reais para a resolução das Equações Algébricas. No entanto, havia a necessidade de se formalizar as operações e propriedades dos números complexos, o que ocorreu mais de dois séculos depois por meio do trabalho desenvolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Euler, em 1749, demonstrou que se $(a+b\sqrt{-1})$ for raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então $(a-b\sqrt{-1})$ também será raiz dessa mesma equação. Ele também aprimorou a simbologia dos Números Complexos, em um trabalho divulgado em 1794, definindo $(\sqrt{-1})$ como sendo a unidade imaginária i, de maneira que $i^2=-1$, surgindo a base dos números imaginários. Dessa forma, o número $a+b\sqrt{-1}$ passou a ser representado por $a+bi$, possibilitando operações da mesma maneira que as realizadas com polinômios tais como:

$a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$; e

$(a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

Apesar de todo trabalho desenvolvido na conceituação da teoria dos Números Complexos, Euler ainda era reticente ao utilizar esses números. A aceitação plena ocorreria após ser possível representá-los geometricamente.

Foi somente em 1797, que o topógrafo norueguês Caspar Wessel (1745-1818) realizou o primeiro registro histórico de uma representação geométrica dos Números Complexos, por meio de um artigo científico à Academia Dinamarquesa de Ciências. A representação proposta consistia em um sistema de eixos orientados, assim como o sistema cartesiano ortogonal, onde um dos eixos representa números da forma $0 + bi$ (imaginários puros) e o outro eixo os números reais. Assim, se $a + bi$ é um número complexo e o ponto M de coordenadas (a,b), faz-se uma correspondência única ao número complexo $a + bi$ o ponto M. Pode-se estabelecer, assim, uma correspondência biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano.

O matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822), em 1806, criou uma representação semelhante à de Wessel para os números da forma $a + bi$ e suas operações. Observando que a multiplicação de 1 por $\boldsymbol{i}$ é igual à i e uma nova multiplicação por $\boldsymbol{i}$ é - 1, Argand pensou em representar $\boldsymbol{i}$ por uma operação que se comporta dessa maneira. Assim, pode-se representar $\boldsymbol{i}$ por uma rotação de 90° no sentido anti-horário. Ele também desenvolveu resultados para demonstrar teoremas da Álgebra, da Geometria e da Trigonometria.

Considerando que Wessel e Argand eram matemáticos pouco expressivos, seus trabalhos, apesar de importantes, não obtiveram notoriedade entre os matemáticos da época. Somente no final do século XVIII, quando o renomado matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) passou a considerar os Números Complexos e sua representação no plano imaginário, que esses números ganharam status, e os matemáticos passaram a se sentir mais à vontade ao trabalhar com eles.

Gauss conseguiu difundir de maneira bastante ostensiva a teoria dos Números Complexos por meio de sua grande obra, publicada em 1831, onde se refere “à verdadeira metafísica das quantidades imaginárias”. Foi também nessa época que Gauss inventou o termo “Números Complexos” que permanece até os dias de hoje. Apesar de Wessel e Argand terem escrito sobre a representação geométrica dos Números Complexos, o plano utilizado para representá-los tornou-se conhecido como Plano de Argand-Gauss, desprezando o trabalho de Wessel.

Considerando esse breve histórico apresentado a respeito dos Números Complexos, torna-se evidente que o estudo e desenvolvimento da teoria sobre esses números transcorreram ao longo de vários séculos e por diversos matemáticos. Além disso, pode-se observar que a representação algébrica dos Números Complexos não está desvinculada da representação geométrica, e esta última foi de vital importância no processo de difusão do conceito desses números.

O conhecimento do contexto histórico em que uma teoria é desenvolvida é relevante para conseguir responder questionamentos que venham a surgir no processo de ensino e aprendizagem. A criação dos Números Complexos se iniciou visando a busca de soluções das equações cúbicas, no entanto, é equivocado afirmar que tem um término, pois provavelmente há muitas outras aplicações a respeito da teoria desses números que, atualmente, além de serem encontradas em outras áreas de estudo como Física, Engenharia e na própria Matemática, não eram imaginadas pelos matemáticos na época de teorização.

2.2
O Corpo dos Números Complexos

Define-se o corpo dos Números Complexos como sendo o conjunto $\mathbb{C} = \{(x, y): x \in \mathbb{R}\, e\, y \in \mathbb{R}\}$, com as operações de adição e multiplicação definidas da seguinte maneira:

Se a = (x,y) e b = (v,w) pertencem a $\mathbb{C}$, então

a + b = (x + v, y + w) e a.b = (xv - yw, xw + yv)

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de *Números Complexos*. Denota-se o número complexo (0,0) simplesmente por 0 (zero) e o número complexo (1,0) simplesmente por 1.

Para cada z = (x,y) ∈ $\mathbb{C}$, definimos

- z = (- x,- y) e $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ se z ≠ 0. O número z^{-1} também é denotado por $(\frac{1}{z})$.

Proposição 1. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer z, w e t ∈ $\mathbb{C}$:

a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ (associativa da adição);

b) $z + w = w + z$ (comutativa da adição);

c) $z + 0 = z$ (elemento neutro);

d) $z + (-z) = 0$ (elemento simétrico);

e) $z.(w.t) = (z.w).t$ (associativa da multiplicação);

f) $z.w = w.z$ (comutativa da multiplicação);

g) $1.z = z$ (elemento unidade);

h) $z.z^{-1} = 1$ (elemento inverso);

Tendo definido as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{C}$, definimos as operações de *subtração e divisão,* da maneira usual: dados z e w ∈ $\mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w) \text{ e } \left(\frac{z}{w}\right) = z.w^{-1} \text{ se } w \neq 0$$

Além disso, a *potenciação* também é definida da maneira usual:

$$z^0 = 1, z^n = z...z \text{ (n-vezes)}, z^{-n} = (z^{-1})^n, \text{ se } z \neq 0 \ (n \geq 1).$$

Decorre da Proposição 1 que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para os números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações $\frac{z1}{w1}$ e $\frac{z2}{w2}$ de números complexos podem ser obtidos pelas fórmulas:

$$\frac{z1}{w1} + \frac{z2}{w2} = \frac{z1.w2+z2.w1}{w1.w2} \text{ e } \frac{z1}{w1}.\frac{z2}{w2} = \frac{z1.z2}{w1.w2}$$

Da mesma maneira que ocorre com os números reais.

Um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas na Proposição 1 é chamado *Corpo*.

Em um Corpo, a adição e a multiplicação são uniformes e bem definidas: a+b e a.b são elementos únicos e bem definidos. Além disso, um Corpo possui a característica de ser fechado pela soma, pela multiplicação, existir elemento neutro na soma e multiplicação, existência de elemento simétrico e inverso multiplicativo (exceto para o 0 "Zero"). Por essa razão é que chamamos $\mathbb{C}$ de corpo dos números complexos. Isso também explica porque $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ são chamados de *Corpos.*

2.2.1 Forma Algébrica de um Número Complexo

Considerando o Número Complexo $z = (x,y)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,y).(0,1) = x + yi.$$

Portanto, todo número complexo $z = (x,y)$ pode ser escrito na forma $z = x + yi$, a qual é denominada forma algébrica de um número complexo.

Nessa representação, o número real x é chamado de parte real de z e o número real y, de parte imaginária de z, denotados respectivamente, por Re(z) e Im(z).

Se a parte imaginária de z é nula, o número é real, considerando $z = (x,0) = x + 0.i = x$.

Se a parte real de z é nula e a parte imaginária de z é diferente de zero, o número é dito imaginário puro.

2.2.1.1 Conjugado de um Número Complexo

Considerando o Número Complexo $z = (x,y)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Chamamos de conjugado do Número Complexo z e representamos por $\bar{z}$, o número complexo $\bar{z} = (x, -y)$. Assim, $\bar{z}$ será o conjugado de z se, e somente se, $Re(z) = Re(\bar{z})$ e $Im(z) = -Im(\bar{z})$.

2.2.2 Representação geométrica de um Número Complexo

O número complexo $z = x + y.i$ é definido como sendo um par ordenado de números reais (x,y). A representação desse par ordenado pode ser realizada em um plano cartesiano por um único ponto. Dessa forma, a um ponto P, de coordenadas x e y, ou seja, P(x,y), pode-se associar um único número complexo $z = x + y.i$ e vice-versa.

O ponto P é denominado imagem de z, e o plano cartesiano no qual são representados os números complexos é denominado de Plano Complexo. No referido plano, o eixo das abscissas é chamado de eixo real (Re) e o eixo das ordenadas de eixo imaginário (Im).

A cada número complexo também é possível associar um vetor com uma das extremidades na origem a outra no ponto (x,y).

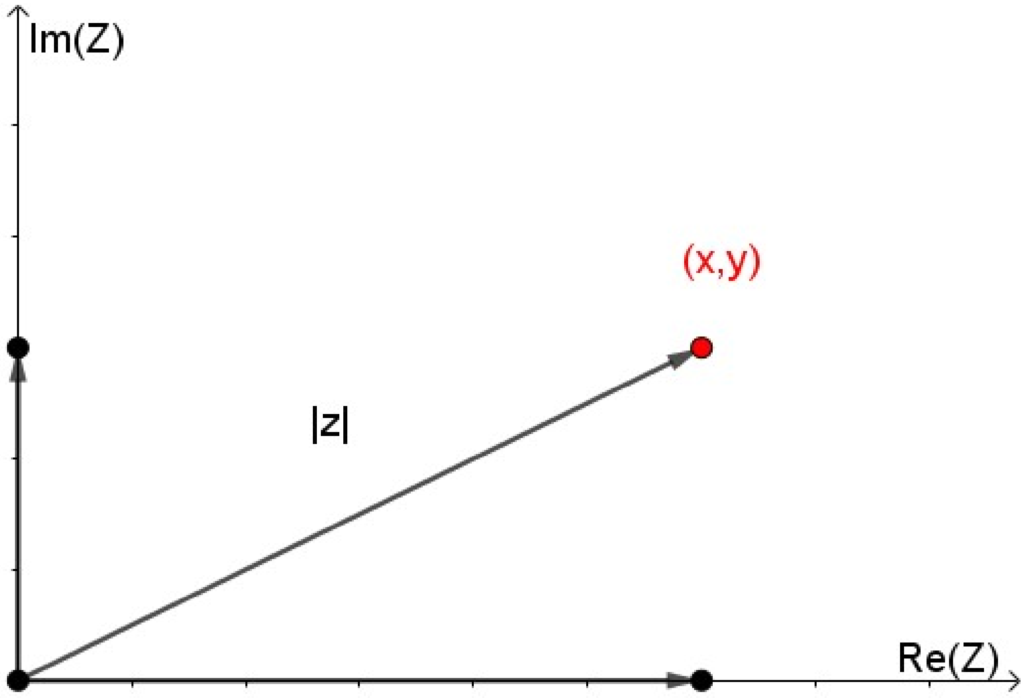


Figura 2: Representação Geométrica de um número complexo
Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.3
Forma Trigonométrica

Todo número complexo z pode ser identificado como um ponto P (x,y) no plano complexo ou como um vetor de origem na origem do plano e extremidade em P. Quando associa-se o complexo z a um ponto, este pode ser escrito sob a forma de coordenadas cartesianas. Da mesma forma, quando referenciamos um complexo com um vetor, podemos escrevê-lo sob a forma de coordenadas polares, conforme a seguir:

a) O módulo de z, representado por |z|, indica a distância do ponto P(x,y) à origem do plano;

b) O ângulo δ, $0 \leq \delta < 2.\pi$, é aquele que o vetor z forma com o eixo real positivo, medido no sentido anti-horário. O referido ângulo também é chamado argumento de z e é indicado por arg(z);

c) O valor do módulo de z, representado por $|z|$, é dado por:

$|z|^2 = x^2 + y^2$, ou seja, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z| \geq 0$.

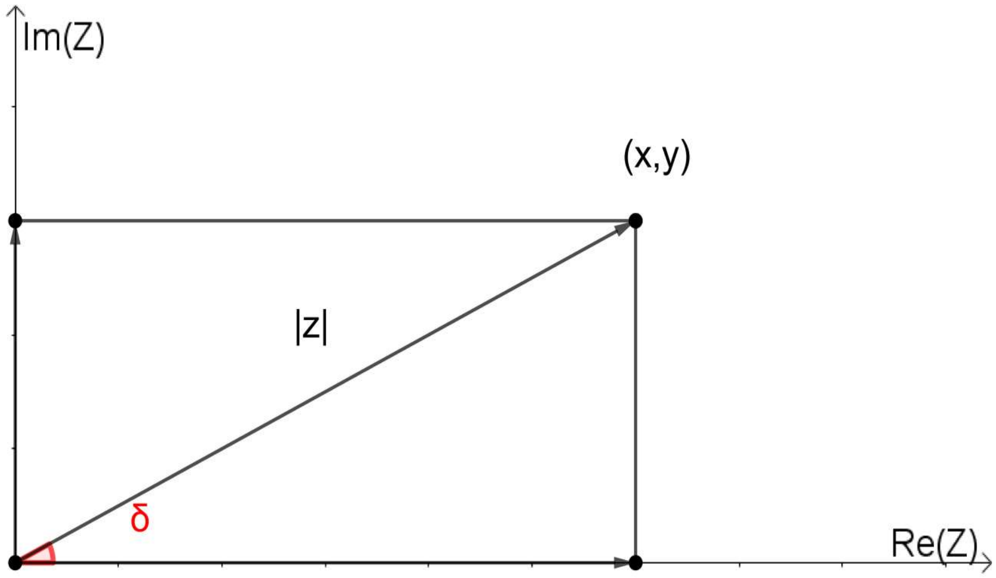


Figura 3: Representação da forma trigonométrica de um número complexo
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que : $\text{sen}\,\delta = \frac{y}{|z|}$ e $\cos\delta = \frac{x}{|z|}$ sendo $0 \leq \delta < 2.\pi$.

Dessa forma, teremos:

$x = |z|.\cos\delta$ e $y = |z|.\text{sen}\delta$.

Substituindo os valores encontrados em $z = x + y.i$, obtém-se:

$z = |z|.\cos\delta + |z|.\text{sen}\delta.i = |z|.(\cos\delta + i.\text{sen}\delta)$

Assim,

$z = |z|.(\cos\delta + i.\text{sen}\delta)$, que é chamada forma trigonométrica ou polar de z.

2.2.3.1
Multiplicação na forma Trigonométrica.

Consideremos dois números complexos z_1 e z_2, não nulos, de módulos $|z_1|$ e $|z_2|$ e argumentos δ1 e δ2, respectivamente.

$z_1 = |z_1|.(\cos\delta1 + i.\text{sen}\delta1)$ e $z_2 = |z_2|.(\cos\delta2 + i.\text{sen}\delta2)$

Então, a multiplicação entre esses dois complexos é dado por:

$z_1 . z_2 = [|z_1|.(\cos\delta1 + i.\text{sen}\delta1)].[| z_2|.(\cos\delta2 + i.\text{sen}\delta2)]$

$= |z_1|.|z_2|(\cos\delta1 + i.\text{sen}\delta1).(\cos\delta2 + i.\text{sen}\delta2)$

$= |z_1|.|z_2|(\cos\delta1.\cos\delta2 + i.\text{sen}\delta1.\cos\delta2 + i.\text{sen}\delta2.\cos\delta1 + i^2.\text{sen}\delta1.\ \text{sen}\delta2)$

$= |z_1|.|z_2|[(\cos\delta1.\cos\delta2 - \text{sen}\delta1.\text{sen}\delta2) + i.(\text{sen}\delta1.\cos\delta2 + \text{sen}\delta2.\ \cos\delta1.)]$

Dessa forma,

$= z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|[(\cos(\delta1 + \delta2) + i.\text{sen}(\delta1 + \delta2)]$

Assim sendo, podemos definir que o resultado do produto de números complexos na forma trigonométrica é dado pelo produto de seus módulos e o argumento é dado pela soma de seus argumentos.

2.2.3.2
Potenciação (1ª Lei de Moivre).

Consideremos o número complexo z, não nulo, de módulos |z| e argumento δ, e o número n inteiro.

$z = |z|.(\cos\delta + i.\text{sen}\delta)$

Então, a potenciação desse número complexo na forma trigonométrica pode ser entendida como um caso particular do produto, pois o produto de n números complexos z = z.z.z...z (n fatores) = z^n e será dado por:

$z^n = |z|^n.(\cos(n.\delta) + i.\text{sen}(n.\delta))$

Essa relação é conhecida como 1ª Lei de Moivre.

2.2.3.3
Radiciação (2ª Lei de Moivre).

Consideremos o número complexo z, não nulo, de módulos $|z|$ e argumento δ, e o número natural $n > 1$. Dizemos que $w \in \mathbb{C}$ é uma raiz n-ésima de z se $w^n = z$.

Se $z = 0$, obviamente, $w = 0$ será a única solução dessa equação. Assim sendo, o número zero possui apenas uma única raiz n-ésima que é o próprio zero.

Se $w \neq 0$, então, $z = |z|.(\cos\delta + i.\text{sen}\delta)$ é um número complexo não nulo.

O cálculo da raiz n-ésima de z consiste em determinar o número complexo w, tal que:

$w^n = z = |z|.(\cos\delta + i.\text{sen}\delta)$, escrevendo $w = |w|.(\cos\alpha + i.\text{sen}\alpha)$, teremos:

$|w|^n.(\cos\alpha + i.\text{sen}\alpha)^n = |z|.(\cos\delta + i.\text{sen}\delta)$

Aplicando-se a primeira Lei de Moivre, temos:

$|w|^n.(\cos(n.\alpha) + i.\text{sen}(n.\alpha)) = |z|.(\cos\delta + i.\text{sen}\delta)$

Os números complexos iguais possuem módulos iguais e argumentos congruentes, dessa forma:

$|w|^n = |z|$; $\cos(n.\alpha) = \cos\delta$; e $\text{sen}(n.\alpha) = \text{sen}\delta$ =>

$n.\alpha = \delta + 2.\pi.k \Rightarrow \alpha = \frac{\delta + 2.\pi.k}{n}$, $k \in Z$.

Assim sendo, temos:

$$w = \sqrt[n]{|z|}.[\cos(\frac{\delta+2.\pi.k}{n}) + i.\text{sen}(\frac{\delta+2.\pi.k}{n})],\ k\in Z.$$

Essa relação é conhecida como segunda Lei de Moivre.

2.2.4
Forma Exponencial

Uma das maiores contribuições no desenvolvimento dos números complexos realizada por Euler consiste na relação $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i.\text{sen}\alpha$. Tal expressão é conhecida como relação de Euler, na qual a constante e é o número de Euler cujo valor aproximado é 2,71828.

No caso particular de $\alpha = \pi$, temos que $e^{i\pi} = \cos\pi + i.\text{sen}\pi$, logo, $e^{i\pi} = -1$, que relaciona os valores 1, π, e e i em uma mesma equação.

Sabemos que $z = |z|.(\cos\alpha + i.\text{sen}\alpha)$, logo:
$z = |z|.e^{i\alpha}$, e essa é a forma exponencial do número complexo z.

Dessa forma, sejam os números complexos $z_1 = |z_1|.e^{i\alpha 1}$ e $z_2 = |z_2|.e^{i\alpha 2}$, na forma exponencial, podemos obter:

a) Produto: $z_1.z_2 = |z_1|.e^{i\alpha 1}.|z_2|.e^{i\alpha 2} = |z_1|.|z_2|.e^{i(\alpha 2+\alpha 1)}$
b) Quociente: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.e^{i(\alpha 1-\alpha 2)}$
c) Conjugado: $\bar{z} = |z|.e^{-i\alpha}$
d) Potência: $z^n = |z|^n.e^{in\alpha}$

2.2.5
Algumas aplicações dos Números Complexos

Apresentado o conteúdo a respeito da teoria dos números complexos necessário para o desenvolvimento do presente trabalho, vamos expor, a seguir, algumas aplicações dos Números Complexos a fim de demonstrar, de maneira prática, a utilidade dessa poderosa e importante ferramenta matemática.

2.2.5.1 Demonstrações de Identidades Trigonométricas

Utilizando a teoria dos números complexos será apresentada a demonstração de algumas identidades trigonométricas.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, e $z = \cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha$, considerando $z^2 = z.z$, teremos o produto de dois números complexos que, conforme a definição de multiplicação na forma trigonométrica, obteremos:

$$z^2 = z.z = \cos(\alpha+\alpha) + i.\ \mathrm{sen}(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha + i.\mathrm{sen}2\alpha. \qquad (1)$$

No entanto, $z^2 = z.z = (\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha).(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha)$, e aplicando-se a propriedade distributiva, obteremos:

$$z^2 = z.z = (\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) + i.(2.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha) \qquad (2)$$

Comparando-se (1) e (2) e considerando a igualdade de números complexos, podemos concluir que:

a) $\cos 2\alpha = (\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha)$

b) $\mathrm{sen}2\alpha = 2.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$

De maneira análoga, tomando-se os números complexos $z = \cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha$ e $w = \cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta$ e realizando a multiplicação de z.w, obteremos:

$$z.w = \cos(\alpha+\beta) + i.\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) \qquad (3)\text{ e}$$

$$z.w = (\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha).(\cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta) = (\cos\alpha.\cos\beta - \mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta) + i.(\mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}\beta.\cos\alpha) \qquad (4)$$

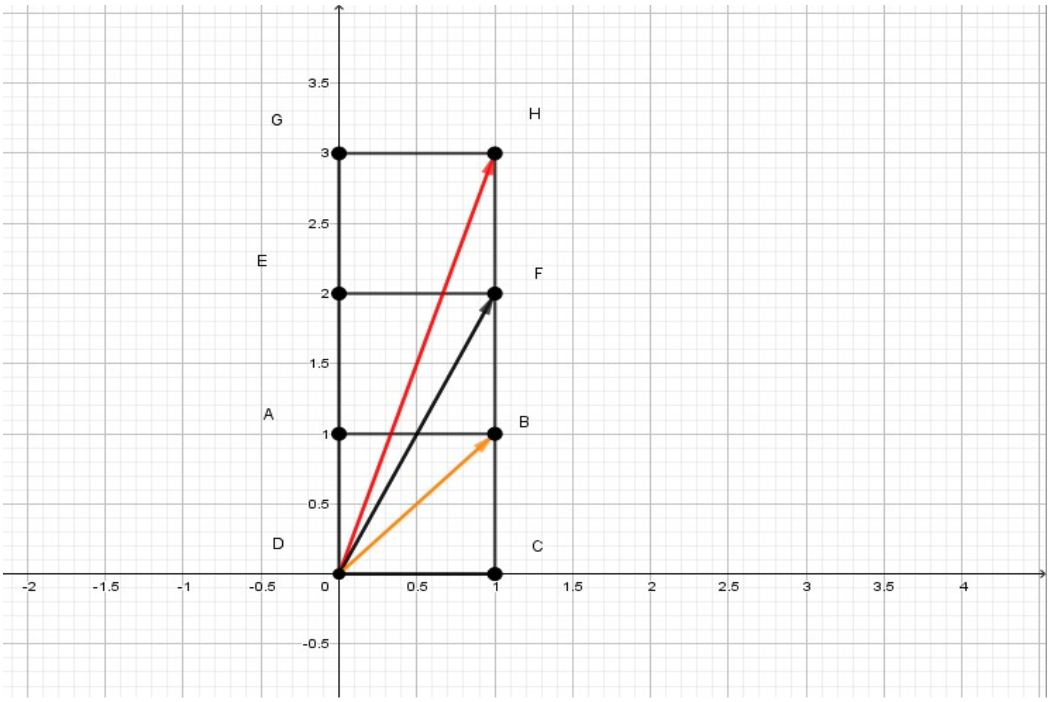
Comparando-se (3) e (4) e considerando a igualdade de números complexos, podemos concluir que:

c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta$

d) $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}\beta.\cos\alpha$

2.2.5.2
Aplicação na Geometria

Consideremos a figura abaixo onde os quadriláteros ABCD, EFCD e GHCD representam um quadrado 1x1, um retângulo 2x1 e um retângulo 3x1, respectivamente. Consideremos os ângulos α, β e θ como sendo os ângulos que as diagonais dos respectivos quadriláteros formam com o eixo horizontal DC, assim:



Fonte: Elaborado pelo autor.

α = ângulo BDC; β = ângulo FDC e θ = ângulo HDC.

Calcule $\alpha+\beta+\theta$.

A resolução do exercício de geometria proposto torna-se extremamente mais simples se utilizarmos números complexos para resolvê-lo. Dessa forma, consideremos os pontos B, F e H como sendo três números complexos distintos.

$$B = z = \sqrt{2}\,.\,(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha) = 1+ i$$
$$F = w = \sqrt{5}\,.\,(\cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta) = 1+ 2.i$$
$$H = y = \sqrt{10}\,.\,(\cos\theta + i.\mathrm{sen}\theta) = 1+ 3.i$$

Sabemos que, pela multiplicação na forma trigonométrica, z.w.y terá módulo igual ao produto dos módulos dos fatores e terá o argumento sendo igual à soma dos argumentos dos fatores:

$\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5}\ \sqrt{10}$.(cos(α + β + θ) + i.sen(α + β + θ)) (1)

Realizando a multiplicação na forma algébrica, teremos:

z.w.y = (1+i).(1+2i).(1+3i) = (1+2.i+i−2).(1+3i) = (-1+3.i).(1+3i) = (-9-1) = -10

z.w.y = - 10 (2)

Comparando-se (1) e (2) concluímos que (α + β + θ)= 180°.

3
Números Complexos e Circuitos Elétricos

Neste Capítulo serão estudados os principais conceitos a respeito das teorias relacionadas aos circuitos elétricos. Como premissa à aplicação dos números complexos na teoria dos circuitos elétricos é necessária a apresentação de algumas definições e conceitos.

3.1
Circuito Elétrico

Conforme descrito por Gualter (2001), um circuito elétrico é a ligação de elementos elétricos: resistores, indutores, capacitores, diodos, fontes de tensão, etc. formando um caminho fechado para que possa circular a corrente elétrica. Circuitos elétricos são conjuntos formados por um gerador elétrico, um condutor em circuito fechado e um elemento capaz de utilizar a energia produzida pelo gerador.

Os circuitos elétricos podem ser classificados de duas maneiras:

a) Circuitos de Corrente Contínua: possuem fontes de tensão e correntes contínuas (que não variam no decorrer do tempo);
b) Circuitos de Corrente Alternada: possuem fontes de tensão e correntes alternadas (que variam no decorrer do tempo).

Os circuitos elétricos podem ter seus elementos dispostos de duas maneiras distintas: em série e em paralelo.

a) Circuitos com elementos em série – recebe essa nomeação devido à maneira como os componentes são conectados. Nesse tipo de circuito, a mesma corrente tem que passar através de todos os elementos em série;
b) Circuitos com elementos em paralelo - a tensão é a mesma nos terminais de qualquer um dos elementos que estejam conectados em paralelo

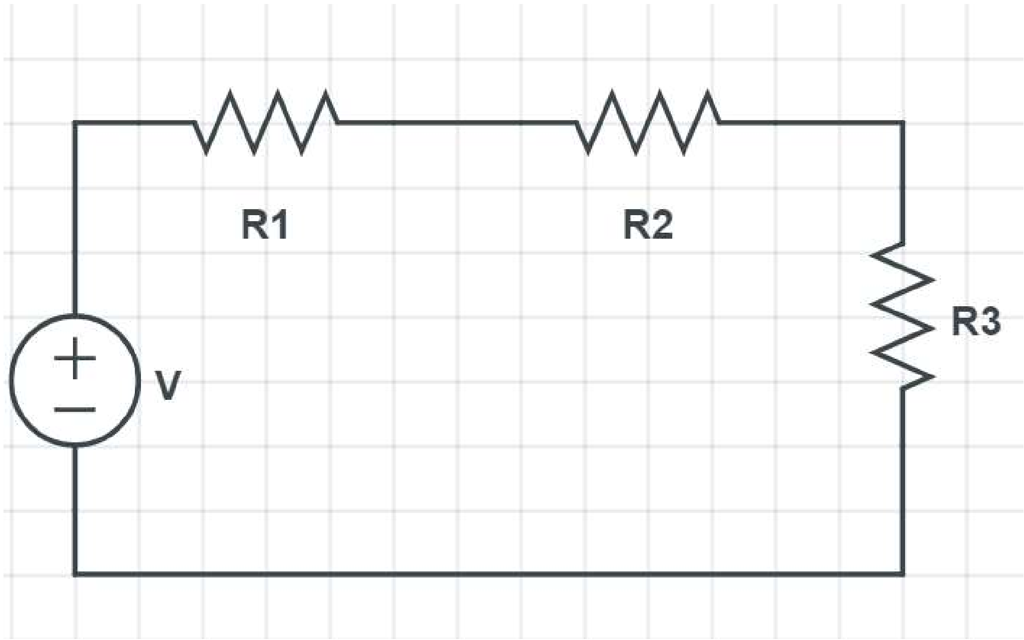


Figura 4: Circuito com elementos com associação em Série
Fonte: Elaborado pelo autor.

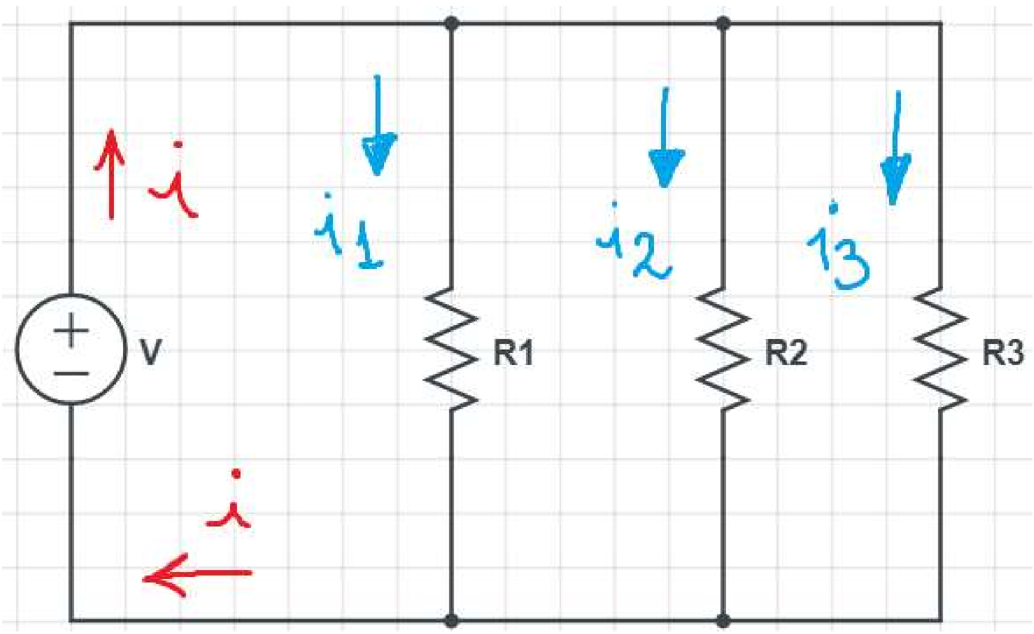


Figura 5: Circuito com elementos com associação em paralelo
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2
Carga e Corrente Elétrica

A carga elétrica é uma propriedade das partículas elementares que compõem o átomo. Lembrando que o átomo é formado por prótons, nêutrons e elétrons, sendo que os prótons localizam-se no núcleo do átomo e possuem carga elétrica positiva, por outro lado os elétrons ficam na eletrosfera, região ao redor do núcleo atômico, e têm carga elétrica negativa. Já os nêutrons não possuem carga elétrica.

A unidade de grandeza da carga elétrica no Sistema Internacional de Unidades é o Coulomb, representado pela letra C, em homenagem ao físico e engenheiro francês Charles Augustin Coulomb. A carga elétrica elementar é a menor quantidade de carga que pode ser detidas por uma dessas partículas. Seu valor é igual a $1{,}6.10^{-19}$ C e é atribuído à carga do elétron (com sinal negativo) e à do próton (com sinal positivo).

Existem situações em que as partículas eletricamente carregadas com cargas elétricas deixam de estar em equilíbrio eletrostático ficando em uma situação onde há deslocamento destas cargas (elétrons livres) para uma determinada direção e sentido, a este deslocamento é o que se denomina corrente elétrica. Dessa forma, a corrente elétrica é a taxa de deslocamento das cargas elétricas.

Matematicamente, tem-se:

$Q = i.\Delta t$, onde Q é a carga em C (coulombs), i é a corrente elétrica em A(Ampère) e Δt é a variação de tempo medida em s (segundos).

Convenciona-se o sentido da corrente elétrica como sendo aquele <u>contrário ao da movimentação dos elétrons</u>, denotando que o sinal da carga que se movimenta é positivo.

3.3
Corrente elétrica Contínua e Corrente elétrica alternada

A diferença entre corrente contínua e alternada é o sentido da corrente. Uma corrente elétrica nada mais é que um fluxo de elétrons passando por um condutor. Se os elétrons se movimentam num único sentido, essa corrente é chamada de contínua. Se eles mudam de direção e sentido constantemente, trata-se de uma corrente alternada. Na prática, a diferença entre elas está na capacidade de transmitir energia para locais distantes. A energia elétrica que é usada em residências e indústrias é produzida por alguma usina e precisa percorrer centenas de quilômetros até chegar às tomadas. Quando essa energia é transmitida por uma corrente alternada, ela não se dissipa muito ao longo do trajeto, ao contrário do que ocorre numa transmissão por corrente contínua onde o desperdício é muito grande. Isso porque a corrente alternada pode, facilmente, ficar com uma voltagem muito mais alta que a contínua, e quanto maior a voltagem maior o alcance da transmissão e a energia chega sem se dissipar muito durante o trajeto (perda de energia por dissipação é menor).

Se considerarmos um gráfico i x t (intensidade de corrente elétrica por tempo), pode classificar a corrente conforme a curva encontrada, ou seja:

a) Uma corrente é considerada contínua quando não altera seu sentido, ou seja, é sempre positiva ou sempre negativa;

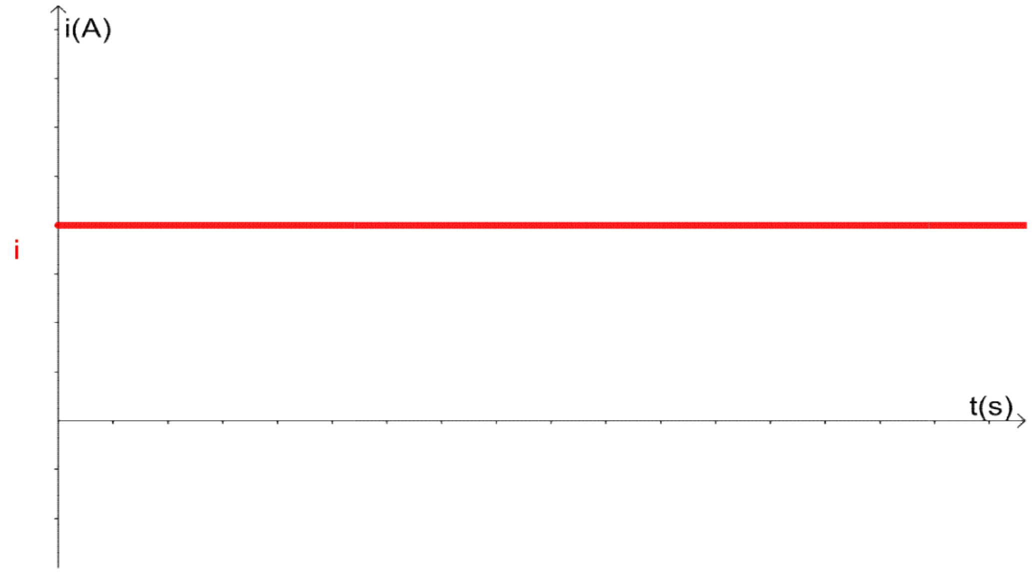


Figura 6: Representação gráfica da corrente contínua
Fonte: Elaborado pelo autor.

b) Uma corrente é denominada alternada quando é invertida periodicamente, ou seja, ora é positiva e ora é negativa, fazendo com que os elétrons executem um movimento de vai-e-vem.

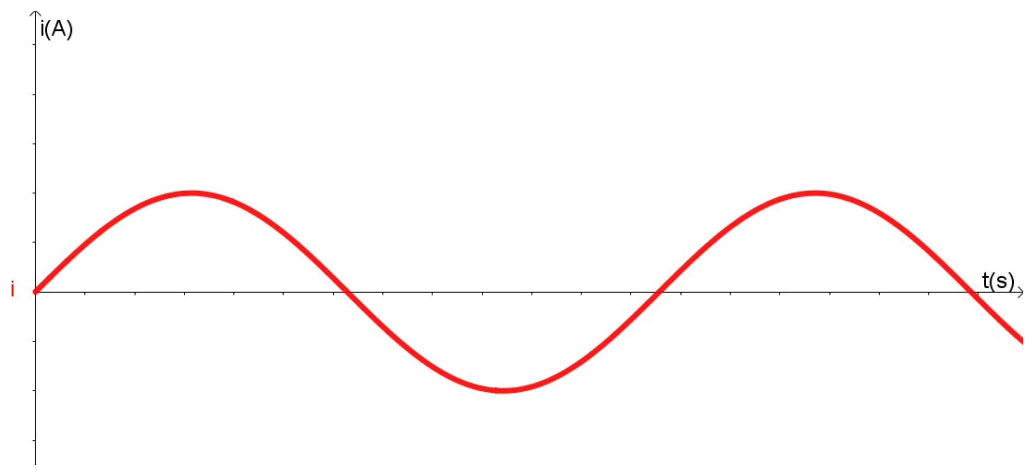


Figura 7: Representação gráfica da corrente alternada
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4
Diferença de potencial (ddp) ou tensão elétrica (V)

A diferença de potencial (d.d.p) também conhecida como tensão elétrica (V) é uma grandeza física que está relacionada ao conceito de corrente elétrica, dessa forma, inicialmente, associaremos a definição de corrente elétrica com o conceito da diferença de potencial.

Sendo a corrente elétrica o fluxo ordenado de partículas carregadas eletricamente em um condutor, o elemento causador da corrente é a existência de uma diferença de potencial entre dois pontos, também chamado de Tensão elétrica. O entendimento sobre o que é a d.d.p pode ser realizado da seguinte forma: todo corpo que se encontra eletrizado recebeu ou perdeu elétrons. Considerando que a carga de um elétron é representada por (-), o corpo inicialmente neutro que recebeu elétrons fica carregado negativamente, sendo denominado de íon negativo ou ânion. Por outro lado, o corpo inicialmente neutro que perde elétrons fica carregado positivamente, pois o mesmo tem falta de elétrons, denominado de íon positivo ou cátion. Dessa forma, esse desequilíbrio de cargas entre dois corpos revela que ambos têm um potencial elétrico diferente, ou seja, existe uma diferença de potencial elétrica.

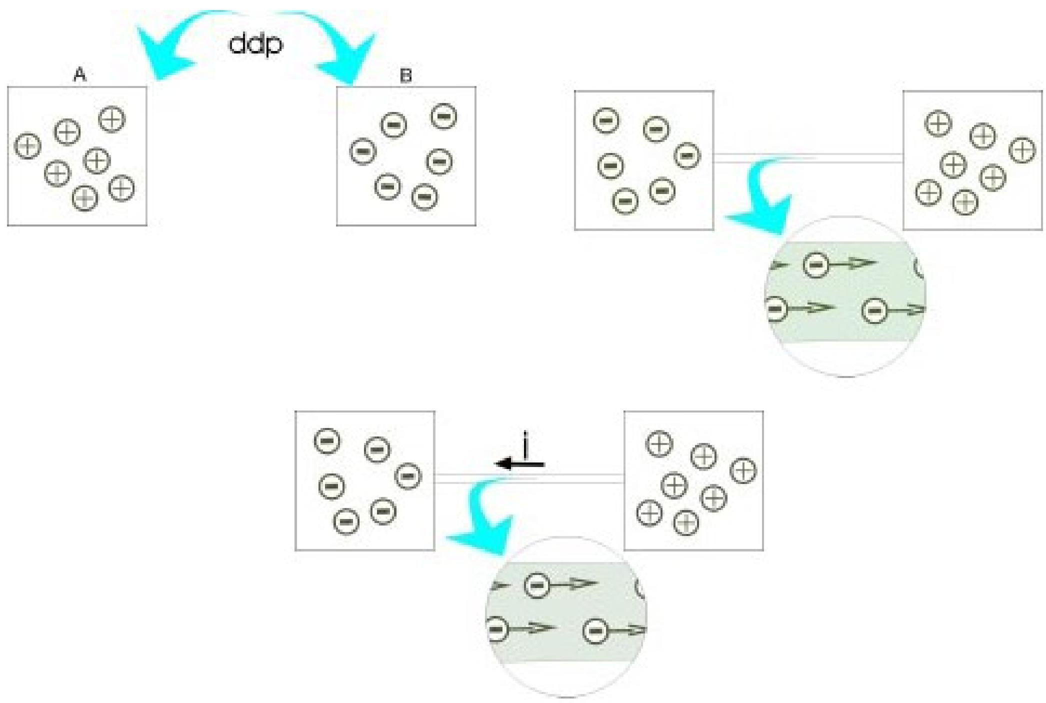


Figura 8: Representação ilustrada da d.d.p
Fonte: (SAAVEDRA FILHO, 2002, p.13).

O dispositivo que é capaz de manter uma diferença de potencial entre dois corpos, por meio de uma força eletromotriz (f.e.m), é denominado de gerador. A f.e.m é a propriedade de se produzir corrente elétrica. Podemos associar geradores comumente a uma simples pilha. A diferença de potencial é uma grandeza física expressa por V(volts) em homenagem ao físico italiano Alessandro Volta.

3.5
Lei de Ohm

A lei de Ohm, elaborada pelo físico e matemático alemão Georg Simon Ohm, faz relação entre as três grandezas elétricas principais e demonstra como elas estão intrinsecamente ligadas. Essa descoberta se deu por um experimento relativamente simples feito por Ohm, por suas descobertas seu nome foi dado a essa lei da eletricidade.

Em seu experimento, Ohm ligou uma fonte de tensão elétrica a um condutor, e percebeu que circulou uma corrente elétrica por esse circuito. Em seguida Georg variou essa tensão e percebeu uma corrente elétrica diferente. E desta forma para cada tensão aplicada uma corrente diferente era registrada em suas anotações. Posteriormente, analisando os resultados obtidos, ele percebeu que as tensões e as correntes se relacionam em uma razão constante. Para essa experiência, sempre que dividia a tensão pela respectiva corrente elétrica encontrada era obtido o mesmo resultado. A essa constante foi denominada de resistência elétrica.

$U = R.i$, onde U é a tensão medida em V (volts), i é a corrente elétrica em A (Ampère) e R é a resistência medida em Ω (Ohms).

A resistência (R) de um elemento é a capacidade que o mesmo possui em resistir ao fluxo corrente elétrica.

Quando em um circuito temos várias resistências ligadas entre si, é possível substituí-las por uma resistência, chamada de resistência equivalente, de forma a não alterar o comportamento do circuito. O cálculo do valor da resistência equivalente é realizado de duas maneiras distintas:

a) Resistências associadas em série: para o cálculo da Resistência equivalente, quando temos n resistências, o valor resultante será dado por:

$$Req = R1 + R2 + \cdots + Rn$$

b) Resistências associadas em paralelo: para o cálculo da Resistência Equivalente, quando temos n resistências, o valor resultante será dado por:

$$\frac{1}{Req} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \cdots + \frac{1}{Rn}$$

3.6
As Leis de Kirchhoff

Para a análise de circuitos, além de utilizar a lei de ohm, existem duas outras leis muito importantes e poderosas que foram introduzidas pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), em 1847, e que levam o seu nome. A lei dos nós e a lei das malhas são conhecidas como primeira e segunda lei de Kirchhoff, respectivamente.

As leis de Kirchhoff são estruturadas tomando como base três importantes conceitos:

1) Nó: ponto do circuito em que dois ou mais terminais estejam ligados, podendo ser terminais de quaisquer elementos do circuito;
2) Ramo: é o trecho entre dois nós, sendo que ao longo do ramo, a corrente elétrica é a mesma;
3) Malha: caminho fechado seguido sobre ramos

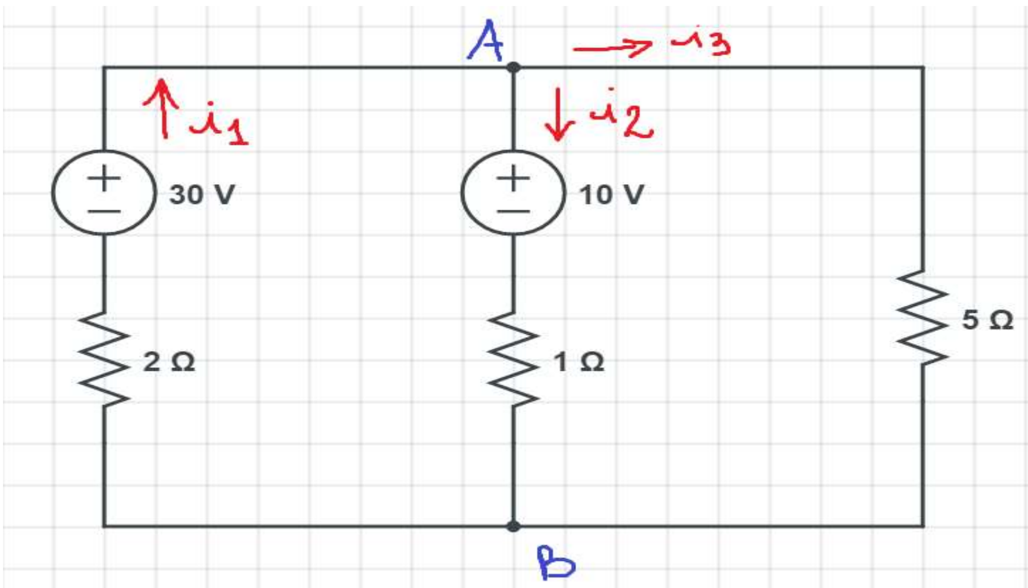


Figura 9: Representação de um circuito elétrico - Leis de Kirchhoff
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura acima o ponto A é um nó, pois liga os terminais da fonte de tensão de 30V, os terminais da fonte de tensão de 10V e a resistência de 5Ω. O ponto B também é um nó, pois liga os terminais das resistências de 5Ω, 1Ω, 2Ω. Do ponto A ao ponto B temos um ramo, os 3 caminhos do ponto A até o ponto B formam 3 ramos. A primeira malha é formada pelas fontes de tensão de 30V e 10V e resistências de 2Ω e 1Ω. A segunda malha é formada pela fonte de tensão de 10V e pelas resistências de 1Ω e 5 Ω.

De acordo com a primeira lei de Kirchhoff, em um circuito elétrico, qualquer que seja o nó, a soma das correntes que o deixam (aquelas cujas apontam para fora do nó) é igual a soma das correntes que chegam até ele. A Lei é uma consequência da conservação da carga total existente no circuito. Isto é uma confirmação de que não há acumulação de cargas nos nós.

Tomando-se o nó A, na figura 5, temos que: $i_1 = i_2 + i_3$. (1)

Da mesma maneira a segunda lei de Kirchhoff afirma que a soma algébrica das forças eletromotrizes (f.e.m) em qualquer malha é igual à soma algébrica das quedas de potencial ou dos produtos R.i contidos na malha. Ou seja, a soma algébrica das diferenças de potencial (d.d.p) em uma malha é nula (igual a zero).

Aplicando-se a segunda lei de Kirchhoff no circuito acima, teremos:

$-2.i_1 + 30V - 10V - 1.i_2 = 0$ (1)

$-10V - 1.i_2 + 5.i_3 = 0$ (2)

$i_1 = i_2 + i_3$ (3)

Resolvendo o sistema de equações (1), (2) e (3), obteremos que:

$i_1 = \frac{130}{17}$; $i_2 = \frac{80}{17}$ e $i_3 = \frac{50}{17}$.

Nesse caso a diferença de potencial entre os pontos A e B é de $\frac{250}{17}$ V.

3.7
Corrente alternada e onda senoidal

Uma maneira de se gerar corrente alternada é por meio de dispositivos denominados alternadores. Esses equipamentos geram uma corrente alternada cuja forma de onda é senoidal e, no Brasil, tem uma frequência de 60 hertz (60 Hz). Ou seja, em cada segundo, a tensão empurra os elétrons num determinado sentido 60 vezes e no sentido oposto outras 60 vezes. Temos então 120 inversões de polaridade por segundo. Dessa maneira, pode-se falar em tensão alternada para designar a tensão que se inverte constantemente e é capaz de causar a circulação de uma corrente alternada num circuito. É dita senoidal porque ela varia no tempo proporcionalmente ao seno de um ângulo descrito por um segmento que gira em torno de um ponto denominado origem, com uma velocidade uniforme.

Uma onda senoidal pode ser descrita por meio da seguinte expressão matemática:

$v(t) = V_P.sen(\omega t+\theta)$ ou $I(t) = I_P.sen(\omega t+\theta)$, onde V_P e I_P denotam os valores máximos de tensão e corrente, também chamados de tensão de pico e corrente de pico, respectivamente.

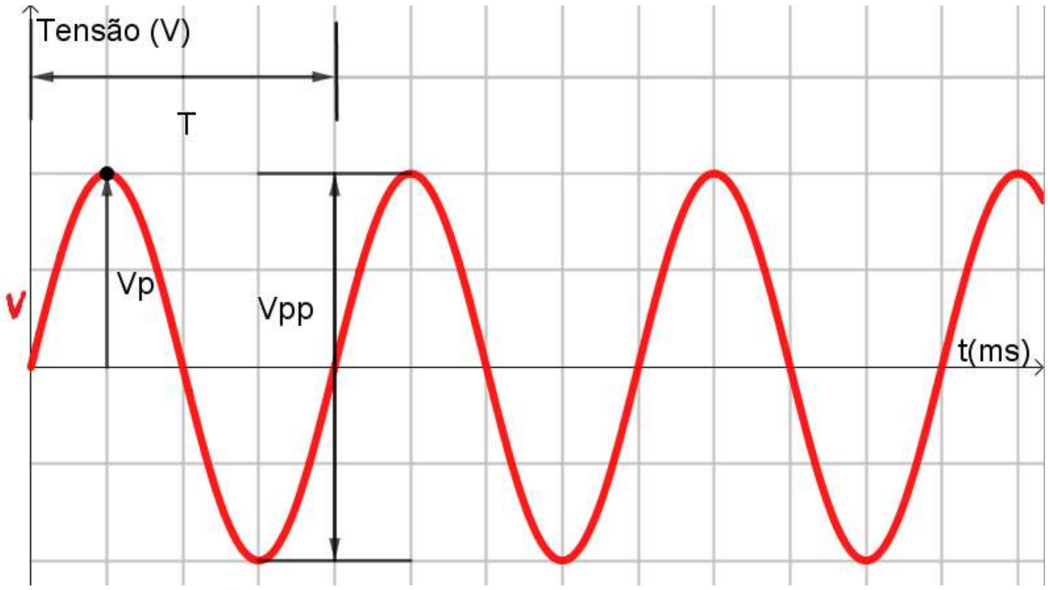


Figura 10: Gráfico de uma função senoidal
Fonte: Elaborado pelo autor.

Considera como sendo valor de pico a pico, Vpp, o valor correspondente àquele medido entre o pico superior (máximo valor do eixo na vertical) e o pico inferior (mínimo valor do eixo na vertical).

O período é definido como sendo o intervalo de tempo T para que ocorra a repetição do ciclo completo de uma onda periódica. Se considerarmos o círculo trigonométrico, o período será o tempo necessário para que uma onda complete uma volta, ou seja, $2.\pi$ radianos. A unidade utilizada para o período T é o segundo(s).

Por sua vez, considerando T o período de um ciclo, podemos definir a frequência como sendo o número de ciclos contidos em uma unidade de tempo, ou seja, em um segundo. O valor da frequência é inversamente proporcional ao valor do período.

$f = \frac{1}{T}$, a unidade de medida da frequência é o hertz (Hz).

Da mesma maneira, podemos definir a frequência angular ou velocidade de rotação ω, como sendo o ângulo percorrido por cada unidade de tempo:

$$\omega = \frac{\theta}{T} \Rightarrow \theta = \omega.T \text{ (rad/s)}.$$

A função seno, dentro do intervalo de $[0,2\pi]$, possui valores de máximo e mínimo nas fases $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, respectivamente, e os zeros da função ocorrem em 0, π e 2π. Na expressão matemática, $v(t) = V_P.sen(\omega t+\theta)$, θ representa o valor do deslocamento para direita ou esquerda, conforme o sinal de θ, e é chamado de ângulo fase.

3.8 Fasores e representação fasorial

Durante a análise de circuitos, estando esses em regime alternado ou contínuo, é invariavelmente necessário realizar somas algébricas de tensão e corrente. Nos casos em que o circuito esteja sob regime contínuo, essa tarefa é trivial. No entanto, para aqueles casos em que estiver em regime alternado essa tarefa torna-se um tanto quanto trabalhosa, pois seria necessário calcular a soma algébrica das funções senoidais ponto a ponto. É exatamente nesse ponto que chegamos ao clímax do desenvolvimento do presente trabalho, pois a partir desse ponto será demonstrado como a utilização da teoria dos Números Complexos pode facilitar de maneira formidável o cálculo por meio da utilização de fasores e impedâncias.

Segundo Sadiku (2003), a aplicação da teoria de números complexos no estudo de circuitos elétricos de corrente alternada foi apresentado inicialmente, em 1893, pelo alemão Charles Proteus Steinmetz (1865-1923) e, dessa forma, seu trabalho chamou a atenção da comunidade científica. Steinmetz trabalhou em inúmeras pesquisas nos Estados Unidos, principalmente na General Electric Company (GE). A GE havia sido fundada por Thomas Edison que a dirigiu entre 1876 a 1892. O período de 1892 a 1923 ficou conhecido como sendo a Era Steinmetz, por razões óbvias. A utilização de números complexos revolucionou a análise de circuitos sob regime alternado (AC) apesar de terem dito (naquela época) que ninguém, exceto Steinmetz, entendia o método.

Os fasores podem ser definidos como sendo vetores que giram em uma determinada velocidade em um círculo trigonométrico, dando origem às funções senoidais. Dessa forma, uma função senoidal pode ser representada por um fasor. Conforme descrito por Mussoi (2006), fasor é um vetor radial girante com freqüência ω, com módulo igual ao valor de pico V_P com ângulo de fase inicial θ, que representa uma senóide de iguais parâmetros.

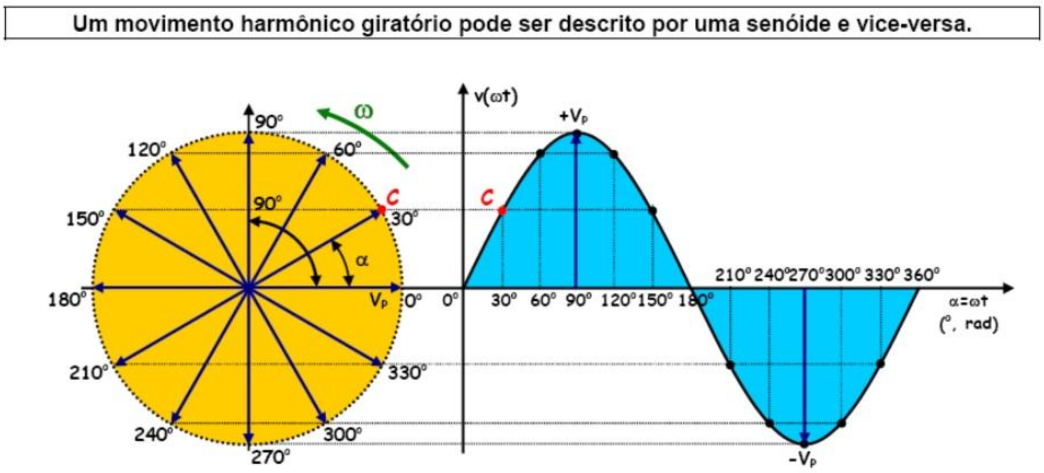


Figura 11: Representação do movimento harmônico e uma função senoidal
Fonte: (MUSSOI, 2006, p.56).

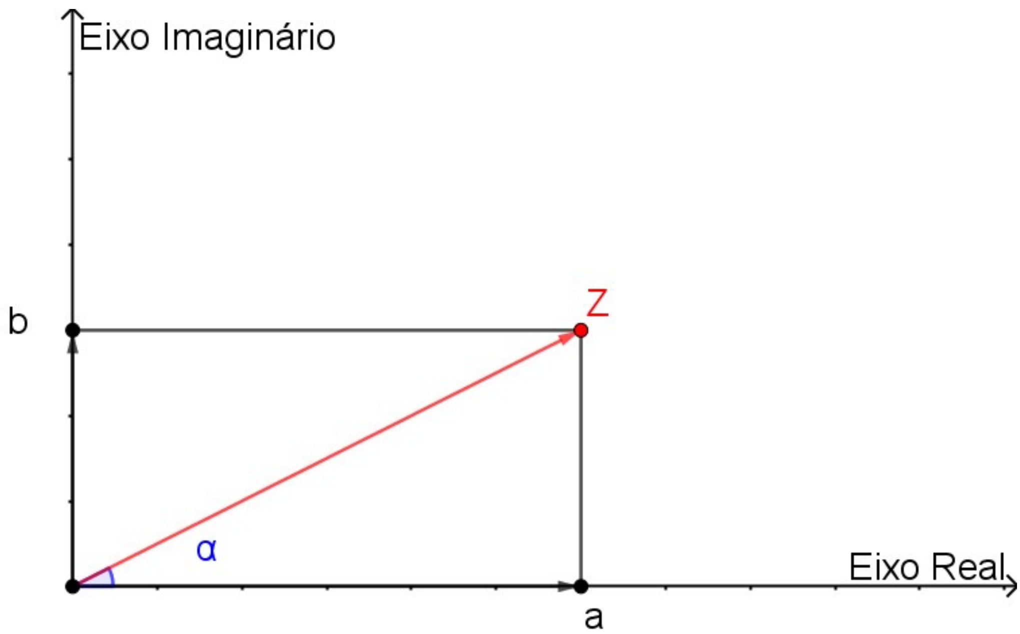


Figura 12: Representação de um fasor no Plano de Argand-Gauss
Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme estudado no capítulo anterior, a forma algébrica, polar e exponencial do fasor Z podem ser expressas por:

$Z = a + b.i$, $Z = |Z|.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha)$ e $Z = |Z|.e^{i\alpha}$, respectivamente.

Foi exatamente baseando-se na identidade de Euler que Steinmetz representou as tensões e correntes alternadas por meio de fasores.

$Z = |Z|.e^{i\alpha}$, logo, $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha$.

$\mathrm{Re}(e^{i\alpha}) = \cos\alpha$ e $\mathrm{Im}(e^{i\alpha}) = \mathrm{sen}\alpha$.

Fasor, a partir de uma definição mais restrita, é uma ferramenta gráfica e matemática que permitirá e facilitará as operações algébricas necessárias à aplicação dos métodos de cálculo e análise de circuitos elétricos que operem com sinais senoidais de tensão e corrente **de mesma frequência**.

Consideremos as expressões a seguir:

$I(\alpha) = I_P.\mathrm{sen}(\alpha+\theta)$ ou $I(t) = I_p.\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$ e,

$v(\alpha) = V_P.sen(\alpha+\theta)$ ou $v(t) = V_P.sen(\omega t+\theta)$, onde I_P e V_P são iguais aos valores de pico, também chamado de tensão de pico ou corrente de pico.

Essas expressões, na forma trigonométrica do domínio de tempo, não permitem métodos práticos para análise de circuitos elétricos, pois não são tão fáceis de serem algebricamente operadas, sendo necessário utilizar, por vezes, as chamadas identidades trigonométricas. Sabemos que numa malha de um circuito elétrico devemos somar tensões (ou correntes), e somar dois sinais de tensão senoidais e obter a forma de onda resultante realizando a soma ponto a ponto das curvas senoidais é uma solução pouca prática e trabalhosa de se fazer. Considerando as duas maneiras citadas anteriormente, concluímos que realizar cálculos e analisar circuitos nessas condições não seria uma tarefa simples.

No entanto, utilizando-se da ferramenta gráfica, conforme abaixo demonstrado no diagrama fasorial, as operações matemáticas entre tensões e correntes podem ser realizadas como operações entre números complexos. E, dessa forma, sem usar a função domínio do tempo (expressões trigonométricas) ou a representação gráfica da onda.

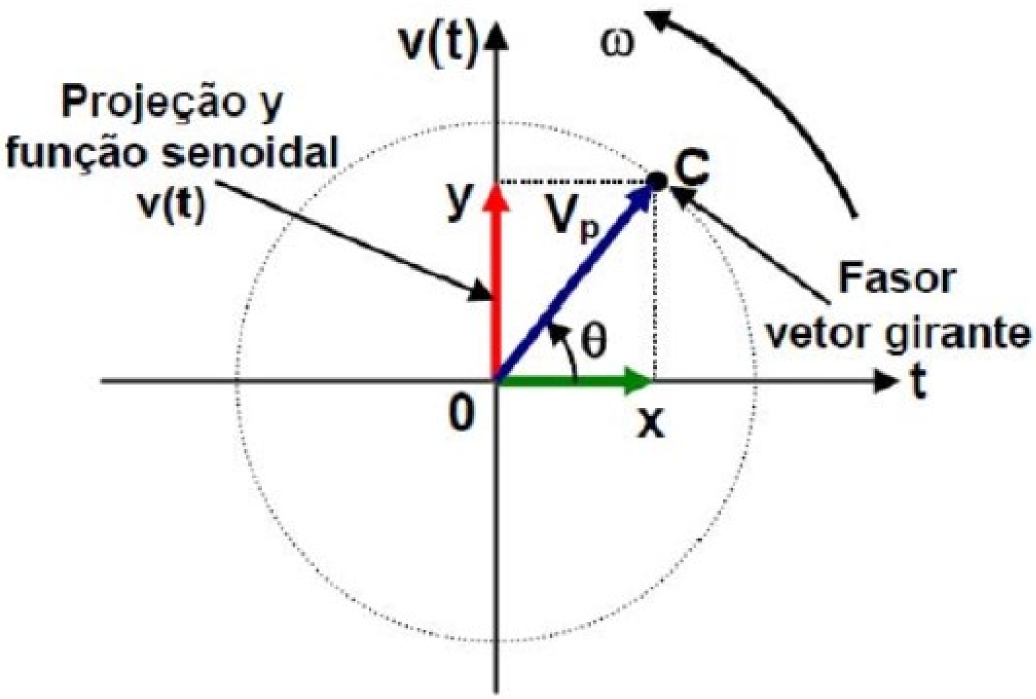


Figura 13: Diagrama fasorial e as projeções do fasor de um sinal senoidal
Fonte: (MUSSOI, 2006, p.58).

3.9
Capacitores

Os capacitores são um dos componentes mais utilizados em eletrônica. Sua composição é baseada em placas, chamadas de armaduras, que são condutoras, separadas por um material isolante, chamado de dielétrico. Tanto as armaduras como o dielétrico podem ter as mais variadas formas e montagens e podem ser feitos de diversos materiais, fazendo assim, com que tenhamos diversos tipos de capacitores.

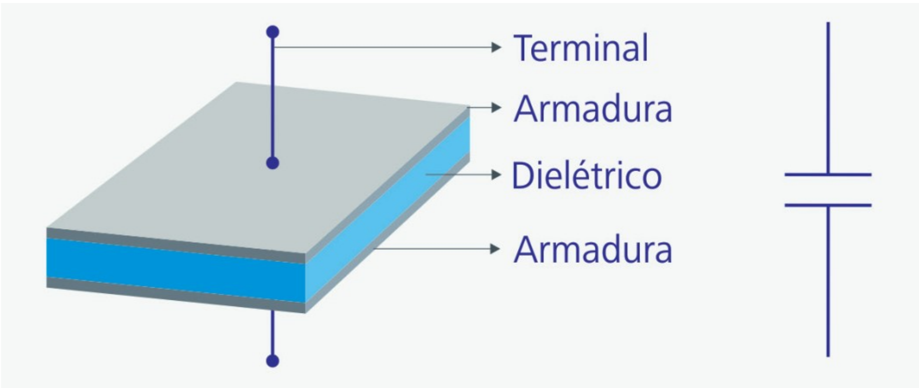


Figura 14: Esquema de um capacitor à esquerda e seu símbolo à direita
Fonte: (RÊGO; CARDOSO, 2015, p.55).

Rêgo & Cardoso (2015) citam como a principal função de um capacitor a de armazenar cargas elétricas quando ligado a uma fonte de tensão. A carga, dada em Coulombs, é determinada pela dimensão física do capacitor, da tensão aplicada, do tempo em que esta tensão foi aplicada sobre ele e do dielétrico empregado. A capacitância ou capacidade é a grandeza elétrica de um capacitor, que é determinada pela quantidade de energia elétrica que pode armazenar quando aplicada uma determinada tensão e pela quantidade de corrente alternada que atravessa o capacitor numa determinada frequência. A unidade de medida é dada em Farad (símbolo F), que é o valor equivalente a passagem de uma corrente de 1 ampère quando a tensão estiver variando na razão de 1 volt por segundo. Assim, [F] = [A]/([V]/[s]) = ([C]/[s])/([V]/[s]), ou seja, [F] = [C]/[V] coulomb por Volt.

Matematicamente, a definição acima pode ser expressa:

$i = C.\frac{dV}{dt}$, onde C é a capacitância medida em Coulomb por Volt, unidade denominada Farad (F).

3.9.1 Associação de capacitores

Os capacitores podem ser conectados entre si formando uma associação série, paralela ou mista (SENAI, 2000). Na prática, são encontradas a associação paralela e série, já as mistas são raramente utilizadas.

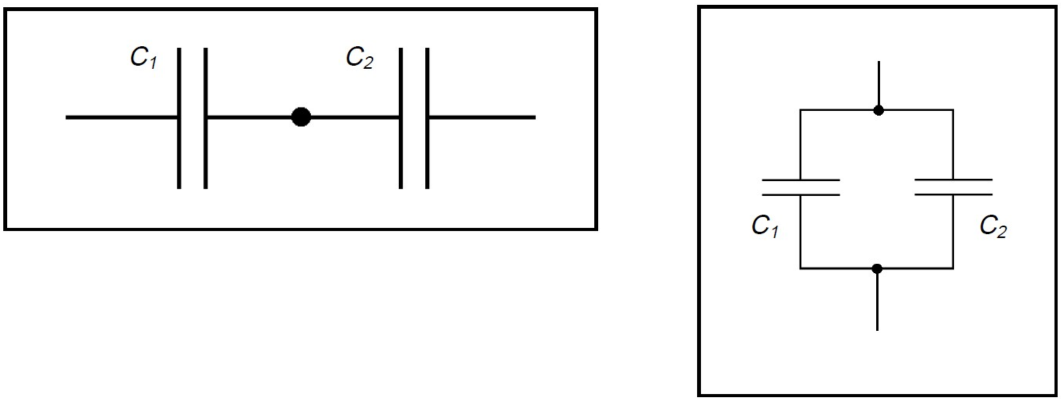


Figura 15: Esquema de associação de capacitores: em série à esquerda e em paralelo à direita
Fonte: (SENAI, 2000, p.117).

a) Capacitores associados em paralelo: essa associação tem por objetivo obter maiores valores de capacitância. Para o cálculo da capacitância total (CT) quando temos n capacitores, esta última é dada pela soma das capacitâncias individuais, representada matematicamente por:

$$\mathrm{CT} = \mathrm{C1} + \mathrm{C2} + \cdots + \mathrm{Cn}$$

b) Capacitores associadas em série: essa associação tem por objetivo obter menores valores de capacitância. O valor da capacitância total será menor do que o menor valor de capacitância dos capacitores envolvidos na associação. O cálculo da CT , quando temos n capacitores, pode ser representado matematicamente por:

$$\frac{1}{\mathrm{CT}} = \frac{1}{\mathrm{C1}} + \frac{1}{\mathrm{C2}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{Cn}}$$

3.10
Indutores

O indutor, conhecido também como solenóide ou bobina, é um dispositivo elétrico passivo, capaz de armazenar energia criada em um campo magnético formado por uma corrente alternada. Esse elemento é usado em circuitos elétricos para armazenar energia através de um campo magnético. Indutores são usados para impedir variações de corrente elétrica ou também para formar um transformador.

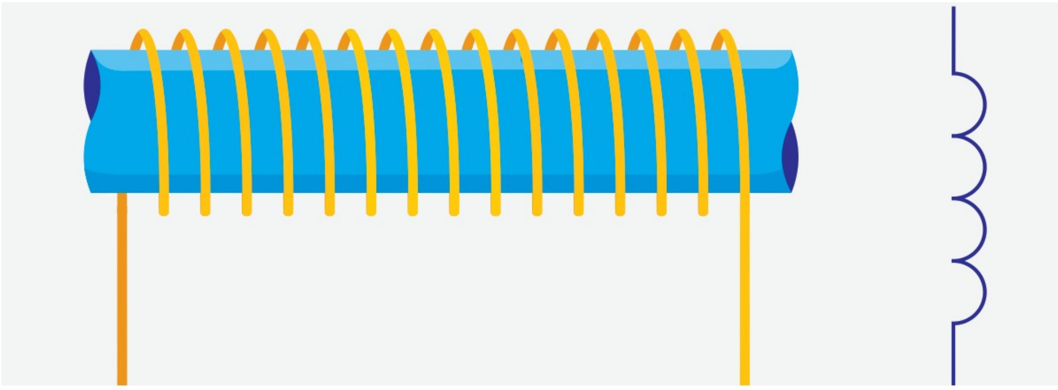


Figura 16: Esquema de um indutor à esquerda e seu símbolo à direita
Fonte: (RÊGO; CARDOSO, 2015, p.48).

A indução eletromagnética é um fenômeno gerado por um campo magnético e cria uma corrente elétrica. Em uma área delimitada por um determinado condutor, onde ocorre variação de fluxo de indução magnética, é criada entre seus terminais uma força eletromotriz (f.e.m) ou tensão. Estando os terminais do condutor ligados a um aparelho elétrico, isso irá gerar corrente elétrica, chamada corrente induzida.

A indutância é a grandeza física relacionada aos indutores, representada pela letra L e medida em Henry (H) (Nilsson & Riedel, 2009). A tensão nos terminais do indutor é proporcional a corrente que nele passa. De acordo com Saavedra filho (2002), a indutância é uma característica do Circuito. Sabe-se que quanto maior a indutância de um circuito, maior o fluxo auto-induzido por meio dela para um mesmo valor de corrente elétrica. Ou seja, a corrente elétrica que circula em um circuito gera um Campo eletromagnético ao redor dele, que por sua vez, influencia no comportamento do próprio circuito gerando, assim, o fenômeno da auto-indução. Por sua vez, indutores são quaisquer elementos no circuito que geram grande indutância, sendo as bobinas os exemplos mais significativos de indutores.

Matematicamente, a definição acima pode ser expressa:

$V = L.\frac{di}{dt}$, onde L é a indutância medida em weber por ampère, unidade denominada Henry (H).

3.10.1 Associação de indutores

Os indutores podem ser conectados entre si formando uma associação e estabelecendo vínculos entre as respectivas tensões, e, portanto, entre os respectivos fluxos e entre as respectivas correntes (Burian & Lyra, 2006). As associações podem ser em série, paralela ou ainda uma combinação destas duas (mista).

a) Indutores associados em série: essa associação ocorre quando ao associar os indutores uma mesma corrente percorre os indutores associados. Para o cálculo da indutância total (LT) quando temos n indutores, o valor é dado por:

$$LT = L1 + L2 + \cdots + Ln$$

b) Indutores associados em paralelo: ocorre quando todos os indutores envolvidos na associação ficam submetidos a uma mesma diferença de potencial. Para o cálculo da indutância total (LT) quando temos n indutores, o valor é dado por:

$$\frac{1}{LT} = \frac{1}{L1} + \frac{1}{L2} + \cdots + \frac{1}{Ln}$$

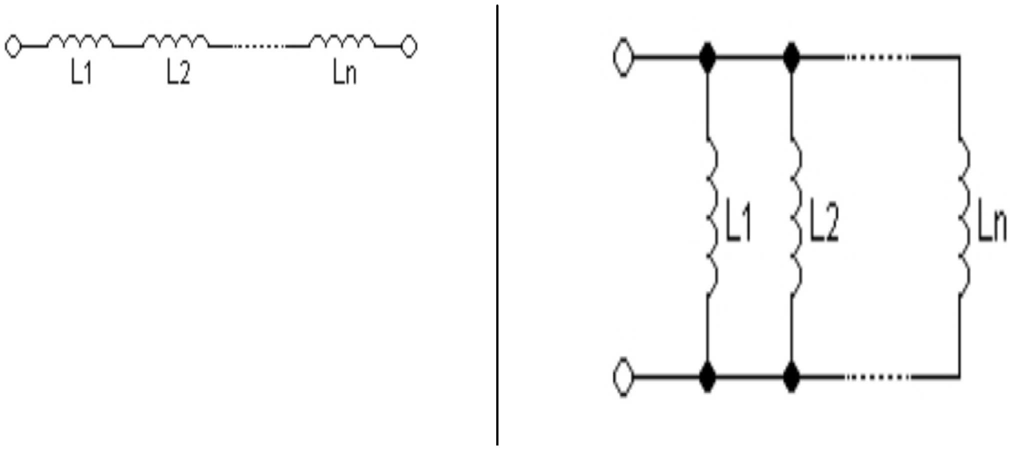


Figura 17: Esquema de associação de indutores: em série à esquerda e em paralelo à direita
Fonte: (http://teixeira.eti.br/py5zd/tecnica/1_2_resist_pot_capac.html).

De maneira geral, a associação entre indutores ocorre de maneira similar com a que acontece entre resistências elétricas.

3.11
Reatância

A partir das definições apresentadas nos itens 3.9 e 3.10, podemos concluir que os indutores e os capacitores têm em comum a capacidade de armazenar energia. Da mesma forma que os capacitores, os indutores se opõem a corrente alternada. Também em comparação aos capacitores, dizemos que quanto mais rápida a variação da corrente em um intervalo de tempo, maior será a tensão nos terminais do indutor ($V = L.\frac{di}{dt}$).

Indutores e capacitores são elementos reativos, dessa forma, ambos possuem uma propriedade chamada reatância, representada por (X).

O valor da oposição oferecida à passagem da corrente alternada pelo indutor (bobina) é denominado de reatância indutiva, expressa por:

$X_L = 2.\pi.f.L$, onde f é a freqüência da f.e.m e L é a indutância da bobina.

Considerando tratar-se de uma forma de resistência à corrente, a unidade de reatância também é o Ohm (Ω).

Da mesma maneira, o valor da oposição oferecida à passagem da corrente alternada pelo capacitor é denominado de reatância capacitiva, expressa por:

$X_c = \frac{1}{2.\pi.f\,C}$, onde f é a freqüência da f.e.m e C é a capacitância do capacitor. X_c também é medida em Ohm (Ω).

A base para compreensão dos circuitos em corrente alternada é o entendimento dos circuitos básicos. Assim sendo, é de fundamental importância compreender bem o funcionamento de cada circuito básico separadamente, considerando que os circuitos mais complexos são construídos a partir da soma dos efeitos de cada circuito básico.

3.11.1 Circuito puramente resistivo

Uma tensão senoidal, quando aplicada em um resistor, resultará na passagem de uma corrente elétrica através dele com a mesma forma de onda, mesma freqüência e mesma fase dessa tensão. Um resistor não provoca defasagem entre tensão e corrente, logo o ângulo de defasagem é nulo.

A principal característica de um circuito puramente resistivo é que a tensão e corrente estão em fase.

$$i(t) = i_P.\mathrm{sen}(\omega t) \text{ e } V(t) = V_P.\mathrm{sen}(\omega t).$$

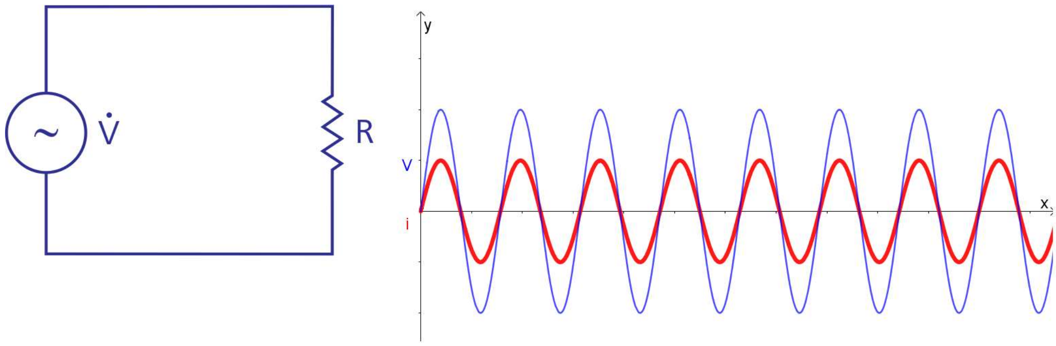


Figura 18: Esquema gráfico do circuito puramente resistivo.
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.11.2 Circuito puramente indutivo

O circuito puramente indutivo tem como principal característica a corrente defasado da tensão em 90° ($\frac{\pi}{2}$ radianos). O motivo do atraso é a f.e.m auto-induzida que surge no circuito, que causa o atraso na circulação inicial da corrente.

$i(t) = i_P.sen(\omega t\text{-}90°)$ e $V(t) = V_P.sen(\omega t)$.

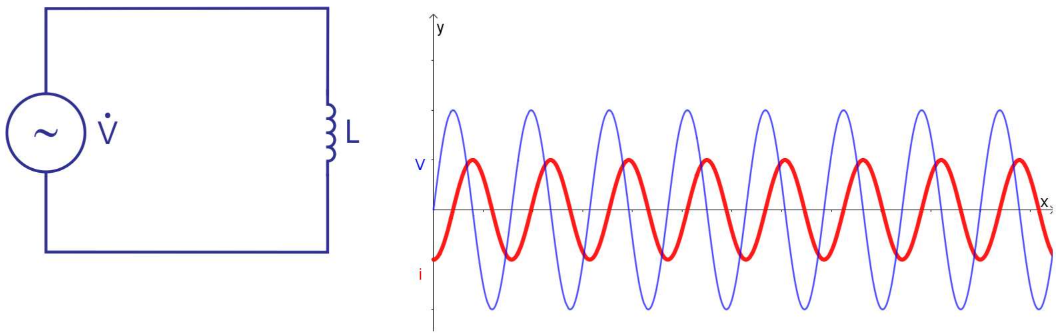


Figura 19: Esquema gráfico do circuito puramente indutivo.
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.11.3 Circuito puramente capacitivo

Uma fonte de tensão ligada a um circuito puramente capacitivo gera uma corrente que é, na verdade, o resultado do deslocamento de cargas para carregar o capacitor, ora com uma polaridade, ora com outra. Vale lembrar que a corrente não circula pelo capacitor, porque há um dielétrico entre as placas dele. Nesse processo de carga, surge uma tensão elétrica entre suas placas. Dessa forma, a tensão está defasada em 90° ($\frac{\pi}{2}$ radianos) em relação à corrente elétrica.

$i(t) = i_P.sen(\omega t+90°)$ e $v(t) = V_P.sen(\omega t)$.

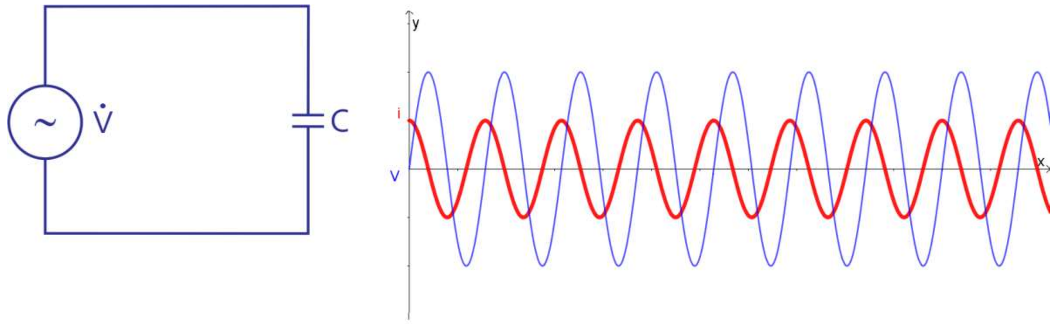


Figura 20: Esquema gráfico do circuito puramente capacitivo.
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.12 Impedância

Impedância elétrica ou simplesmente impedância (Z) é a medida da capacidade de um circuito de resistir ao fluxo de uma determinada corrente elétrica quando se aplica uma determinada tensão elétrica em seus terminais. A impedância representa o efeito de oposição à passagem de corrente que os elementos de um circuito oferecem (Rêgo & Cardoso, 2015).

A impedância determina a amplitude do sinal de corrente e sua defasagem em relação ao sinal de tensão. Seu valor é dado em função da resistência elétrica (R) e da reatância (X) do circuito. De maneira semelhante à lei de Ohm, a impedância é a relação entre o fasor de tensão pelo fasor da corrente:

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{I}}$$

A impedância equivalente de um circuito é representada nas formas complexas da seguinte maneira:

Forma Cartesiana:

$Z_{EQ} = \mathrm{R} + j.\mathrm{X}$

Forma Polar:

$Z_{EQ} = \mathrm{Z} \angle \varphi$

Ou seja:

$$Z_{EQ} = \sqrt{R^2 + X^2}\ \angle\, tg^{-1}\,\frac{X}{R} \qquad \text{sendo } R \neq 0.$$

Em que: R – componente resistiva (parte real), em Ω

X – componente reativa (parte imaginária), em Ω

Importante: **A impedância também é um número complexo, mas <u>não é um fasor.</u>**

3.12.1 Diagrama da Impedância

O diagrama da impedância é um auxiliar gráfico para se entender a impedância. Esse diagrama é construído sobre um plano complexo de impedâncias que possui um eixo horizontal (dos números reais) representando as resistências, arbitrado por R, e um eixo vertical (dos números imaginários) que representa as reatâncias, arbitrado por j.X, tendo os dois eixos a mesma escala (Mussoi, 2006).

Tratando os circuitos em corrente alternada no domínio fasorial, todos os elementos do circuito podem ser substituídos por uma única impedância equivalente Z_{EQ}, que de maneira geral pode ser representada por:

$$Z_{EQ} = |Z_{EQ}|\ \angle \pm \varphi = R \pm j.X$$

Considerando a relação $Z = \frac{V}{I}$, pode-se notar que o ângulo da impedância, chamado também de ângulo de defasagem ($\varphi = \theta_V - \theta_I$), representa a diferença entre as fases da tensão e da corrente.

Se $\varphi > 0$, circuito de teor indutivo.

Se $\varphi < 0$, circuito de teor capacitivo.

No caso de $\varphi = 0$, então, circuito de teor resistivo.

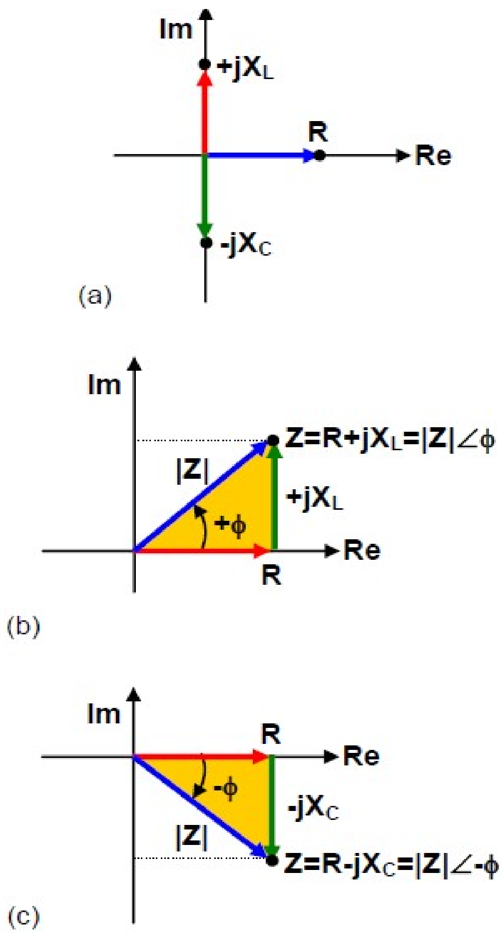


Figura 21: Diagrama de impedância.
Fonte: (MUSSOI, 2006, p.102).

Um circuito é denominado puramente resistivo quando composto apenas por resistores ou um circuito RLC (composto por resistores, indutores e capacitores) onde a reatância capacitiva e a reatância indutiva se anulam, ou seja, são iguais, $|X_L| = |X_c|$. A tensão aplicada e a corrente, em um circuito puramente resistivo, estarão em fase, isto ocorre por não existir ou ser anulada a ação reatância capacitiva e indutiva.

O circuito é considerado capacitivo quando a tensão está atrasada em relação à corrente. Em um circuito RLC isso ocorre quando a reatância capacitiva é maior que a reatância indutiva. Em um circuito onde a reatância indutiva é zero temos que a tensão está 90° atrasada em relação à corrente. Quando essa situação ocorre temos um circuito puramente capacitivo. A defasagem entre a tensão e a corrente é expressa por:

$\mathrm{Cos}\theta = \frac{R}{Z}$, onde R é a resistência e Z a impedância.

O circuito pode ser considerado indutivo quando a corrente está atrasada em relação à tensão. Em um circuito RLC isso ocorre quando a reatância indutiva é maior que a reatância capacitiva. Em um circuito no qual não há a ação da reatância capacitiva temos que a tensão está 90° adiantada em relação à corrente. Nesse caso, temos um circuito puramente indutivo. É possível encontrar a defasagem da mesma forma que procedemos em um circuito capacitivo.

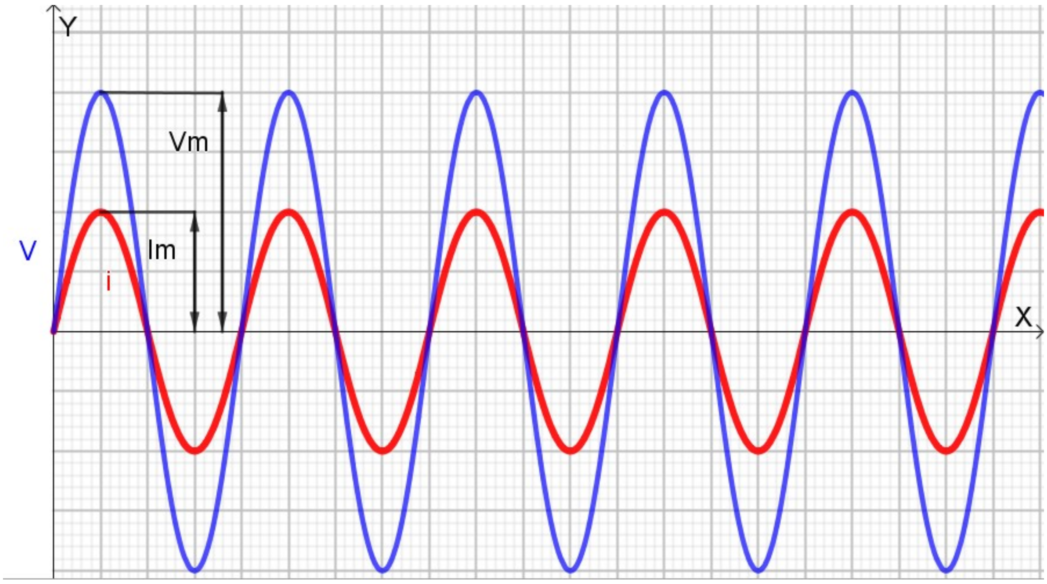


Figura 22: Representação gráfica do circuito puramente resistivo.
Fonte: Elaborado pelo autor.

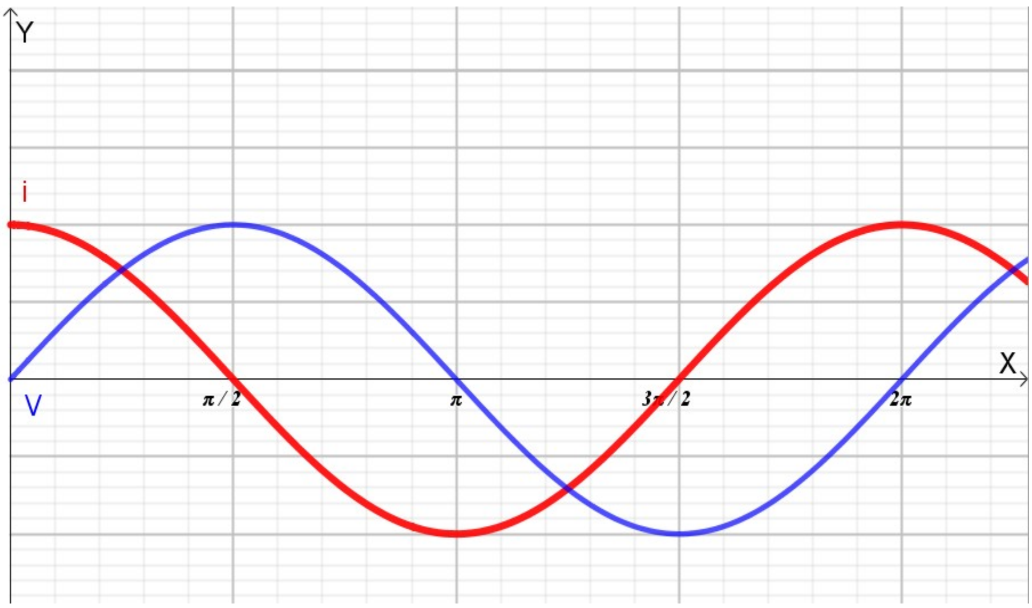


Figura 23: Representação gráfica do circuito puramente capacitivo.
Fonte: Elaborado pelo autor.

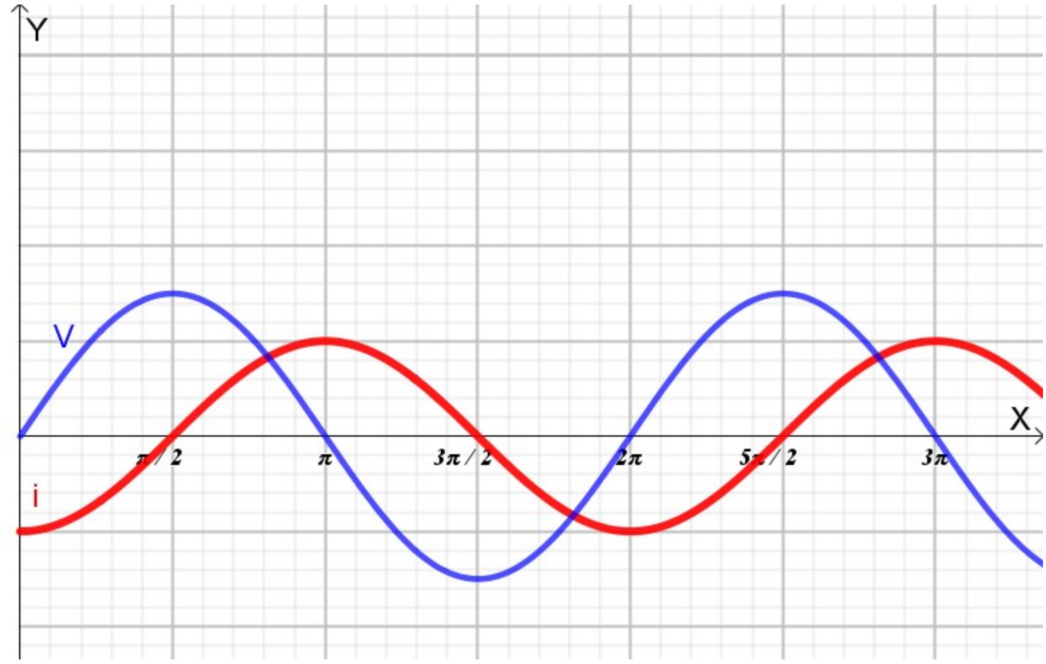


Figura 24: Representação gráfica do circuito puramente indutivo.
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.12.2 Associação de Impedâncias

Considerando que a impedância é a medida da oposição de um circuito à passagem de corrente alternada, as impedâncias se relacionam com os fasores de corrente e tensão através da lei de ohm, da mesma maneira que as resistências se relacionam com as correntes e tensões em corrente contínua. Portanto, as impedâncias podem ser associadas da mesma forma que as resistências.

a) Impedâncias associadas em série: para o cálculo da impedância equivalente quando temos n impedâncias, o valor será dado por:

$$Zeq = Z1 + Z2 + \cdots + Zn$$

b) Impedâncias associadas em paralelo: para o cálculo da impedância equivalente quando temos n impedâncias, o valor será dado por:

$$\frac{1}{Zeq} = \frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2} + \cdots + \frac{1}{Zn}$$

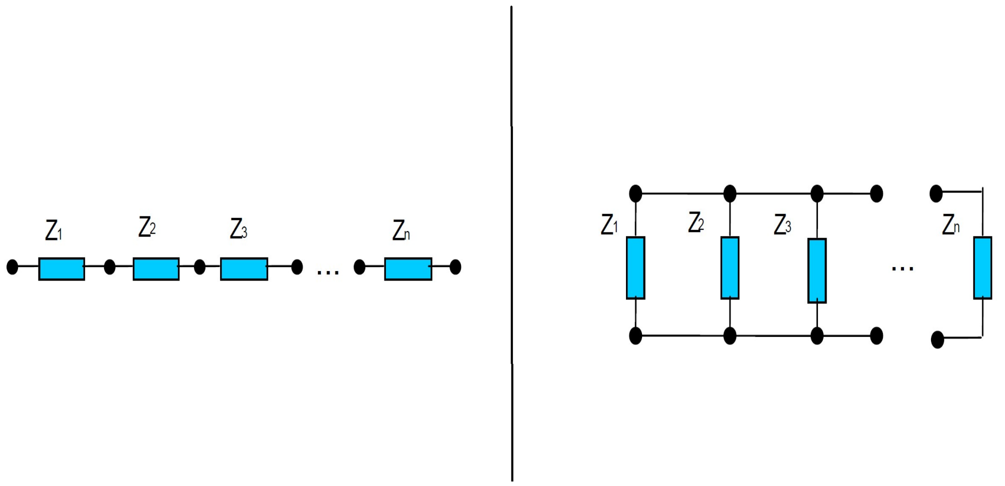
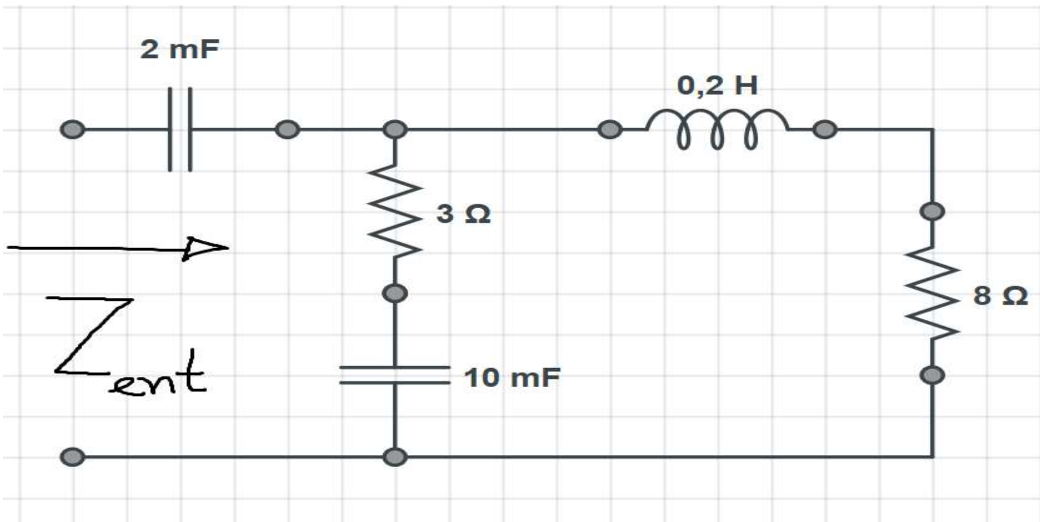


Figura 25: Esquema de associação de impedâncias: em série à esquerda e em paralelo à direita
Fonte: (MUSSOI, 2006, p.105).

4
Exemplos práticos da aplicação dos Números Complexos na análise de Circuitos Elétricos

Após terem sido apresentados os principais conceitos relacionados aos Números Complexos e, da mesma forma, os que estão relacionados aos circuitos elétricos, serão propostas duas atividades onde o método fasorial será utilizado para análise de circuitos elétricos. Conforme visto anteriormente, fasores são vetores que giram a uma determinada velocidade em um círculo trigonométrico. Nas resoluções j é um operador que varia de 0° a 360°(em ângulos de 90°), ou seja, 0 a 2π radianos.

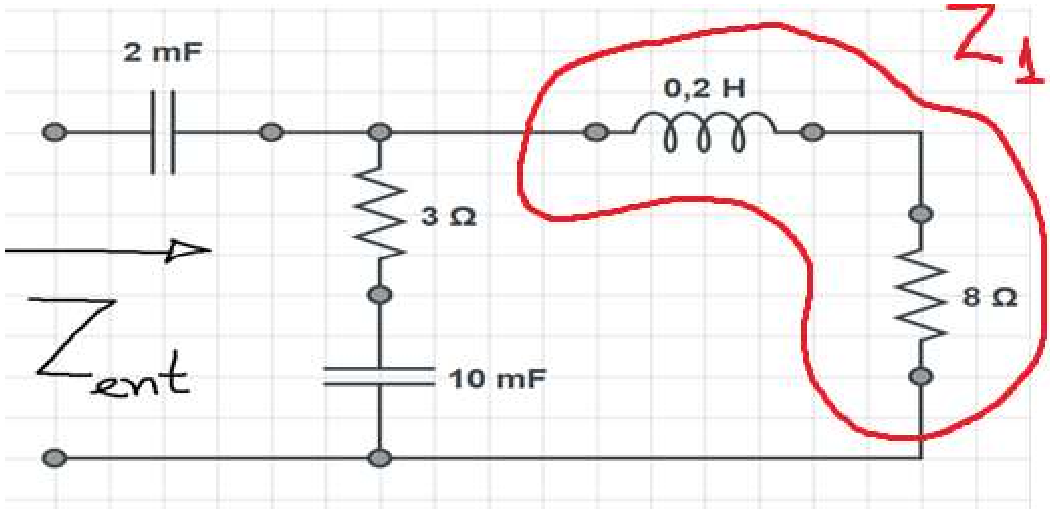
Atividade 1: Determine a impedância de entrada do circuito abaixo. Suponha que o circuito opere com $\omega = 50 \text{ rad/s}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Resolução:

I) - A impedância complexa Z_1 (que abrange o ramo do circuito onde estão o indutor de 0,2 H e a resistência de 8Ω) - significa 8Ω de resistência elétrica e X_L de reatância indutiva.

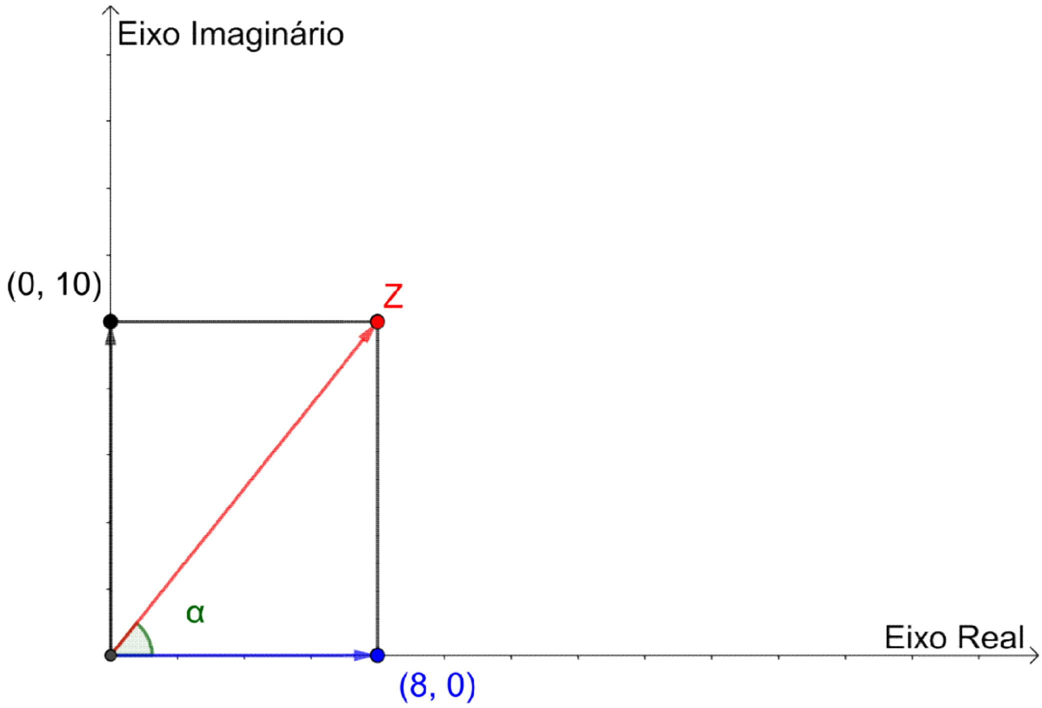


Z_1 = R1 + j. XL e XL = 2.π.f.L = (ω) .L, porém sabe-se pelo enunciado que ω= 50 rad/s e L = 0,2 H, logo:

$Z_1 = 8 + j.(50).(0{,}2)$

$Z_1 = 8 + j.10$

Constrói-se o diagrama da impedância Z_1, conforme abaixo:

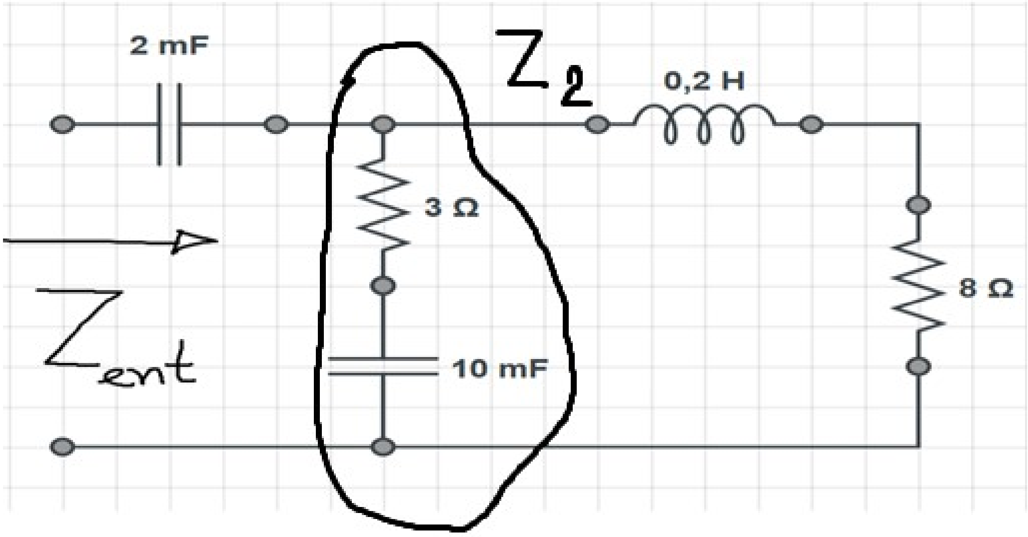


Analisando o diagrama da impedância Z_1, obtém-se que:

$Z_1 = \sqrt{8^2 + 10^2} \angle \mathrm{tg}^{-1}\frac{10}{8}$

$Z_1 = 8 + j.10$ (forma cartesiana) ou ainda 12,81∠ 51,34° (forma polar)

II) - A impedância complexa Z_2 (que abrange o ramo do circuito onde estão o capacitor de 10mF e a resistência de 3Ω) - significa 3Ω de resistência elétrica e X_{C1} de reatância capacitiva.

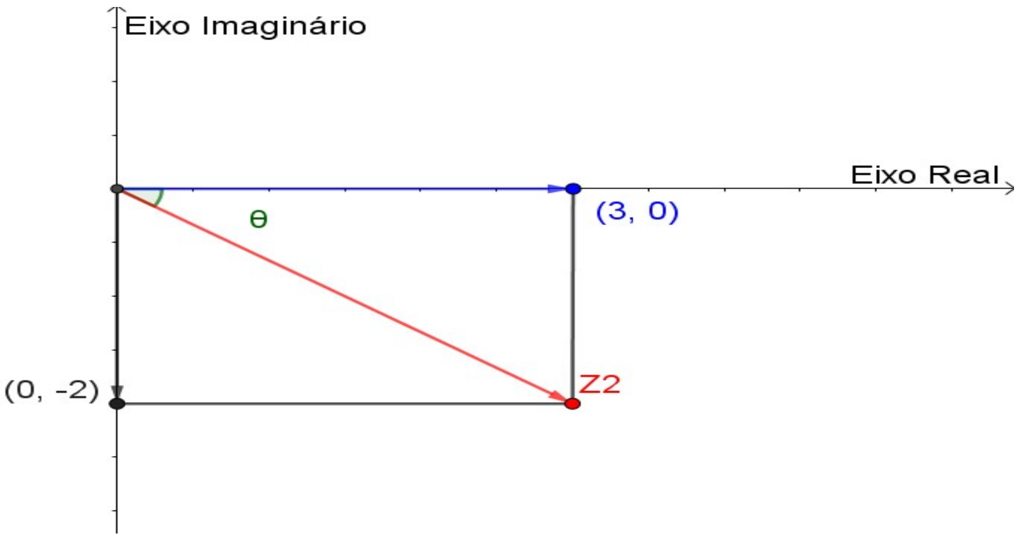


$Z_2 = R_2 - j.\,X_{C1}$ e $X_{C1} = \frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{1}{(\omega).C}$, porém sabe-se pelo enunciado que $\omega = 50\ \mathrm{rad/s}$ e $C_1 = 10\mathrm{mF} = 0{,}01\mathrm{F}$, logo:

$Z_2 = 3 - j.1/[(50).(0{,}01)]$

$Z_2 = 3 - j.2$

Constrói-se o diagrama da impedância Z_2, conforme abaixo:



Analisando o diagrama da impedância Z_2, obtém-se que:

$Z_2 = \sqrt{3^2 + 2^2}\ \angle\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{(-2)}{3}$

$Z_2 = 3 - j.2$ (forma cartesiana) ou ainda $3{,}61\angle -33{,}69°$ (forma polar)

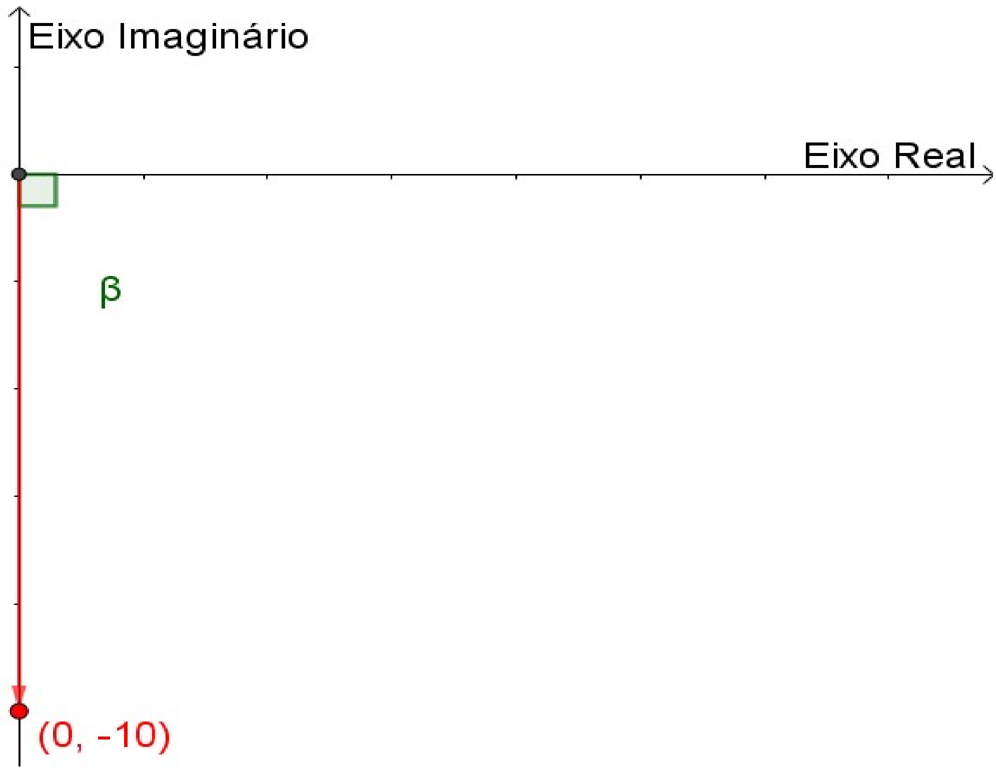
III) - A impedância complexa Z_3 (que se refere ao ramo do circuito onde está o capacitor de 2mF) – significa X_{C2} de reatância capacitiva.

$Z_3 = - j.\, X_{C2}$ e $X_{C2} = \frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{1}{(\omega).C}$, porém sabemos do enunciado que $\omega = 50\ \mathrm{rad/s}$ e $C_2 = 2\mathrm{mF} = 0{,}002\mathrm{F}$, logo:

$Z_3 = -j.1/[(50).(0{,}002)]$

$Z_3 = -j.1/(0{,}1) = -j.10$

Constrói-se o diagrama da impedância Z_3, conforme abaixo:



Analisando o diagrama da impedância Z_3, obtém-se que:

$Z_3 = -j.10$ (forma cartesiana) ou ainda $10\angle -90°$ (forma polar)

V) - Para se calcular o valor da impedância de entrada do circuito, o valor seria o da impedância equivalente da combinação entre Z_1, Z_2 e Z_3.

Pode-se observar que Z_1 e Z_2 são impedâncias referentes aos ramos que se encontram ligados pelos terminais e submetidos a mesma d.d.p, dessa forma, estão associados segundo uma associação em paralelo. Por outro lado, a impedância Z_3, refere-se ao ramo que se encontra ligado em série a combinação dos outros dois, ou seja, Z_3 encontra-se ligado em série com a combinação das impedância Z_1 e Z_2. Logo, o cálculo da impedância equivalente resume-se da seguinte forma:

$$Z_{EQ} = Z_1//Z_2 + Z_3$$

$$Z_{EQ} = Z_{EQ(1e\ 2)} + Z_3$$

$Z_{EQ(1e\ 2)} => \frac{1}{ZEQ(1e\ 2)} = (\frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2})$, logo, $Z_{EQ(1e\ 2)} = \frac{Z1.Z2}{Z1+Z2}$

Para o cálculo da expressão acima se torna mais prático utilizar a forma polar das impedâncias Z_1 e Z_2 no numerador e a forma cartesiana no denominador.

$$Z_{EQ(1e\ 2)} = \frac{(12{,}81\ \angle 51{,}34°)*(3{,}61\ \angle -33{,}69°)}{(8 + j.10)+(3 - j.2)} = \frac{(46{,}24\angle 17{,}65°)}{(11 + j.8)}$$

$Z_{EQ(1e\ 2)} = \frac{(46{,}24\angle 17{,}65°)}{(13{,}60\angle 36{,}03°)} = 3{,}4\ \angle -18{,}38°$ (forma polar), ou ainda,

$Z_{EQ(1e\ 2)} = 3{,}23 - j.1{,}07$ (forma cartesiana)

$$Z_{EQ} = Z_{EQ(1e\ 2)} + Z_3$$

Para o cálculo da expressão acima se torna mais prático utilizar a forma cartesiana das impedâncias.

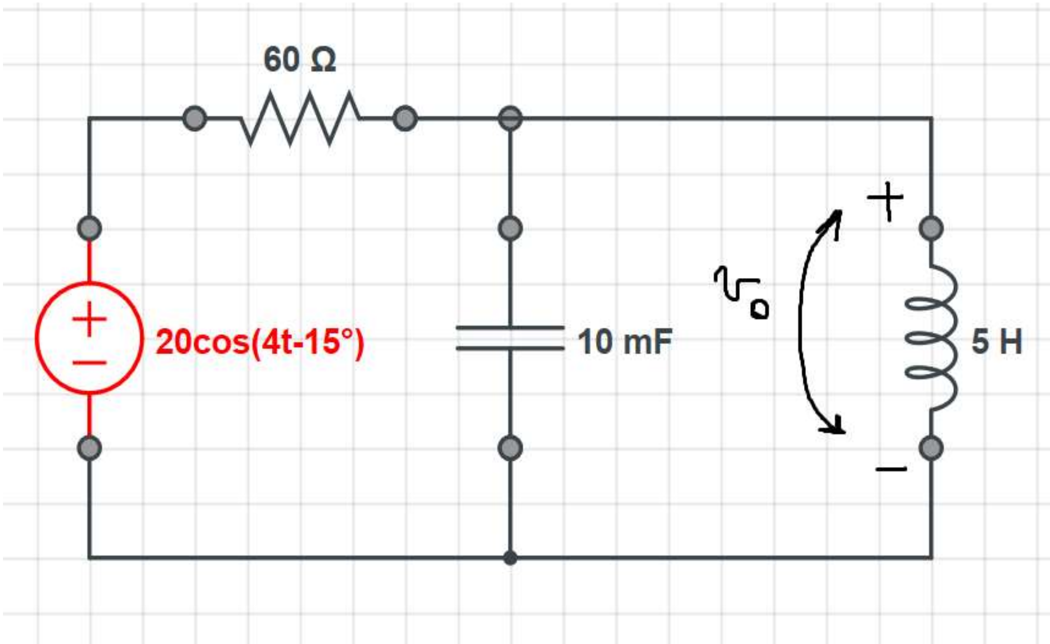
$$Z_{EQ} = 3{,}23 - j.1{,}07 - j.10$$

$Z_{EQ} = 3{,}23 - j.11{,}07$ (forma cartesiana) ou

$Z_{EQ} = 11{,}53\ \angle -73{,}73°$ (forma polar)

Resposta: O valor da impedância de entrada do circuito é $(3{,}23 - j.11{,}07)\Omega$ (forma cartesiana) ou $(11{,}53\ \angle -73{,}73°)\Omega$ (forma polar).

Atividade 2: Determine a impedância equivalente do circuito abaixo. Assim como o valor da tensão v_0.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Resolução:

A partir da observação do esquema do circuito proposto, são obtidas as seguintes informações:

A fonte de tensão que alimenta o circuito opera com:

Tensão $V_f = 20$ V e $\omega = 4$ rad/s e fase inicial $\theta = (-15°)$, logo:

$V_f = 20\angle -15°$ (representação fasorial, na forma polar, da tensão),

ou ainda,

$V_f = 19{,}32 - j.5{,}18$ (representação fasorial, na forma cartesiana, da tensão)

Além da fonte de tensão, existem no circuito o resistor de 60 Ω, o capacitor de 10mF e o indutor de 5H. Considera-se que esses elementos possuem impedâncias Z_1, Z_2 e Z_3, respectivamente.

$Z_1 = 60\ \Omega$

$Z_2 = -j.X_C$, sendo $X_C = \frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{1}{(\omega).C} \Rightarrow Z_2 = -\frac{1}{(4).0{,}01} = -j.25\Omega$

$Z_2 = -j.25\ \Omega$ (forma cartesiana), ou ainda, $25\angle -90°$ (forma polar)

$Z_3 = j.X_L$, sendo $X_L = 2.\pi.f.L = (\omega).L \Rightarrow Z_3 = 4.5 = j.20\ \Omega$

$Z_3 = j.20\ \Omega$ (forma cartesiana), ou ainda, $20 \angle\ 90°$ (forma polar)

Pode-se observar que Z_2 e Z_3 representam as impedâncias de elementos (capacitor e indutor, respectivamente) que se encontram ligados pelos terminais e submetidos a mesma d.d.p, dessa forma, estão associados segundo uma associação em paralelo. Por outro lado, a impedância Z_1, representa a impedância de um elemento (resistência) que se encontra ligada em série com a combinação dos outros dois elementos cujas impedâncias são Z_2 e Z_3. Logo, o cálculo da impedância equivalente resume-se da seguinte forma:

$$Z_{EQ} = Z_1 + Z_2//Z_3$$

$$Z_{EQ} = Z_1 + Z_{EQ(2e3)}$$

$$Z_{EQ} = Z_1 + Z_2//Z_3$$

$$\frac{1}{\text{ZEQ(2e3)}} = (\frac{1}{Z2} + \frac{1}{Z3}),\ \text{logo, } Z_{EQ(2e\,3)} = \frac{Z2.Z3}{Z2+Z3}$$

$$Z_{EQ} = 60 + \frac{(-j.25).(j.20)}{-j.5}$$

$Z_{EQ} = 60 + j.100$ (forma cartesiana), ou ainda, $116{,}62 \angle\ 59{,}04°$ (forma polar)

Resposta 1: O valor da impedância equivalente do circuito é $(60 + j.100)\Omega$ (forma cartesiana) ou $(116{,}62 \angle 59{,}04°)\ \Omega$ (forma polar).

Quanto ao segundo questionamento do exercício proposto, deve-se observar que no circuito existem três correntes elétricas a serem consideradas:

- a que percorre pelo resistor (I_R);
- a que percorre pelo capacitor (I_C); e
- a que percorre pelo indutor (I_L).

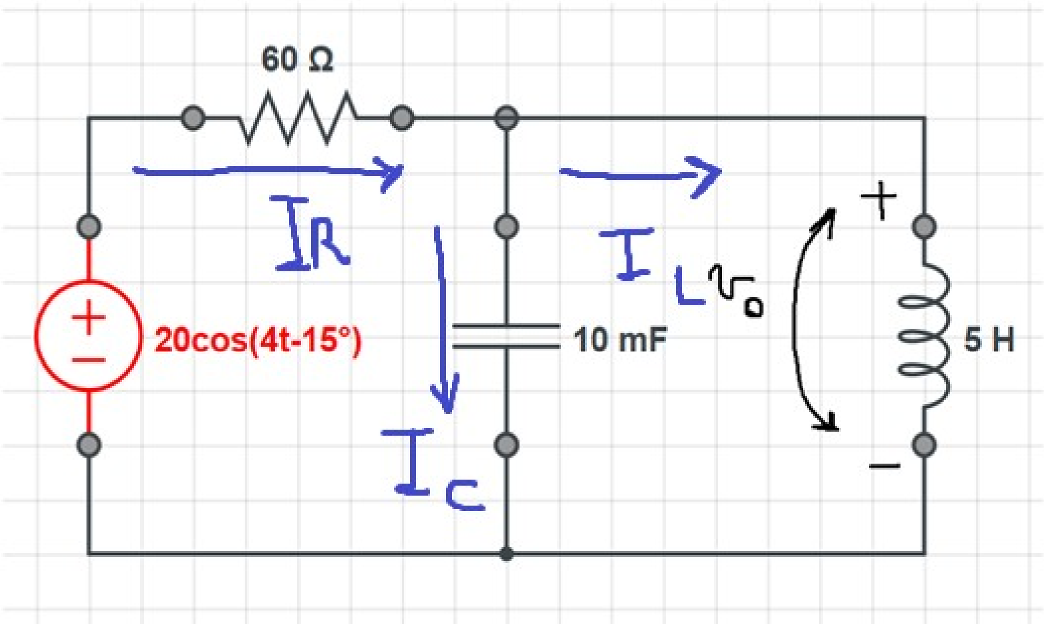
Sabe – se que:

$I_R = I_C + I_L$ (1ª lei de Kirchhoff) (1)

$I_R = \frac{\text{Vf}}{\text{ZEQ}}$ (lei de Ohm) (2)

$V_f - 60.\ I_R - Z_3.I_L = 0$ (2ª lei de Kirchhoff) (3)

$Z_2.I_C - Z_3.I_L = 0$ (2ª lei de Kirchhoff) (4)



Desenvolvendo as equações acima expressas, obtém-se que:

$$I_R = \frac{20\angle -15°}{116{,}62\angle\, 59{,}04°} = 0{,}17\angle -74{,}04° \text{ ou } 0{,}05 - j.0{,}16 \qquad (2)$$

$$(19{,}32 - j.5{,}18) - 60.(0{,}05 - j.0{,}16) - (j.20).I_L = 0 \qquad (3)$$

De (3), tem-se que:

$$I_L = \frac{16{,}32 + j.4{,}42}{j.20}$$

$$\sqrt{(16{,}32)^2 + (4{,}42)^2} = 16{,}91$$

$$\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4{,}42}{16{,}32}\right) = 15{,}15°$$

$$I_L = \frac{16{,}32 + j.4{,}42}{j.20} = \frac{16{,}91\angle 15{,}15°}{20\angle\, 90°} = 0{,}85\angle -74{,}85° \text{ ou } 0{,}22 - j.0{,}82$$

$$I_R = I_C + I_L \qquad (1)$$

De (1), tem-se que:

$0{,}05 - j.0{,}16 = 0{,}22 - j.0{,}82 + I_C$
$I_C = -0{,}17 + j.0{,}66$, ou ainda, $0{,}68\angle\, 104{,}44°$

Para se calcular o valor de v_0, iremos multiplicar o fasor corrente que atravessa o indutor pela impedância Z_3 desse mesmo elemento de circuito.

$v_0 = Z_3 . I_L = (20\angle\, 90°).(0{,}85\angle -74{,}85°) = (17\angle\, 15{,}15°)$V (forma polar), ou ainda, $(16{,}41 + j.4{,}44)$V (forma cartesiana)

Resposta 2: O valor da tensão v_0é $(17\angle\, 15{,}15°)$V ou $(16{,}41 + j.4{,}44)$V

5 Conclusão

Este trabalho procurou demonstrar para os alunos e professores do Ensino Médio, de maneira simplificada, a importância de se estudar o conteúdo que trata da teoria dos Números Complexos. O conteúdo foi apresentado de maneira que pudesse ser compreensível para os alunos do Ensino Médio ressaltando, sempre que possível, a relação com as outras áreas do conhecimento, especialmente, no que se refere à aplicação dos números complexos na teoria de análise de circuitos elétricos.

Observou-se no decorrer desse trabalho que a teoria dos Números Complexos pode ser uma valiosa ferramenta para resolver diversos problemas de variadas áreas de conhecimento, dentre esses, aqueles relacionados à análise de circuitos elétricos, principalmente àqueles que envolvem tensões e correntes alternadas, uma vez que a resolução de problemas envolvendo esses tipos de circuitos seria muita mais trabalhosa se não fossem utilizados os fasores como ferramenta de auxílio.

Outro aspecto importante a ser ressaltado é que se tentou, também, desmistificar o pensamento de que os Números Complexos são utilizados apenas para realizar cálculos com raízes quadradas de números negativos, assim como o fato de eles terem surgido apenas para satisfazer a necessidade dos matemáticos em resolver equações do segundo grau com discriminante delta negativo. Dessa forma, é importante salientar que a análise do histórico do surgimento de uma nova teoria pode ajudar a tornar o conteúdo mais atrativo ao elucidar para os alunos os motivos pelos quais houve a necessidade de desenvolver a nova teoria, da mesma maneira relacionando-a com outros conteúdos, promovendo, dessa forma, a interdisciplinaridade.

Espera-se que maiores estudos sejam realizados a respeito da teoria dos Números Complexos e que esse trabalho seja apenas uma forma de ressaltar a importância de apresentar esse conteúdo aos alunos do Ensino Médio e também de demonstrar as possibilidades de aplicações práticas e significativas. Sugerindo, dessa forma, a manutenção do conteúdo nos currículos escolares.

6
Referências bibliográficas

ARAÚJO, N. B. F. **Números Complexos: uma proposta de mudança metodológicapara uma aprendizagem significativa no Ensino Médio.** 2006. 111f. Dissertação (Mestradoem ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais de Matemática.** 6ª Ed; pp. 151-159. Gradiva-Publicações, LTDA, Lisboa, 1995

BURIAN JR,Y.; LYRA, A.C. **Circuitos Elétricos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

CARMO, M. P; MORGADO, A. C; WAGNER, E. **Trigonometria e NúmerosComplexos**. Notas históricas de João Bosco Pitombeira de Carvalho. Apêndice C, pp.109-113. Graftex, Rio de Janeiro, 1992

CERRI C.; MONTEIRO M. S. **História dos Números Complexos**.CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001

DANTE, L. R.**Matemática: Contexto e Aplicações**. Ensino Médio, v.3; pp. 136-284. São Paulo, Ática, 2010

GUALTER, J.B.; NEWTON, V.B.; RICARDO, H.D. **Tópicos de Física 3.** 15ªed.,São Paulo: Editora: Saraiva, 2001.

JUNIOR, U. P. **AHistória dos Números Complexos "das quantidades sofisticadas deCardano às linhas orientadas de Argand".** 2009. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino deMatemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
LORENZATO. S.; VILA, M. do C. **Século XXI: qual matemática é recomendável?** Revista Zetetiké. Campinas, ano 1, n. 1, pp. 41-49, 1993.

HAYT, W.H.; KEMMERLY, J.E. **Análise de circuitos em engenharia.** 7ªed.,Upper Saddle River, NJ: McGraw-Hill, 2008.

LAGES, E.L. **A equação do terceiro Grau**. Revista de Artigos de Matemática Universitária. Nº. 5, pp. 9-23. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro,1987.

MILIES, C. P. **A Emergência dos Números Complexos**. Revista do Professor de Matemática (RPM). Nº. 24, pp. 5-15. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo,1993

___ **A solução de Tartaglia para a equação de 3º grau.** Revista do Professor de Matemática. Nº 25. Revista online. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo,1994.

MUSSOI, F.L.R. **Sinais Senoidais: Tensão e Corrente alternadas**. Apostila do Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina.3ª.ed. CEFET-SC, Florianópolis, 2006.

NILSSON J.W.; RIEDEL, S.A. **Circuitos Elétricos**. 8ªed.,São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

RÊGO, A.K.; CARDOSO, C.L. **Eletricidade em CA.** Caderno elaborado em parceria entre o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus Ouro Preto e a Universidade Federal de Santa Maria para a Rede e-Tec Brasil, Ouro preto, 2015.

SAAVEDRA FILHO, N.C. **Física Aplicada – Eletricidade Básica**. Curso de formação de operadores de refinaria. Curitiba: PETROBRAS, 2002.

SADIKU, M.N.O; ALEXANDER, C.K. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 4ª. ed. São Paulo: Editora LTC, 2004.

SERVIÇO NACIONAL DE APRENDIZAGEM INDUSTRIAL - SENAI. **Eletrônica - Análise de Circuitos Elétricos**. São Paulo, 2000.

YEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar: vol6**. 6ª. ed. pp 51-53 e pp 99-110, São Paulo: Editora Atual, 1998