

## 2 Superfícies

Este capítulo trata das superfícies. A definição matemática de superfícies possibilitará conhecer melhor a conceituação de *malhas* e *volumes*, que são os *objetos gráficos* alvo do método apresentado nesta tese, bem como fazer um estudo de como estes objetos estão relacionados. As superfícies podem ser informalmente definidas como subconjuntos do  $\mathbb{R}^3$  que podem ser descritos localmente por dois parâmetros independentes. O plano é a superfície mais simples de todas. Um bom modo de se construir superfícies é através da colagem de variados pedaços de papel (partes de superfícies planas). A elaboração matemática desta idéia é usada para a definição de uma superfície regular [4, 2, 39].

É importante ressaltar que os resultados aqui apresentados, decorrentes da definição de superfícies, serão tratados sem rigor matemático, visando levar o leitor a ter uma boa intuição dos elementos necessários ao desenvolvimento do método aqui apresentado. As demonstrações matemáticas dos resultados podem ser encontradas nas referências citadas ao longo do texto.

### 2.1 Superfícies Regulares

Um subconjunto  $S \in \mathbb{R}^3$  é uma *superfície regular* se, para cada  $p \in S$ , existirem uma vizinhança aberta  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  de  $p$ , um conjunto aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , e uma bijeção  $\phi : U \rightarrow V \cap S$  com as seguintes propriedades [39]:

1.  $\phi$  é de classe  $C^\infty$ ;
2.  $\phi$  é um homeomorfismo (ou seja, sua inversa  $\phi^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  é contínua);
3. para qualquer  $q \in U$  a matriz jacobiana  $J\phi(q)$  tem posto dois.

Diz-se que uma aplicação  $\phi$  com as propriedades acima é chamada de *parametrização ou sistema (local) de coordenadas* de  $S$ . Os pontos de  $U$  são habitualmente denotados por  $(u, v)$ , de modo que  $u$  e  $v$  são *parâmetros locais* de  $S$ , e as derivadas parciais de  $\phi$  se denotam por  $\phi_u$  e  $\phi_v$ . Estes vetores representam as velocidades das *curvas coordenadas*, que são as curvas obtidas fixando um dos parâmetros e fazendo variar o outro. A propriedade 3 acima indica que os vetores  $\phi_u$  e  $\phi_v$ , que são precisamente as colunas da matriz  $J\phi(q)$ , são linearmente independentes. A propriedade 2 é importante, por exemplo, para mudança de sistema de coordenadas. Por simplicação, a parametrização de  $S$  a partir de  $\phi$  será denotada por  $(U, \phi)$

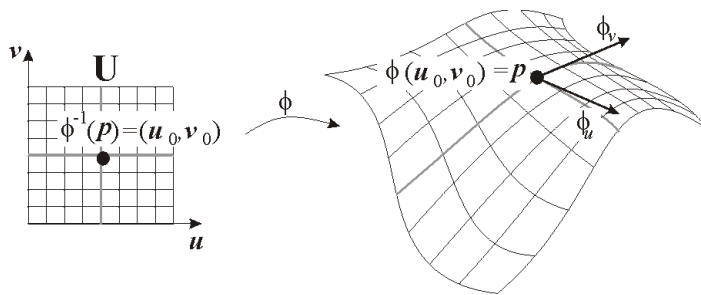


Figura 2.1: Parametrização local a uma superfície.

## 2.2 Cobertura de Discos em uma Superfície Regular

A definição de superfícies acima permite que seja introduzido o conceito de *cobertura de discos* sobre uma superfície, que será uma importante ferramenta utilizada pelo método apresentado nesta tese (seção 5.2).

### Disco sobre a Superfície $S$

Um subconjunto da superfície regular  $S$  será chamado de aberto se for da forma  $V \cap S$ , onde  $V$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ .

### Proposição 1.

*Dado um ponto qualquer  $p \in S$ , existe uma vizinhança aberta em  $p$  que é homeomorfa a um disco planar.*

**Demonstração.**

Como  $S$  é uma superfície regular, existe uma parametrização  $(U, \phi)$  na vizinhança de  $p$  com as propriedades descritas na seção anterior. Definindo  $D \subset U$  como um disco aberto, com raio arbitrariamente pequeno e contendo  $\phi^{-1}(p)$ , o conjunto  $\phi(D) \ni p$  é então a vizinhança procurada (figura 2.2a)■.

Considerando que o ponto  $(u_c, v_c)$  seja o centro do disco  $D \subset U$  e  $\phi(u_c, v_c) = q$ , o conjunto  $\phi(D)$  será chamado de disco  $\mathcal{D}_q$  sobre a superfície  $S$  e  $q$  será o centro do disco.

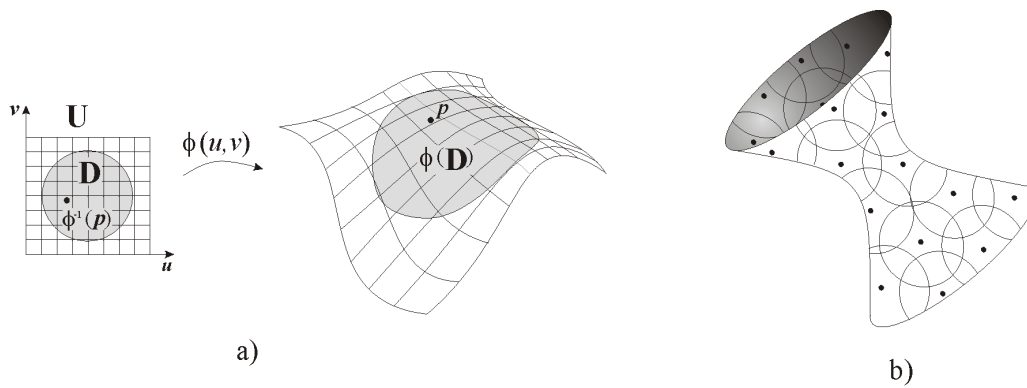


Figura 2.2: (a)Definição de um disco sobre a superfície.(b) Cobertura de discos.

**Cobertura de Discos em  $S$**

Diz-se que há uma cobertura de discos  $\mathcal{C}_S$  associada a uma superfície regular  $S$  se, para todo ponto  $p \in S$ , for possível definir um disco  $\mathcal{D}_q$  sobre  $S$  que contenha  $p$ . Neste caso  $\mathcal{C}_S = \{\mathcal{D}_q, q \in S\}$ .

**Proposição 2.**

*Se  $S$  é uma superfície regular, então existe uma cobertura de discos  $\mathcal{C}_S$  associada a  $S$ .*

**Demonstração.**

Ora, como  $S$  é uma superfície regular, pela proposição 1,  $\forall p \in S$ , existe um disco  $\mathcal{D}_q$  que contém  $p$ , logo existe uma cobertura de discos  $\mathcal{C}_S$  associada a  $S$  (figura 2.2b)■.

## 2.3 Descrição das Superfícies

Há basicamente duas formas de se descrever uma superfície: *descrição paramétrica* e *descrição implícita*.

### 2.3.1 Descrição Paramétrica

Diz-se que uma superfície está descrita parametricamente a partir dos parâmetros  $u$  e  $v$ , quando existe uma aplicação  $\phi$  com as propriedades 1, 2 e 3, mostradas na seção 2.1, ou seja, a descrição paramétrica decorre da própria definição de superfície.

Um importante resultado técnico desta definição é a mudança de parâmetros em uma superfície  $S$ , quando esta está descrita por duas parametrizações  $(U, \phi)$  e  $(\tilde{U}, \psi)$ , de modo que o conjunto aberto  $W = \phi(U) \cap \psi(\tilde{U})$  seja não vazio. Ou seja, dado um ponto  $p \in S$ , de modo que  $p = \phi(u, v)$ ,  $(u, v) \in U$ , encontrar os parâmetros  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$ , de modo que  $p = \psi(\tilde{u}, \tilde{v})$ . A mudança de coordenadas pode ser definida como  $f = \phi^{-1} \circ \psi = \psi^{-1}(W) \rightarrow \phi^{-1}(W)$ , como mostra a figura 2.3. Um importante resultado da mudança de coordenadas é que  $f$  é um *difeomorfismo*, ou seja,  $f$  e  $f^{-1}$  são diferenciáveis. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2, 39].

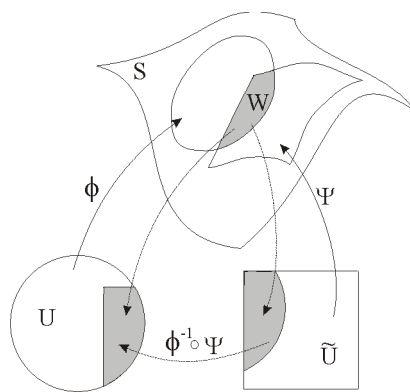


Figura 2.3: Mudança de parâmetros.

### 2.3.2 Descrição Implícita e Superfícies de Nível

Será discutido agora um outro resultado da definição de uma superfície  $S$ , que é colocado como um importante teorema em [13].

*Toda superfície de classe  $C^k$  é localmente o gráfico de uma aplicação de classe  $C^k$  [13, 2, 39].*

De forma mais direta, o enunciado acima significa que em uma vizinhança de um ponto  $p = (x, y, z) \in S$ , uma de suas coordenadas pode ser definida como função das outras duas. Sem perda de generalidade:  $z = h(x, y)$ .

Para melhor entender esta afirmação, seja  $(U, \phi)$  uma parametrização em uma vizinhança de  $p = \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  (figura 2.4a). Seja a função  $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , cuja jacobiana  $Jf(u, v)$  possui determinante não nulo em  $(u, v)$ . Pelo *teorema da aplicação inversa* [13], existe uma vizinhança aberta  $D \subseteq U$  de  $\phi^{-1}(p) = (u, v)$  na qual a função  $f$  é invertível e  $f^{-1}$  é diferenciável em  $D$ , ou seja, há um difeomorfismo [4, 39] (figura 2.4b). Pode-se ver que  $\phi(D) = W$  é uma vizinhança de  $p$ . O conjunto  $f(D) = T$  é um aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Como  $(u, v) = f^{-1}(x, y)$ ,  $z(u, v) = z \circ f^{-1}(x, y) = h(x, y)$  é diferenciável. A vizinhança  $W$  é um conjunto definido como  $W = \phi \circ f^{-1}(T)$ , ou seja,  $W = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in T\}$ . O resultado acima mostra que, na vizinhança  $W$ , a superfície  $S$  é o gráfico da função  $h$ . O conjunto  $T$  é a projeção de  $W$  em  $\mathbb{R}^2$ . Uma demonstração matemática rigorosa deste resultado pode ser encontrada em [4, 39, 13].

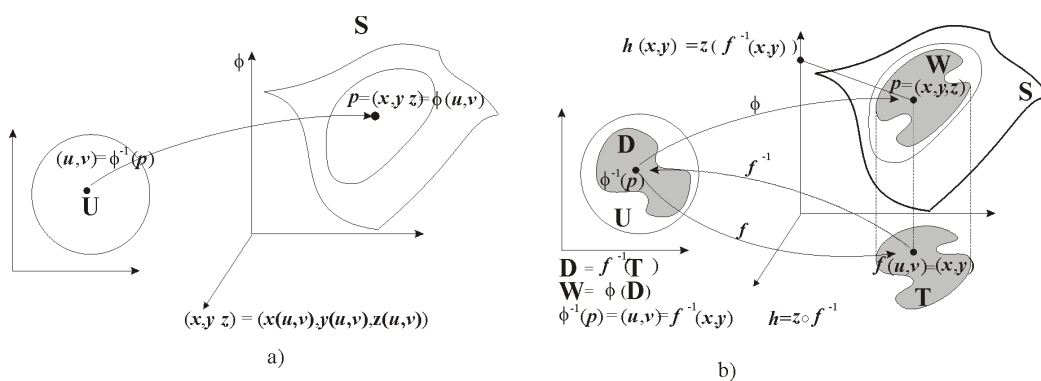


Figura 2.4: a) Parametrização. b) A superfície é localmente o gráfico da aplicação  $h$ .

Uma consequência do resultado anterior é que *toda superfície é localmente a imagem inversa de uma aplicação*. Uma forma bem simples

de ver isto é considerando a aplicação  $g : T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $T$  é o conjunto definido acima (figura 2.4) e  $g$  é definida como  $g(x, y, z) = z - h(x, y)$ . Neste caso  $W = g^{-1}(0)$ , ou seja a superfície é localmente definida como a curva de nível zero da aplicação  $g$ .

Apesar de a demonstração anterior mostrar um caso particular, onde a superfície foi definida localmente como a curva de nível zero de uma aplicação, uma maneira mais genérica de definir superfícies é através de uma equação  $g(x, y, z) = a$ , onde  $g : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. Na realidade esta definição de superfície regular considera que  $a$  seja um *valor regular*, ou seja, o gradiente em qualquer ponto  $p$ , onde  $g^{-1}(a) = p$ , é um vetor não nulo. Diz-se que a superfície  $S$  definida como  $S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = a\}$  (ou seja,  $S = g^{-1}(a)$ ) está *descrita implicitamente*. Os conjuntos  $g^{-1}(\{a\})$  são chamados *conjuntos de nível* de  $g$  e, quando  $a$  é um valor regular (como é o caso das superfícies regulares), também são chamados *superfícies de nível* ou *iso-superfícies*.

## 2.4

### Representação de Superfícies

Nas áreas de matemática aplicada que envolvem o uso de métodos computacionais é necessário o uso de uma metodologia, como o *paradigma dos 4 universos* [28], para estudar os problemas inerentes à área. As superfícies são entidades que fazem parte de um conjunto amplo formado pelos *objetos gráficos*[24]. Tais objetos são definidos a partir do paradigma dos quatro universos, como se segue abaixo.

Um objeto é inicialmente definido por um modelo matemático (contínuo). A partir deste modelo contínuo é definido um modelo finito que possibilite implementar tal objeto gráfico no computador. A definição do modelo finito (discreto) a partir de um modelo matemático é chamado de *representação* do objeto gráfico. Assim, representar um objeto significa escolher, de alguma maneira, o "melhor" conjunto finito de informações (ou amostras), a partir de conjuntos infinitos, que irá representar aquele objeto. "Melhor" aqui soa um tanto abstrato e depende de uma série de critérios e das aplicações que envolvem os objetos.

No caso das superfícies, matematicamente definidas na seção 2.1, sua representação consiste em selecionar um conjunto  $U$  de pontos tridimensionais situados sobre ou próximos à superfície, além de informações de como estes pontos estão estruturados espacialmente, ou seja, é necessário que o conjunto  $U$  contenha tanto informações geométricas quanto

informações topológicas da superfície. O conjunto  $U$  é chamado de *suporte geométrico* da superfície. A cada ponto  $p \in U$  podem ser associados valores  $F(p)$  que podem corresponder a informações de cor, campos escalares, campos vetoriais e outros, definidos sobre o ponto  $p$  da superfície. Estes valores fazem parte do conjunto de *atributos*  $V$  da superfície e a função  $F : U \rightarrow V$  é a *função de atributos*.

As descrições paramétrica e implícita das superfícies podem resultar em formas diferentes de representação. A descrição paramétrica resulta, de forma natural, nas *malhas* (seção 2.5), enquanto a descrição implícita resulta naturalmente nos *objetos volumétricos* ou *volumes* (seção 2.6) como forma de representação das superfícies. É importante ressaltar que a associação entre descrição paramétrica e malhas e a associação entre descrição implícita e volumes não é uma regra, nem muito menos obrigatória. É apenas a forma mais natural de se ter uma representação a partir de uma descrição.

A operação inversa da representação é a *reconstrução* de objetos. O objetivo da reconstrução é encontrar um modelo contínuo do objeto, a partir de seu modelo discreto. Computacionalmente, encontrar um modelo contínuo a partir das amostras significa poder obter qualquer ponto do objeto, dentro de uma certa tolerância de erro, que pode estar ligada a diversos fatores. Uma boa reconstrução depende, antes de tudo, de uma boa representação do objeto. Assim, se a representação não foi feita dentro de certos critérios, ter uma boa reconstrução do objeto pode se tornar uma tarefa difícil ou até mesmo impossível. A extração de uma malha a partir de um volume (capítulo 3) é um exemplo de reconstrução, onde o objeto (a malha) foi reconstruído a partir de um conjunto discreto (o volume). É importante observar que, apesar de ser reconstruída do volume, a malha também é um objeto discreto, que representa a superfície.

## Representação em Multi-resolução

Representar uma superfície em multi-resolução significa se ter controle sobre a relação entre a quantidade de amostras que representa a superfície e o espaço geométrico no qual ele se encontra. Com isto, é possível organizar os dados em diversos níveis de resolução. Cada nível corresponde a um determinado conjunto de amostras hierarquicamente estruturadas.

A representação em multi-resolução permite manter o controle sobre a geometria e a topologia da superfície, possibilitando assim que se tenha um melhor aproveitamento dos recursos computacionais utilizados durante

o seu processamento. Esta é, aliás, uma das principais motivações para se representar os objetos em multi-resolução.

Por exemplo, para se ter a **visualização** eficiente de um objeto, usa-se um conjunto de amostras com a menor resolução possível, o suficiente para que a imagem gerada possa manter uma boa qualidade na representação do objeto. Assim, quando o objeto é visualizado de perto, seria necessária uma resolução maior do que quando o mesmo é visualizado de longe. Ou ainda, as partes do objeto visíveis na imagem teriam uma resolução maior em relação às partes não visíveis.

Um outro exemplo importante do uso da representação em multi-resolução se aplica à **transmissão** progressiva de dados através de uma rede. Neste caso, a representação em multi-resolução se mostra bastante adequada. Inicialmente podem ser enviadas as informações relativas ao objeto inicial (informações "grosseiras" ou de baixa resolução), enquanto os detalhes seriam enviados posteriormente, de forma progressiva.

A representação em multi-resolução pode facilitar também o processo de **compressão** de superfícies. Para cada nível de resolução, informações de conectividade e parametrizações podem ser inferidos a partir de níveis anteriores.

## 2.5

### Representação por Bordo: Malhas

A descrição paramétrica das superfícies resulta, de forma natural, em objetos conhecidos como *malhas poligonais*. Esta representação é também conhecida como *representação por bordo*.

Uma malha é definida como um *complexo*  $M = (V, A, F)$ , onde  $V$ ,  $A$  e  $F$  são respectivamente conjuntos de vértices  $v_i \in V$ , arestas  $(v_i, v_j) \in A$ , e faces  $(v_i, v_j, \dots, v_k) \in F$ . O complexo  $M$  fornece toda estrutura topológica para a malha de modo que ela possa ser decomposta em um domínio bidimensional. As informações geométricas da malha são definidas através da associação de coordenadas  $p(v_i) \in \mathbb{R}^3$  a cada vértice  $v_i$  da malha. Na realidade, se  $p(v_i) \in \mathbb{R}^2$ ,  $M$  é uma malha planar, e se  $p(v_i) \in \mathbb{R}^3$  trata-se de uma superfície 3D, que é o objeto alvo deste trabalho.

O conjunto  $M$  na realidade é uma representação do suporte geométrico  $U \subset \mathbb{R}^3$  da superfície. Além disto, aos elementos de  $U$  podem ser associados atributos como cor, textura, campos de vetores, campos escalares e etc. Existe uma série de conceitos importante ligados à definição de malhas, alguns dos quais serão discutidos nos próximos parágrafos.



A *valência* de um vértice  $v$  é definida como sendo a quantidade de arestas incidentes em  $v$ .

Uma malha é classificada como *homogênea* quando todas as suas faces são polígonos com  $n$  lados ( $n$  constante). As mais comuns são as *malhas triangulares* ( $n = 3$ ) e as *malhas quadrilaterais* ( $n = 4$ ). Uma observação importante é que sempre é possível triangular uma face com  $n$  lados e, portanto, em muitas aplicações, é suficiente considerar apenas as malhas triangulares. Uma malha homogênea formada por polígonos regulares, ou seja, todas as arestas possuem o mesmo comprimento, é chamada de *malhas uniforme*.

Uma *malha regular* é aquela na qual todos os vértices possuem mesma valência. Por outro lado, se os vértices possuem valência variada a malha é chamada de *irregular*. É fácil verificar que toda malha uniforme é também regular. Existem ainda as malhas *semi-regulares*, que são bastante utilizadas. Em tais malhas, à exceção de alguns vértices isolados, todos os demais possuem a mesma valência. É muito comum a obtenção de malha semi-regulares a partir de malhas irregulares.

Uma propriedade geométrica importante é *razão de aspecto* dos polígonos da malha, que indica quão próxima uma face está de um polígono regular. Vale lembrar que existem várias maneiras de se definir o cálculo da razão de aspecto, por exemplo a relação entre o lado menor e o lado maior do triângulo ou a relação entre os ângulos menor e maior.

Maiores informações sobre conceitos e aplicações relacionados a malhas podem ser encontradas em [48].

## Malhas em Multi-resolução

A representação por bordo de uma superfície em multi-resolução é definida como um conjunto de malhas  $\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ , de modo que, para  $i > j$ , a quantidade de faces da malha  $M_i$  é maior ou igual à quantidade de faces da malha  $M_j$ . Além disso, há uma relação de dependência entre as malhas de dois níveis consecutivos  $M_i$  e  $M_{i+1}$ . Com base nestas dependências é possível construir uma estrutura hierárquica que define as diferenças entre as malhas da sequência.

Uma hierarquia de malhas é normalmente construída através de modificações locais feitas em uma malha inicial. Estas modificações locais são operações que podem ser classificadas como *refinamento* ou *simplificação* da malha. O refinamento ocorre quando, a partir de uma malha grosseira inicial, chamada *malha base*, são obtidas malhas em maior resolução. A

simplificação ocorre quando são obtidas malhas de menor resolução a partir de uma malha de maior resolução (figura 2.5). Uma conceituação sobre estruturas hierárquicas de malhas pode ser encontrada em [48, 40].

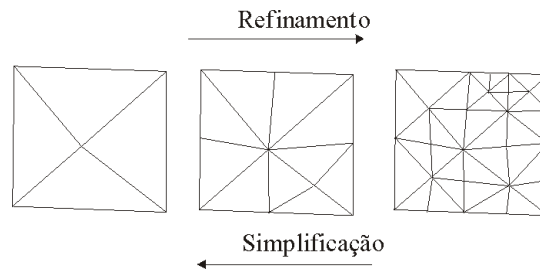


Figura 2.5: Malha em multi-resolução.

## 2.6 Representação Volumétrica

Um objeto volumétrico pode ser utilizado para representar superfícies descritas implicitamente. Esta representação é feita por um conjunto de pontos  $\{(i, j, k)\}$  que normalmente define uma grade regular tridimensional  $U$ . Os pontos da grade estão regularmente espaçados com intervalos  $\Delta x, \Delta y$  e  $\Delta z$ , em cada direção. Na realidade, a grade regular  $U$  é o suporte geométrico do objeto. As coordenadas de um ponto  $(i, j, k)$  são definidas como  $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ . Em cada ponto  $(i, j, k)$  são definidos valores  $F(i, j, k)$ , onde  $F$  é a função de atributos. Um dos atributos mais importantes dos objetos volumétricos é um valor  $D(i, j, k)$ , comumente chamado de *densidade* do ponto  $(i, j, k)$ . Este nome vem do fato de objetos volumétricos serem amplamente utilizados na área médica para representar informações resultantes de exames como tomografias computadorizadas e ressonância magnética, onde o valor armazenado para cada ponto  $(i, j, k)$  representa a densidade dos tecidos. Além da densidade, outros atributos importantes são: opacidade, cor, textura, campos vetoriais (gradiente), entre outros.

Os elementos (amostras) da grade  $U$  são comumente chamados de *voxels*. Existem várias maneiras de se representar um voxel. Aqui, um voxel  $(i, j, k)$ , também denotado por  $V_{ijk}$ , é definido como um bloco formado pelos pontos (ou vértices)  $v_0 = (i, j, k)$  e por seus 7 vizinhos  $v_1 = (i + 1, j, k)$ ,  $v_2 = (i + 1, j + 1, k)$ ,  $v_3 = (i, j + 1, k)$ ,  $v_4 = (i, j, k + 1)$ ,  $v_5 = (i + 1, j, k + 1)$ ,  $v_6 = (i + 1, j + 1, k + 1)$  e  $v_7 = (i, j + 1, k + 1)$ . A figura 2.6b mostra, em detalhe, o voxel destacada na figura 2.6a.

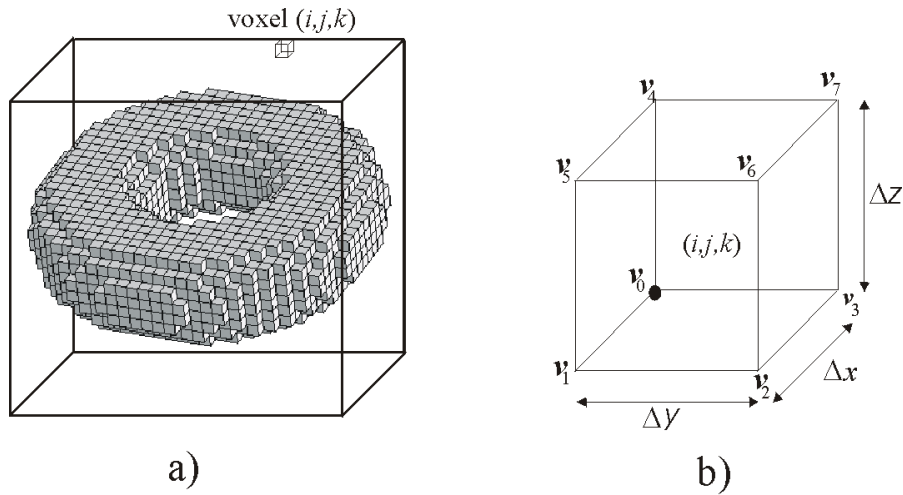


Figura 2.6: (a) Objeto volumétrico (toro). (b) Voxel  $(i, j, k)$ .

Na representação volumétrica uma superfície  $S$ , descrita implicitamente por um valor de densidade  $D = d$ , intercepta um voxel  $V_{ijk}$  se  $D(v_m) \leq d < D(v_n)$ , onde  $v_m$  e  $v_n$  são dois vértices quaisquer do voxel  $V_{ijk}$ . É importante observar que a superfície  $S$  está implicitamente representada dentro do dado volumétrico, como uma superfície de nível. A figura 2.6a mostra um objeto volumétrico, destacando os voxels que interceptam uma superfície. É muito comum denotar os objetos volumétricos como *objetos implícitos*. Maiores informações sobre objetos implícitos podem ser encontradas em [18].

### Representação Volumétrica em Multi-resolução

Normalmente objetos volumétricos possuem um grande número de voxels, o que em geral, excede a capacidade de muitas estações gráficas, tanto em termos de memória quanto em processamento. De modo a otimizar (e até viabilizar) as aplicações, vários métodos para aproximar o volume original em um modelo em multi-resolução têm sido propostos. Um modelo clássico é o *octree*, utilizado em vários trabalhos [15, 19]. Outros algoritmos geram uma hierarquia através de uma *tetraedralização* do volume, ou seja, os voxels originais são hierarquicamente subdivididos em tetraedros [25, 36].